Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-56/9 (6. 5. 56)

C. Bernardini: CONSIDERAZIONI SUI PROBLEMI NON LINEARI E SULLA LORO SOLUZIONE MEDIANTE UNA MACCHINA CALCOLATRICE.

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Sezione Acceleratore

Relazione n°: T 27
6 Maggio 1956.

C. Bernardini: CONSIDERAZIONI SUI PROBLEMI NON LINEARI E SULLA LORO SOLUZIONE MEDIANTE UNA MACCHINA CALCOLATRICE.—

Esaminiamo le equazioni differenziali del tipo

$$x'' + \omega^2 x = \omega^2 f(x,\theta) \tag{1}$$

in cui f è una funzione nota, periodica in θ:

$$f(x, \theta + 2\pi) = f(x,\theta)$$

Equazioni di questo tipo si pensa che possano descrivere il moto delle particelle, in un sincrotrone, nel piano mediano $z = 0$.- Per semplicità, omettiamo la considerazione dei tratti dritti che verranno introdotti in un secondo momento.

Supporremo che la funzione $f(x,\theta)$ sia definita tramite un certo numero di parametri (p.es. i coeff. di Fourier di uno sviluppo in θ e quelli di uno sviluppo di potenza in x).-

Il problema è quello di stabilire in quali casi è possibile ottenere informazioni complete eseguendo integrazioni della (1) nel solo intervallo $0 \leq \theta \leq 2\pi$; di segnalare cioè quei valori dei parametri che definiscono f che possono condurre a soluzioni divergenti. Questo problema può essere diviso in due parti:

1) studio della soluzione periodica (orbita chiusa) con periodo 2π;
2) studio della stabilità delle soluzioni prossime alla periodica.

Escludiamo dall'analisi i casi conservativi (f funzione della sola x) per i quali è immediatamente possibile la riduzione alle quadrature; più in generale possiamo escludere tutti quei casi in cui

$$f(0,\theta) = 0 \quad \text{per ogni } \theta$$

per i quali la soluzione banale $x = 0$ è un'orbita chiusa e resta il solo problema 2).-

Possiamo subito considerare il problema della stabilità: supponiamo di avere trovato un'orbita chiusa $x_p(\theta)$ tale che

$$x_p(\theta + 2\pi) = x_p(\theta)$$

Le soluzioni $x_p + \delta x$ prossime ad essa soddisfano all'equazione

$$\delta x'' + \omega^2 \delta x = \omega^2 \left[\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial x}\right]_{x=x_p} \delta x$$

lineare a coefficiente periodico (con periodo 2π); la conoscenza di questo coefficiente:

$$\omega^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_p} \right\}$$

nell'intervallo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ basta a definire completamente la stabilità o instabilità delle soluzioni δx.-

E' chiaro che il problema 2) è così rinviato alla conoscenza dell'orbita chiusa in ogni punto dell'intervallo $0, 2\pi$.-

Ritornando al problema 1), ci interessa accertare l'esistenza di un'orbita chiusa (il che consentirà di ricavarla integrando l'equazione, mediante la calcolatrice, nell'intervallo $0, 2\pi$). Possiamo studiare, per questo, il problema della ricerca del massimo della soluzione periodica e stabilire in quali condizioni esiste un massimo finito. Troveremo una condizione sufficiente che ci dirà quando questo massimo esiste certamente; essa non sarà però necessaria e potrà servire solo a segnalare i casi per i quali si può sospettare una divergenza (il che agisce nel senso della sicurezza).-

---o---

L'equazione (1) si può mettere in forma integrale, includendo le condizioni iniziali. Introduciamo la variabile complessa

$$z = x + i\frac{x'}{\omega}$$

La (1) diviene

$$z(\theta) = z_0 e^{-i\omega\theta} + i\omega e^{-i\omega\theta}\int_0^{\theta} e^{-i\omega\theta'} f[x(\theta'), \theta'] d\theta'$$

L'orbita chiusa è definita da

$$z(2\pi) = Z_0 = z(0)$$

In particolare, supponiamo di poter scegliere l'origine delle θ in corrispondenza del massimo (x_0) dell'orbita chiusa

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sin \pi\omega} \int_0^{2\pi} \cos \omega(\theta+\pi) f(x_p, \theta)\, d\theta \qquad (2)$$

$$x_0' = 0$$

Supponiamo $f(x,\theta)$ assegnata nella forma

$$f(x,\theta) = \gamma_0(\theta) + \gamma_1(\theta)\psi_1(x) + \dots$$

dove le $\psi_r(x)$ sono funzioni monotone di x:

$$\psi_r(x) \leq |\psi_r(x_0)| \qquad \text{per} \quad x \leq x_0$$

e

$$\gamma_r(\theta) \leq \Gamma_r$$

Allora

$$f(x,\theta) < \Gamma_0 + \Gamma_1 |\psi_1(x_0)| + \dots \qquad \text{per} \quad x \quad x_0$$

Dalla (2), maggiorando l'integrale, segue che

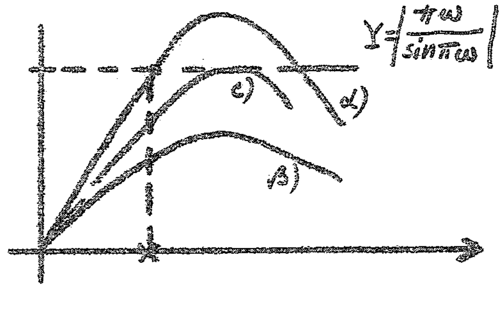
$$x_0 < \left|\frac{\pi\omega}{\sin \pi\omega}\right| \left(\Gamma_0 + \Gamma_1 |\psi_1(x_0)| + \dots \right)$$

Avendo esclusi i casi conservativi, $\Gamma_0 \neq 0$

Posiamo

$$Y(x_0) = \frac{x_0}{\Gamma_0 + \Gamma_1 |\psi_1(x_0)| + \dots}$$

Si vede subito che Y è definita dalla conoscenza dettagliata delle $\psi_r(x)$ e dalla sola escursione massima della funzioni γ_r (cioè da Γ_r).



In un grafico Y versus x_0 possiamo riportare la funzione Y e la retta orizzontale

$$Y_1 = \left|\frac{\pi\omega}{\sin \pi\omega}\right|$$

Si possono presentare due casi:

α) Y taglia la retta Y_1 nel qual caso esiste un massimo valore finito di x_o.-

β) Y è tutta sotto la retta Y_1, nel qual caso tutti i valori di x_o sono permessi.-

La curva c) di separazione tra i due casi definirà dei valori critici dei parametri che compaiono in $f(x,\theta)$.- Per quei valori di essi per i quali si cade nel caso β) si ha il sospetto che non possa esistere una orbita chiusa convergente e questa indicazione può servire a definire (con un margine di sicurezza) andamenti pericolosi del campo magnetico.

Esempio

$$f(x,\theta) = A\cos\theta + \varepsilon x^2 \qquad \text{con} \quad A, \varepsilon > 0$$

La funzione $Y(x_o)$ è

$$Y(x_o) = \frac{x_o}{A + \varepsilon x_o^2}$$

Si è nella situazione "buona") quando

$$\varepsilon A < \frac{\sin^2 \pi\omega}{(\pi\omega)^2}$$

La f sopra data descrive una variazione lineare di n (indice del campo) più un termine di forzamento di prima armonica. Se $n_o \pm \Delta n$ è il valore di n ai bordi $x = \pm \frac{a}{2}$,

$$\varepsilon = \frac{2\Delta n}{a\,\omega^2}$$

Per la oscillazioni radiali $\omega^2 = 1 - n_o$

Per una oscillazione del campo verticale B di ampiezza B

$$|A| = \frac{R}{\omega^2}\,\frac{\Delta B}{B}$$

e quindi nella situazione α) dev'essere

$$\Delta n\,\frac{\Delta B}{B} < (1-n_o)\,\frac{\sin^2 \pi\sqrt{1-n_o}}{\pi^2}\,\frac{a}{2R}$$

per $a = 18$ cm, $R = 360$ cm, $n_o = 0{,}6$ si ha

$$\Delta n\,\frac{\Delta B}{B} \lesssim \frac{1}{1000}$$