

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/48 (1955)

C. Bernardini: SULLA STABILITA' DELLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO DI UN FILO, PERCORSO DA CORRENTE, IN CAMPO MAGNETICO.

Estratto da: Lincei 19, 297 (1955)

**Fisica.** — *Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di un filo, percorso da corrente, in campo magnetico.* Nota di CARLO BERNARDINI, presentata (\*) dal Socio E. PERSICO.

1. Già da qualche anno è stata presa in considerazione la possibilità di studiare le traiettorie di particelle cariche in un campo magnetico usando un filo conduttore opportunamente teso, percorso da corrente ed immerso nello stesso campo (1). Le principali difficoltà pratiche che si incontrano con questo metodo (noto, nella letteratura di lingua inglese, con il nome di *floating-wire method*) consistono nello stabilire l'entità delle correzioni dovute al peso del filo stesso, alla sua rigidità ed al campo da esso generato (2); quando i termini corrispondenti a questi due effetti sono trascurabili rispetto a quello che contiene il campo esterno, allora l'analogia tra l'equazione della traiettoria delle particelle e quella delle configurazioni d'equilibrio del filo è completa. Supporrò in seguito di essere proprio in queste condizioni, tanto meglio realizzabili quanto maggiore è l'intensità dei campi presi in considerazione.

Si incontrano, però, con questo metodo, dei casi di instabilità delle configurazioni del filo; il presente lavoro è dedicato alla ricerca ed interpretazione di essi.

L'esistenza di questi casi è facilmente intuibile; infatti, se il campo ha proprietà focalizzanti, un fascetto sottile di particelle uscenti da una sorgente puntiforme S formerà la prima immagine astigmatica di S in un certo punto I. Si intuisce ora che, quando gli estremi fissi del filo sono in S ed I, così come vi sono infinite traiettorie adiacenti che passano per quei due punti, vi possono essere infinite configurazioni di equilibrio.

Mostrerò che, se esistono di tali punti I e se uno di essi cade tra i punti fissi S e Q del filo, allora l'equilibrio delle configurazioni di esso è instabile.

(\*) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) J. LOEB, « Comptes Rendus », 222, 488 (1946); L. CRANBERG, *U. S. Atomic Energy Commission*, AECU 1670; ved. anche SYMONDS, « Rep. on Progr. in Phys. », 18, 83 (1955).

2. Consideriamo un filo omogeneo, perfettamente flessibile ed inestendibile, fissato all'estremo S, passante per Q e teso all'altro estremo da un peso P. Sia  $i$  la corrente che lo percorre e  $\mathbf{B}$  il campo magnetico agente su di esso. Il punto P del filo è individuato dall'arco  $s$  contato a partire da S;  $\tau$  è il versore della tangente al filo in P e T la tensione. L'equazione di equilibrio del filo è la seguente <sup>(2)</sup>:

$$(1) \quad \frac{d}{ds} (\tau T) = -i\tau \wedge \mathbf{B}.$$

Questa è anche l'equazione delle traiettorie di una particella di carica  $q$  e momento  $p$ , soggetta alla forza di Lorentz, se T,  $i$  sono tali che  $T/i = -p/q$ . Si vede subito che T (come  $p$ ) è una costante e vale P.

Mi limiterò allo studio del « caso piano »: precisamente, in un riferimento cartesiano  $(x, y, z)$ , supporrò che le componenti del vettore  $\mathbf{B}$  siano della forma

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = \sum_m z^m X_m(x, y) \\ B_y = \sum_m z^m Y_m(x, y) \\ B_z = B(x, y) + \sum_m z^m Z_m(x, y). \end{array} \right.$$

In tal caso, il piano  $z = 0$  ha un ruolo privilegiato; esistono, come si può facilmente verificare, configurazioni del filo interamente contenute in questo piano: mi limiterò allo studio di esse.

L'interesse delle (2) sta nel fatto che molti campi che si incontrano in pratica sono di quella forma: per esempio, quelli delle macchine acceleratrici a campo magnetico.

Le funzioni X, Y, Z non sono tutte indipendenti, a causa delle equazioni di Maxwell; da queste si ottiene, tra l'altro, che dev'essere  $Z_1 \equiv 0$  e questa sola conseguenza è sufficiente per quel che segue.

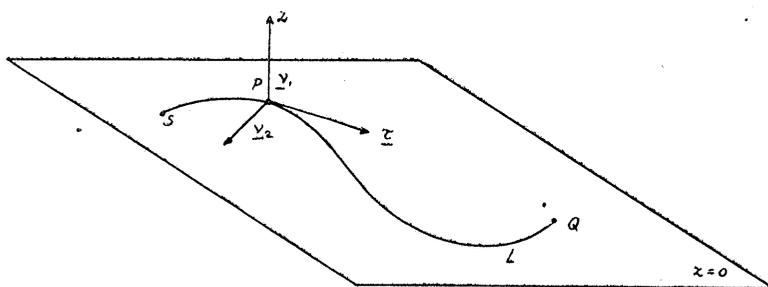


Fig. 1.

(2) Vedi, per esempio, LEVI CIVITA e AMALDI, *Meccanica Razionale*, I.

3. Nel piano  $z = 0$ , sia  $L$  una configurazione del filo. Riferiamo i punti vicini ad  $L$  ad un sistema di coordinate  $s, r, z$  così definito (ved. figura):  $s$  è l'arco, contato su  $L$  a partire da  $S$ ;  $r$  e  $z$  le distanze da  $L$  contate lungo la normale principale e la binormale rispettivamente. L'elemento lineare è dato da

$$(2) \quad ds'^2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 ds^2 + dr^2 + dz^2$$

dove  $R(s)$  è il raggio di curvatura di  $L$  nel punto  $P$  individuato da  $s$ . Indico inoltre con  $\nu_1$  e  $\nu_2$  rispettivamente i versori delle direzioni  $z$  ed  $r$  in  $P$ . L'elemento di superficie  $d\sigma_i$  normale a  $\nu_i$  ha l'espressione

$$(3) \quad \begin{cases} d\sigma_1 = \left(1 + \frac{r}{R}\right) ds dz \\ d\sigma_2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right) ds dr. \end{cases}$$

4. Sia  $\delta P$  uno spostamento virtuale, normale ad  $L$ , nullo in  $S$  e  $Q$ , che porta da  $P$  (su  $L$ ) a  $P'$ . Converrà metterne le componenti sotto la forma:

$$(4) \quad r(P') = \varepsilon f(s), \quad z(P') = \eta g(s)$$

dove  $f(s), g(s)$  sono due funzioni continue, finite, nulle agli estremi  $s = 0$  ed  $s = l_0$ ; ed  $\varepsilon, \eta$  due parametri infinitesimi, indipendenti da  $s$ . Calcolerò il lavoro virtuale  $\delta W_m$  della forza magnetica su tutto il filo immaginando che  $\varepsilon$  ed  $\eta$  crescano gradualmente da 0 al loro valore effettivo ed integrando il lavoro  $d\delta W$  corrispondente ad un incremento (infinitesimo del secondo ordine)  $d\varepsilon, d\eta$ . Il lavoro virtuale della forza magnetica agente su  $ds$ , corrispondente all'incremento  $d\delta P$  di  $\delta P$  è

$$d^2 \delta W_m = i (ds \wedge d\delta P) \times \mathbf{B} = i d\sigma \times \mathbf{B}$$

dove  $d\sigma = d\sigma_1 \nu_1 + d\sigma_2 \nu_2$ . Facendo uso delle (2), (3), (4) ed integrando su  $ds, d\varepsilon, d\eta$  si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \delta W_m &= i\varepsilon \int_0^{l_0} B ds + \frac{1}{2} i\varepsilon^2 \int_0^{l_0} \left(\frac{B}{R} + \frac{\partial B}{\partial r}\right) f^2 ds + \\ &+ \frac{1}{2} i\eta^2 \int_0^{l_0} g^2 \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{B} \times \nu_2) ds + O(\varepsilon^3, \eta^3 \dots). \end{aligned}$$

Questa espressione si semplifica grazie ad una delle equazioni di Maxwell; infatti l'annullarsi della componente  $s$  del rot  $\mathbf{B}$  porta alla relazione  $\frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{B} \times \nu_2) = -\frac{\partial B}{\partial r}$ .

Se la lunghezza del filo tra  $S$  e  $Q$  aumenta, nello spostamento virtuale, di  $\delta l$ , il peso tensore si solleva di  $\delta l$  e quindi la gravità fa un lavoro negativo pari a

$$\delta W_p = -T \delta l = -T\varepsilon \int_0^{l_0} \frac{f}{R} ds + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \int_0^{l_0} f'^2 ds + \frac{1}{2} \eta^2 \int_0^{l_0} g'^2 ds + O(\varepsilon^3, \eta^3 \dots)$$

(l'apice indica derivazione rispetto ad  $s$ ). Il lavoro virtuale delle forze esterne sul filo è, complessivamente,  $\delta W = \delta W_m + \delta W_p$ .

4. Annullando i termini del 1° ordine di  $\delta W$  si ottiene la relazione ben nota  $iBR = T$  che determina la funzione  $R(s)$  ed assicura che la  $L$  è una configurazione d'equilibrio. Passiamo a studiarne la stabilità. I termini del secondo ordine,  $\delta_2 W$ , di  $\delta W$ , sono del tipo

$$\delta_2 W = M\epsilon^2 + N\eta^2$$

dove

$$M = \frac{1}{2} T \int_0^{l_0} \left[ \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial r} \right) f^2 - f'^2 \right] ds,$$

$$N = \frac{1}{2} T \int_0^{l_0} \left[ - \frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial r} g^2 - g'^2 \right] ds.$$

Per la stabilità è sufficiente che la forma quadratica  $\delta_2 W$  sia definita negativa; non è, a rigore, necessario, perché possono esservi casi in cui la forma è semi-definita negativa e tuttavia si ha stabilità grazie ai termini di ordine  $\geq 3$ ; rinuncio, per semplicità, a questi casi. Notiamo che, sia  $M$  che  $N$  sono della forma

$$\mathfrak{F}[\Phi] = \int_0^{l_0} [a(s) \Phi^2 - \Phi'^2] ds$$

dove  $a(s)$  è assegnata, e  $\Phi$  rappresenta la  $f$  o la  $g$ , a meno di un fattore di normalizzazione. Consideriamo l'equazione:

$$(5) \quad \Phi'' + [\lambda + a(s)] \Phi = 0$$

in cui  $\lambda$  è un parametro, con le condizioni agli estremi  $\Phi(0) = \Phi(l_0) = 0$  ed indichiamone gli autovalori con  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ , intendendo che  $\lambda_n$  sia l'autovalore associato alla soluzione  $\Phi_n$  che si annulla in  $n$  punti oltre agli estremi. È noto che  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ . Identifichiamo le  $\Phi_n$  con le soluzioni ortonormali di (5) nell'intervallo  $0, l_0$ . Allora una qualunque  $\Phi$  che soddisfa la condizione d'annullarsi per  $s = 0, l_0$ , può essere espressa dalle serie

$$\Phi = \sum_m^{\infty} c_m \Phi_m \text{ e quindi}$$

$$\mathfrak{F}[\Phi] = - \sum_m^{\infty} \lambda_m c_m^2.$$

Segue che, se  $\lambda_0 > 0$ ,  $\mathfrak{F}[\Phi] < 0$  per qualunque scelta delle  $c_m$ . Ora,  $\lambda_0$  è una funzione di  $l_0$ ; supporrò  $a(s)$  tale che, per valori sufficientemente piccoli di  $l_0$  sia  $\lambda_0 > 0$ . Detta quindi  $l_0^*$  la più piccola radice di  $\lambda_0(l_0) = 0$ ,  $\mathfrak{F}[\Phi]$  può diventare positiva per  $l_0 > l_0^*$ . Ritornando alle  $M, N$ , possiamo applicare quanto sopra e trovare il più piccolo valore,  $l_0^*$ , di  $l_0$  per cui una di esse può diventare negativa. Per  $l_0 \geq l_0^*$  le configurazioni del filo non sono più stabili.

È sufficiente ora ricordare <sup>(3)</sup> che la (5), per  $\lambda = 0$  e per le due forme speciali di  $a(s)$  che figurano in M, N, è l'equazione dei raggi parassiali attorno all'asse ottico curvo L, per stabilire che  $l_0^*$  è proprio l'arco che corrisponde alla prima immagine astigmatica I di S. Da questo segue quanto è stato enunciato alla fine del § 1.

6. Un esempio molto semplice di applicazione dei risultati ora esposti è quello del campo di un betatrone <sup>(4)</sup> in cui

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial r} = - \frac{n}{R^2}$$

dove  $n$  (compreso tra 0 ed 1) ed  $R$  sono praticamente costanti (teoria « lineare »). Le radici  $l_0^*$  di  $\lambda(l_0) = 0$  per le due forme di  $a(s)$  sono rispettivamente  $\frac{\pi R}{\sqrt{1-n}}$ ,  $\frac{\pi R}{\sqrt{n}}$ , cioè le semilunghezze d'onda delle cosiddette oscillazioni di betatrone. Questo esempio rende chiara l'interpretazione data nel § 1 dei casi di instabilità del filo in termini di traiettorie. Si può aggiungere che, in generale, la presenza di due distinti valori di  $l_0^*$  rende conto del fatto che il sistema ha due fuochi astigmatici; il filo diviene instabile in corrispondenza del primo di essi, cioè del più piccolo valore di  $l_0^*$ .

Ringrazio il prof. E. Persico per avermi proposto l'argomento e per il suo continuo interesse e consiglio.

(3) Ved. WENDT, « Zeitsch. für Physik », 120, 720 (1942). In particolare, l'equazione (30) di quel lavoro, semplificata per il nostro caso in cui non vi è campo elettrico e la torsione di L è nulla.

(4) KERST, SERBER, « Phys. Rev. », 60, 53 (1941).