Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/34 (19. 9. 55)

C. Bernardini: SULLA STABILITA' DELLE CONFIGURAZIONI ASSUNTE DA UN FILO PERCORSO DA CORRENTE IN CAMPO MAGNETICO.

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

GRUPPO TEORICO

Relazione n° 23

C. Bernardini

Riassunto.-

Si esamina un aspetto della corrispondenza tra orbite elettroniche e configurazioni di un filo percorso da corrente; precisamente, quello che riguarda i casi di instabilità del filo stesso. Si mostra che, in questi casi, il filo rivela la presenza, in un punto lungo un arco di traiettoria che passi per i suoi stessi estremi, di un'immagine gaussiana del primo estremo. Si fa vedere, inoltre, che, almeno in alcuni casi semplici, è possibile rendere stabile il filo asservendo la corrente o la tensione meccanica alla lunghezza del tratto di esso che è immerso nel campo.-

19.settembre.1955.

SULLA STABILITA' DELLE CONFIGURAZIONI ASSUNTE DA UN FILO, PERCORSO DA CORRENTE, IN CAMPO MAGNETICO.

§ 1.-

La forza che un campo magnetico $\underline{B}$ esercita su un elemento di corrente i $\underline{ds}$ è data dalla formula:

$$i \, \underline{ds} \wedge \underline{B}$$

ovvero, introducendo il versore

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{ds}}{ds}$$

la forza per unità di lunghezza su di un filo percorso da corrente i è data dal vettore

$$i \, \underline{\tau} \wedge \underline{B}$$

Su ciascun elemento $\underline{ds}$ del filo, che penseremo sia perfettamente flessibile ed inestendibile, agiranno inoltre: la forza di gravità e quella dovuta al campo generato dal filo stesso; supporremo in seguito che il primo di questi effetti sia stato eliminato mediante immersione del sistema in un conveniente liquido non conduttore e che le correnti impiegate siano tanto piccole da rendere trascurabile il secondo.(1)

Infine, il filo sarà sottoposto ad una tensione T, realizzata, per es., fissandone un estremo ed attaccando all'altro un peso P (v. fig.1).
L'equazione che, in queste condizioni, esprime che il filo è in equilibrio, è la seguente (2):

$$\frac{d}{ds}(\underline{\tau} T) = - i \, \underline{\tau} \wedge \underline{B} \tag{1.1}$$

La tensione T in ogni punto del filo è costante, come si vede moltiplicando la (1.1) scalarmente per τ ed integrando rispetto all'arco s.

---

(1) L. Cranberg; Un. St. At. Energy Comm. - Magnetic calibration by the floating wire method - AECU 1670

(2) v. p.es. Levi Civita e Amaldi; Meccanica razionale I

./.

Consideriamo ora l'equazione del moto di una particella di carica q nel campo $\underline{B}$.
Se indichiamo con $\underline{\tau}$ il versore della velocità $\underline{v}$ e con p il momento sarà

$$\frac{d}{dt}(p\underline{\tau}) = q v \underline{\tau} \wedge \underline{B} \qquad (1.2)$$

Come per la tensione T nel caso del filo, p e quindi v sono costanti nel tempo. L'elemento d'arco sulla traiettoria vale:

$$ds = v\,dt$$

e perciò la (1.2) si può riscrivere

$$\frac{d}{ds}(p\underline{\tau}) = q\underline{\tau} \wedge \underline{B} \qquad (1.2')$$

Confrontando la (1.2') con la (1.1) si vede subito che se è soddisfatta numericamente la relazione

$$\frac{T}{i} = -\frac{p}{q} \qquad (1.3)$$

le due equazioni sono identiche.
Prima, però, di asserire che anche le traiettorie e le configurazioni del filo coincidono è necessaria qualche considerazione supplementare.

E' noto che, assegnando la posizione e la velocità $\underline{v}$ di una particella ad un certo istante t = 0 la traiettoria resta completamente determinata dalla (1.2'). Invece, se di una traiettoria si sa soltanto che passa per due punti, A e B, non è sempre possibile risalire, p.es., alla velocità $\underline{v}_A$ in A; se si pensa al caso in cui B è l'immagine B_1 di A (3), si vede subito che esistono infinite direzioni di $\underline{v}_A$ per le quali è soddisfatta la condizione di transito per A e per B_1.

---

(3) Per quello che ci interessa, adopereremo la parola immagine gaussiana per designare un punto in cui si intersecano almeno ∞^1 traiettorie; cioè, almeno tutte le traiettorie contenute in un certo piano. L'esistenza di due fuochi astigmatici non modifica le considerazioni che seguono in quanto solo uno di essi, il più vicino all'oggetto A, ha un ruolo nel problema della stabilità (v. § 5).

./.

Ora, questa condizione di transito per A e B è proprio quella che s'impone al filo mentre per le traiettorie si pensa di solito a condizioni iniziali in A. Perciò, per poter parlare di equivalenza tra configurazioni di equilibrio e traiettorie è necessario stabilire sino a che punto le condizioni iniziali e quelle agli estremi sono equivalenti.

In quel che segue mostreremo che:

1) Se B coincide con B_1, prima immagine di A, cessa di valere la corrispondenza tra le soluzioni di (1.2') e quelle di (1.1) (a meno che non si riesca a fissare la tangente $\underline{t}$ al filo, in A in modo che coincida con quello della traiettoria). Il filo che passa per A e B, è in equilibrio indifferente.-

2) Se B_1 è compreso fra A e B, la configurazione d'equilibrio del filo è instabile.-

3) Si possono realizzare dei dispositivi che, facendo variare la tensione T o la corrente i "stabilizzano" il filo; se per es. si fa in modo che T o i siano opportune funzioni della lunghezza ℓ del tratto compreso tra A e B, si può vedere che il filo si assesta in una configurazione stabile corrispondente ad una certa l_s e quindi ad una certa T_s (o i_s). Tramite la (1.3) si risale al momento p_s corrispondente a T_s (o i_s): si rinuncia, naturalmente, allo studio di traiettorie di particelle di momento assegnato ma si può andare vicini ad esso quanto si vuole se si possono regolare opportunamente le leggi di variazione di T o di i.-

§ 2.-

Fisseremo l'attenzione sul "caso piano", intendendo con questo di limitare l'indagine a quei campi $\underline{B}$ che ammettono un piano mediano, che sarà anche la giacitura delle particolari traiettorie, o configurazioni del filo, in esame.
Precisamente, in un riferimento cartesiano xyz, sia z = o, l'equazione di questo piano.
Se $\underline{B} = (B_x, B_y, B_z)$, per la proprietà richiesta dev'essere:

$$\begin{aligned} B_x &= \sum_{1}^{\infty}{}_m\, z^m X_m(x,y) \\ B_y &= \sum_{1}^{\infty}{}_m\, z^m Y_m(x,y) \\ B_z &= B(x,y) + \sum_{1}^{\infty}{}_m\, z^m Z_m(x,y) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

./.

Le equazioni di Maxwell legano le funzioni X_m, Y_m, Z_m in modo che

$$(n+1)\, Z_{n+1} + \frac{\partial X_n}{\partial x} + \frac{\partial Y_n}{\partial y} = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\frac{\partial Z_n}{\partial x} - (n+1)\, X_{n+1} = \frac{\partial Z_n}{\partial y} - (n+1)\, Y_{n+1} = 0 \qquad (2.2)$$

$$Z_1 = 0$$

In seguito faremo uso della sola (2.2_4) oltre hhe del fatto che B_x e B_y sono, appena fuori del piano mediano, al più del I ordine in z ($X_0 = Y_0 = 0$)

Si noti che con formule del tipo (2.1) si può descrivere il campo di un sincrotrone, riferendosi al quale è stato svolto questo lavoro.

§ 3.-

Consideriamo nel piano mediano μ una linea L (v. fig.2) ed un triedro associato ad ogni punto P di essa. Sia s l'arco, contato da un punto A su L, che individua P. Ogni punto P' fuori di μ sarà caratterizzato dalla sua quota z rispetto a μ dalla coordinata r lungo la normale principale alla linea L e dal valore di s che corrisponde all'intersezione di L con il piano (z,r) che lo contiene. In questo sistema di coordinate l'elemento lineare è dato da

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 ds^2 + dz^2 + dr^2 \qquad (3.1)$$

essendo R il raggio di curvatura di L in P (4)

Indichiamo inoltre con $\underline{\nu}_1$ e $\underline{\nu}_2$ rispettivamente i versori della normale, in P, a μ e della normale principale di L. L'elemento di superficie $d^2\delta\sigma_1$ normale a $\underline{\nu}_1$ avrà la seguente espressione:

$$d^2\delta\sigma_1 = \left(1 + \frac{r}{R}\right) ds\, dz \quad , \quad d^2\delta\sigma_2 = \left(1 + \frac{r}{R}\right) ds\, dr \qquad (3.2)$$

---

(4) v. p. es. Wendt, z.f. Phys. 120 (1942) 720

./.

In quel che segue, L sarà una soluzione di (1.1) o (1.2') passante per A (s = o) e per B (s = l_0).-

§ 4 .-

Considereremo ora il problema della stabilità del filo per il caso del campo $\underline{B}$ di § 2.-

Sia δP uno spostamento virtuale, nullo in A ed in B, che porta da P (su L) a P'; e consideriamone un elemento infinitesimo $d\delta P$ a partire da P'.-

Il lavoro virtuale delle forze magnetiche corrispondente allo spostamento da P' a P' + $d\delta P$ è:

$$d^2\delta\mathcal{L}_m = i(d\underline{s} \wedge d\delta P) \times \underline{B} = i\, d^2\underline{\delta\sigma} \times \underline{B} \qquad (4.1)$$

essendo $d^2\underline{\delta\sigma}$ l'elemento (orientato) d'area

$$d^2\underline{\delta\sigma} = d\underline{s} \wedge d\delta P \qquad (4.2)$$

$\underline{B}$ deve intendersi calcolato in P'. Possiamo limitarci a spostamenti $d\delta P$ normali a $d\underline{s}$ grazie all'operazione di prodotto vettore che figura in (4.2). Con questo, $d^2\underline{\delta\sigma}$ risulta decomponibile in

$$d^2\delta\sigma_1\, \underline{\nu}_1 + d^2\delta\sigma_2\, \underline{\nu}_2 \qquad (4.3)$$

Ritornando alla (4.1) si ha :

$$d^2\delta\mathcal{L}_m = i\, d^2\delta\sigma_1\, B_z + i\, d^2\delta\sigma_2\, \underline{B} \times \underline{\nu}_2 \qquad (4.4)$$

Conviene individuare il punto P' nel modo seguente : se f(s) e g(s) sono funzioni continue di s nulle per s = o,l_0 ed ε , η due parametri, poniamo

$$r(P') = \varepsilon f(s) \quad ; \quad z(P') = \eta g(s) \qquad (4.5)$$

Con queste notazioni la (3.1) e (3.2) divengono

$$ds' = \left\{ \left(1 + \varepsilon \frac{f}{R}\right)^2 + \varepsilon^2 f'^2 + \eta^2 g'^2 \right\}^{1/2} ds \cong \qquad (4.6)$$

$$\cong \left\{ 1 + \varepsilon \frac{f}{R} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 f'^2 + \frac{1}{2}\eta^2 g'^2 + \dots \right\} ds$$

./.

$$d^2\delta\sigma_1 = \left(1+\varepsilon\frac{f}{R}\right) f\, d\varepsilon\, ds$$

$$d^2\delta\sigma_2 = \left(1+\varepsilon\frac{f}{R}\right) g\, d\eta\, ds \qquad (4.7)$$

$$\left(f' = \frac{df}{ds} \quad etc.\right) \qquad (4.8)$$

Trascureremo in seguito tutte le quantità $O(\varepsilon^3)$, $O(\eta^3)$; per questo, ci bastano gli sviluppi (v.(2.2))

$$B_2(P') = B(P) + \varepsilon f(s)\frac{\partial B}{\partial \nu_2} \; ; \; \underline{B}\times\underline{\nu}_2 = \eta g(s)\frac{\partial}{\partial z}(\underline{B}\times\underline{\nu}_2) \qquad (4.9)$$

Sostituendo nella (4.4) ed integrando su s tra A e B, cioè tra o ed l_0, e poi sugli spostamenti virtuali, si ha:

$$\delta L_m = i\varepsilon\int_0^{l_0} B\, ds + \delta_2 L_m \qquad (4.10)$$

dove $\delta_2 L_m$ è un termine $O(\varepsilon^2)$ che specificheremo tra poco. Se la lunghezza del filo tra A e B varia, nello spostamento virtuale, da l_0 a $l_0 + \delta l$, il peso tensore si solleva di δl e quindi la gravità fa un lavoro negativo pari a:

$$\delta L_p = - T\delta l \qquad (4.11)$$

dove, per le (4.6)

$$\delta l = \varepsilon\int_0^{l_0}\frac{f}{R}ds + \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{l_0} f'^2 ds + \frac{1}{2}\eta^2\int_0^{l_0} g'^2 ds \qquad (4.12)$$

Complessivamente, il lavoro virtuale, fatto dalle forze esterne nel filo, sarà

$$\delta L = \delta L_m + \delta L_p \qquad (4.13)$$

Annullando il coefficiente di ε si ottiene la (1.1) nella forma ben nota

$$i B R = T \qquad (4.14)$$

e questa equazione ci assicura che la curva L soddisfa il principio dei lavori virtuali e quindi è una configurazione di equilibrio.

./.

Indichiamo con $\delta_2 \mathcal{L}$ i termini del II ordine di $\delta\mathcal{L}$, cioè per le (4.6) - (4.14)

$$\delta_2 \mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 T \left\{ \int_0^{l_0} \left[\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial \nu_2} \right) f^2 - f'^2 \right] ds \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\eta^2 T \left\{ \int_0^{l_0} \left[\frac{1}{BR} \frac{\partial}{\partial z} (B \times \nu_2) g^2 - g'^2 \right] ds \right\} \qquad (4.15)$$

Per la stabilità è <u>sufficiente</u> che sia $\delta_2 \mathcal{L} < 0$ per <u>qualunque</u> spostamento virtuale, ossia che la forma $\delta_2 \mathcal{L} = A\,\xi^2 + B\,\eta^2$ sia <u>definita negativa</u>; ossia che nè A nè B sia ≥ 0

Non è a rigore necessario, perchè possono esservi casi in cui la forma è semidefinita negativa e tuttavia si ha stabilità (se a $\delta_2 \mathcal{L} = 0$ corrispondono negli ordini superiori $\delta_3 \mathcal{L} + \delta_4 \mathcal{L} + \dots$ etc. negative), ma per semplicità rinunciamo a questo tipo di stabilità.-

§ 5.-

Studieremo ora il segno di $\delta_2 \mathcal{L}$. Per la condizione di transito per A e B delàa linea L e, se esiste, di ogni altra possibile configurazione del filo, dev'essere

$$f(0) = f(l_0) = g(0) = g(l_0) = 0 \qquad (5.1)$$

Per cercare i casi di instabilità, possiamo esaminare separatamente i coefficienti di ξ^2 ed η^2 nella (4.15). Se infatti il coefficiente di ξ^2 fosse > 0 il filo sarebbe instabile almeno per spostamenti contenuti nel piano mediano π; etc.

Poniamo perciò

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \ln B}{\partial \nu_2} = a_1(s) \; ; \; \frac{1}{BR} \frac{\partial}{\partial z}(B \times \nu_2) = a_2(s) \qquad (5.2)$$

ed esaminiamo il segno di

$$\mathfrak{J}[\phi] = \int_0^{l_0} [a(s)\,\phi^2 - \phi'^2]\, ds \qquad (5.3)$$

in cui

$$a \text{ sta per } \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right. \quad \phi \quad \text{per} \left\{ \begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \right. \qquad (5.4)$$

Consideriamo l'equazione

$$\phi'' + [\lambda + a(s)]\,\phi = 0 \qquad (5.5)$$

./.

dove λ è un parametro da determinare con le condizioni

$$\phi(0) = \phi(l_0) = 0 \tag{5.6}$$

Supponiamo di aver trovato un set di soluzioni

$$\phi_0 , \phi_1 \dots , \phi_n \dots \tag{5.7}$$

che si annullano rispettivamente in 0,1,2........n,...... punti oltre gli estremi dell'intervallo o, l_0 e che corrispondono ai valori

$$\lambda_0 , \lambda_1 , \dots \lambda_n , \dots \tag{5.8}$$

di λ .- E' noto che [5]

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots \tag{5.9}$$

Inoltre, supponiamo che per l_0 prossimo a zero sia $\lambda_0 > 0$
Le ϕ_n siano proprio le soluzioni ortonormali di (5.5) + (5.6).
Allora una qualunqe ϕ che soddisfa la (5.6) può essere espressa dalla serie

$$\phi = \sum_0^\infty c_m \phi_m \tag{5.10}$$

Si ha poi

$$\int_0^{l_0} \phi'^2 ds = -\int_0^{l_0} \phi \phi'' ds = \int_0^{l_0} \Big[a(s) \phi^2 + \sum_0^\infty c_m \lambda_m \phi_m \phi \Big] ds$$

ed infine

$$\mathcal{F}(\phi) = - \sum_0^\infty \lambda_m c_m^2 \tag{5.11}$$

Per la (5.9), finchè $\lambda_0 > 0$, risulta subito che

$$\mathcal{F}[\phi] < 0$$

Ma se $\tilde{l}_0$ è la più piccola radice di

$$\lambda_0(l_0) = 0$$

$\mathcal{F}[\phi]$ può diventare positiva per $l_0 > \tilde{l}_0$ (p.es. per $c_0 \neq 0$ $c_1, c_2, \dots c_n = 0$) e quindi la configurazione del filo è instabile per $l_0 > \tilde{l}_0$

---

(5) v. p. es. Morse, Jeshbach - Methods of Theor. phys. I pag. 720-21

Quando $\phi = f$, $a = a_1$, si otterrà per $\tilde{\ell}_0$ un certo $\tilde{\ell}_0^{(1)}$; per $\phi = g$, $a = a_2$, si otterrà $\tilde{\ell}_0 = \tilde{\ell}_0^{(2)}$. Sia poi $(\tilde{\ell}_0)_m$ il minore tra $\tilde{\ell}_0^{(1)}$ ed $\tilde{\ell}_0^{(2)}$; per $\ell_0 > (\tilde{\ell}_0)_m$ il filo è instabile.-

§ 6.-

Un esempio molto semplice è quello relativo al campo uniforme normale alla giacitura del filo. In tal caso (V.(5.2))

$$a_1(s) = \frac{1}{R^2} = \text{costante}$$

$$a_2(s) = 0$$

L'equazione

$$f'' + (\lambda^{(1)} + \frac{1}{R^2}) f = 0$$

con la condizione

$$f(0) = f(\ell_0) = 0$$

ha come soluzione f_0 corrispondente a $\lambda_0^{(1)}$ la

$$f_0(s) = N_0 \sin \pi \frac{s}{\ell_0}$$

(N_0 normalizza f_0 ad 1) , e

$$\lambda_0^{(1)} = \left(\frac{\pi^2 R^2}{\ell_0^2} - 1\right) \frac{1}{R^2}$$

da cui

$$\ell_0^{(1)} = \pi R$$

L'altra equazione, cioè

$$g'' + \lambda^{(2)} g = 0 \quad ; \quad g(0) = g(\ell_0) = 0$$

ha come soluzione g_0 corrispondente a $\lambda_0^{(2)}$ ancora

$$N_0 \sin \pi \frac{s}{\ell_0}$$

ma questa volta

$$\lambda_0^{(2)} = \frac{\pi^2}{\ell_0^2}$$

e quindi

$$\tilde{\ell}_0^{(2)} = \infty$$

Segue che

$$(\tilde{\ell}_0)_m = \tilde{\ell}_0^{(1)} = \pi R$$

./.

§ 7.-

Esamineremo in questo § le possibilità di "stabilizzazione" annunciate in 3) del § 1.-
Queste possiblità, suggerite dal Prof. Persico, consistono nell'ottenere che T o i siano funzioni di l.

Ci limiteremo a dimostrare che, almeno nel caso di un campo uniforme, una tensione di tipo "elastica"

$$T = \tau \ell - T_0$$

oppure una funzione i(l) con derivata sufficientemente negativa hanno l'effetto richiesto.
Una tensione lineare in l può essere realizzata in varî modi : per esempio, si può impiegare un peso tensore parzialmente immerso in un liquido e che, emergendo da questo con l'allungarsi del filo, realizza proprio una tensione del tipo voluto: T_0 e τ possono essere regolati impiegando liquidi di varia densità e pesi di forma cilindrica di varie sezioni.
Per ottenere la i(l) si può impiegare il dispositivo cui fa cenno Cranberg (loc.cit. pg.1)

1) Caso in cui

$$T = \tau \ell - T_0 \quad , \quad \tau > 0 \tag{7.1}$$

Il lavoro virtuale corrispondente ad un allungamento δl è

$$\delta L = - \int_{\ell_0}^{\ell_0 + \delta \ell} (\tau \ell - T_0) d\ell = - T \delta \ell - \frac{1}{2} \tau \delta \ell^2 \tag{7.2}$$

Il lavoro virtuale complessivo δL risulta diminuito, al secondo ordine, per il termine $-\frac{1}{2}\tau\delta\ell^2$. Al I ordine si riottiene l'equazione di equilibrio nella solita forma

$$i B R = T \tag{7.3}$$

in cui T deve ora intendersi calcolata per $l = l_0$.- Al II ordine si ha

$$\delta_2 L = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left\{ T \int_0^{\ell_0} \left(\frac{f^2}{R^2} - f'^2 \right) ds - \frac{\tau}{R^2} \left[\int_0^{\ell_0} f(s) ds \right]^2 \right\} - $$

$$- \frac{1}{2} T \eta^2 \int_0^{\ell_0} g'^2 ds \tag{7.4}$$

e questa è ancora una forma quadratica del tipo

$$A \varepsilon^2 + B \eta^2 \tag{7.5}$$

B è certamente ≤ 0 ; quanto ad A, introducendo la variabile

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

ponendo

$$\alpha_m = \frac{\ell_0}{R}$$

ed applicando i metodi del § 5, poichè

$$f(\alpha) = \sum_1^\infty {}_r\, C_r (2/\alpha_m)^{1/2} \sin(\pi r \frac{\alpha}{\alpha_m})$$

$$-\lambda_r = 1 - \frac{\pi^2}{\alpha_m^2} r^2 \qquad r = 1, 2, \ldots$$

$$\int_0^{\ell_0} f(\alpha)\, d\alpha = (2/\alpha_m)^{1/2} \sum_1^\infty {}_r \frac{C_{2r+1}}{2r+1} \frac{2\alpha_m}{\pi}$$

si ha:

$$\delta_2 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{T}{R} \sum (1 - \frac{\pi^2}{\alpha_m^2} r^2) C_r^2 - \frac{1}{2} \tau \varepsilon^2 \frac{8\alpha_m}{\pi^2} \left(\sum \frac{C_{2r+1}}{2r+1} \right)^2$$

Per $\alpha_m = \pi$ il primo termine a secondo membro cambia segno (diviene precisamente, positivo per $\alpha_m > \pi$ in corrispondenza della soluzione $C_0 \neq 0$, $C_1 = \ldots\ldots C_n = 0$. Ma, in tal caso

$$\delta_2 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{C_0^2}{R} \left\{ T(1 - \frac{\pi^2}{\alpha_m^2}) - \tau R \frac{8\alpha_m}{\pi^2} \right\}$$

e, grazie al termine "elastico" la espressione in $\{ \}$ può ancora essere < 0 per $2\pi \geq \alpha_m \geq \pi$. Basta infatti che, fissato α_m, sia

$$\frac{\tau R}{T} > \frac{\pi^2}{8\alpha_m} (1 - \frac{\pi^2}{\alpha_m^2})$$

ovvero, per la (3)

$$\tau > i B \frac{\pi^2}{8\alpha_m} (1 - \frac{\pi^2}{\alpha_m^2})$$

L'espressione a secondo membro è massima per

$$\alpha_m = \pi\sqrt{3}$$

e perciò la disuguglianza è certo soddisfatta per

$$\tau > i B \frac{\pi}{12\sqrt{3}} = 0.15\, i B \qquad (7.6)$$

Come si vede, il solo coefficiente τ è implicato in questa disuguglianza ed è perciò possibile un aggiustamento di T, sino alla corrispondenza con il momento p voluto (v. § 1), tramite la costante T_0 (V. (7.1)).-

./.

2) Caso in cui i è funzione di l.-

E' necessario rifarsi alla (4.1) che si può senz'atro integrare rispetto alla variabile s poichè i e B sono, rispettivamente, una funzione di l ed una costante. Ma, nella configurazione variata

$$i = i(l+\delta l) = i(l) + \frac{\partial i}{\partial l}\delta l + \dots$$

così che

$$d\delta L_m = i(l) B d\delta\sigma_1 + \frac{\partial i}{\partial l}\delta l B d\delta\sigma_1$$

Si riottiene, con facili calcoli analoghi a quelli del § 4, al I ordine, l'equazione

$$i(l)\, BR = T \qquad (7.7)$$

Facendo uso della quale, si ha, al II ordine,

$$\delta_2 L = \frac{1}{2}\frac{T}{R}\left\{\varepsilon^2\int_0^{\alpha_m}\left[f^2-\left(\frac{df}{d\alpha}\right)^2\right]d\alpha - \eta^2\int_0^{\alpha_m}\left(\frac{dg}{d\alpha}\right)^2 d\alpha + R\varepsilon^2\frac{\partial \ln i}{\partial l}\left[\int_0^{\alpha_m} f\,d\alpha\right]^2\right\} \qquad (7.8)$$

Come nel caso 1) possiamo fare $g = 0$.-
Confrontando la (8) con le (4) - (5), si può ripetere quanto detto per il caso 1), purchè si sostituisca $\tau R/T$ con $-R\frac{\partial \ln i}{\partial l}$
Per la (6) deve allora essere

$$T\frac{\partial \ln i}{\partial l} < -iB\frac{\pi}{12\sqrt{3}} \qquad (7.9)$$

ovvero

$$\frac{\partial \ln i}{\partial l} < -\frac{\pi}{12\sqrt{3}}\,\frac{1}{R} \qquad (7.10)$$

e questa condizione può essere realizzata con funzioni i che consentono l'aggiustamento al momento p voluto.

§ 8.-

Diamo un esempio numerico relativo alla stabilizzazione in campo uniforme mediante una tensione di tipo elastico.-
Per la (7.6), dev'essere

$$\tau > 0.15\, iB = \tau_{lim}$$

per una stabilizzazione efficiente per $\pi < \alpha_m < 2\pi$

./.

Se i è dato in Amp., B in Gauss, τ in unità pratiche,

$$\tau_{eim} \simeq 1.5 \times 10^{-5} (iB) \ grp/cm$$

Se si vogliono studiare con il filo traiettorie di elettroni di (pc) MeV, dev'essere (V.(1.3))

$$T \cong 0.33 \ i \ pc$$

Per elettroni di 10 MeV, con i = 1 Amp, dev'essere

$$T \cong 3.3 \ grp$$

Se si vuole che il raggio dell'orbita sia di 360 cm dev'essere B = 90 Gauss; si ha, perciò

$$\tau_{eim} \simeq 1.5 \times 10^{-3} \ grp/cm$$

Se gli elettroni descrivono p.es. l'intera circonferenza,

$$\ell = 2\pi R \simeq 20 \ m \quad e \quad \tau_{eim} \ell \simeq 3 \ grp$$

quindi, se abbiamo scelto $\tau (> \tau_{eim})$ uguale p.es. a 0.3 gp/m sarà τl = 6 grp e

$$T_0 = \tau \ell - T \simeq 2.7 \ grp$$

compatibilmente con tutte le condizioni richieste.

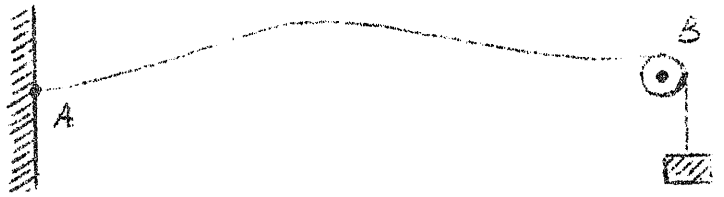

FIG. 1

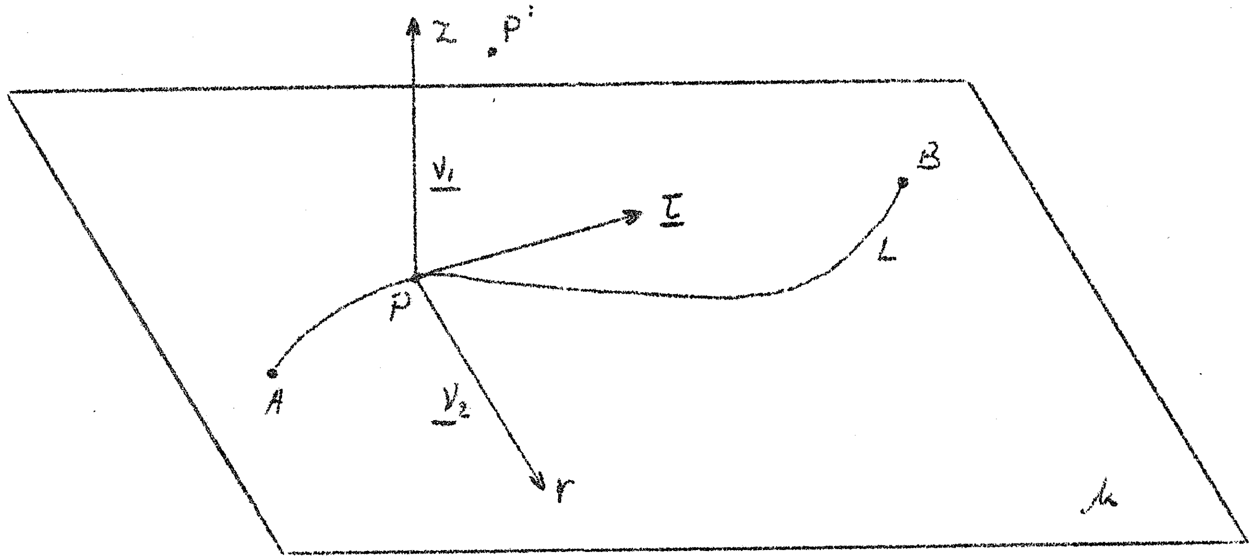

FIG. 2