

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/29 (28.7.55)

A. Turrin: EFFETTO DELLE IRREGOLARITA' DEL CAMPO NEI
SINCROTRONI A TRATTI RETTILINEI.

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

SEZIONE ACCELERATORE

GRUPPO TEORICO

Relazione n.°22

28 LUGLIO 1955

A. TURRIN : Effetto delle irregolarità del campo nei
Sincrotroni a tratti rettilinei. =

Riassunto:

L'esistenza delle sezioni diritte in un Sincrotrone determina - in presenza di irregolarità azimutali del campo magnetico - oscillazioni di betatrone forzate di ampiezze notevolmente maggiori di quelle previste per un corrispondente Sincrotrone circolare.

I contributi alla oscillazione risultante dovuti alle singole armoniche dello sviluppo in serie di Fourier delle irregolarità convergono molto lentamente; pertanto è necessario non solo attenersi strettamente alle limitazioni imponibili alle ampiezze delle armoniche più basse dello sviluppo del $\Delta B(\theta)/B$, ma anche assicurarsi che le armoniche superiori alla 6^a siano realmente trascurabili.

§ 1.- L'andamento del campo

L'andamento del campo nei settori magnetici sia del tipo

$$I.1) \quad \begin{cases} B_z = B_0 (1 - n \frac{x}{R}) (1 + f_z(\theta)) \\ B_r = -B_0 (n \frac{x}{R} + f_r(\theta)) \\ B_\theta \sim \text{quantità piccola del I° ordine} \end{cases} \quad \begin{cases} f_z(\theta) = \left(\frac{\Delta B_z}{B_0} \right)_{r=R} \\ f_r(\theta) = - \left(\frac{B_r}{B_0} \right)_{z=0} \end{cases}$$

Tale campo soddisfa le equazioni di Maxwell entro quantità piccole del I° ordine. I contributi di B_0 alle equazioni del moto risultano del II° ordine.

L'azimuth θ è definito soltanto entro i settori magnetici. Le $f(\theta)$ siano date dagli sviluppi in serie

$$I.1') \quad f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta + \delta_m) \quad (|f(\theta)| \ll 1)$$

Tali ipotesi sulle irregolarità del campo danno luogo alla soluzione di un problema lineare. Una qualunque altra ipotesi più generale (ad esempio il supporre $n = n(\theta, r)$) contenuta nella I.1 porterebbe ad un problema non lineare, e pertanto di difficile soluzione. In condizioni lontane da risonanza si può ragionevolmente presumere che le conclusioni che trarremo con un campo in cui la n della I.1) sia $n = \text{costante}$ e del valore voluto, siano non molto diverse da quelle in cui - come effettivamente accade - è $n = n_0 + \Delta n$, con Δn contenuto entro limiti sufficientemente stretti.

§ II) Il caso del Sincrotrone circolare⁽¹⁾. L'orbita chiusa.

Nel caso del Sincrotrone circolare l'equazione differenziale della traiettoria determinata dal campo I.1) è

$$\text{II.1)} \quad \frac{d^2 \xi(\theta)}{d\theta^2} + \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \xi(\theta) \cong -R \zeta(\theta)$$

dove $\xi(\theta)$ rappresenta la componente (radiale o verticale) dello scostamento dall'orbita principale (cioè dal cerchio $r = R, z=0$).
(La II.1) è valida a meno di quantità piccole del II° ordine.)

In essa cioè :

$$\left. \begin{array}{l} \xi = x = r - R \\ \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 = 1 - n \end{array} \right| \text{ se consideriamo le oscillazioni radiali}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = z \\ \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 = n \end{array} \right| \text{ se consideriamo le oscillazioni verticali.}$$

La soluzione della II.1) può mettersi per ciascuna delle due componenti nella forma

$$\text{II.2)} \quad \xi(\theta) = \chi(\theta) + \zeta(\theta)$$

in cui

$$\text{II.2')} \quad \zeta(\theta) = R \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m^2 - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2} \sin(m\theta + \delta_m)$$

$$\text{II.2'')} \quad \chi(\theta) = \chi_0 \cos \frac{R}{\lambda} \theta + \lambda \chi_0' \sin \frac{R}{\lambda} \theta$$

(1) F.K.Goward, Proc. Phys. Soc. 61, 28 (1948)

$\left(' \equiv \frac{d}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \right)$

La II.2 può interpretarsi così: il termine $\chi(\theta)$ rappresenta oscillazioni di betatrone del solito tipo, le quali però non avvengono intorno all'orbita principale, ma intorno ad un'orbita deformata di cui $\zeta(\theta)$ rappresenta lo scostamento (radiale o verticale) rispetto all'orbita principale.

In generale l'orbita degli elettroni, descritta dalle $\zeta(\theta)$, non è una linea chiusa (perché il periodo del termine $\chi(\theta)$ è in genere diverso per le due componenti e non commensurabile con 2π); però l'orbita descritta dal solo termine $\zeta(\theta)$, cioè quella che sarebbe percorsa in assenza di oscillazioni di betatrone, è chiusa perché

$$\text{II.3) } \zeta(\theta + 2\pi) = \zeta(\theta).$$

La chiameremo perciò orbita chiusa. Se il campo fosse regolare ($\zeta(\theta) \equiv 0$) essa coinciderebbe naturalmente con l'orbita principale.

la cosa più importante da notare, infine, è che se A_m è l'ampiezza della m -esima armonica (I.1') dello sviluppo delle irregolarità, l'ampiezza corrispondente per la deformazione dell'orbita principale (II.2') risulta proporzionale ad

$$\frac{A_m}{m^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{cioè:}$$

Nel caso del Sincrotrone circolare contribuiscono alla deformazione dell'orbita principale solo le armoniche più basse, e pertanto solo le A_m di basso ordine vanno contenute entro opportuni limiti per ottenere una deformazione di piccola ampiezza.

§ III.) L'inserzione dei tratti rettilinei. L'orbita chiusa.

Le conclusioni relative al Sincrotrone circolare non sono più valide se tra i quattro quadranti esistono tratti privi di campo di lunghezza L confrontabile con R . Anche nel caso del Sincrotrone a sezioni diritte si può definire l'orbita chiusa e l'oscillazione di betatrone libera attorno ad essa.

Il calcolo dell'orbita chiusa nel caso $L \neq 0$ è stato già affrontato da N.M. Blachman ²⁾ con l'uso del metodo di soluzione di Sturm - Liouville delle equazioni differenziali. Tale trattazione permette di stimare correttamente l'effetto della sola prima armonica dello sviluppo in serie di Fourier delle irregolarità del campo. ³⁾

Il formalismo delle matrici permette di trovare la soluzione del problema nel caso di un'armonica m qualunque. Tale calcolo è lungo e laborioso; è più comodo fornire al Lettore gli elementi sufficienti per verificare che la soluzione III.2 è la soluzione cercata per il caso di un Racetrack.

L'andamento del campo nei settori magnetici sia dato dalle I.1 e I.1'.

2) N.M. Blachman: Rev. Scie. Instr. 22, 569 (1951)

3) Ringrazio il Dr. C. Bernardini per le preziose informazioni datemi sull'argomento.

Distinguiamo i 4 settori magnetici col numero d'ordine $h = 0, 1, 2, 3$, (nel I° giro) $4, 5, 6, 7, \dots$ (nel II° giro) (fig. 1.) La lunghezza del settore diritto sia $L=2L_0$

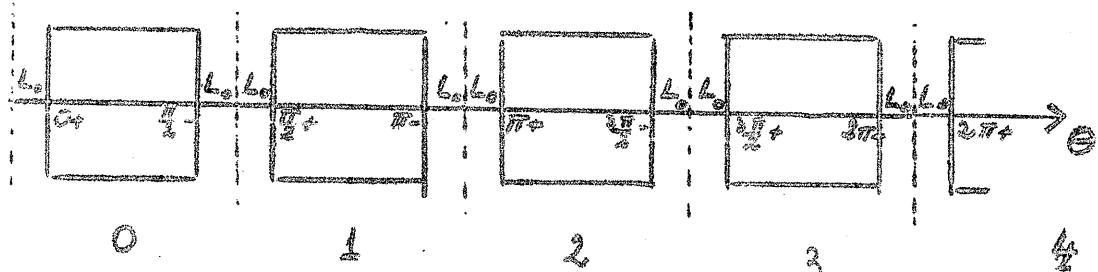


fig. 1

Nel settore h - esimo sarà $k \frac{\pi}{2} + \leq \theta \leq (k+1) \frac{\pi}{2} -$

La soluzione cercata per l'orbita chiusa deve:

- Soddisfare alla equazione differenziale II.1;
- Soddisfare alle condizioni di raccordo e continuità delle pendenze

$$\text{III.1.9} \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta'(k \frac{\pi}{2} +) = \zeta'(k \frac{\pi}{2} -) = \zeta'(k \frac{\pi}{2}) \\ \zeta(k \frac{\pi}{2} +) = \zeta(k \frac{\pi}{2} -) + 2L_0 \zeta'(k \frac{\pi}{2}) \end{array} \right.$$

$$= \frac{d}{ds} = \frac{1}{R} \frac{d}{d\theta} \quad ; \quad h = \begin{array}{l} 0, 1, 2, 3 \\ \text{I giro} \end{array} ; \begin{array}{l} 4, 5, 6, 7 \\ \text{II giro} \end{array} ; \dots$$

- Soddisfare alla condizione di periodicità II.3.

Inoltre $\zeta(\theta)$ tende all'espressione II.2' relativa al Sincrotrone circolare quando L_0 tende a 0.

Denotiamo con $\zeta_k(\theta)$ il valore della deformazione (orizzontale o verticale) dell'orbita principale nel settore h - esimo per effetto della m - esima armonica (l'indice m nella notazione $\zeta_k(\theta)$ rimane sottinteso).

Posto $\theta_k = \theta - k \frac{\pi}{2} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \\ k \frac{\pi}{2} + \leq \theta \leq (k+1) \frac{\pi}{2} - \end{array} \right)$ si ha

per m dispari

$$\zeta_0(\theta) = \frac{A_m}{m^2 - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2} \left[\frac{m L_0}{\cos \varphi} (\sin \delta_m \sin m \frac{\pi}{2} + a \cos \delta_m) \cos \frac{R}{\lambda} \theta_0 + \frac{m L_0}{\cos \varphi} b \cos \delta_m \sin \frac{R}{\lambda} \theta_0 + R \sin (m \theta_0 + \delta_m) \right]$$

III.2. disp)

$$\zeta_1(\theta) = \frac{A_m}{m^2 - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2} \left[\frac{m L_0}{\cos \varphi} (\cos \delta_m - a \sin m \frac{\pi}{2} \sin \delta_m) \cos \frac{R}{\lambda} \theta_1 + \frac{m L_0}{\cos \varphi} b \sin m \frac{\pi}{2} \sin \delta_m \sin \frac{R}{\lambda} \theta_1 + R \sin m \frac{\pi}{2} \cos (m \theta_1 + \delta_m) \right]$$

$$\zeta_2(\theta) = -\zeta_0(\theta_2), \quad \zeta_3(\theta) = -\zeta_1(\theta_3), \quad \zeta_4(\theta) = \zeta_0(\theta_4), \dots$$

per m pari

$$\zeta_0(\theta) = \frac{A_m}{m^2 - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2} \left[\frac{m L_0 b}{\sin^2 \varphi} \left\{ b + \frac{L_0}{\lambda} (a - \cos m \frac{\pi}{2}) \right\} \cos \delta_m \cos \frac{R}{\lambda} \theta_0 + \frac{m L_0 b}{\sin^2 \varphi} \left\{ \frac{L_0}{\lambda} b - (a + \cos m \frac{\pi}{2}) \right\} \cos \delta_m \sin \frac{R}{\lambda} \theta_0 + R \sin (m \theta_0 + \delta_m) \right]$$

III.2 pari)

$$\zeta_1(\theta) = \cos m \frac{\pi}{2} \zeta_0(\theta_1), \quad \zeta_2(\theta) = \zeta_0(\theta_2), \quad \zeta_3(\theta) = \zeta_1(\theta_3),$$

$$\zeta_4(\theta) = \zeta_0(\theta_4), \dots$$

In queste espressioni risolutive è

$$\text{III.2')} \quad \begin{cases} a = \cos \frac{R}{\lambda} \frac{H}{2} \\ b = \sin \frac{R}{\lambda} \frac{H}{2} \\ \cos \varphi = a - \frac{L_0}{\lambda} b \end{cases}$$

Per il progetto David è

Tabella I.

	osc. chiusi	osc. val.
λ	576.5 cm	460.9 cm
a	.5562	.3371
b	.8311	.9415
$\cos \varphi$.4693	.2140

Il lettore può verificare che tali espressioni soddisfano alle condizioni a, b, c, richieste per l'orbita chiusa, che tendono alla II.2' quando L_0 tende a 0.

La sovrapposizione delle $Z_p(\theta)$ relative ad ogni armonica dà l'orbita chiusa nel settore h-esimo. Confrontando le III.2' con la II.2' appare evidente l'effetto dei tratti rettilinei: All'oscillazione dell'orbita chiusa di Sincrotrone circolare di periodo $2\pi/m$ la cui ampiezza $\rightarrow 0$ come $\sim 1/m^2$ si aggiunge un'oscillazione di ampiezza praticamente proporzionale ad L_0 , di frequenza $\frac{R}{\lambda}$, che tende a 0 come $\sim 1/m$.

Sorge pertanto il problema di contenere entro limiti severi le ampiezze di armoniche anche relativamente elevate delle irregolarità del campo per ottenere un'orbita chiusa che si discosti il meno possibile dall'orbita principale.

§ IV. Qualche esempio significativo.

Per una descrizione numerica degli effetti qui considerati assumiamo per i valori A_m quelli dati da M.Sands 4) e cioè:

Tabella II

Campo verticale
(oscillazioni radiali)

$$A_1 = A_2 = 10^{-3}$$

$$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = 10^{-2}$$

$$A_i = 0 \quad (i = 7, 8, \dots)$$

Campo radiale
(oscillazioni verticali)

$$A_1 = A_2 = .5 \times 10^{-3}$$

$$A_3 = A_4 = A_5 = A_6 = .5 \times 10^{-2}$$

$$A_i = 0 \quad (i = 7, 8, \dots)$$

Le distorsioni $\zeta(\theta)$ dipendono - oltre che dalle A_m - anche dai valori delle fasi δ_m delle irregolarità. Tutti i dati numerici qui forniti si intenderanno calcolati con la scelta delle fasi δ_m che danno luogo alla distorsione massima della $\zeta(\theta)$, con le fissate A_m .

Riferiamoci per intanto alle oscillazioni radiali. Con i valori delle A_m di Sands si trova per la doppia ampiezza di deformazione dell'orbita principale:

per un Sincrotrone circolare

$$\left| \begin{array}{l} R = 360 \text{ cm} \\ n = .61 \end{array} \right.$$

$$\boxed{2\zeta_{\max} = 3.2 \text{ cm}}$$

per il Progetto David

$$\left| \begin{array}{l} R = 360 \text{ cm} \\ n = .61 \\ L = 2L_0 = 120.6 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$\boxed{2\zeta_{\max} = 5.3 \text{ cm}}$$

4) M.Sands : Aperture allocations for Phase II - M.I.T., Feb. 13, 1954

Va notato che:

a) Se le A_i ($i = 7, 8, \dots$) della tabella II fossero, per esempio, invece che zero, $A_i = 10^{-2}$ fino ad $i = 10$, la $2\zeta_{max}$ del Sincrotrone circolare rimarrebbe $2\zeta_{max}$ poco maggiore di 3.2 cm., mentre aumenterebbe di molto la $2\zeta_{max}$ del Progetto David.

b) I valori dati nella tabella II non devono essere interpretati come ordini di grandezza delle A_i , ma come effettivi limiti da rispettare. Infatti, se cambiassimo la sola A_3 moltiplicandola per un fattore 2, risulterebbe per il Progetto David $2\zeta_{max} = 7.0$ cm.

Il massimo della deformazione principale per il David si può trovare ponendo, ad esempio,

$$\delta_1 = 59^\circ 20'; \quad \delta_2 = 26^\circ 4'; \quad \delta_3 = 334^\circ 30'; \quad \delta_4 = 345^\circ 20';$$

$$\delta_5 = 25^\circ 37'; \quad \delta_6 = 327^\circ 31'; \quad \Theta = \frac{3\pi}{20}$$

In fig. 2 è dato l'andamento del $\Delta B_2/B_0$ corrispondente, che genera questa distorsione massima. Esistono però altre forme di $\Delta B_2/B_0$ che possono dar luogo al massimo della distorsione in qualche azimuth Θ . Per le oscillazioni verticali, si trova $2\zeta_{max} = 4.4$ cm per il Progetto David con i dati di Sands.

§ V. Correzione globale dell'orbita chiusa.

Il problema di contenere entro opportuni limiti le ampiezze delle armoniche più basse del $\Delta B/B$ (ad esempio A_1 ed A_2) può essere risolto con l'uso di correcting coils. Possono però esistere armoniche piuttosto elevate (ad esempio la quinta) difficili da contenere con questo metodo, eppur decisive per il contributo alle oscillazioni forzate. Bisogna pensare ad un ulteriore tipo di correzione delle orbite.

M.Sands 5) ha fatto la seguente proposta :

correggere la deformazione dell'orbita chiusa dovuta alle irregolarità con l'uso di campi magnetici operanti nelle sezioni diritte.

Resta da vedere quanti campi correttivi debbano essere creati, entro i tratti rettilinei per poter contenere l'ampiezza di deformazione dell'orbita principale entro un limite ragionevole.

La deformazione dell'orbita principale nel settore h - esimo per effetto delle irregolarità nelle sezioni curve, può essere scritta nella forma

$$V.1) \zeta_k(\theta) = \zeta_k(\text{sincr. circol.}) + a_k \cos \frac{R}{h} \theta_k + b_k \sin \frac{R}{h} \theta_k \quad \left(\begin{array}{l} \theta_k = \theta - k \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \\ k = 0, 1, 2, 3 \end{array} \right)$$

i coefficienti a_h e b_h essendo funzioni di tutte le A_m e S_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) e praticamente proporzionale ad L_0 .

Se in ogni sezione diritta esistono due campi correttivi costanti di data estensione lungo la zona utile della ciambella (localizzati, ad esempio, agli estremi della Sezione diritta), la deformazione (dell'orbita principale) corrispondente sarà del tipo

$$V.2) Z_k(\theta) = \alpha_k \cos \frac{R}{h} \theta_k + \beta_k \sin \frac{R}{h} \theta_k$$

dove α_k e β_k saranno funzioni lineari di tutti questi otto campi. La deformazione complessiva dell'orbita principale (la sovrapposizione delle V.1 e V.2) sarà, nel settore h - esimo

$$V.3) \zeta_{tot}(\theta) = \zeta_k(\text{sincr. circol.}) + (\alpha_k + a_k) \cos \frac{R}{h} \theta_k + (\beta_k + b_k) \sin \frac{R}{h} \theta_k$$

Poichè α_h e β_h sono funzioni lineari degli otto campi correttivi, i valori di questi campi correttivi potranno essere aggiustati in modo che sia simultaneamente per ogni h

$$V.4) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha_h + a_h = 0 \\ \beta_h + b_h = 0 \end{array} \right. \quad h = 0, 1, 2, 3 .$$

Con ciò la deformazione complessiva dell'orbita principale contiene soltanto il termine di Sincrotrone circolare.

R.R.Wilson 6) corregge effettivamente le orbite nello Strong Focusing da 1 BeV usando quattro campi in ogni sezione dritta (due per le oscillazioni orizzontali e due per le oscillazioni verticali). Ogni campo è creato da una coppia di bobine di Helmholtz.

Ringrazio il Prof. Persico che mi ha proposto il problema e che mi ha dato utili consigli durante lo svolgimento del lavoro.

6) Riunioni a Pisa del 5 - 6 - 7. I. '55

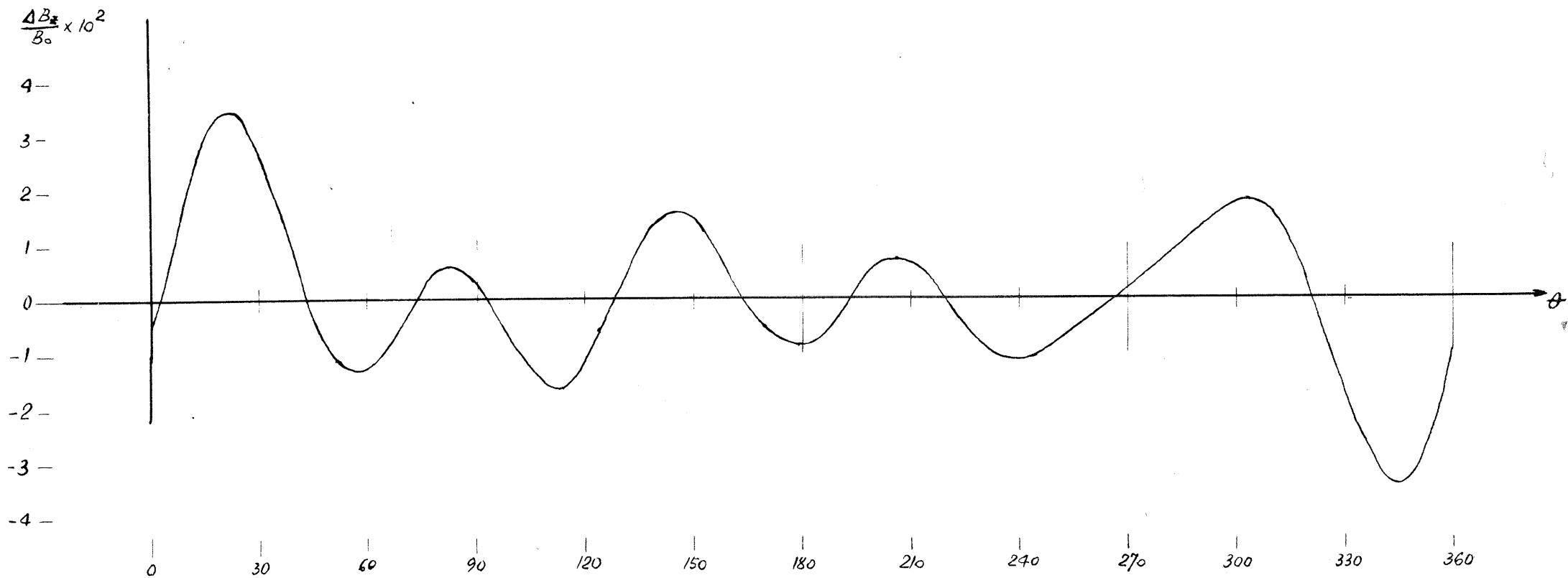


FIG. 2 -