

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/20 (24. 5. 55)

C. Bernardini: VALUTAZIONE STATISTICA DEL RENDIMENTO
D'INIEZIONE.

I.N.F.N. - Sezione Acceleratore

Gruppo Teorico

=====

C. Bernardini

Rapporto n°21

VALUTAZIONE STATISTICA DEL RENDIMENTO D'INIEZIONE

1 -

Il calcolo del rendimento d'iniezione in un sincrotrone circolare può essere svolto, in pratica, solo numericamente, per una macchina ideale di date caratteristiche geometriche e di campo. Tuttavia, una valutazione grossolana, o almeno, non ottimistica di questa grandezza, può essere dedotta mediante alcune ipotesi semplificatrici, per un sincrotrone in cui il comportamento del fascio durante l'iniezione sia largamente incerto. Lo scopo di questa valutazione si può dire raggiunto se essa è servita a dare un'idea qualitativa dell'influenza di certi fattori (come l'apertura angolare, la spiralizzazione, etc.) sul numero di particelle che iniziano il ciclo di accelerazione.

Con queste ipotesi semplificatrici si possono stimare le seguenti grandezze:

- 1) il "rendimento differenziale d'iniezione" (r.d.) ovvero la frazione degli elettroni, immessi tra il tempo t e $t + dt$, con ampiezza delle oscillazioni orizzontali di betatrone tra A ed $A + dA$, che sopravvive sino all'istante t^* di accensione R.F.
- 2) il "rendimento istantaneo" (r.i.), cioè la frazione degli elettroni immessi tra t e $t + dt$ con ogni ampiezza A , che giunge all'istante t^* .

3) il "rendimento totale" (r.t.), ovvero la percentuale degli elettroni immessi, per ogni t e con ogni A , che è ancora presente nella ciambella all'istante t^* .

Di questi tre rendimenti, il più importante è r.i., perchè determina a sua volta il rendimento di cattura (vedi rapp. n.4) e quindi, a parte le perdite per scattering, il rendimento finale del sincrotrone.

§ 2 -

Supporremo che l'iniettore sia rappresentato da un segmento normale alla parete della ciambella e giacente nel piano mediano (v. fig. 1). Da una porzione ξ di questo segmento, situata verso l'estremo libero, vengono iniettati elettroni in direzioni comprese entro un angolo $2\eta/\lambda$ (λ è la (lunghezza d'onda)/ 2π delle oscillazioni orizzontali di betatrone); la distribuzione di particelle sarà supposta uniforme attorno alla normale per il centro del segmentino iniettante (v. fig. 2). L'iniettore avrà inoltre un bordo di spessore d (v. fig. 2).

Indicheremo con \bar{x} la distanza dell'orbita istantanea al tempo t , per una particella iniettata in quell'istante con un certo momento p , dall'estremo inferiore del segmento iniettante. Supporremo in seguito che il fascio sia monocromatico, di momento p_0 tale che al tempo t^* di accensione della R.F. il raggio istantaneo concida con il raggio R dell'orbita principale. Il valore di \bar{x} risulta, con questa ipotesi, comune a tutte le particelle iniettate al tempo t : se σ è la contrazione per giro dell'orbita istantanea (spiralizzazione) e T_0 è il periodo di rivoluzione delle particelle, si ha

$$\bar{x} = \sigma \frac{t}{T_0} + \text{costante}$$

Fisseremo la costante pensando che l'iniezione cominci, per $t = 0$, quando $\bar{x} = 0$. Questa relazione fissa anche il valore di t^* in funzione di a , larghezza della ciambella: infatti le particelle immesse con $\bar{x} > a/2$ hanno anche l'ampiezza di oscillazione $> \frac{a}{2}$ e vengono eliminate per urto contro le pareti. Il valore più conveniente di t^* è quindi:

$$t^* \approx T_0 \frac{a}{2\sigma}$$

Gli elettroni iniettati in corrispondenza di un certo valore di \bar{x} hanno ampiezza A di betatrone $\geq \bar{x}$.

Precisamente sarà

$$\bar{x} \leq A \leq \bar{x} + \delta(\bar{x})$$

dove

$$\delta(\bar{x}) = [(\bar{x} + \epsilon)^2 + \eta^2]^{1/2} - \bar{x}$$

Per $\bar{x} \gg \eta$, $\eta \gg \epsilon$, si ha

$$\delta(\bar{x}) \approx \epsilon + \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\bar{x}}$$

I calcoli che svolgeremo in seguito si riferiranno in pratica alla sopravvivenza di elettroni per i quali $\bar{x} \gg \eta, \epsilon$ ma l'errore commesso sopprimendo del tutto le piccole ampiezze di betatrone è certamente molto piccolo se $\frac{a}{2} \gg \eta, \epsilon$ come si può vedere con una indagine numerica più raffinata. Da un punto P del segmento iniettante, alla distanza x_0 dall'orbita istantanea

$$\bar{x} \leq x_0 \leq \bar{x} + \epsilon$$

vengono immessi elettroni in una direzione che forma un angolo y_0/λ con la normale all'iniettore,

$$-\eta \leq y_0 \leq \eta$$

Supporremo che vi siano dx_0/ϵ elettroni nell'intervallo $x_0, x_0 + dx_0$; e dy_0/η nell'intervallo $y_0, y_0 + dy_0$.
Se $\theta = 0$ è l'azimuth dell'iniettore, ed $x(\theta)$ è la distanza di un elettrone dall'orbita istantanea all'azimuth θ , nell'approssimazione della teoria lineare si ha

$$x(\theta) = x_0 \cos \sqrt{1-n} \theta + y_0 \sin \sqrt{1-n} \theta$$

dove n è l'indice del campo.

Posto

$$x_0 = A \cos \varphi$$

$$y_0 = A \sin \varphi$$

cioè

$$x = A \cos[\sqrt{1-n} \theta - \varphi]$$

si ha

$$\varphi = \text{artg} \frac{y_0}{x_0}$$

e l'intervallo $\Delta\varphi$ di fasi innesse, attorno alla fase $\varphi = 0$, è dato da

$$\Delta\varphi = 2 \text{artg} \frac{\eta}{\bar{x}}$$

Per $\bar{x} \gg \eta, \epsilon$,

$$\Delta\varphi \approx 2 \frac{\eta}{\bar{x}}, \quad \varphi \approx \frac{y_0}{\bar{x}}$$

e la distribuzione della fasi è praticamente uniforme nell'intervallo $-\frac{1}{2} \Delta\varphi, +\frac{1}{2} \Delta\varphi$

§ 3 -

Trascurando completamente il fatto che il valore di n fissa la posizione dei massimi delle oscillazioni di betatrone dopo un giro, due giri etc., e supponendo che la macchina in questione sia così lontana dalle condizioni ideali di funzionamento che il valore del periodo delle oscillazioni di betatrone risulti del tutto incerto, valuteremo la probabilità che certe particelle vengano perdute dopo un giro, due giri, etc.

penseremo perciò che l'arco compreso tra $\theta - \frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1-n}}$ e $\theta + \frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1-n}}$, che rappresenta il luogo dei massimi delle oscillazioni di betatrone dopo un giro, abbia il suo centro,

con uguale probabilità, in qualunque θ tra 0 e 2π .

Questa è certamente l'ipotesi meno realistica che si fa in questo calcolo: è necessario infatti, perchè abbia un senso, che le irregolarità siano del tipo lineare, cioè che siano riassunte dall'incertezza sul valore di n ; ed inoltre questa incertezza dev'essere tale da includere, p.es. ogni valore di n tra 0 ed 1.

Allora la probabilità che tra $\theta - \frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1-n}}$ e $\theta + \frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1-n}}$ sia contenuto anche l'azimuth dell'iniettore è

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-n}}$$

Supponiamo per un momento di essere certi che i massimi si ritrovino sotto l'iniettore dopo un giro; è facile rendersi conto del fatto che la massima frazione di particelle che può essere perduta in queste condizioni è data dal rapporto tra l'intervallo α_1 di fasi (che comprende tutti quegli elettroni che hanno, per $\theta = 0$, $x \geq \bar{x} - d + \sigma$) e $\Delta\varphi/\sqrt{1-n}$. Assegnati A ed \bar{x} , si ha:

$$\alpha_1 = 2 \arccos \frac{\bar{x} + \sigma - d}{A} \quad (\text{v. fig. 3})$$

Consideriamo ora un cerchio di raggio unitario e prendiamo su di esso, a caso, due segmenti di lunghezza α_1 e $\Delta\varphi/\sqrt{1-n}$; sia inoltre $\alpha_1 \leq \frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1-n}}$. Il valore medio della variabile q che rappresenta la lunghezza ($\leq \alpha_1$) per la quale i due archi sono sovrapposti, vale $\alpha_1 -$

In definitiva la probabilità di sopravvivenza di elettroni di dati A ed \bar{x} è perciò

$$1 - \frac{\alpha_1}{2\pi}$$

(Il seguente ragionamento, più grossolano, conduce anch'esso allo stesso risultato: l'ordine di grandezza della frazione perduta quando i massimi si ritrovano sotto l'iniettore è:

$$\frac{\alpha_1}{\Delta\varphi} \sqrt{1-n}$$

Ma la probabilità che si ritrovino sotto l'iniettore è $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} \sqrt{1-n}$, quindi la frazione effettivamente permuta è

$$\frac{\alpha_1 \sqrt{1-n}}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi \sqrt{1-n}} = \frac{\alpha_1}{2\pi}$$

Un analogo calcolo si può svolgere per i giri successivi; posto:

$$\alpha_e = 2 \arccos \frac{\bar{x} + l\sigma - d}{A} \quad \text{per } l < \frac{A - \bar{x} + d}{\sigma}$$

$$\alpha_e = 0 \quad \text{per } l \geq \frac{A - \bar{x} + d}{\sigma}$$

la probabilità di sopravvivenza dopo m giri è

$$P_m(A, \bar{x}) = \left(1 - \frac{\alpha_1}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{2\pi}\right) \dots \left(1 - \frac{\alpha_m}{2\pi}\right)$$

Si noti che per $m > \bar{m} = \frac{A - \bar{x} + d}{\sigma}$ la P_m resta costante e perciò sarà indicata con P : essa si otterrà estendendo il prodotto fino al massimo intero contenuto in \bar{m} .

Si può ora notare che, per $\bar{x} \gg \eta$ è $\alpha_e \ll 2\pi$, così che

$$P_m(A, \bar{x}) \approx 1 - \frac{1}{2\pi} \sum_{e=1}^m \alpha_e$$

Poniamo:

$$A - \bar{x} = \xi \ll \bar{x}$$

così che

$$\frac{\bar{x} + l\sigma - d}{A} \approx 1 - \frac{d + \xi - l\sigma}{\bar{x}} \leq 1$$

e poi

$$\arccos \frac{\bar{x} + l\sigma - d}{A} \approx \left\{ \frac{2(d + \xi - l\sigma)}{\bar{x}} \right\}^{1/2}$$

da cui, per ogni $m > \bar{m}$, dove

$$\bar{m} = \frac{\xi + d}{\sigma}$$

si ha

$$P(A, \bar{x}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\bar{x}}} \sum_{e=1}^{\bar{m}} (d + \xi - l\sigma)^{1/2}$$

Se $d \geq \sigma$, allora $\bar{m} \geq 1$; ma per $d < \sigma$ si ha che

$$P(A, \bar{x}) = 1 \quad \text{se } \xi < \sigma - d$$

Approssimando la somma con un integrale, si trova

$$P(A, \bar{x}) \approx 1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\bar{x}}} \left\{ \frac{2}{3} \frac{(\xi + d - \sigma)^{3/2}}{\sigma} + \frac{1}{2} (\xi + d - \sigma)^{1/2} \right\}$$

§ 4 -

Partendo da questo r.d., $P(A, \bar{x})$, valuteremo il r.i.

$\rho_i(\bar{x})$ nel caso semplice in cui

$$\sigma \approx d$$

$$\varepsilon = 0$$

Per $\bar{x} \gg \eta$ la ξ varia nell'intervallo

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \frac{\eta^2}{\bar{x}}$$

La distribuzione delle direzioni di emergenza, cioè delle y_0 , è uniforme nell'intervallo $-\eta, \eta$; inoltre

$$y_0 = (2\bar{x}\xi)^{1/2}$$

Integrando la $P(A, \bar{x})$ su questa distribuzione si ottiene il r.i. $\rho_i(\bar{x})$:

$$\rho_i(\bar{x}) = \int_0^{\eta} P(A, \bar{x}) \frac{dy_0}{\eta} = 1 - \frac{1}{12\pi} \frac{\eta^3}{\sigma \bar{x}^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\eta}{\bar{x}}$$

Questa formula deve ritenersi valida per $\bar{x} \gg \eta$

In pratica, se x_1 è la radice positiva di

$$\rho_i(\bar{x}) = 0$$

cioè, per $\eta \gg \sigma$,

$$x_1 \approx \frac{1}{2\sqrt{3}\pi} \frac{\eta^{3/2}}{\sigma^{1/2}}$$

assumeremo per $\rho_i(\bar{x})$ l'espressione

$$\rho_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{per } \bar{x} \leq \bar{x}_1,$$

$$\rho_i(\bar{x}) = 1 - \frac{1}{12\pi} \frac{\eta^3}{\sigma \bar{x}^2} - \frac{1}{4\pi} \frac{\eta}{\bar{x}}, \quad \bar{x} \geq \bar{x}_1$$

Il rendimento totale si valuta facilmente nell'ipotesi che il numero di particelle iniettate per unità di tempo sia costante. La frazione del numero totale iniettata tra t e $t + dt$ è

$$\frac{dt}{t^*} = \frac{2 d\bar{x}}{a}$$

e quindi il r.t. ρ è

$$\rho = \int_0^{\alpha/2} \frac{2 p_i(\bar{x})}{a} d\bar{x}$$

cioè

$$\rho = \frac{a - 2\bar{x}_1}{a} - \frac{1}{6\pi} \frac{\eta^3}{\sigma a} \left(\frac{1}{\bar{x}_1} - \frac{2}{a} \right) - \frac{1}{2\pi} \frac{\eta}{a} \ln \frac{a}{2\bar{x}_1}$$

Poniamo

$$f = \frac{2\bar{x}_1}{a}, \quad \omega = \frac{\eta}{a}$$

così che

$$\rho = (1-f)^2 + \frac{\omega}{2\pi} \ln f$$

In pratica,

$$\rho \cong (1-f)^2$$

§ 5 -

Si può far uso dell'espressione ottenuta per $p_i(\bar{x})$ per valutare la durata efficace Θ_{eff} dell'iniezione come è definita nel rapp. n.4. Riprendendo i simboli di quel rapporto è notando che

$$\bar{x} = C(\alpha - H)$$

si ha:

$$\Theta_{\text{eff}} = \frac{CT_0}{\sigma} \int_0^{\alpha} p_i(\bar{x}) \Phi(H) dH$$

Alla funzione $p_i(\bar{x})$ si può sostituire con buona approssimazione, per $\alpha \gg 2\bar{x}_1$, la funzione a gradino; (v. fig.4)

$$p_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{per } \bar{x} \leq 2\bar{x}_1$$

$$p_i(\bar{x}) = 1 \quad \text{per } \bar{x} \geq 2\bar{x}_1$$

Questa funzione dà il valore corretto di ρ (r.t.) entro termini $O\left(\frac{x_1^2}{a^2}\right)$, cioè $O(t^2)$ essendo $f = \frac{2\bar{x}_1}{a}$

Posto

$$\alpha_0 = \frac{2\bar{x}_1}{C}$$

si ha

$$\Theta_{\text{eff}} \cong \frac{CT_0}{\sigma} \int_0^{\alpha - \alpha_0} \Phi(H) dH$$

ma

$$\alpha_0 = 2 \alpha f \quad , \quad \rho \approx 1 - 2 f$$

così che

$$\theta_{eff} \approx \frac{c T_0}{\sigma} \int_0^{\rho \alpha} \Phi(H) dH$$

La correzione, proveniente dalla variazione di $\rho; (\bar{x}) \text{ cm}^{-1}$ per il θ_{eff} , è del tipo annunciato nel rapp. 4, § 5.

Nella fig. 8 di quel rapporto si trova poi già graficato il valore optimum della φ_s ed il corrispondente

$$\theta_{eff} = \frac{c T_0}{\sigma} J(\rho \alpha)$$

purchè si legga ora in ascisse il prodotto $\rho \alpha$ in luogo di α .

§ 6 - Esempi numerici.

Fissiamo lo spessore del bordo dell'iniettore.

$$d = 0,2 \text{ cm.}$$

e la larghezza utile della caambella

$$a = 12 \text{ cm.} \quad (\text{v. rapp. n.17})$$

Si può pensare che una spiralizzazione

$$\sigma \approx d = 0,2 \text{ cm}$$

sia ragionevolmente prossima all'optimum per questo motivo:

il numero di particelle iniettate N è proporzionale a $\frac{1}{\sigma}$

il numero di quelle che giungono all'accensione della R.F.

è proporzionale a ρ/σ . Se per il r.t. ρ si sostituisce

l'espressione trovata precedentemente, si trova che ρ/σ

crece, al diminuire di σ , sino ad un massimo che è in

genere in corrispondenza di un $\sigma \ll d$. Ma per

l'espressione di ρ non è più corretta ed è certamente trop-

po ottimistica; ci si deve attendere infatti che ρ tenda

molto rapidamente a zero quando $\sigma < d$. E' perciò molto

plausibile che il massimo effettivo di ρ/σ si trovi in

corrispondenza di $\sigma \approx d$.

Se il raggio della macchina (raggio R), è di 360 cm. e con le altre grandezze scelte come sopra (si noti che il valore di n è inessenziale, se l'iniezione è ad alta energia e se si tabula in funzione di η), si ha

η	\bar{x}_i	f	ρ	$\rho\alpha$	$J(\rho\alpha)$	Θ_{eff}
0.0	0.00cm.	0.00	1.00	1.25	0.34	0.76 μ sec.
0.5	0.13	0.02	0.96	1.20	0.32	0.71
1.0	0.36	0.06	0.88	1.10	0.28	0.62
1.5	0.67	0.11	0.79	0.99	0.24	0.53
2.0	1.01	0.17	0.69	0.86	0.18	0.40

Il periodo di rotazione, a 2.5 MeV totali per l'energia di iniezione (v. rapp. n.16) è di 0.0935 μ sec. e la durata t^* dell'iniezione è di 2.8 μ sec.

§ 7 - Conclusione

Come si vede dalla tabella del § 6; la frazione di elettroni che inizia il ciclo di accelerazione (cioè Θ_{eff}/t^*) sembra piuttosto elevata, anche nel caso di fasci di grande apertura.

Va notato però che in questo calcolo si è sempre supposto l'iniettore tanto affondato nella ciambella da consentire ad ogni particella iniettata di evitare la parete esterna: all'aumentare di η , perciò, il valore di a (larghezza "utile" della ciambella) va stimato in modo che questa condizione sia sempre soddisfatta.

Si può inoltre dire che i risultati trovati danno un'idea qualitativa del comportamento di un fascio che esce da un punto particolarmente favorito dell'iniettore, precisamente quello che dista di meno dal suo bordo inferiore: la spiralizzazione scelta va intesa perciò come un buon limite inferiore e l'effetto delle dimensioni laterali E del fascio sarà quello di aumentare un po' questo limite.

D'altra parte si è supposto che in ognuno degli \bar{n} giri immediatamente seguenti la loro iniezione, le particelle abbiano una probabilità finita di urtare contro l'iniettore, mentre è chiaro che per un ben definito valore di n (non di risonanza) e per una $\sigma \approx \sigma'$ il numero di giri efficaci in questo senso è uno o al più due (p.es., per $n = 0.61$ e per il p^{109} . IV°, rapp.16, il terzo giro è praticamente il solo giro "critico").

Per la scelta fatta di a e di σ il Q_{eff} , calcolato può quindi dirsi un po' sovrastimato, mentre quest'ultima circostanza relativa al numero dei giri efficaci, insieme con la completa soppressione delle piccole ampiezze di betatrone, tendono a ridurlo rispetto al valore che avrebbe nel caso ideale.

Roma, 24 maggio 1955

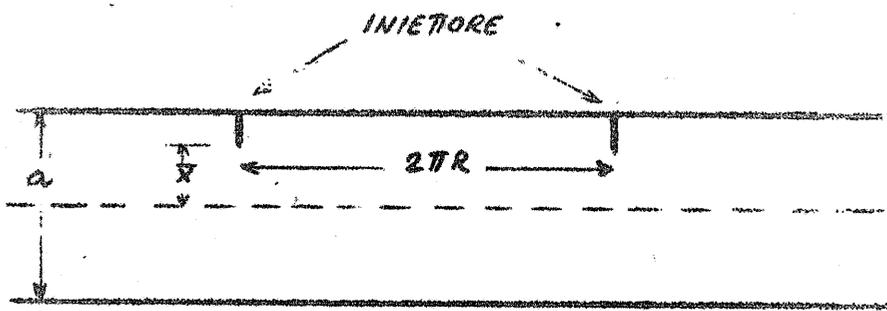


FIG. 1

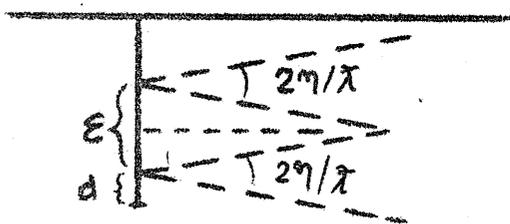


FIG. 2

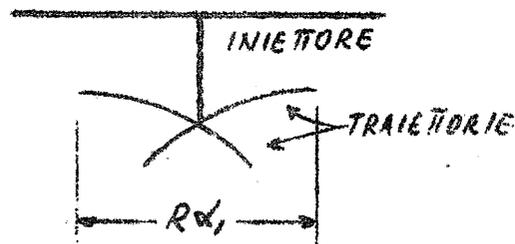


FIG. 3

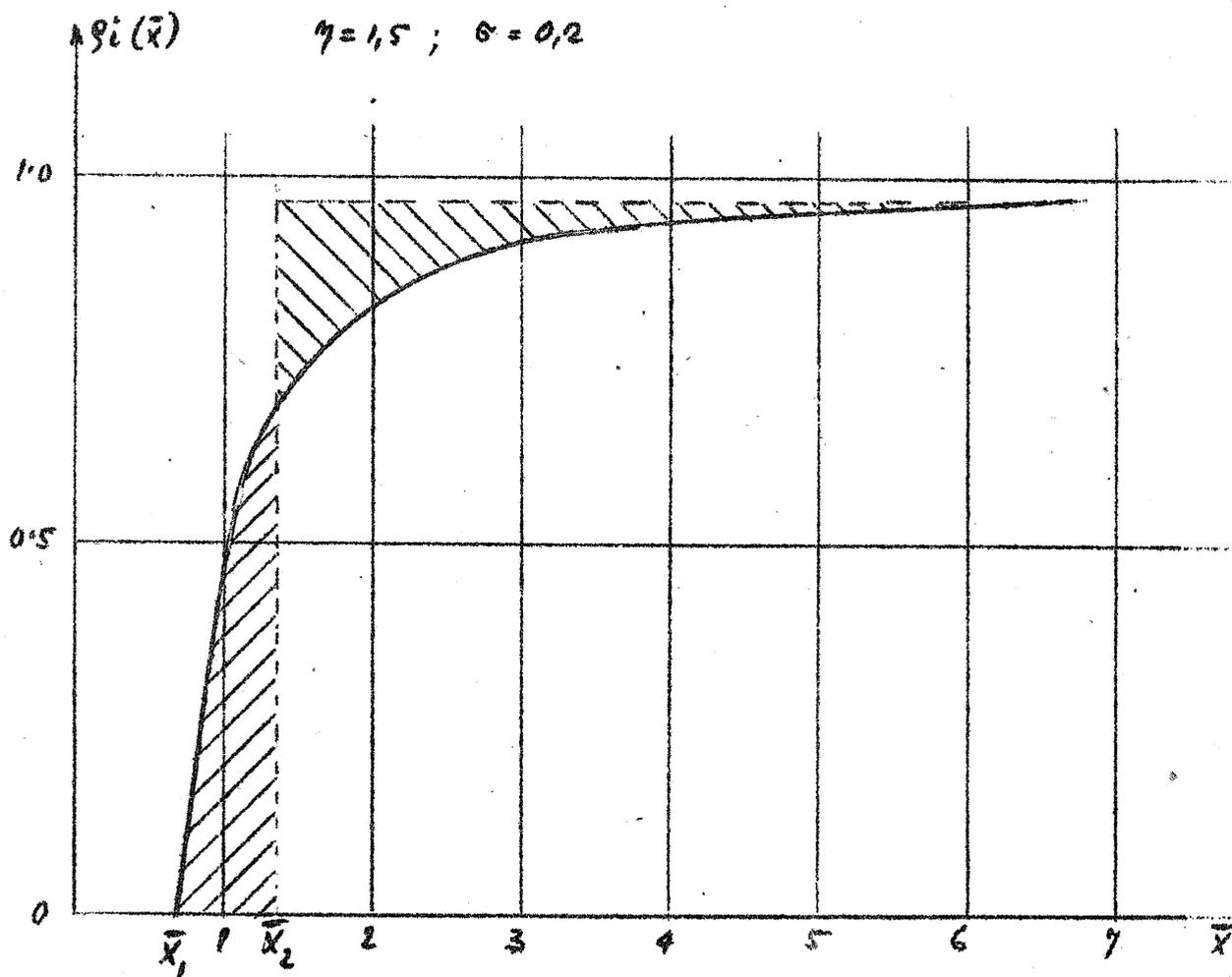


FIG. 4