Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/17 (19. 4. 55)

M. Puglisi: SALITA DELLA TENSIONE A RADIOFREQUENZA AI CAPI DI UN CIRCUITO OSCILLANTE ALIMENTATO CON UN GENERATORE A TRIODO.

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE
Sezione Acceleratore

Relazione: R 9 (°)
19.4.1955.

SALITA DELLA TENSIONE A RADIOFREQUENZA AI CAPI DI UN CIRCUITO OSCILLANTE ALIMENTATO CON UN GENERATORE A TRIODO.

(°) La stampa della relazione n°9 precede la stampa della relazione N° 8.

RELAZIONE RF 9

Salita della tensione a radiofrequenza ai capi di un circuito oscillante alimentato con un generatore a triodo.

Ci proponiamo qui di iniziare lo studio della eccitazione a impulsi di un risuonatore a cavità. A questo scopo cominceremo con lo studio dell'eccitazione di un circuito oscillante parallelo per avere un'idea di prima approssimazione sull'andamento dei fenomeni.

Consideriamo lo schema riportato in figura 1

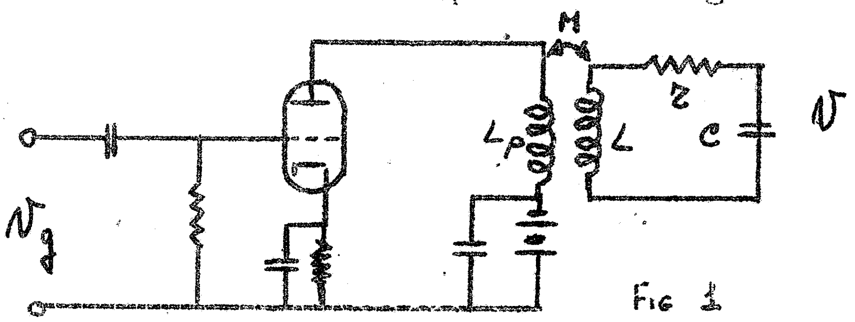

Fig 1

Il circuito in questione è quello r; L; c; accoppiato induttivamente al generatore a triodo; la tensione v_g applicata al tubo si intende perfettamente sinusoidale e di frequenza pari a quella di risonanza del circuito stesso

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$Q = \dfrac{\omega_o L}{r}$ è il fattore di merito del circuito in esame; ed al solito modo definiamo :

$$h = \frac{M}{\sqrt{LL_p}}$$

come il coefficiente di accoppiamento.

Nella relazione precedente (RF 8) abbiamo visto come la v_p e la v siano legate dalla relazione :

$$v = v_p \sqrt{\frac{L}{L_p}} \; \frac{h}{h^2 + JQ^{-1}}$$

questa espressione ci permette di definire il modulo del rapporto di trasformazione tra primario e secondario :

$$|n| = \left|\frac{v}{v_p}\right| = \sqrt{\frac{L}{L_p}} \; \frac{h}{\sqrt{h^4 + Q^{-2}}}$$

Nel seguito adopereremo n come rapporto di trasformazione omettendo peraltro la notazione di "modulo".

Ciò premesso impostiamo il problema cose segue :

Siano v_p e v i valori di cresta della tensione alternata di placca e della tensione ai capi del condensatore (il condensatore rappresenta per noi la "gap" della cavità risonante).

Allora la potenza che il circuito deve assorbire per mantenere ai suoi capi la tensione v vale:

$$W_1 = \frac{v^2}{2QZ}$$

come già si è visto nella relazione RF 8.

Se però durante il funzionamento la tensione di cresta varia allora la potenza che il circuito deve ricevere o cedere per compiere la variazione deve essere eguale alla derivata della energia immagazzinata rispetto al tempo.

In altri termini :

$$W_2 = \frac{dE}{dt}$$

ma $\quad E = \frac{1}{2}\, c\, v^2 \quad$ ne segue $\quad W_2 = c\, v\, v'$

allora per un dato istante la potenza assorbita dal circuito avrà il valore :

$$W_t = W_1 + W_2 = \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{2QZ} + 2\, c\, \frac{v'}{v} \right)$$

allora il <u>carico</u> trasferito sul circuito primario sarà :

$$R = \frac{v^2}{2\, W_t} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2\, v_p^2}{2\, W_t\, n^2} = \frac{v_p^2}{2\, W_t}$$

di qui sostituendo :

$$R = \frac{v_p^2}{2 \cdot \frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{QZ} + 2\, c\, \frac{v'}{v} \right)} = \frac{v_p^2}{n^2 v_p^2 \left(\frac{1}{QZ} + 2c\, \frac{v_p'}{v_p} \right)}$$

da cui l'espressione generale del carico trasferito (funzione del tempo)

$$R = \frac{v_p QZ}{n^2 \left(v_p + 2cQZv_p' \right)}$$

e se teniamo conto che :

$$cZ = c\sqrt{\frac{L}{c}} = \frac{1}{\omega_o}$$

allora l'espressione del carico trasferito diviene :

$$R = \frac{v_p\, QZ}{n^2\,(v_p + 2\,\frac{Q}{\omega_o}\,v_p')}$$

Calcoliamo allora la corrente nel circuito primario. (Sempre bene inteso che qui si parla solo del componente alternato a frequenza $f = \frac{\omega_o}{2\pi}$).

Se supponiamo che il tubo funzioni in caratteristica (in una successiva relazione estenderemo il risultato al funzionamento in classe "C_2") allora per la corrente primaria vale la relazione :

$$I_p = \frac{\mu\, v_g}{r_p + R} = \frac{Gm}{1 + \frac{R}{r_p}} = v_g$$

in cui μ è il coefficiente di amplificazione ed r_p la resistenza di placca del tubo e Gm la trans-conduttanza. Sostituendo in questa relazione il valore di R si ottiene :

$$I_p = \frac{Gm\, v_g}{1 + v_p\,\frac{QZ}{n^2\, r_p}\,\cdot\,\frac{1}{v_p + 2\,\frac{Q}{\omega_o}\,v'}}$$

(con questa formula non si tien conto della induttanza dispersa sul circuito di placca; ma effettivamente questo contributo è abbastanza piccolo).

Sviluppando e semplificando :

$$I_p = Gm\, e_g \frac{v_p + 2\frac{Q}{\omega_o} v'_p}{v_p\left(1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}\right) + 2\frac{Q}{\omega_o} v'_p}$$

In base alle precedenti ipotesi si deve allora avere :

$$v_p = R\, I_p$$

$$v_p = \frac{\cancel{v_p}\, QZ}{n^2 \cancel{\left(v_p + 2\frac{Q}{\omega_o} v'_p\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(v_p + 2\frac{Q}{\omega_o} v'_p\right)}}{\cancel{v_p}\left(1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}\right) + 2\frac{Q}{\omega_o} v'_p}\, Gm\, v_g$$

Semplificando e ordinando si ha :

$$v_p\left(1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}\right) + 2\frac{Q}{\omega_o} v'_p = Gm\, v_g \frac{QZ}{n^2}$$

e cioè passando al valore di v si ha :

$$v' + \frac{\omega_o}{2Q}\left(1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}\right) v = Gm\, v_p \frac{\omega Z}{2n}$$

integrando si ha l'equazione che regola il fenomeno :

$$v_p = v_o\, e^{-\frac{\omega_o}{2Q}\left(1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}\right)t} + \frac{Gm\, v_g \frac{QZ}{n}}{1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}}$$

Se adesso imponiamo che per $t = 0$ sia v_g e quindi $v = 0$ e che all'istante successivo venga bruscamente applicata la v_g si ha :

$$v_p = \frac{n\, Gm\, v_g}{\frac{1}{r_p} + \frac{n^2}{QZ}} \cdot \left[1 - e^{-\frac{\omega_o}{2Q}\left(1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}\right)t} \right]$$

La costante di tempo del circuito in esame vale :

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_o} \frac{1}{1 + \frac{QZ}{n^2 r_p}}$$

possiamo ammettere che il regime venga raggiunto al momento in cui $t = \pi\tau$ dal momento della inserzione brusca della v_g. Quindi se si vuole un certo tempo di salita e non si può o non si vuole variare il fattore di merito del risuonatore occorre giocare sul termine $n^2 r_p$ e precisamente detto Δt il tempo di salita voluto risulta :

$$n^2 r_p = Z \frac{\Delta t \cdot f}{1 - \Delta t \frac{f}{Q}}$$

va da se che il più lungo tempo di andata a regime rimane

$$\Delta t = \frac{Q}{f}$$

che è quello corrispondente allo smorzamento naturale di oscillazioni libere preesistenti.

La pendenza iniziale della curva di inviluppo dei valori di cresta della tensione a R.F. è data da:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{Gm}{2\,n\,c}\, v_g$$

Fino a questo punto abbiamo esaminato l'andamento della tensione ai capi del circuito; vogliamo ora ricavare l'espressione della potenza assorbita.

Si è già visto che la potenza che istante per istante il circuito assorbe è

$$W_t = \frac{v^2}{2QZ} + c\,v\,v'$$

Sostituendo i valori trovati per la v(t) si ha l'spressione cercata : poniamo per semplicità :

$$K = \frac{n\ Gm\ v_g}{\frac{1}{r_p} + \frac{n^2}{QZ}} \qquad e \qquad 1 + \frac{QZ}{n^2\ r_p} = \alpha$$

Per la W_t si ha allora :

$$W_t = \frac{K^2}{2QZ}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 + K\, C\, \frac{K}{\tau}\; e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\text{ma} \quad c\tau^{-1} = \frac{\omega_o\, c}{2Q}\left[\frac{1}{1 + \frac{QZ}{n^2\ r_p}}\right]^{-1} = \frac{\alpha}{2QZ}$$

per cui sostituendo:

$$W_t = \frac{K^2}{2QZ}\left[1 - 2\, e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}} + \alpha\, e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right]$$

ma K^2 è il valore del quadrato della tensione di regime; ne segue che :

$$W_\infty = \frac{K^2}{2QZ}$$

è la potenza che il circuito assorbe a regime; sostituendo e semplificando :

$$W_t = W_{oo}\left[1 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-2\frac{t}{\tau}} + \alpha e^{-\frac{t}{\tau}} - \alpha e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]$$

raccogliendo :

$$W_t - W_{oo}\left[1 - (\alpha-1)\, e^{-2\frac{t}{\tau}} + (\alpha-2)\quad e^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

Possiamo osservare che α è sempre maggiore di 1 e tanto più rapida sarà la salita dell'inviluppo della tensione quanto più grande sarà α in quanto compare a denominatore della costante di tempo.

Vogliamo allora calcolare quale sia la max potenza che il tubo deve erogare in una data condizione:

$$\frac{d\,W_t}{dt} = 0 = \frac{2}{\tau}\,(\alpha - 1)\, e^{-2\frac{t}{\tau}} - (\alpha - 2)\,\frac{e}{\tau}^{-\frac{t}{\tau}}$$

da cui risolvendo $t_o = \tau \,\log_e \dfrac{2(\alpha-1)}{\alpha - 2}$

cioè la potenza erogata dal tubo ha effettivamente un massimo reale e maggiore di W_{oo} per $t = t_o$ e solamente se α è $>$ di 2.

Esaminiamo questo caso :

$$W_t^{max} = W_{oo}\left[1 + (\alpha-2)\, e^{-\log\frac{2(\alpha-1)}{\alpha - 2}} - (\alpha-1)e^{-2\log\frac{2(\alpha-1)}{\alpha - 2}}\right]$$

ma poiché :

$$- e^{n \log_e x} = \frac{1}{x^n}$$

Sostituendo e semplificando :

$$W_t = W_\infty \left[1 + \frac{(\alpha - 2)^2}{4(\alpha - 1)} \right]$$

appare quindi come al crescere di α la potenza erogata dal tubo sia in un certo intervallo maggiore di W_∞ secondo la relazione precedente. Questi semplici risultati ci permettono già di scorgere che se si vuole ottenere un determinato "rise-time" allora bisogna, noti gli elementi del circuito trovare una valvola per cui $n^2 r_p$ soddisfi la relazione già vista; ma non basta, occorre anche che la valvola stessa possa fornire la potenza richiesta e senza variare troppo il valore di r_p. Ne risulta che se si vuole forzare sul tempo di salita (α molto maggiore di 2) la valvola non deve essere adattata al circuito per la potenza di regime ma per valori molto maggiori.

La valvola non risulta quindi pienamente sfruttata durante il periodo di regime per quanto lavori con miglior rendimento.

Con questo possiamo considerare tèrminato questo studio di prima approssimazione.

Facciamo presente che alla base delle considèrazioni fatte stanno le due ipotesi seguenti :

I°) - I parametri della valvola non variano al variare del punto di lavoro.

II°) - La valvola fornisce energia durante tutte le fasi del ciclo della tensione a R.F.

Che queste ipotesi sono troppo lontane dal vero lo si vede subito: La prima perché la valvola ha sempre un comportamente francamente non lineare e comunque variabile fortemente al variare del punto di lavoro.

La seconda perché in genere le valvole in questione sono alimentate in classe "C" ed eventualmente in classe "C_2".

In una relazione successiva estendermo ai casi pratici le considerazioni già fatte e riporteremo alcune verifiche sperimentali.

(Mario Puglisi)