

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/13 (5. 4. 55)

E. Persico, C. Bernardini: STATICA DELLA CIAMBELLA

STATICA DELLA CIAMBELLA

Si studiano le condizioni in cui una ciambella con certe caratteristiche geometriche, sottoposta alla pressione atmosferica, è sufficientemente garantita contro le probabilità di rottura. Si calcola inoltre la deformazione prodotta dalla pressione atmosferica.

§ 1 - Caratteristiche geometriche.

E' sufficiente, in pratica, considerare le sollecitazioni sul contorno di una sezione normale di un cilindro infinitamente lungo, grazie al fatto che il raggio di curvatura del cerchio, luogo dei centri delle sezioni, è \gg delle dimensioni lineari delle sezioni stesse. Interessano quindi soltanto le caratteristiche geometriche di una sezione normale, che saranno le seguenti:

- 1) spessore, h , delle pareti, uniforme;
- 2) contorno formato di quattro archi di cerchio raccordati, a due a due di ugual raggio ed opposti rispetto al centro della sezione (v. fig. 1).

Nei successivi sviluppi si terrà presente, soprattutto, il caso in cui sono assegnati i semidiametri a e b ($b < a$) della sezione (*) e verranno studiate le caratteristiche geometriche

(*) Queste dimensioni si riferiscono alla linea mediana della parete, cioè quella corrente a metà dello spessore.

ed elastiche in funzione di un parametro, θ_0 , che rappresenta la semi-apertura di ciascuno dei due archi di grande raggio che fanno parte del contorno (v. fig. 1).

Riferiamo la sezione della ciambella ad un sistema cartesiano $O x y$ con origine nel centro della sezione ed assi sovrapposti ai diametri di essa (v. fig. 1). Data la simmetria, basterà considerare un quarto del contorno, da A a B . Sia P_0 il punto di raccordo dei due archi di cerchio $B P_0$ e $P_0 A$, di raggi R ed r rispettivamente; θ_0 l'apertura angolare dell'arco $B P_0$, e quindi $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ quella dell'arco $P_0 A$.

Dati a , b e θ_0 , r ed R si ricavano con le formule seguenti:

$$(1) \quad r = \frac{b \sin \theta_0 - a (1 - \cos \theta_0)}{\sin \theta_0 + \cos \theta_0 - 1}$$

$$(2) \quad R = \frac{a \cos \theta_0 - b (1 - \sin \theta_0)}{\sin \theta_0 + \cos \theta_0 - 1}$$

Si noti che

$$R - r = \frac{a - b}{\sin \theta_0 + \cos \theta_0 - 1} = \frac{R - b}{\cos \theta_0}$$

ed inoltre

$$(3) \quad \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} r = b$$

$$(4) \quad \lim_{\theta_0 \rightarrow 0} \theta_0 R = a - b$$

L'area A della sezione è data da

$$(5) \quad A = (\pi - 2\theta_0) r^2 + 2\theta_0 R^2 - 2(R - b)(a - r)$$

Abbiamo fissato l'attenzione, in particolare, su una ciambella avente per semiasse

$$a = 10 \text{ cm}$$

$$b = 3,8 \text{ cm}$$

con diversi valori di θ_0 compresi fra 0° e 30° . I valori di r , R , A risultano allora quelli riportati nella tabella I.

Tabella I

$\theta_0 =$	0°	5°	10°	20°	30°	
r	3.80	3.52	3.20	2.47	1.53	cm
R	∞	77.9	42.3	24.5	18.5	cm
A	139.6				114.5	cm ²

§ 2 - Studio generale delle sollecitazioni.

Consideriamo un tratto di ciambella di lunghezza unitaria, e sia AB l'arco della sezione di parete (più esattamente della linea mediana) compreso nel primo quadrante. Su di esso agisce dall'esterno la pressione atmosferica p : quindi su ogni elemento ds di contorno agisce una forza dF , normale, diretta verso l'interno, pari a $p ds$, e quindi di componenti $dF_x = p dy$, $dF_y = -p dx$.

Le azioni che il rimanente contorno esercita sull'arco AB attraverso la sezione in A siano compendiate in una forza di componenti X_A , Y_A e una coppia di momento M_A (considereremo positivi i momenti che agiscono in verso orario). Similmente siano X_B , Y_B , M_B gli elementi dell'azione esercitata sull'arco AB attraverso la sezione B.

Le condizioni di equilibrio globale per l'arco AB si scrivono allora immediatamente e sono:

$$(1) \quad \begin{aligned} X_A + X_B &= pb \\ Y_A + Y_B &= pa \end{aligned}$$

$$(2) \quad M_A + M_B + bX_B + aY_B - \frac{p}{2} (a^2 + b^2) = 0$$

Preso ora un punto generico $P(x, y)$ dell'arco AB , calcoliamo in esso il momento flettente $M(P)$, (inteso come il momento rispetto a P delle forze che l'arco BP esercita sull'arco PA). Esso si può calcolare annullando la somma dei momenti agenti su BP , e risulta allora

$$(3) \quad M(P) = X_B(b-y) + Y_B x + M_B - \frac{1}{2} p [x^2 + (y-b)^2]$$

oppure annullando la somma dei momenti agenti su PA , e allora si ha l'espressione (equivalente in virtù di (1) e (2))

$$(3') \quad M(P) = X_A y + Y_A (a-x) - M_A - \frac{1}{2} p [(a-x)^2 + y^2]$$

Nel seguito sceglieremo l'espressione (3).

Se il punto P appartiene all'arco BP_0 di raggio R , converrà individuarlo mediante la sua distanza angolare θ da B , e servirsi della (3) che diventa

$$(4) \quad M(P) = \alpha_1 + \beta_1 \cos \theta + \gamma_1 \sin \theta$$

con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= R X_B + M_B - p R^2 = -p R (R-b) - \\ &\quad - \frac{1}{2} p (a^2 + b^2) - (R-b) X_A + a Y_A - M_A \end{aligned}$$

$$(5) \quad \beta_1 = p R^2 - R X_B = p R (R-b) + R X_A$$

$$\gamma_1 = R Y_B = -R Y_A + p a R$$

Se invece il punto P appartiene all'arco P₀A di raggio r, conviene introdurre la sua distanza angolare φ da A, e si ottiene

$$(4'') \quad M(P) = \alpha_2 + \beta_2 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi$$

con

$$\alpha_2 = bX_B + (a-r)Y_B + M_B + pr(a-r) - \frac{1}{2}p(a^2 + b^2) = rY_A - M_A - pr^2$$

$$(5'') \quad \beta_2 = rY_B - r(a-r)p = -Y_A + r^2p$$

$$\gamma_2 = prb - rX_B = rX_A$$

Le reazioni X_A, Y_A, M_A, X_B, Y_B, M_B si determinano mediante le considerazioni seguenti.

Per la simmetria rispetto all'asse x, deve essere nullo lo sforzo di taglio X_A. Similmente per Y_B in virtù della simmetria rispetto all'asse y. Dunque

$$(6) \quad X_A = Y_B = 0$$

da cui per le (1) e (2)

$$(7) \quad X_B = pb, \quad Y_A = pa$$

La (2) diviene allora

$$(8) \quad M_A + M_B - \frac{p}{2}(a^2 - b^2) = c$$

e determina solo la somma M_A+M_B, mentre M_A (o M_B) resta indeterminato. E' questa la nota indeterminazione statica che si presenta nei sistemi chiusi, e la elimineremo introducendo la condizione che, in assenza di pressione esterna, la ciambella sia

priva di sforzi interni (cioè che il vetro sia perfettamente ricotto).

A tale scopo, calcolata in funzione di M_B l'energia elastica di flessione U , dell'arco AB , imporre la condizione

$$(9) \quad \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0$$

la quale deve essere soddisfatta perchè U è minima (per date forze esterne) quando non vi sono sforzi intrinseci (II teor. di Castigliano).

§ 3 - Calcolo dell'energia elastica.

Calcoleremo l'energia elastica U dell'arco AB in funzione di X_B, Y_B, M_B (o di X_A, Y_A, M_A) senza far uso delle (5) e (7), § 2 cioè come se l'arco AB , isolato dal resto, fosse incastrato a un estremo e sollecitato all'altro estremo con forze arbitrarie: ciò allo scopo di poter calcolare gli spostamenti in A e B derivando U rispetto a X_A, Y_B (salvo a porre queste variabili = 0 dopo eseguita la derivazione).

Detto E il modulo di Young e $J = h^2/12$ il momento d'inerzia geometrico (per unità di lunghezza) della sezione della parete rispetto alla linea mediana, l'energia elastica è

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_0^l M^2(P) ds$$

dove l è la lunghezza dell'arco BA . Convieni spezzare l'integrale in una parte relativa all'arco BP_0 , dove M è dato dalle (4, § 2) e una relativa all'arco P_0A , dove vale invece la (4', § 2). I due contributi hanno la stessa forma salvo lo scambio di $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \theta_0$ con $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \varphi_0$.

Il risultato è:

$$u = \frac{Eh^2}{6} U = R \left\{ \alpha_1^2 \theta_0 + \frac{1}{2} \beta_1^2 (\theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0) + \frac{1}{2} \gamma_1^2 (\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0) + 2\alpha_1 \beta_1 \sin \theta_0 + 4\alpha_1 \gamma_1 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \beta_1 \gamma_1 \sin^2 \theta_0 \right\} + r \left\{ \alpha_2^2 \varphi_0 + \frac{1}{2} \beta_2^2 (\varphi_0 + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0) + \frac{1}{2} \gamma_2^2 (\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0) + 2\alpha_2 \beta_2 \sin \varphi_0 + 4\alpha_2 \gamma_2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \beta_2 \gamma_2 \sin^2 \varphi_0 \right\}$$

§ 4 - Calcolo dei momenti flettenti.

Indicheremo con una soprilineatura le funzioni di X, Y, M calcolate per $Y_B = X_A = 0$. Per le (7) di § 2 si ha

$$\bar{Y}_A = pa$$

$$\bar{X}_B = pb$$

La (9, § 2) in assenza di sforzi interni, diviene perciò

$$(1) \quad \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0$$

e basta a determinare M_B in funzione di p . \bar{M}_A si ottiene dalla (8) § 2 e vale

$$\bar{M}_A = -\bar{M}_B + \frac{1}{2} p (a^2 - b^2)$$

L'espressione di \bar{M}_B che si ottiene eseguendo le operazioni indicate nella (1) sulla U di cui al § 3 è

$$\frac{\bar{M}_B}{p} = \frac{R^2(R-b)(\theta_0 - \sin \theta_0) + r^2(a-r)(\cos \theta_0 - \frac{1}{2} + \theta_0) + \frac{1}{2}r(a^2-b^2)(\frac{\pi}{2} - \theta_0)}{R\theta_0 + r(\frac{\pi}{2} - \theta_0)}$$

In particolare, per $a=10$ cm e $b=3.8$ cm si trova:

Tabella II

	0°	5°	10°	20°	30°	
\bar{M}_A	+23.5	+24.0	+24.6	+25.4	+26.0	Kg x cm
\bar{M}_B	20.7	20.1	19.6	18.8	18.2	

§ 5 - Valutazione dello spessore di sicurezza.

Il punto più sollecitato per trazione è il punto A della superficie esterna della ciambella. Si deve perciò valutare qual'è lo spessore che garantisce dalle rotture in questo punto.

Il criterio adottato è il seguente: preso dalle tabelle il valore ϕ_r del carico di rottura per trazione del materiale in esame, si adotta come carico di sicurezza $\phi_s = \frac{1}{4} \phi_r$. Il fattore di sicurezza $1/4$ è il solito adottato in problemi analoghi (e suggerito anche per questo caso, da Morrison, [1]). La sollecitazione per compressione è poi certamente « del relativo carico di sicurezza.

L'equazione che dà lo spessore di sicurezza è

$$\frac{6M_A}{h_s^2} - \frac{pa}{h_s} = \phi_s$$

in cui il primo termine a primo membro è dovuto alla sollecitazione per flessione ed il secondo a quella per trazione.

Se si assume $\phi_r = 800 \text{ Kg/cm}^2$ come carico di rottura per un buon vetro (v. Int. Critical Tables) e quindi $\phi_s = 200 \text{ Kg/cm}^2$ come carico di sicurezza, si trova che, per $a=10 \text{ cm}$, $b=3.8 \text{ cm}$, h_s varia molto lentamente in funzione di θ_0 ; e precisamente

$$h_s = 0.82 \text{ cm} \quad \text{per} \quad \theta_0 = 0^\circ$$

$$h_s = 0.96 \text{ cm} \quad \text{per} \quad \theta_0 = 30^\circ$$

§ 6 - Valutazione della deformazione.

Ci limiteremo a valutare la contrazione verticale della ciambella, cioè la variazione δb della lunghezza del semiasse b . La deformazione δa del semidiametro maggiore si valuta analogamente ma è di minore interesse. Dal teorema di Castigliano

$$\delta b = \frac{\partial U}{\partial Y_B} = \frac{6}{E h^2} \frac{\partial u}{\partial Y_B}$$

La quantità che ci interessa non è però questa ma il caso particolare

$$\overline{\delta b} = \frac{6}{E h^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_B}$$

L'espressione di $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_B}$ è molto complicata; per quello che ci interessa si può dire che:

1) per $a=10$ cm, $b=3.8$ cm, varia in modo praticamente lineare con Θ_0 nell'intervallo $0^\circ, 30^\circ$.

2) per questi valori di a e b i suoi valori estremi sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_B} &= - 1.2 \times 10^3 \text{ Kg x cm}^2 && \text{per } \Theta_0 = 0^\circ \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_B} &= - 1.6 \times 10^3 \text{ Kg x cm}^2 && \text{per } \Theta_0 = 30^\circ \end{aligned}$$

Per valutare la deformazione δb bisogna specificare il materiale, cioè assegnare E ; ed inoltre lo spessore h delle pareti. Con i valori $h_B(\Theta_0)$ trovati nel paragrafo precedente si può calcolare la deformazione massima assumendo per E il valore $6 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$, che corrisponde al Laboratory Pyrex (Int. Critical Tables). Si ottiene

$$\delta b = - 0.018 \text{ cm} \quad \text{per } \Theta_0 = 0^\circ$$

$$\delta b = - 0.022 \text{ cm} \quad \text{per } \Theta_0 = 30^\circ$$

§ 7 - Studio delle sollecitazioni in funzione di b/a per $\Theta_0 = 0^\circ$.

Nel caso $\Theta_0 = 0^\circ$ si trova la seguente formula per \bar{M}_B :

$$\bar{M}_B = \frac{1}{6} p(a-b) \left\{ \frac{2(a-b)^2 + 3\pi b(a-b) + 12b^2}{2(a-b) + \pi b} \right\} \quad [2]$$

e da questa si ricava \bar{M}_A tramite la (8) § 2:

$$\bar{M}_A = - \bar{M}_B + \frac{1}{2} p (a^2 - b^2)$$

La sollecitazione per flessione in A (o in B) è

$$\phi = \frac{6\bar{M}}{h^2} = \frac{6\bar{M}}{a^2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad (\bar{M} = \bar{M}_A \text{ opp. } \bar{M}_B)$$

A questa si sovrappone la sollecitazione per trazione che vale

$$- \frac{pb}{h} \text{ in B}, \quad - \frac{pa}{h} \text{ in A}$$

ma, per $h \ll a$, essendo $\phi \sim \left(\frac{a}{h}\right)^2$, la correzione dovuta a questo effetto risulta trascurabile (comunque, il trascurarla agisce nel senso della sicurezza).

La quantità

$$\frac{6\bar{M}}{a^2} = p g^2 \left(\frac{b}{a}\right)$$

è funzione del solo rapporto $\frac{b}{a}$; la funzione $g\left(\frac{b}{a}\right)$ è riportata in figura (2) per $0.1 \leq \frac{b}{a} \leq 0.6$. Da essa si ricava lo spessore di sicurezza in unità di a , $\frac{h_s}{a}$, moltiplicandola per $\sqrt{\frac{p}{\phi_s}}$:

$$\frac{h_s}{a} = \sqrt{\frac{p}{\phi_s}} g\left(\frac{b}{a}\right)$$

Sulla destra della figura (2) sono riportate tre scale per $\frac{h_s}{a}$ corrispondenti a $\frac{\phi_s}{p} = 200, 400, 600$.

§ 8 - Confronto con la ciambella a sezione ellittica.

Il caso della sezione ellittica è stato trattato da Morrison [4], in dettaglio, per quanto riguarda la determinazione dello spessore limite. I risultati, a parità di semidiametri, sono dello stesso ordine di quelli trovati nel nostro caso. Si può anzi dire che sia dal punto di vista delle sollecitazioni elastiche, sia da quello geometrico, la forma ellittica per $a=10$ cm, $b=3.8$ cm è molto prossima al caso $\Theta_0 = 30^\circ$. Il suo principale svantaggio resta quello di non avere che due parametri, a e b , a disposizione.

§ 9 - Conclusioni.

Le caratteristiche elastiche e geometriche della sezione con $a=10$ cm e $b=3.8$ cm variano molto poco con Θ_0 , almeno nell'intervallo $0^\circ, 30^\circ$. La variazione più rilevante è quella della superficie (Tab. I), che è $\sim 20\%$. Tutte le circostanze favoriscono però (per quanto di poco) la forma corrispondente al valore $\Theta_0=0^\circ$, anche rispetto al caso ellittico (v. § 8).

Si può inoltre osservare che, essendo le sollecitazioni per flessione praticamente uguali, in modulo, in A e in B, non è possibile guadagnare apprezzabilmente spazio facendo la parete di spessore variabile, minore in B che in A.

[1] Morrison - The Engineer, 193, 426 (1952).

[2] Southwell - Theory of Elasticity, pag. 255.

Roma, 5 aprile 1955

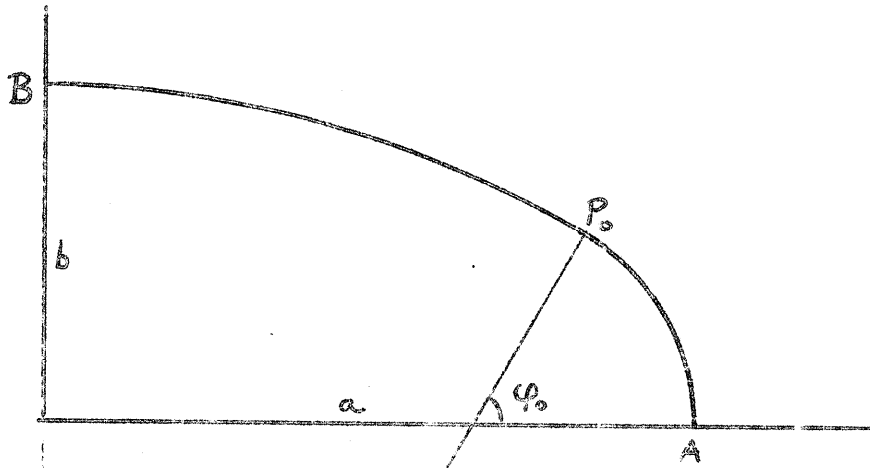


Fig 1

