

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-55/11 (22. 2. 55)

E. Persico: LIMITAZIONI PER LA TENSIONE DI R. F.

LIMITAZIONI PER LA TENSIONE DI RADIOFREQUENZA

1. Introduzione.

Il valore di cresta U della differenza di potenziale attraverso la cavità risonante (ossia, come diremo brevemente, della "tensione di R.F.") può essere scelto inizialmente, e fatto variare in seguito, con una certa arbitrarietà, purchè sia mantenuto entro certi limiti, la cui precisazione è oggetto di questo rapporto.

Ricordiamo che la U determina la fase ψ_0 della particella sincrona, attraverso la formula

$$(5) \quad \sin \psi_0 = u/c$$

dove $u(t)$ è una funzione determinata esclusivamente dalla legge di variazione nel tempo del campo magnetico B e della radiofrequenza ν , e precisamente

$$(2) \quad u(t) = \frac{k^2 c^2}{2\pi \nu} \frac{d}{dt} \left(\frac{B}{\nu} \right) + L$$

dove k è la cosiddetta "armonica" della RF (rapporto intero tra ν e la frequenza di rotazione della particella sincrona) ed L è l'energia (per unità di carica) persa in un giro per irraggiamento e per eventuale effetto betatrone.

Questa u (data per il progetto David, nella tav. III, del rapp. 16) rappresenta ovviamente un limite inferiore assoluto per U , poichè, se fosse $U < u$, nessuna particella potrebbe mantenersi in sincronismo. Tuttavia, come vedremo, vi è da tener conto di un'altra limitazione più restrittiva di questa benchè non assoluta.

2. Valore iniziale della tensione di R.F.

Il valore U_0 della U subito dopo la sua accensione (e quindi il valore iniziale ψ_{30} della fase) può essere scelto, in teoria, comunque purchè maggiore del corrispondente valore u_0 della u . Da tale scelta però dipende il numero delle particelle catturate nel pacchetto e quindi l'intensità fornita dalla macchina (v. rapp. n°4). Esiste un valore optimum di U_0 che fornisce l'intensità massima: l'andamento della intensità in funzione di U_0 (o di ψ_{30}) può essere calcolato, caso per caso, mediante il diagramma fig.7 del rapp.4. Tale andamento dipende dalla velocità di salita del campo e quindi dalla spiralizzazione. L'intensità decresce più rapidamente per U_0 minore del valore optimum che per U_0 maggiore.

A titolo di esempio riportiamo (fig.1) le curve della intensità (rapportata a quella massima) calcolate per il progetto David, con spiralizzazione $\zeta = 0.2$ e 0.6 cm, e supponendo che alle oscillazioni di beta e sincrotrone sia riservata una larghezza di ciambella $a' = 12.1$ cm.

3. Limitazione inferiore della U.

Affinchè una particella, una volta catturata, non sfugga dal pacchetto, è necessario che l'estremo superiore, ψ_M , delle oscillazioni di fase non superi mai $\pi - \psi_3$, perchè oltre tale limite cessa la stabilità di fase.

Poniamo

$$(3) \quad \psi = \psi_M - \psi_3$$

cioè chiamiamo ψ l'ampiezza delle oscillazioni di fase dalla parte della ψ crescenti. È noto ⁽¹⁾ che, per variazioni adiab-

(1) Bohm and Foldy - Phys. Rev., 70, 249 (1946).

tiche di E e di U (quindi di ψ_3) la ψ varia in modo che si mantenga costante la quantità:

$$(4) \quad J = \psi^2 (u E c \operatorname{tg} \psi_3)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3} \psi \operatorname{tg} \psi_3 - \frac{5}{96} \psi^2 - \dots \right).$$

Di qui si vede come lo smorzamento della ψ causato dal crescere di E possa essere attenuato da una eventuale discesa eccessiva di $\operatorname{ctg} \psi_3$ (ossia salita di ψ_3). Se quindi si vuole che nessuna particella superi mai il limite di stabilità di fase, occorrerà che $\psi_3(t)$ si mantenga sempre al disotto di un certo limite $\psi_{3\max}(t)$ e quindi che $U(t)$ si mantenga sempre al disopra di un certo limite inferiore $U_{\min}(t)$.

Questi limiti corrisponderanno alle condizioni per cui la particella, che inizialmente ha l'oscillazione più ampia (cioè quella di ampiezza iniziale $\psi_0 = \pi - 2\psi_{30}$), resta per tutto il ciclo di accelerazione al limite della stabilità di fase, cioè ha in ogni istante

$$(5) \quad \psi = \pi - 2\psi_3$$

La $\psi_{3\max}(t)$ si otterrà quindi sostituendo questo valore di ψ nella (4), ossia sarà data da

$$(6) \quad (\pi - 2\psi_3)^2 (u E c \operatorname{tg} \psi_3)^{1/2} f(\psi_3) = J$$

dove si è posto,

$$(7) \quad f(\psi_3) = 1 - \frac{1}{3} (\pi - 2\psi_3) \operatorname{tg} \psi_3 - \frac{5}{96} (\pi - 2\psi_3)^2 - \dots$$

Il valore della costante J è determinato dai valori iniziali di u, E, .

Per risolvere la (6) rispetto a ψ_3 , conviene servirsi di un grafico in scala logaritmica. Dalla (6) infatti si ricava, prendendo i logaritmi decimali dei due membri

$$(8) \quad \lg(uE) + F(\psi_3) = C$$

dove si è indicata con C una costante e con F la funzione universale

$$(9) \quad F(\psi_s) = 4 \lg(\pi - 2\psi_s) - \lg \operatorname{tg} \psi_s + 2 \lg f(\psi_s) + 10$$

(il 10 è stato aggiunto per evitare valori negativi nell'intervallo che interessa). Tale funzione è rappresentata nella fig. 2, che può servire per qualunque sincrotrone.

Con questo diagramma il problema si risolve, in un caso concreto, nel modo seguente:

a) si prepara (dalle tabelle caratteristiche della macchina) una tabella di $\lg(uE)$ in funzione di t ;

b) Sostituendo nella (8) i valori iniziali (cioè corrispondenti all'accensione della R.F.) di $\lg(uE)$ e di ψ_s , si determina la costante C ;

c) Dalla (8) e dalla tabella di $\lg(uE)$ si ricava una tabella di $F(\psi_s)$ in funzione del tempo;

d) Mediante il diagramma si passa dai valori di F a quelli di ψ_s (che sono i valori cercati di $\psi_{s \max}$ in funzione di t);

e) Dalla (1) si ricava poi, per ogni valore di t :

$$(10) \quad U_{\min} = \frac{u}{m \psi_{s \max}}$$

Con tale procedimento sono state calcolate le curve della fig. 6 del rapp. n°16, relative alla U_{\min} per il progetto David. Diamo ora anche, per lo stesso progetto, la curva del $\psi_{s \max}$ relativa alla spiralizzazione $\sigma = 0.6$, con fase iniziale 40° (corrispondente all'optimum) (fig. 3 e fig. 4).

4. Limitazione superiore della U.

Ricordiamo che l'ampiezza X_s delle oscillazioni radiali legate alle oscillazioni di fase (cioè delle cosiddette "oscillazioni di sincrotrone"), se U , ed E , ν ed n variano adiabaticamente, varia secondo la legge

$$(11) \quad X_s = \text{cost.} \frac{\nu^{1/2} (U^2 - u^2)^{1/2}}{(1-n)^{1/4} E^{3/4}}$$

Normalmente le variazioni di ν ed n sono trascurabili, e l'aumento di E prevale talmente su quello di U che la X_s decresce abbastanza rapidamente (smorzamento delle oscillazioni di sincrotrone). Si può tuttavia ricercare come dovrebbe variare la U perchè sia soddisfatta una delle seguenti condizioni limite:

a) le oscillazioni di sincrotrone non si smorzino (cioè $X_s = \text{cost.}$). In tal caso dovrà essere in ogni istante

$$(12) \quad U^2 - u^2 = (U_0^2 - u_0^2) \left(\frac{E}{E_1} \right)^6$$

(E_1 essendo la E all'iniezione) e si vede facilmente che, a causa del fattore E^6 , la U dovrebbe salire così rapidamente, che tale condizione non ha alcun interesse pratico.

b) Le oscillazioni di sincrotrone si smorzino con la stessa rapidità di quelle di betatrone.

Questa condizione ha maggiore interesse della precedente, perchè, essendovi inizialmente nel pacchetto particelle che hanno tutte le possibili X_s (da 0 ad $a'/2$) combinate con oscillazioni di betatrone di ampiezza $X_\beta = a'/2 - X_s$, la larghezza del fascio a un dato istante è determinata da quella dei due tipi di oscillazione, che si è meno smorzato. E poichè lo smorzamento delle oscillazioni di betatrone segue la legge

$$X_\beta = \text{cost} B^{-1/2}$$

e non può quindi essere influenzato in alcun modo, converrà fare in modo che sia esso, e non l'altro, a determinare la contrazione del fascio.

Imporremo quindi a U di non superare una $U_{\max}(t)$ determinata dalla condizione

$$(13) \quad \frac{X_s}{X_\beta} = \frac{X_s^0}{X_\beta^0}$$

ossia

$$U^2 - u^2 = (U_0^2 - u_0^2) \left(\frac{E}{E_0} \right)^6 \left(\frac{B_0}{B} \right)^4.$$

In un elettrosincrotrone si potrà ritenere E proporzionale a B (a meno di termini dell'ordine di $(mc^2/E)^2$): allora:

$$(14) \quad U^2 - u^2 = (U_0^2 - u_0^2) \left(\frac{B}{B_0} \right)^2.$$

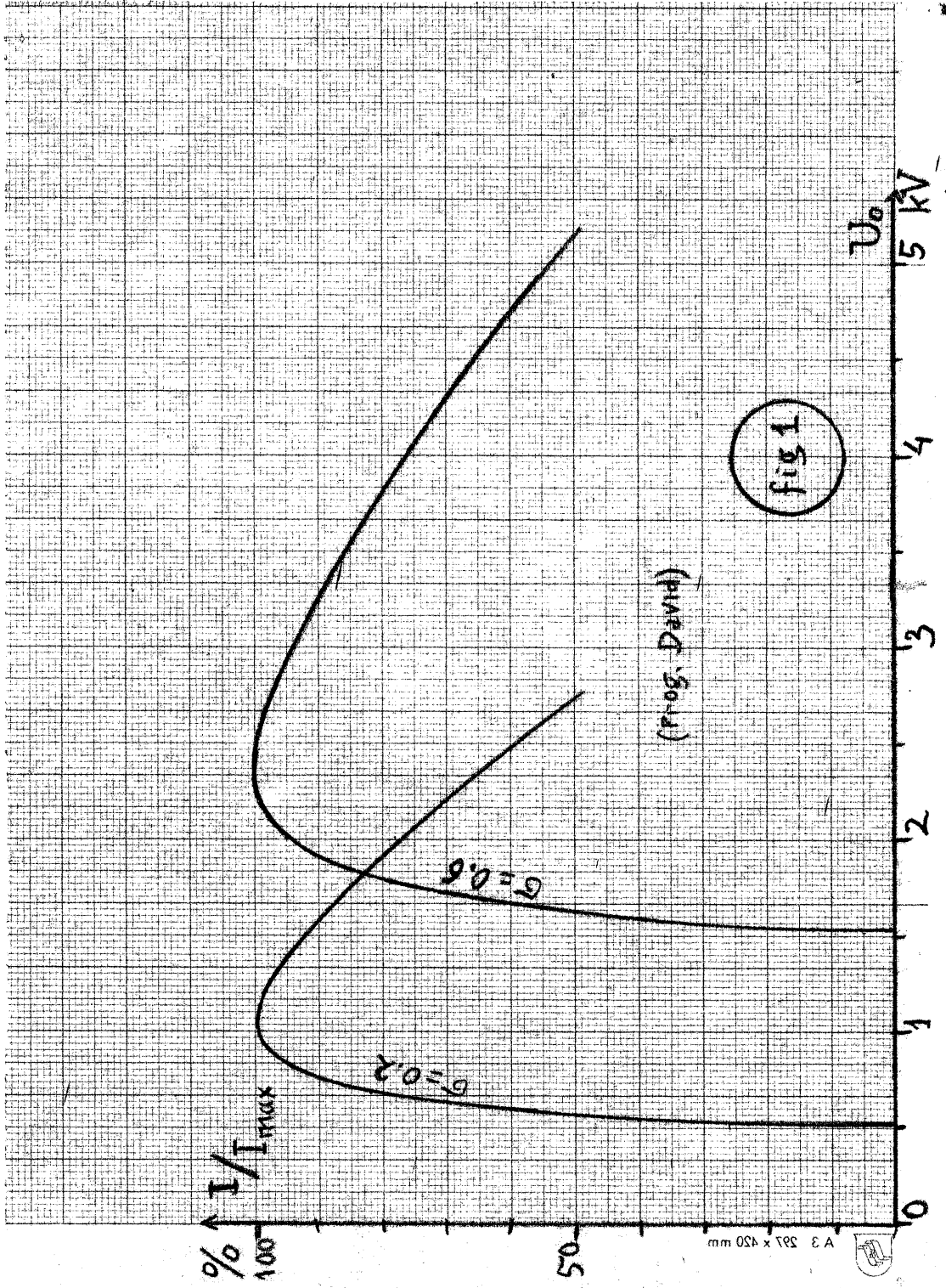
Si può anche, in virtù della (1), tradurre questa in una limitazione per ψ_s , cioè che essa non deve mai essere inferiore a una $\psi_{s \min}$ definita in ciascun istante da

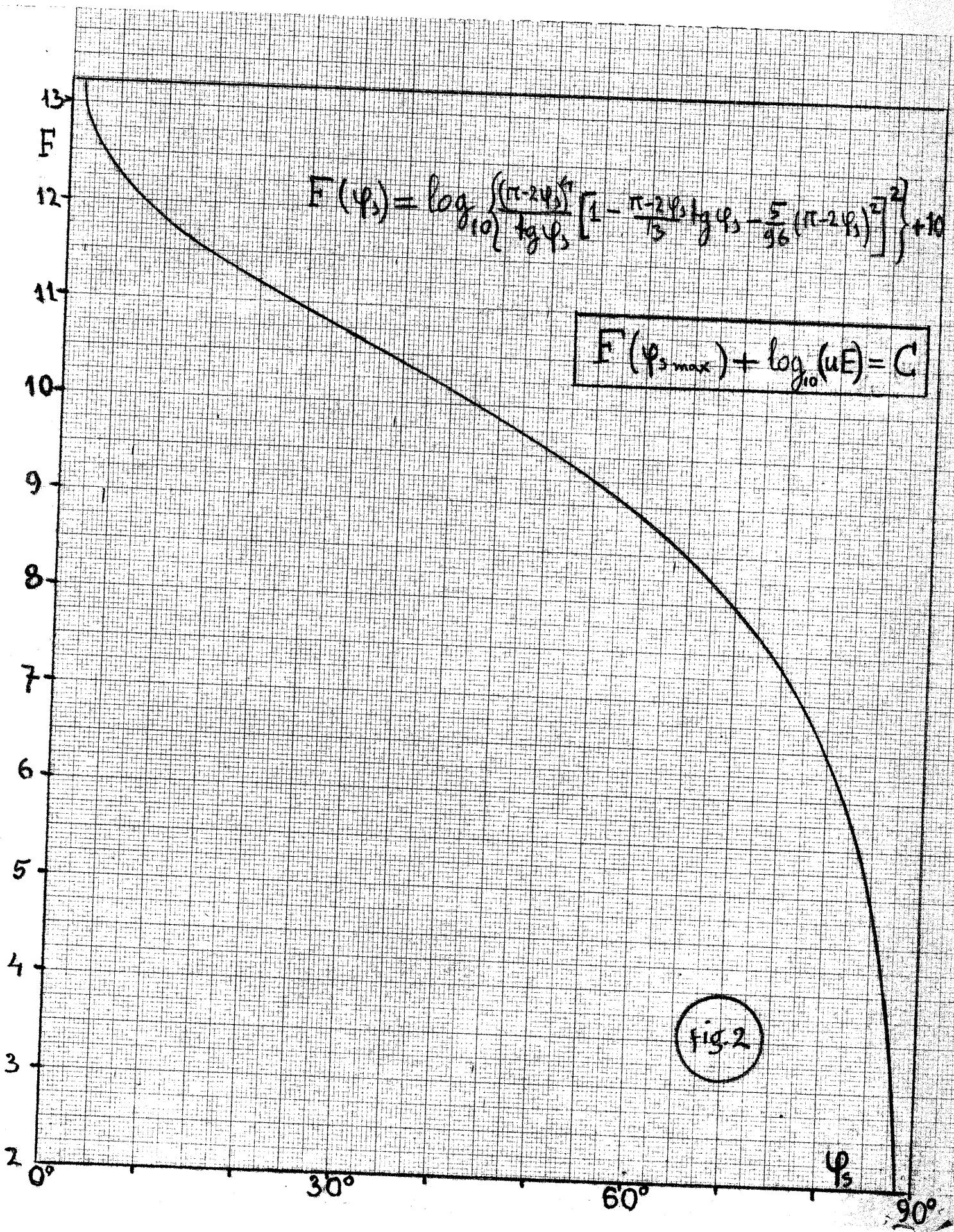
$$(15) \quad \operatorname{tg} \psi_{s \min} = \frac{B_0}{u_0} \frac{u}{B^2}.$$

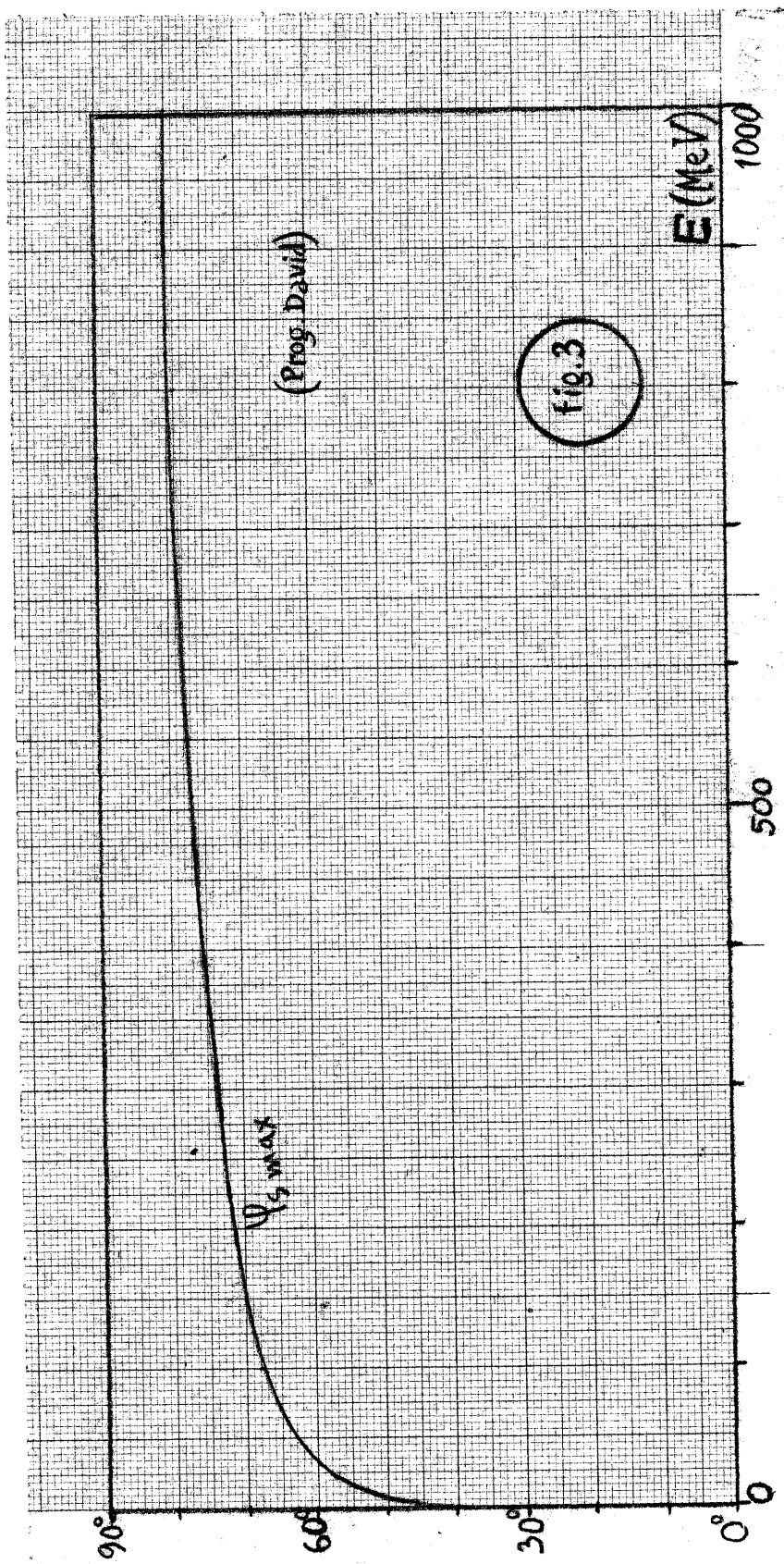
Riportiamo come esempio, nella fig. 4, i valori di U_{\max} e $\psi_{s \min}$ così calcolati (fino all'energia di 10 MeV) per il progetto David, con bias e spiralizzazione $\sigma = 0.6$ e per fase iniziale $\psi_{s0} = 40^\circ$, corrispondente all'optimum. Come si vede, U_{\max} sale così rapidamente che anche tale limitazione non ha molto interesse pratico.

Nello stesso diagramma abbiamo riportato anche l'andamento di U_{\min} e $\psi_{s \max}$, calcolati col criterio del par. 3.

Roma, 22 febbraio 1955







kV U

30

20

10

0

(Prog. David)
 $\sigma = 0.6$

fig. 4

$\psi = 90^\circ$

60°

30°

$E \rightarrow 0^\circ$
MeV

U_{max}

$\psi_{s max}$

$\psi_{s min}$

U_{min}

5

10

