

Laboratori Nazionali di Frascati

LNf-55/6 (29. 1. 55)

C. Bernardini: CALCOLO DELL'EFFETTO DI PICCOLE DEFORMAZIONI DEI POLI SULLA COMPONENTE VERTICALE DEL CAMPO SUL PIANO MEDIANO - CASO PIANO ED ERRATA E ADDENDA.

CALCOLO DELL'EFFETTO DI PICCOLE DEFORMAZIONI DEI POLI SULLA COMPONENTE VERTICALE DEL CAMPO SUL PIANO MEDIANO (CASO PIANO)

§ 1. Il problema da risolvere è il seguente: consideriamo le due equipotenziali α e β (v. fig. 1). Il potenziale V ha il valore V_0 su α e 0 su β . Supponiamo che il campo si possa considerare uniforme sulla semiretta a destra del punto P agli effetti, p. esempio, delle misure che si fanno su di esso. Ci si chiede se è possibile, con una piccola deformazione di α del tipo mostrato in fig.2, spostare verso sinistra il punto P, ovvero "allargare la regione radiale utile" (riferendosi al vero magnete del sincrotrone, di cui questo schema dà una grossolana approssimazione).

Si può risolvere convenientemente questo problema in questo modo: invece di calcolare il campo tra le equipotenziali (v. fig.2)

$$V = V_0 \quad \text{su} \quad \alpha'ABC\alpha'$$

$$V = 0 \quad \text{su} \quad \beta$$

calcoleremo quello tra le

$$V = V_0 \quad \text{su} \quad \alpha'AB$$

$$V = V_1 \quad V_0 \quad \text{su} \quad B\alpha''$$

$$V = 0 \quad \text{su} \quad \beta$$

Il valore di V_1 (che si assume costante) è il valore che V avrebbe all'infinito sulla semiretta $B\alpha''$. Questo metodo fornisce buoni risultati in un caso più semplice, sul quale è possibile fare una verifica diretta (precisamente, quello in cui l'angolo μ di fig.2 è zero). Nel nostro caso faremo, al § 3, una verifica indiretta mostrando che una migliore scelta di V_1 non modifica sensibilmente i risultati.

§ 2. Con una trasformazione di Schwarz-Christoffel si può trasformare il profilo $(\alpha + \beta)$ di fig.1 in una retta e la regione tra α e β in un semipiano.

Se per lo spigolo A (v. fig.1) si fa passare una retta normale a β , questa incontra β in un punto O che prenderemo come origine di un sistema cartesiano Oxy; l'asse delle x coincide con β . Ad ogni punto $Q=(x,y)$, associamo una variabile complessa $z=x+iy$. Nel caso $\mu = \frac{\pi}{4}$ (v. fig.2) definiamo $w=u+iv$ mediante (v. Appendice)

$$(1) \quad z = ih - \frac{h}{\pi\sqrt{2}}(1-i) \left\{ 4(w-1)^{1/4} - \sqrt{2} \operatorname{artg} \frac{\sqrt{2}(w-1)^{1/4}}{1-(w-1)^{1/2}} + \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{en} \frac{(w-1)^{1/2} + \sqrt{2}(w-1)^{1/4} + 1}{(w-1)^{1/2} - \sqrt{2}(w-1)^{1/4} + 1} \right\}$$

Questa trasformazione muta il profilo $\alpha + \beta$ nella retta $v=0$ ed ogni punto Q compreso tra α e β in un punto del semipiano $v > 0$.

In particolare, (v. fig.3), il punto $z=ih$, cioè A di fig.2, si muta in A' , $w=1$; il punto all'infinito (a destra) di α e β nel punto O'' , $w=0$.

Con O' indicheremo il punto trasformato di O, con B' il punto trasformato di B etc. Poniamo $w = \lambda$ (reale) in B' . Se il potenziale vale (v. fig.3)

$$\begin{aligned} V &= 0 & \text{su } \int O'' \\ V &= V_1 & \text{su } O''B' \\ V &= V_0 & \text{su } B'\sigma \end{aligned}$$

in ogni altro punto del semipiano $v \geq 0$ esso vale (v. appendice II)

$$V = - \frac{V_1}{\pi} \arg w + \frac{V_1 - V_0}{\pi} \arg (w - \lambda) + V_0$$

La grandezza che ci interessa è la componente y del campo sul piano mediano:

$$(2) \quad \left[B_y(x,y) \right]_{y=0} = B_y^0(x) = \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=0}$$

Se poniamo $w=1-\tau^2$ con τ^2 reale > 1 , l'espressione di B_y^0 è

$$(3) \quad B_y^0(x) = \frac{V_0}{h+\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{h} \frac{\tau^2 - 1}{\lambda + \tau^2 - 1} \right\} \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

essendo ε l'altezza della sporgenza valutata a partire da α' ($\varepsilon > 0$) (v. fig.2). La x è una funzione di τ della forma:

$$(4) \quad x = -\frac{1}{\pi} \left\{ 4\sqrt{\tau} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\tau}}{\tau-1} - \ln \frac{\sqrt{\tau}+1}{\sqrt{\tau}-1} \right\}$$

Per $|x| \lesssim h$ questa espressione è approssimata da:

$$\tau \simeq 1 + 0.0152 e^{-\pi \frac{x}{h}}$$

così che il campo in questa regione si può scrivere:

$$B_y^0(x) \simeq \frac{V_0}{h+\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{h} \frac{0.0304 e^{-\pi \frac{x}{h}}}{\lambda + 0.0304 e^{-\pi \frac{x}{h}}} \right\} (1 - 0.0076 e^{-\pi \frac{x}{h}})$$

Il campo senza sporgenza è invece

$$\tilde{B}_y^0 = \frac{V_0}{h} \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

essendo τ definito ancora mediante la (4). Questa espressione è esatta. Per $|x| \lesssim h$ si ha inoltre

$$\tilde{B}_y^0 \simeq \frac{V_0}{h} (1 - 0.0076 e^{-\pi \frac{x}{h}})$$

Dal confronto di \tilde{B}_y^0 con il campo uniforme $\frac{V_0}{h}$ e di B_y^0 con il campo uniforme $\frac{V_0}{h+\varepsilon}$ si deve decidere se B_y^0 approssima meglio (cioè su una regione più estesa) il corrispondente campo uniforme, che non \tilde{B}_y^0 .

Si vede facilmente che, se

$$0.01 \ll \frac{4\varepsilon}{h} \ll 1$$

(questa condizione si può ritenere soddisfatta, p. es., per $\varepsilon/h = 0.05$) il valore più conveniente di λ è $\frac{\varepsilon}{h}$.

La lunghezza $d=\overline{AB}$ (v. fig.2) della sporgenza è data da

$$\frac{\pi d}{h} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\theta}}{1-\theta} + \ln \frac{1+\sqrt{\theta}}{1-\sqrt{\theta}} - 4\sqrt{\theta}, \quad \text{con } \theta^2 = 1 - 4 \frac{\varepsilon}{h}$$

Si ha, per es.

$$\begin{array}{l} \text{per } \frac{\epsilon}{h} = 0.05 \quad \frac{d}{h} = 0.41 \\ \text{" } \frac{\epsilon}{h} = 0.07 \quad \frac{d}{h} = 0.28 \end{array}$$

In queste condizioni l'espressione del campo diviene

$$B_y^0(x) \approx \frac{V_0}{h+\epsilon} \left(1 - \frac{h}{\epsilon} (0.007\epsilon)^2 e^{-\frac{2\pi x}{h}}\right)$$

e quindi, in prossimità di $x=0$, la disuniformità viene ridotta, per mezzo della sporgenza, da $\sim 1/100$ a $\sim 1/1000$.

L'allargamento della regione utile si può valutare in questo modo: se per scostamento dall'uniformità intendiamo le differenze

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{B}_y^0 &= \left| \tilde{B}_y^0 - \frac{V_0}{h} \right| \\ \Delta B_y^0 &= \left| B_y^0 - \frac{V_0}{h+\epsilon} \right| \end{aligned}$$

la condizione

$$\frac{\Delta \tilde{B}_y^0}{\tilde{B}_y^0} \leq 10^{-n}$$

è soddisfatta a destra di un certo punto P (v. fig.1); e la

$$\frac{\Delta B_y^0}{B_y^0} \leq 10^{-n}$$

a destra di un punto P' che sarà inoltre certamente a sinistra (nel caso optimum) di P. Il segmento $\overline{PP'}$ misura l'allargamento in questione; esso vale

$$\overline{PP'} = 0.37 nh - 0.16 h \ln \frac{h}{\epsilon}$$

Il fatto che aumenti con la precisione richiesta significa solo che P si muove verso destra, al crescere di n, più rapidamente che non P'.

§ 3. Si può migliorare l'approssimazione nel modo seguente: consideriamo il profilo di fig.4; $V=V_0$ è il valore del potenziale sulla spezzata $\alpha'BC\alpha'$, $V=0$ il valore sull'asse delle ascisse x . Il potenziale che si ottiene, con questo contorno, in prossimità del punto B, non sarà molto diverso, per $\frac{d}{h}$ abbastanza grande, da quello che si ottiene in B con il contorno di fig.2. Per il caso di fig.4, cioè con la soppressione dello spigolo in A, possiamo però ottenere facilmente la dipendenza di V da x lungo la semiretta $B\alpha''$. Questa dipendenza sarà del tipo mostrato in fig.6. Determinando la curva $V(x)$ del potenziale lungo la $B\alpha''$ si può pensare di sostituire questa curva con un gradino definito da:

$$(1) \quad V(\delta) = \frac{1}{2}(V_0 + V_1) = V_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{h}\right)$$
$$V = V_0 \text{ per } x < \delta$$
$$V = V_1 \text{ per } x > \delta$$

I risultati del § 2 possono ritenersi migliorati se riferiti ad una sporgenza di lunghezza $d + \delta$ anzichè d .

Dalla (1) si ottiene, per δ (v. appendice III)

$$(2) \quad V(\delta) \approx V_0 \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{\epsilon}{h} \left(\frac{3\pi\delta}{4\epsilon} \right)^{2/3} \right\} = V_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{h} \right)$$

cioè

$$\frac{\delta}{h} \approx 0.37 \frac{\epsilon}{h}$$

come si vede, questa correzione è molto piccola e giustifica il metodo approssimato usato al § 2.

Appendice I.

Per ottenere la trasformazione $z = f(w)$, (1) § 2, si impiega il metodo consueto descritto p. es. in Morse, Feshbach; Meth. of Theor. Phys. pag.445. Per un valore generico di μ , e disponendo convenientemente delle tre costanti arbitrarie che figurano nell'espressione generale della trasformazione, si ha

$$(AI,1) \quad z = z_0 + A \int \frac{(w-1)^{\frac{\mu}{\pi}}}{w} dw ;$$

come già detto al § 2, dev'essere

$$(AI,2) \quad \begin{aligned} z &= ih && \text{per } w = 1 \\ z &= \infty && \text{per } w \rightarrow 0^- \\ z &= \infty + ih && \text{per } w \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Queste tre condizioni sono sufficienti a determinare z_0 , $|A|$, $\arg A$. Si noti che per $\mu \rightarrow 0$ si ritrova la formula di trasformazione per il condensatore piano

$$z = z_0 + A \ln w$$

Fra i casi integrabili elementarmente c'interessa quello in cui $\mu = \frac{\pi}{4}$. Si ottiene così la (1) § 2 esprimendo A e z_0 in funzione di h mediante le (AI,2).

In particolare, se vogliamo esplicitare la corrispondenza tra i punti dell'asse x e quelli dell'asse u , per $u < 0$, conviene introdurre la nuova variabile

$$\tau = -i(w-1)^{1/2} = (1+|u|)^{1/2}$$

mediante la quale si ottiene la (4) § 2.

Appendice II.

L'espressione della componente y del campo si ottiene come segue: consideriamo una distribuzione di potenziali costanti in certi intervalli dell'asse u (che supporremo per semplicità in

numero finito). Per es., sia:

$$(AII,1) \quad \begin{aligned} V &= \phi_0 && \text{per } u < a_1 \\ V &= \phi_1 && \text{per } a_1 < u < a_2; \quad a_1 < a_2 < \dots < a_n \\ \dots & && \\ V &= \phi_n && \text{per } u > a_n \end{aligned}$$

Consideriamo poi la funzione armonica

$$V = C_1 \arg(w-a_1) + C_2 \arg(w-a_2) + \dots + C_n \arg(w-a_n) + D$$

con C_i, D costanti. Notando che, per

$$u > a_i, \quad v=0 \quad \text{è} \quad \arg(w-a_i) = 0$$

$$u < a_i, \quad v=0 \quad \text{è} \quad \arg(w-a_i) = \pi$$

ed imponendo le condizioni (AII,1) si ottiene per il potenziale nel semipiano $v > 0$

$$\begin{aligned} V(u,v) &= \frac{1}{\pi} (\phi_0 - \phi_1) \arg(w-a_1) + \frac{1}{\pi} (\phi_1 - \phi_2) \arg(w-a_2) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{\pi} (\phi_{n-1} - \phi_n) \arg(w-a_n) + \phi_n \end{aligned}$$

Nel nostro caso, $n=2$, $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = V_1$, $\phi_2 = V_0$; $a_1 = 0$, $a_2 = \lambda$, così che

$$(AII,2) \quad V = -\frac{V_1}{\pi} \arg w + \frac{V_1 - V_0}{\pi} \arg(w-\lambda) + V_0$$

Consideriamo poi la funzione

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{V_1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \arg w + \frac{V_1 - V_0}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \arg(w-\lambda)$$

Posto $\theta = \arg w$

$$\frac{\partial}{\partial y} \arg(w-\lambda) = \frac{\partial}{\partial y} \arg(|w| e^{i\theta} - \lambda) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \left(\frac{|w| \sin \theta}{|w| \cos \theta - \lambda} \right)$$

Nei punti $y=0, x$, cioè $v=0$, $\theta = \pi$ questa derivata vale

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} \arg(w-\lambda) \right\}_{\theta=\pi} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{|w|}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{\theta=\pi}$$

Per ottenere $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{\theta=\pi}$ si può procedere così: se $\underline{z} = f(w)$

$$\frac{d}{dz} \ln w = \frac{1}{w f'(w)} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \ln |w| + \frac{\partial}{\partial y} \arg w, \quad f' = \frac{df}{dw}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_{\theta=\pi} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{w f'(w)} \right\}_{\theta=\pi}$$

In questo modo si perviene alla (3) § 2 per $B_y^0(x)$. Per ottenere $\tilde{B}_y^0(x)$ basta porre $\lambda = 0$ nell'espressione (AII,1).

Appendice III.

Per calcolare la correzione di cui al § 3 si parte dal profilo di fig.4; la trasformazione di Schwarz che muta la regione compresa tra le due equipotenziali α' , $V=V_0$, e $y=0$ nel semipiano $v > 0$ di fig.5, se $w=b^2$ per $z=ih$, $w=1$ per $z=i(h+\epsilon)$, $w=0$ per $x \rightarrow \infty$, è

$$z = ih - \frac{h}{\pi} \ln w + K(w)$$

essendo $K(w)$ dell'ordine di $\epsilon \ln \frac{\epsilon}{h}$ come vedremo tra breve, b sta per $h/(h-\epsilon)$; inoltre poniamo

$$w = \frac{b^2 - t^2}{1 - t^2}$$

L'espressione esatta per $K(w) = K'(t)$ è

$$K'(t) = -\frac{h}{\pi} \ln \left(\frac{1+t}{b+t} \right)^2 + \frac{\epsilon}{\pi} \ln \frac{1+t}{1-t}$$

Il potenziale è (v. appendice II)

$$(AIII,1) \quad V = V_0 \left(1 - \frac{\operatorname{arg} w}{\pi} \right)$$

Ci occorre il valore di V sulla retta $z=x+ih$, per $x > 0$. Poichè per $z \rightarrow ih$ lungo la $\alpha''B$ (v. fig.4), $w \rightarrow b^2$; ci si può limitare a studiare la trasformazione per piccoli valori di t , per i quali, ritornando alla variabile $w=u+iv$ si trova

$$u + iv \approx 1 + 2 \frac{\epsilon}{h} \left(\frac{3\pi x}{4\epsilon} \right)^{2/3} e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

Poichè

$$\operatorname{arg} w = \operatorname{arctg} \frac{v}{u} \approx \frac{2\epsilon}{h} \left(\frac{3\pi x}{4\epsilon} \right)^{2/3} \sin \frac{2\pi}{3}, \text{ per } x \leq \epsilon$$

(sino a termini $O\left(\frac{\epsilon^2}{h^2}\right)$ esclusi), dalla (AIII,1), per $x = \delta$ si risale alla (2) § 3.

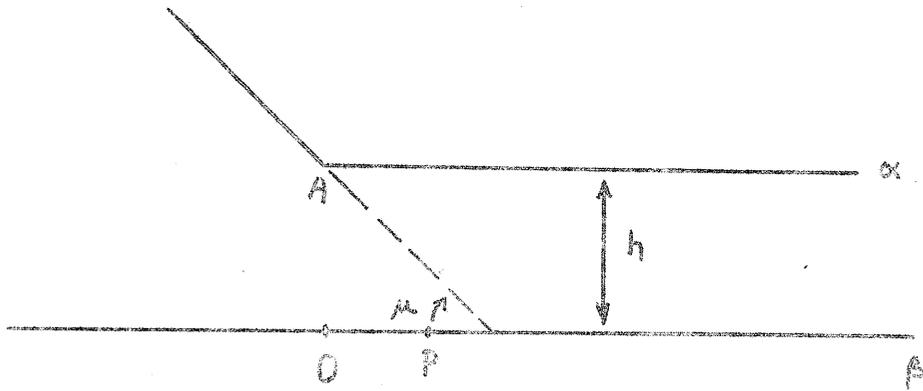


fig. 1

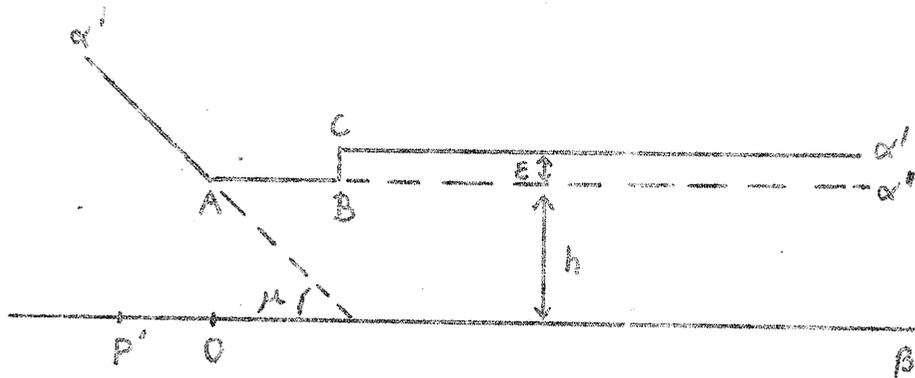


fig. 2

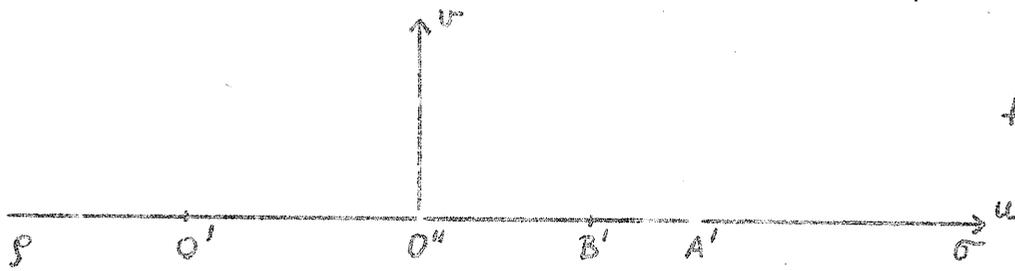


fig. 3

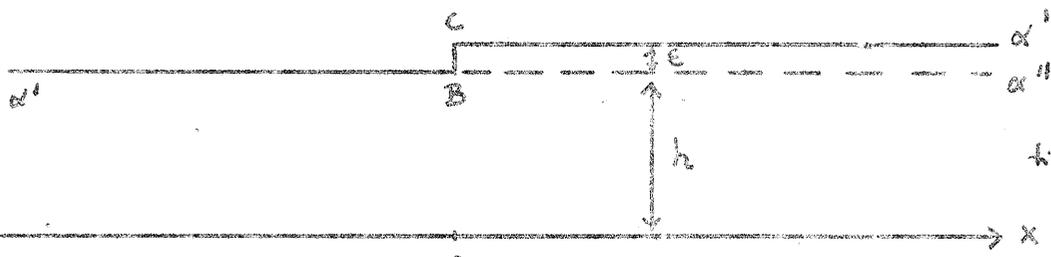


fig. 4

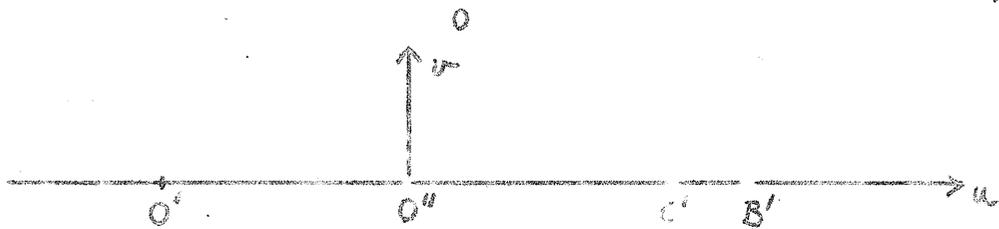


fig. 5

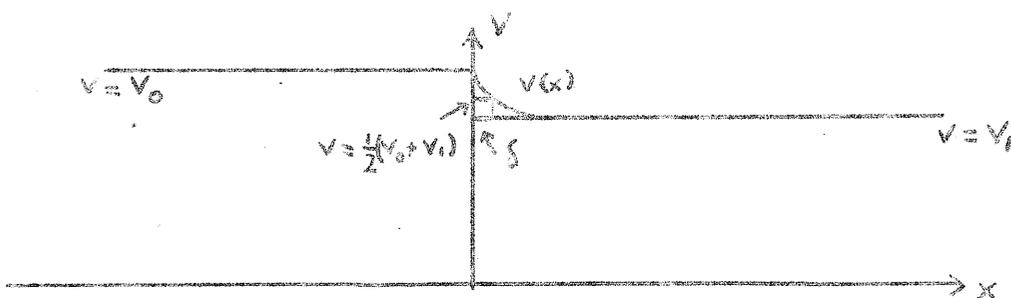


fig. 6

I.N.F.N. - Sezione Acceleratore

Gruppo Teorico

Rapporto n° 18 - Errata e addenda

C. Bernardini

Errata

La formula (4) dà la funzione $x(\tau)$ e quindi la successiva formula d'inversione approssimata (valida per $\tau - 1 \ll 1$) sono errate, come mi ha fatto notare il Dott. P.G. Sona. Per τ tendente ad 1, cioè per $y=0$, x positiva, la formula d'inversione resta del tipo

$$(1.E) \quad \tau = 1 + 2 \alpha e^{-\pi \frac{x}{h}}$$

ma 2α non vale 0.0152, bensì 0.352; la formula è valida per $x \geq h$. Nonostante questa sostanziale modifica dell'andamento del campo verticale sul piano mediano, la formula di pag. 4 per PP' (allargamento della regione utile) resta immutata. La correzione consiste in una traslazione di P e di P' , di h , nel verso delle x crescenti.

Addenda

Si può vedere facilmente che, per ogni angolo μ vale una formula del tipo (1.E) con un opportuno fattore $a(\mu)$; la determinazione di esso si fa come segue:

La trasformazione $z(w)$, per un μ qualunque, si scrive (v. AI):

$$(1.A) \quad z = ih + \frac{h}{\pi} \int_w^1 \frac{(1-t)^{\frac{\mu}{\pi}}}{t} dt = ih - \frac{h}{\pi} \ln w + \frac{h}{\pi} \int_w^1 \frac{(1-t)^{\frac{\mu}{\pi}} - 1}{t} dt$$

Considero naturalmente i casi in cui $0 < \mu \leq \frac{\pi}{2}$. Se ci limitiamo ai punti $v=0$, $u < 0$ del piano w , e consideriamo in particolare i punti per cui $|\mu| \ll 1$, la dipendenza da w del secondo membro di (1.A) è data praticamente dal termine logaritmico e si ha, approssimativamente:

$$(2.A) \quad - \frac{\pi x}{h} \approx \ln |w| - F(\mu)$$

dove

$$(3.A) \quad F(\mu) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\frac{\mu}{\pi}} - 1}{t} dt$$

La funzione $F(\mu)$ ha l'espressione (v. Jahne, Emde)

$$F(\mu) = -0.577 \dots - \Psi\left(\frac{\mu}{\pi}\right)$$

essendo $0.577 \dots$ la costante d'Eulero e Ψ la derivata logaritmica della funzione Γ . Essendo poi $w = 1 - \tau^2$, si ha (v. tabella)

$$(4.A) \quad a(\mu) = \frac{1}{4} e^{F(\mu)}$$

L'espressione di B_y^0 si ricava come in AII ed è

$$(5.A) \quad \tilde{B}_y^0 = \frac{V_0}{h} \tau^{-\frac{2\mu}{\pi}}$$

In particolare per $x \gtrsim h$ si ha

$$(6.A) \quad \tilde{B}_y^0 \simeq \frac{V_0}{h} \left\{ 1 - \frac{4\mu}{\pi} a(\mu) e^{-\pi \frac{x}{h}} \right\}$$

Così pure, con un calcolo analogo a quello esposto in (AII) si ha per $B_y^0(x)$ (campo approssimato con sporgenza)

$$(7.A) \quad B_y^0(x) \simeq \frac{h}{h+\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{h} \frac{4a(\mu) e^{-\pi \frac{x}{h}}}{\lambda + 4a(\mu) e^{-\pi \frac{x}{h}}} \right\} \tilde{B}_y^0(x)$$

Per punti in cui $\lambda \gg 4a(\mu) e^{-\pi \frac{x}{h}}$ la migliore scelta di λ è

$$(8.A) \quad \lambda = \frac{\pi \varepsilon}{\mu h}$$

Con questa scelta il campo con sporgenza è

$$(9.A) \quad B_y^0(x) \simeq \frac{V_0}{h+\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{h}{\varepsilon} \left[\frac{4\mu a(\mu)}{\pi} \right]^2 e^{-2\pi \frac{x}{h}} \right\}$$

almeno per $x \gtrsim h$.

Se poi $\lambda \ll 1$, cioè per μ non troppo piccoli, la formula che dà l'estensione radiale d della sporgenza è

$$(10.A) \quad \frac{\pi d}{h} \approx \ln \frac{\mu h}{\pi \varepsilon} + F(\mu) + \frac{\varepsilon}{h}$$

Dalle (6.A), (9.A) segue che, per $\mu > 0$, la formula che dà PP' non dipende da μ ed è quella riportata a pag. 4 del rapporto n° 18:

$$PP' = 0.37 nh - 0.16 h \ln \frac{h}{\varepsilon}$$

Tabella di valori di $F(\mu)$ e $a(\mu)$:

| μ/π | $F(\mu)$ | $a(\mu)$ |
|-----------|----------|----------|
| 0.10 | -0.15 | 0.215 |
| 0.20 | -0.29 | 0.187 |
| 0.30 | -0.41 | 0.166 |
| 0.40 | -0.51 | 0.150 |
| 0.50 | -0.61 | 0.136 |

Roma, 2 marzo 1955