

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/44 (20. 12. 54)

Gruppo Teorico: ELEMENTI PER PROGETTARE LA SEZIONE DELLA
CIAMBELLA.

ELEMENTI PER PROGETTARE LA SEZIONE DELLA CIAMBELLA

§ 1 -

Indicheremo con b l'altezza e con a la larghezza dello spazio utile della ciambella, cioè della regione in cui il campo magnetico soddisfa le condizioni di regolarità che saranno ulteriormente precisate.

L'altezza b sarà calcolata come somma dei termini seguenti:

b_1 = altezza riservata alle oscillazioni verticali di betatrone causate dall'apertura lineare e angolare del fascio iniettato.

b_2 = altezza riservata alle deformazioni dell'orbita principale dovute a irregolarità del campo entro i settori magnetici.

b_3 = altezza riservata alle deformazioni dell'orbita principale dovute alla presenza di campi magnetici nei settori rettilinei.

b_4 = altezza riservata all'allargamento per effetto della carica spaziale.

Il valore di $b = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$ è poi considerato accettabile solo se il calcolo approssimato delle perdite per scattering in senso verticale mostra che queste perdite sono $\leq 30\%$.

La larghezza a sarà valutata come somma dei termini seguenti:

- a' = larghezza riservata alle oscillazioni di betatrone e di sincrotrone.
- a_1 = larghezza riservata alle deformazioni dell'orbita principale dovute a errori di frequenza del campo acceleratore.
- a_2 = larghezza riservata alle deformazioni dell'orbita principale dovute a irregolarità del campo magnetico entro i settori curvi.
- a_3 = larghezza riservata alle deformazioni dell'orbita principale dovute alla presenza di campi magnetici entro i tratti rettilinei.
- a_4 = larghezza riservata all'allargamento del fascio per effetto di carica spaziale.

Il termine a' può venire fissato arbitrariamente, tenendo presente che il numero di elettroni utilizzati è all'incirca proporzionale ad $a'^{3/2}$ (v. rapp. n°4). Essendo in genere $a'^2 \gg b^2$, le perdite orizzontali di scattering hanno certamente un ruolo secondario.

§ 2 - Valutazione di b.

1) Valutazione di b_1 . - Si assume che la distribuzione sia simmetrica rispetto al piano mediano, che le distribuzioni degli scostamenti e delle inclinazioni iniziali siano indipendenti ed infine che siano uniformi entro certi intervalli (che chiameremo apertura lineare ed angolare rispettivamente). Si innescano oscillazioni di betatrone di ampiezze contenute entro un intervallo fissato dal massimo scostamento z_m e dalla massima inclinazione z'_m all'iniezione: b_1 è il doppio dell'ampiezza massima del fascio.

(Se però le due aperture non sono fissate, ma possono essere variate per mezzo di una lente elettronica, col vincolo tuttavia che l'invariante di Lagrange $K = z_m z'_m$ resti costante,

b_1 ammette un minimo, funzione del solo K , che indicheremo con $b_{1\min}$).

Adottando i seguenti valori numerici

$$|z_M| = 0.5 \text{ cm}, \quad |z'_1| = 3 \times 10^{-3} \text{ rad} \quad (K = 1.5 \times 10^{-3} \text{ cm})$$

si ottiene

$$b_1 = 3.3 \text{ cm} \quad (b_{1\min} = 2.5 \text{ cm})$$

2) Valutazione di b_2 . - A causa delle deviazioni del campo dal valore ideale nei tratti curvi s'innescano oscillazioni forzate di periodo multiplo di quello di rotazione (osc. di orbita chiusa) che hanno come ampiezze delle funzioni lineari dei coefficienti di Fourier dello sviluppo delle irregolarità. Si assume in seguito:

α) che il valor medio delle irregolarità nei tratti curvi sia nullo;

β) che i coefficienti di Fourier delle prime due armoniche siano dello stesso ordine e molto minori dei quattro successivi, anch'essi di ordini confrontabili tra loro;

γ) che i successivi coefficienti siano nulli;

δ) che gli effetti delle variazioni di n e delle non linearità siano trascurabili.

Il calcolo per un sincrotrone race-track è sostanzialmente diverso da quello per un sincrotrone circolare, a causa della lenta convergenza dei contributi di armoniche alte. La situazione è quindi decisamente peggiore che nel caso circolare e va tenuta ben presente la condizione che le armoniche superiori alla sesta devono essere praticamente nulle.

Quanto alla distribuzione azimuthale delle irregolarità nei tratti curvi è molto poco probabile che le fasi delle singole armoniche dello sviluppo di Fourier siano tali che l'ampiezza complessiva delle oscillazioni sia la somma delle

ampiezze delle singole armoniche. Si supponrà pertanto che le fasi siano distribuite a caso, assumendo come misura dell'ampiezza dell'orbita chiusa il suo valore quadratico medio (rispetto alle fasi delle singole armoniche). Nelle tabelle sarà dato questo valore (contrassegnato con FC) insieme con la somma delle ampiezze delle singole armoniche, che corrisponde alla situazione peggiore possibile (FP).

Se B_0 è il campo sull'orbita principale, detti $\alpha_i B_0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) i coefficienti di Fourier dello sviluppo delle irregolarità, si assume (v. lettera di Sands), per le deviazioni della componente B_r dal valore ideale:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0.5 \times 10^{-2}$$

Si ottiene il seguente risultato

	FC	FP
b_2	4.8	5.0 cm

3) Valutazione di b_3 . - Si valuta l'effetto della presenza di campi magnetici nei tratti rettilinei supponendo che siano simmetrici rispetto al centro di essi (così che le oscillazioni innescate dipendano dal solo valor medio della perturbazione).

Per il valore medio del campo nel K-esimo tratto rettilineo si assume (v. lettera di Sands):

$$\Delta B_K = f_K B_0, \quad \text{con } f_K = 0.2 \times 10^{-2}$$

Si trova il seguente risultato

$$b_3 = 0.5 \text{ cm}$$

4) Valutazione di b_4 . - L'effetto della carica spaziale si calcola facendo le seguenti ipotesi sulla struttura del fascio:

- α) sezione circolare di raggio r_0 ;
- β) distribuzione uniforme di particelle.

Si valuta successivamente il raggio r_0 per il quale la forza repulsiva di carica spaziale annulla la forza di richiamo verticale delle usuali oscillazioni di betatrone (si suppone che la differenza tra i coefficienti della forza orizzontale ($(1-n)$) e verticale (n) perturbi poco, agli effetti di questo calcolo, la forma della sezione del fascio).

Assumendo una intensità di iniezione di 0.3 A, l'allargamento verticale del fascio risulta di 1 cm.

Questa stima però è molto grossolana e serve soltanto a dare un'idea dell'ordine di grandezza dell'effetto.

5) Valutazione finale di b . - Riassumiamo i dati precedenti in una tabella che mette a confronto i possibili casi elencati nei paragrafi precedenti. Nelle varie colonne si trovano i risultati che corrispondono a:
 - valutazione di b_1 dalle condizioni iniziali (CI) o dall'invariante di Lagrange (IL); valutazione di b_2 per fasi delle irregolarità a caso (FC) e per le "fasi peggiori" (par.2,2)(FP).

b_i	FC	IL	FC	CI	FP	IL	FP	CI
b_1	2.5	cm	3.3		2.5		3.3	
b_2	1.8		1.8		5.0		5.0	
b_3	0.5		0.5		0.5		0.5	
b_4	1.0		1.0		1.0		1.0	
$b = \sum b_i$	5.8		6.6		9.0		9.8	
b/R	1.6	%	1.8	%	2.5	%	2.7	%

6) Perdite per scattering. - Con una pressione di 10^{-5} mm Hg e supponendo che il gas residuo sia aria, si hanno le seguenti perdite in funzione di b e della spiralizzazione σ (eccitazione con bias):

	$\sigma = 0.2$ cm	0.6
$b = 5$ cm	32%	18%
6	25%	9%
7	18%	7%

Essendo la perdita funzione monotona di b , essa risulta convenientemente piccola per tutti i casi esaminati nella tabella riassuntiva.

§ 3 - Valutazione di a .

1) Valutazione di a' . - La situazione che si stabilisce all'accensione della radiofrequenza e che determina l'estensione radiale del fascio in un sincrotrone ideale suggerisce di considerare contemporaneamente le oscillazioni orizzontali di betatrone e sincrotrone: infatti il numero di particelle che sopravvivono all'accensione della radiofrequenza è funzione di un solo parametro, che chiameremo a' , che rappresenta il ^{doppio del} massimo scostamento di un elettrone dall'orbita principale. Nella tabella seguente sono riportati i valori di $\theta_{211} / \bar{\rho}_i$ (v. Rapp.4), cioè della durata efficace di iniezione per rendimento medio $\bar{\rho}_i$ di iniezione unitario, in funzione di a' , per due valori della spiralizzazione :

	$\sigma = 0.2$ cm	0.6
$a' = 10.1$ cm	0.85 sec	0.19
12.1	1.00	0.26
14.1	1.30	0.32

Si assume in seguito il valore $a' = 12.1$ cm per le dimensioni radiali del fascio imperturbato.

2) Valutazione di a_1 . - Si considerano separatamente due eventualità, contraddistinte con il nome di "alta precisione" (AP) e "bassa precisione" (BP) a seconda che l'errore relativo sulla frequenza della cavità sia:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \begin{array}{cc} \text{AP} & \text{BP} \\ \pm 10^{-4} & \text{oppure} \quad \pm 3 \cdot 10^{-3} \end{array}$$

La posizione dell'orbita sincrona è fissata dal valore di $\frac{\Delta \nu}{\nu}$; la fascia, attorno all'orbita sincrona ideale, entro la quale è contenuta l'orbita sincrona reale, è larga, nei due casi

$$a_1 = \begin{array}{cc} \text{AP} & \text{BP} \\ 0.1 \text{ cm} & 2.7 \text{ cm} \end{array}$$

Questo è anche l'allargamento a_1 , della regione a disposizione del fascio, necessario affinché il $\Delta \nu / \nu$ non riduca il numero di particelle catturate.

3) Valutazione di a_2 . - Si suppone quanto è contenuto in 2) par.2 a proposito del tipo delle irregolarità. Si assumono i seguenti coefficienti di Fourier per la perturbazione

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 10^{-3} \\ \alpha_3 &= \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 10^{-2} \end{aligned}$$

da cui

$$a_2 = \begin{array}{cc} \text{FC} & \text{FP} \\ 2.1 \text{ cm} & 6.3 \text{ cm} \end{array}$$

4) Valutazione di a_3 . - Anche per i campi nei tratti dritti, vale quanto detto in 3) par.2 per quello che riguarda la loro distribuzione. Si pensa però di poter effettuare una

correzione del raggio medio dell'orbita chiusa con un aggiustamento dell'energia di iniezione: resta però una oscillazione dipendente, oltre che dal valore medio del campo nei tratti diritti, dalle sue fluttuazioni da tratto a tratto. Precisamente, se si assume che

$$f_k = \frac{\Delta B_k}{B_0} = (4 \pm 1) \times 10^{-2} \quad k = 1, 2, 3, 4$$

nel k-esimo settore e si rende massima l'ampiezza rispetto ai possibili valori di f_k , si ottiene

$$a_3 = 2.2 \text{ cm}$$

5) Valutazione di a_4 - Con le ipotesi α) e β) di 4) par.2, e deducendo questa volta l'ordine di grandezza di v_0 dalla forza di richiamo orizzontale, si trova

$$a_4 = 1.2 \text{ cm}$$

6) Valutazione finale di a - La seguente tabella riassume i dati ricavati nei paragrafi precedenti per i vari casi:

FC, FP come per la valutazione di b, e AP, BP per l'alta e bassa precisione della radiofrequenza

a_i	FC	AP	FC	BP	FP	AP	FP	BP
a'		12.1 cm		12.1 cm		12.1 cm		12.1 cm
a_1		0.1		2.7		0.1		2.7
a_2		2.1		2.1		6.3		6.3
a_3		2.2		2.2		2.2		2.2
a_4		1.2		1.2		1.2		1.2
a		17.7		20.3		21.9		24.5
a/R		4.9%		5.6%		6.1%		6.8%

§ 4 - Costo e intensità.

In questo paragrafo riporteremo a titolo di esempio alcune considerazioni che si possono fare assumendo certe curve di costo P e intensità J in funzione di a e b . Assumeremo che:

α) a pari a : il costo sia proporzionale a b , entro certi limiti (Sacerdoti); l'intensità sia proporzionale a $(b-b_0)^2$, dove $b_0 = b_2 + b_3 + b_4$, per $b-b_0 < b_1$, e si mantenga costante per $b-b_0 > b_1$.

β) a pari b : il costo sia proporzionale a \sqrt{a} (Sacerdoti); l'intensità sia proporzionale a $a^{3/2} = (a-a_0)^{3/2}$ ($a_0 = a-a'$) (Rapp.4). Cioè:

$$\begin{aligned}
 P &= C b \sqrt{a} \\
 (1) \quad J &= k(b-b_0)^2 (a-a_0)^{3/2} \quad b < b_0 + b_1 \\
 &= k(b_1^2) (a-a_0)^{3/2} \quad b > b_0 + b_1
 \end{aligned}$$

dove C e k sono indipendenti oltre che da a e b , anche da a_0 , b_0 , b_1 . L'approssimazione più grossolana deriva dall'omissione delle perdite di scattering e del rendimento d'iniezione, che modificano la dipendenza di J da b ed a rispettivamente; non si può dire nulla invece sulla bontà della legge assunta per P che può essere anche molto diversa per particolari circostanze di carattere commerciale. Tuttavia, ammessa la validità di queste leggi, la discussione può farsi in forma indipendente dalle particolarità della macchina; infatti, se poniamo

$$\beta = \frac{b}{b_0}, \quad \alpha = \frac{a}{a_0}, \quad \beta_1 = \frac{b_1 + b_0}{b_0}, \quad \beta_0 = \frac{P}{C b_0 \sqrt{a_0}}$$

$$J = \frac{J}{k b_0^2 a_0^{3/2}}$$

le (1) divengono

$$\begin{aligned}
 J &= \beta \sqrt{\alpha} \\
 J &= (\beta-1)^2 (\alpha-1)^{3/2} \quad \beta < \beta_1 \\
 &= (\beta_1-1)^2 (\alpha-1)^{3/2} \quad \beta > \beta_1
 \end{aligned}$$

Nella fig. (4) sono riportate le "isocosto"

$$\beta_0(\alpha, \beta) = \text{costante}$$

e le curve

$$J(\alpha, \beta) = \text{costante}$$

La curva che unisce i punti in cui una isocosto è tangente ad una certa $J = \text{costante}$ fornisce il luogo delle massime intensità ottenibili con un dato costo.

§ 5 - Riassunto e confronto con le dimensioni di altre macchine.

Nei precedenti paragrafi sono dedotte le dimensioni lineari, radiale e verticale, della ciambella, a partire dalle quali la frazione di elettroni che compie il ciclo di accelerazione si presume sia notevole. Bisogna tener presente quanto si presuppone circa le deviazioni dal sincrotrone ideale; e cioè:

α) l'assenza di non linearità del campo magnetico; che equivale ad ammettere che il valore dell'indice n sia contenuto, nella regione utile, entro i limiti di cui al rapp.1;

β) l'assenza di armoniche elevate nelle perturbazioni magnetiche;

γ) la possibilità di perturbare le fasi delle irregolarità conservando l'ordine di grandezza delle ampiezze, in modo da evitare l'effetto delle fasi peggiori.

Inoltre, la stima di b_4 ed a_4 deve ritenersi molto grossolana.

Nella tabella riportiamo per confronto i casi FC, CI (per b) del n°5) par.2, FC, AP del n°6) par.3 (per a) insieme con le aperture di altri sincrotroni.

Si noterà che le aperture relative calcolate nel presente rapporto risultano (con una sola eccezione) inferiori a quelle di tutte le macchine esistenti. Ciò è dovuto da un lato alle condizioni assai severe imposte alla regolarità del campo magnetico (v. lettera Sands 13-2-1954), e dall'altro lato al non aver introdotto nessun margine per imprevisti. È da ritenere quindi che le aperture così calcolate rappresentino un minimo accettabile, ma non facile da realizzare.

Roma, 20 dicembre 1954

	Pres. rapp.	MIT	Cornell	Caltech	Caltech nuovo	Brookhaven	Berkeley	Birmingham	Sacley
a in cm	17.7	8.9	14	55	22	64	92	36	35±24
b in cm	6.6	4.6	4.6	13	7.5	15	30	10	5
R in cm	360	100	100	350	376	910	1520	450	840
a/R %	4.9	8.9	14	16	5.9	7	6	8	4.2±2.9
b/R %	1.8	4.6	4.6	3.7	2.0	1.65	2	2.2	0.6
E _i in MeV	2.5	0.08 ⁺	0.08 ⁺	1.5	1.5	4	10	0.46	4.5

± per protoni.

+ iniezione a betatrone.

