Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/43 (20.12.54)

P. G. Sona: PERDITE DI ENERGIA PER EFFETTO DELLE COERENZE DELLA RADIAZIONE EMESSA.

T - VI

2-XII-54

P.G. SONA

PERDITE DI ENERGIA PER EFFETTO DELLE COERENZE DELLA RADIAZIONE EMESSA

L'energia irradiata in un giro da un elettrone che descrive una circonferenza di moto uniforme nel vuoto, lontano da schermi, é:

$$(1)\quad L_o = \frac{4}{3}\pi\frac{e^2}{R}\beta^3\gamma^4$$

dove e= carica dell'elettrone

R= raggio della circonferenza

βc = velocità dell'elettrone

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m_0 c^2}$$

Lo risulta dalla somma delle energie irradiate alle varie frequenze multiple della freqummza di rivoluzione. Se N elettroni descrivono la stessa circonferenza o circonferenze coassiali di raggio poco diverso, con la stessa velocità angolare, l'energia irradiata non é N volte più grande, perché si ha interferenza fra le onde emesse, e quest'interferenza é forte specialmente dalla parte delle basse frequenze.

L'energia irradiata in ogni frequenza dipende dalla distribuzione in azimut degli elettroni, e in prima approssimazione non dipende dalla differenza di raggio.

L. Shiff (Rev. Sci. Instr. 17, 6, 1946) ha dato la formula che dà l'energia L_{coer} irradiata da un elettrone in un giro per effetto della coerenza (in più dell'energia Lo), in assenza di schermi vicino all'orbita degli elettroni.

Tale perdita é indipendente dall'energia degli elettroni, per $\beta \simeq 1$, ed é proporzionale al numero di elettroni presenti sull'orbita.

La formula che dà L_{coer} é, nel caso che si abbiano K bunchs di elettroni sull'orbita, ciascuno con distribuzione gaussiana della forma

$$\text{cost.}\ e^{-\vartheta^2/2\,\frac{\psi^2}{K^2}}$$

(K= ordine dell'armonica di lavoro, ψ= valore quadratico med: della distanza in fase di un elettrone dall'elettrone sincrono dello stesso bunch, ϑ = azimut dell'elettrone) :

$$(2) \quad L_{coer} = \left[\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right)\right]^2 \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot N \cdot \frac{e^2}{R} \quad \frac{K^{\frac{1}{3}}}{\psi^{\frac{4}{3}}} = 3{,}16 \cdot 10^{-12} N \frac{k^{\frac{1}{3}}}{\psi^{\frac{4}{3}}} \frac{1}{R_{metri}} \ keV$$

Il calcolo é fatto ammettendo che sia gaussiana la distribuzione della densità di probabilità per un elettrone di trovarsi ad un certo azimut, considerando le posizioni degli elettroni/come indipendenti e calcolando il <u>valore medio</u> dell'energia irradiata per effetto di coerenza da tutte le possibili distribuzioni degli N elettroni, pesate secondo le rispettive probabilità.

J.S. Nodvick e D.S. Saxon (Technical Report N. 21 - Departement of Physics, University of California- 1954) hanno calcolato le perdite che si hanno in presenza di schermi perfettamente conduttori, aventi la forma di due corone circolari uguali disposte simmetricamente sopra e sotto l'orbita degli elettroni. E' discutibile però che i poli laminati si comportino come perfettamente conduttori, anche a quelle alte frequenze. M. Sands (SYnchrotron oscillations induced by radiation fluctuations) -California Institute of Techology) ha mostrato che alle alte energie l'emissione discontinua di energia dovuta alla quantizzazione della radiazione emessa pone un limite allo smorzamento delle oscillazioni di sincrotrone, cosicché il valore di ψ non diminuisce indefinitamente, ma in condizione di equilibrio diventa:

$$(3) \quad \psi = \sqrt{102\, K \frac{tg\, \varphi_s}{1-4n} \frac{m_0 c^2}{E}}$$

(formula 19 del report citato, per una macchina senza sezioni diritte, dove n= indice del campo magnetico, φ_s = fase sincrona).

Questa formula vale per un'energia maggiore di

$$E_c = m_0 c^2 \left[\frac{3}{2} \frac{1}{c} \frac{R^2}{e^2} \frac{1-n}{3-4n} \dot{E}\right]^{\frac{1}{4}}$$

dove $\dot{E}$ é la velocità di salita dell'energia dell'elettrone (formula 21 del report citato).

Con i dati del David (n= 0,6 ; R_{medio}= 436 cm ; $\dot{E}$ massimo = = 126.000 MeV/sec.) il valore di Ec é ~ 800 MeV

L'effetto calcolato da Sands riduce fortemente le perdite per coerenza alle alte energie, perché senza quest'effetto il valore di γ sarebbe molto minore.
Anche il rivestimento conduttore della parete interna della ciambella potrebbe schermare la radiazione emessa alle basse frequenze, quando l'energia degli elettroni é bassa; ma i dati sulla resistività del rivestimento sono molti incerti, e d'altra parte bisognerebbe che la resistenza complessiva dello strato nella direzione dell'orbita fosse abbastanza bassa, dell'ordine di 2000Ω, per ottenere un effetto sensibile.
Perciò é preferibile calcolare le perdite per coerenza in assenza di schermi, ottenendo così per esse un valore pessimistico; questo valore é abbastanza importante percentualmente rispetto alla perdita incoerente solo per 10^{12} elettroni, alle alte energie; per 10^{11} elettroni l'effetto di coerenza é piccolo, in valore assoluto, a tutte le energie.
La tabella I dà i valori di Lcoer in funzione di γ per i due valori K= 4 e K=6 dell'ordine dell'armonica di lavoro; come abbiamo detto, Lcoer non dipende dall'energia. Si é applicata la formula (2) con R= 436 cm., N =10^{12} elettroni. La stessa tabella può servire per un numero qualunque di elettroni, data la proporzionalità fra Lcoer ed N. Per vedere qual'é il rapporto fra Lcoer e Lo, si deve confrontare Lcoer letto sulla tabella I con Lo letto sulla tabella II, che dà Lo in funzione di E, calcolato mediante la formula (1) , con R=436 cm.
Si deve tenere presente che, il valore γ (ed anche, almeno alle basse energie, il valore di N) varia coll'energia, ed é difficile prevederne il comportamento; ma é ragionevole ammettere che γ varii dal valore che ha all'accendersi della radiofrequenza (che é circa 0,91, ottenuto calcolando il valore quadratico medio delle differenze di fase in un bunch di densità uniforme e con estensione 2π nella fase), al valore asintotico alle alte energie dato dalla formula di Sands (3).
Nella tabella III é riportato questo valore asintotico in funzione dell'energia e di K, calcolato dalla formula (3) con Φ_s = 30° e n = 0.6.

Tabella I

Valori di L_{coer} = perdita di energia per giro per ogni elettrone per effetto di coerenza in funzione di Ψ = spread in fase di un bunch, e di K = ordine dell'armonica di lavoro, per N à= 10^{12} elettroni, R = raggio medio della macchina = 436 cm.

	K = ~~5~~ 4	K = 6
Ψ (radianti)	L_{coer} (eV)	L_{coer} (eV)
0.4	3880	4450
0.5	2880	3300
0.6	2260	2580
0.7	1840	2120
0.8	1540	1770
0.9	1320	1500
1.0	1140	1310
1.2	896	1025
1.4	730	837
1.6	612	700

Tabella II

Valori di L_o = perdita di energia per giro per ogni elettrone dovuta alla radiazione incoerente, in funzione dell'energia E dell'elettrone (R = 436 cm raggio medio).-

E (totale, in MeV)	L_o (eV)
2,5	8×10^{-7}
100	2
200	32
300	164
500	1270
800	8320
1000	20300

Tabella III

Valori di ψ per le alte energie calcolati dalla formula di Sands (effetto dell'emissione quantistica).

	K = 4	K = 6
E (Mev)	ψ (radianti)	ψ (radianti)
700	0,53	0,65
800	0,50	0,61
900	0,47	0,58
1000	0,45	0,55