

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/30 (28. 6. 54)

A. Turrin: CONFRONTO TRA IL SINCROTRONE CONVENZIONALE ED
IL SINCROTRONE A FOCHEGGIAMENTO FORTE.

Gruppo Teorico

Rapporto n. 14

A. Turrin

AMPIEZZE MASSIME DELLE OSCILLAZIONI DI BETATRONE NEI SINCROTRONI

CONFRONTO TRA IL SINCROTRONE CONVENZIONALE

(Progetto Tiburtino)

ED IL SINCROTRONE A FOCHEGGIAMENTO FORTE

(Progetto di R.R. Wilson)

Caso oscillazioni radiali

Riassunto: I calcoli delle oscillazioni di betatrone per i due tipi di sincrotrone si possono condurre in modo unitario. Con un semplice ragionamento si può controllare la validità della conclusione finale relativamente al sincrotrone convenzionale.

Per i casi particolari considerati (Progetto Tiburtino e Progetto di R.R. Wilson) si trova che per particelle di momento $p=p_0=ReB_0$, i due tipi di macchine hanno uguali proprietà di focalizzazione. Per particelle di momento $p=p_0+\Delta p$ ($|\frac{\Delta p}{p_0}| \sim 10^{-2}$) le ampiezze massime delle oscillazioni forzate dovute all'indeterminazione nel momento sono

$$\frac{|x|_{max}}{R} = 5.1 \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \text{ per il caso d}$$

$$\frac{|x|_{max}}{R} = 0.52 \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| \text{ per il caso f}$$

rispettivamente per il progetto tiburtino e quello di R.R. Wilson.

Il confronto tra il sincrotrone convenzionale e quello a foccheggiamento forte è stato fatto nelle seguenti condizioni:

Per $p=p_0$ si sono confrontate le ampiezze di betatrone a pari valore iniziale di x_0^2 , con $x_0=0$.

Per $p \neq p_0$, si sono confrontate le ampiezze di betatrone a pari Δp e per $x_0 = x'_0 = 0$.

Non si sono considerate le oscillazioni di sincrotrone, nè si è tenuto conto delle diverse particolarità dell'iniezione nei due casi.

E' stato infine valutato l'ordine di grandezza delle oscillazioni forzate dovute ai disallineamenti fra i magneti nel sincrotrone di R.R. Wilson. Si trova - per particelle di momento $p = p_0$ -

$$\langle |X|_{max} \rangle \sim 18 \langle \epsilon \rangle$$

dove $\langle \epsilon \rangle$ è il valore quadratico medio delle quantità ϵ_x ed ϵ_y di cui alla figura 4 del testo; cioè se $\langle \epsilon \rangle \sim 1/2 \text{ mm}$, si ha $\langle |X|_{max} \rangle \sim 1 \text{ cm}$.

Tali limiti di tolleranza non sembrano proibitivi.

In conclusione si può ritenere - con le riserve qui esposte (iniezione ed oscillazione di sincrotrone) - che le proprietà di focalizzazione dello strong focusing autorizzano a restringere le dimensioni radiali e verticali della ciambella rispetto a quelle richieste per il weak focusing.

I. Introduzione.

Tanto per un sincrotrone a focalizzazione debole (d) quanto per un sincrotrone a focalizzazione forte (f) il problema di determinare la larghezza utile della ciambella si può definire nel modo seguente: sia R il raggio dell'orbita principale; tale grandezza è la distanza tra l'asse medio della ciambella (nelle sezioni curve) ed il centro di curvatura dei settori magnetici.

La zona utile (radiale) della ciambella è compresa tra i limiti

$$R - \frac{a}{2} \quad R \quad R + \frac{a}{2}$$

Descriveremo il comportamento cinematico di una particella considerando la sua distanza x dalla orbita principale.

La determinazione esplicita della funzione x (e del suo massimo) nei casi (d) ed (f) ci permetterà di confrontare le proprietà di focalizzazione dei due tipi di Racetrack.

II. L'equazione differenziale del moto nei settori magnetici.

Tanto per un sincrotrone a focalizzazione debole (d)⁽¹⁾ quanto per uno a focalizzazione forte (f)⁽²⁾ l'orbita di una particella di momento p sottoposta all'induzione magnetica B_z si ricava risolvendo l'equazione differenziale

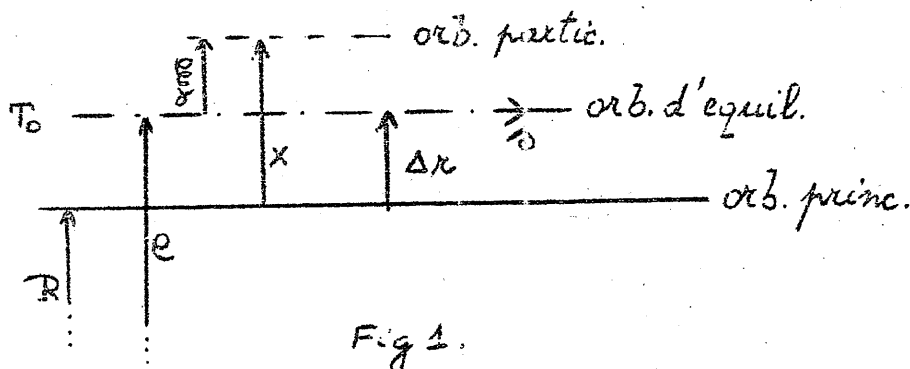
II.1)

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{1}{\rho^2} x = 0$$

(1) N.M. Blachman and E.D. Courant - Rev. Sci. Instr., 20, 596 (1949).

(2) A. Stepanovskaya - GEMM/T/50-7 (1952).

dove (v. fig.1):



ξ è la distanza contata dall'orbita d'equilibrio T_0 ; l'orbita di equilibrio T_0 è individuata mediante il suo raggio di curvatura

II.2)
$$e = \frac{h}{2B_2(e)} \quad q = \text{carica della particella, presa col suo segno,}$$

Δ è il percorso contato lungo l'orbita d'equilibrio T_0 ; n è definito dalla

II.3)
$$n = - \frac{e}{B_2(e)} \frac{\partial B_2(e)}{\partial(e)}$$

Per quel che seguirà conviene ricavarsi l'equazione differenziale - equivalente alla II.1) con le precisazioni II.2) e 3) - a cui deve soddisfare la x .

Essendo (fig.1) $\xi = x - \Delta\kappa$

con $\Delta\kappa = e - R$, la II.1) diviene:

II.4)
$$x'' - \frac{(\Delta\kappa)''}{e^2} + \frac{x}{e^2} - \frac{\Delta\kappa}{e^2} + \frac{e}{B_2(e)} \frac{\partial B_2(e)}{\partial e} \frac{x}{e^2} - \frac{e}{B_2(e)} \frac{\partial B_2(e)}{\partial e} \frac{\Delta\kappa}{e^2} = 0$$

$('' \equiv \frac{d^2}{ds^2})$

In approssimazione adiabatica è da considerarsi $|\Delta\kappa|''$ molto più piccolo degli altri termini, e perciò trascurabile.

Se poniamo:

$$\text{II.2') } R = \frac{\mu_0}{\rho B_2(R)}$$

nonchè

$$\text{d) II.3') } n_0 = - \frac{R}{B_2(R)} \left[\frac{\partial B_2(r)}{\partial r} \right]_{r=R}$$

Si avrà: dalla II.3), supponendovi n costante,

$$\text{II.5_d) } B_2(r) = B_0 \left(\frac{r}{R} \right)^{-n}$$

e dalla II.3_d)

$$\text{II.6_d) } \boxed{n = n_0}$$

Segue per la II.4)

$$\text{II.7_d) } x'' + \frac{1-n_0}{e^2} (x - \Delta r) = 0$$

Supponiamo ora che sia $\left| \frac{\Delta r}{r_0} \right| \ll 1$ (per fissare le idee $\left| \frac{\Delta r}{r_0} \right| \leq \sim 10^{-2}$).

Sarà in tal caso per Δr

$$\text{II.8) } \Delta r = \frac{R}{1-n_0} \frac{\Delta \mu}{\mu_0}$$

d) In tali ipotesi si ha

$$\text{II.9_d) } x'' + \frac{1-n_0}{e^2} x = \frac{R}{e^2} \frac{\Delta \mu}{\mu_0}$$

nonchè

$$\text{f) II.3_f) } n_0 = - \frac{R}{B_2(R)} \frac{\partial B_2(r)}{\partial r}$$

Si avrà: dalla II.3_f), supponendovi n_0 costante,

$$\text{II.5_f) } B_2(r) = B_0 \left(1 - n_0 \frac{r-R}{R} \right);$$

e dalla II.3)

$$\text{II.6_f) } \boxed{n = n_0 \frac{e}{B_2(r)} \frac{B_2(R)}{R}}$$

Segue per la II.4)

$$\text{II.7_f) } x'' + \left(\frac{1}{e^2} - \frac{n_0 \mu_0}{R^2} \right) (x - \Delta r) = 0$$

f) In tali ipotesi si ha (considerando $\frac{\mu_0}{\mu} \approx 1$) con buona approssimazione

$$\text{II.9_f) } x'' + \left(\frac{1}{e^2} - \frac{n_0}{R^2} \right) x \approx \left(\frac{1}{e^2} - \frac{n_0}{R^2} \right) \frac{R}{1-n_0} \frac{\Delta \mu}{\mu_0}$$

dove

$$c^2 = R^2 \left(1 + \frac{2}{1-n_0} \frac{\Delta\mu}{\mu_0} + \dots \right)$$

d) Essendo per il progetto tiburtino $n_0=0.6$ si può scrivere con buona approssimazione:

f) Essendo $|n_0| \gg 1$ oppure (campoguida) $n_0 = 0$ si ottiene immediatamente:

II.10)

$$x'' + \frac{1-n_0}{R^2} x \approx \frac{1}{R} \frac{\Delta\mu}{\mu_0}$$

per ambedue i casi (d) ed (f).

Con le ipotesi fatte su $\frac{\Delta\mu}{\mu_0}$, cioè su $\frac{\Delta\mu}{R}$, il percorso s può venir contato lungo l'orbita principale anzichè lungo l'orbita d'equilibrio T_0 ; ciò dà luogo solo ad errori di entità trascurabile.

III. L'orbita della particella nei settori magnetici.

Abbiamo visto che in un settore di dato n_0 l'equazione del moto di una particella di momento $p=p_0 + \Delta\mu p$ ($|\frac{\Delta\mu}{\mu_0}| \ll 1$) per le oscillazioni radiali è

III.1)

$$x'' + \frac{1-n_0}{R^2} x \approx \frac{1}{R} \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \quad \left(\ddot{} \equiv \frac{d^2}{ds^2}; s=R\theta \right)$$

Caso d): Per il progetto tiburtino è $n_0=0.6$

$$R = 333.3 \text{ cm}$$

Si ottiene per la x_u e la x'_u : (u = uscita dal settore)

(e = entrata nel settore)

III.2_d)

$$\left\{ \begin{aligned} x_u &= \left[x_e \cos \frac{\ell}{\lambda} + \lambda x'_e \sin \frac{\ell}{\lambda} \right] + \left[\frac{R}{1-n_0} \frac{\Delta\mu}{\mu_0} (1 - \cos \frac{\ell}{\lambda}) \right] \\ x'_u &= \left[-\frac{x_e}{\lambda} \sin \frac{\ell}{\lambda} + x'_e \cos \frac{\ell}{\lambda} \right] + \left[\frac{1}{(1-n_0)^2} \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \sin \frac{\ell}{\lambda} \right] \end{aligned} \right.$$

dove l è la lunghezza del settore (Γ);

$$\lambda = \frac{R}{(1 - n_0)^{\frac{1}{2}}}$$

Caso f): Per il progetto di R.R. Wilson è $|n_0| = 21$

$$R = 384.0 \text{ cm.}$$

+) Per un settore focalizzante (Γ_+) è $n_0 = -|n_0|$ e si ha per x_u e x'_u :

$$\text{III.2}_{f_+} \left\{ \begin{aligned} x_u &= \left[x_e \cos \frac{l_+}{\lambda_+} + \lambda_+ x'_e \sin \frac{l_+}{\lambda_+} \right] + \frac{R}{1 + |n_0|} \frac{\Delta \mu}{\mu_0} \left[1 - \cos \frac{l_+}{\lambda_+} \right] \\ x'_u &= \left[-\frac{x_e}{\lambda_+} \sin \frac{l_+}{\lambda_+} + x'_e \cos \frac{l_+}{\lambda_+} \right] + \frac{1}{(1 + |n_0|)^{\frac{1}{2}}} \frac{\Delta \mu}{\mu_0} \sin \frac{l_+}{\lambda_+} \end{aligned} \right.$$

dove: l_+ è la lunghezza del settore (Γ_+);

$$\lambda_+ = \frac{R}{(1 + |n_0|)^{\frac{1}{2}}}$$

-) Per un settore defocalizzante (Γ_-) è $n_0 = +|n_0|$ e si ha per x_u e x'_u :

$$\text{III.2}_{f_-} \left\{ \begin{aligned} x_u &= \left[x_e \cos \frac{l_-}{\lambda_-} + \lambda_- x'_e \sin \frac{l_-}{\lambda_-} \right] - \frac{R}{|n_0| - 1} \frac{\Delta \mu}{\mu_0} \left[1 - \cos \frac{l_-}{\lambda_-} \right] \\ x'_u &= \left[\frac{x_e}{\lambda_-} \sin \frac{l_-}{\lambda_-} + x'_e \cos \frac{l_-}{\lambda_-} \right] + \frac{1}{(|n_0| - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\Delta \mu}{\mu_0} \sin \frac{l_-}{\lambda_-} \end{aligned} \right.$$

dove: l_- è la lunghezza del settore (Γ_-);

$$\lambda_- = \frac{R}{(|n_0| - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

*) Per un settore con campo guida (Γ_n) è $n_0 = 0$ e si ha per x_u e x'_u :

$$\text{III.2}_{f_n} \left\{ \begin{aligned} x_u &= \left[x_e \cos \frac{l_n}{\lambda_n} + \lambda_n x'_e \sin \frac{l_n}{\lambda_n} \right] + R \frac{\Delta \mu}{\mu_0} \left[1 - \cos \frac{l_n}{\lambda_n} \right] \\ x'_u &= \left[-\frac{x_e}{\lambda_n} \sin \frac{l_n}{\lambda_n} + x'_e \cos \frac{l_n}{\lambda_n} \right] + \frac{\Delta \mu}{\mu_0} \sin \frac{l_n}{\lambda_n} \end{aligned} \right.$$

dove: l_n è la lunghezza del settore (Γ_n); $\lambda_n = R$.

IV. Il moto della particella di momento $p=p_0$ ⁽³⁾

Consideriamo per ora il moto della particella nel caso in cui il suo $\frac{\Delta p}{p_0}$ sia zero. Ciò è utile non solo per poterlo confrontare successivamente col caso $\frac{\Delta p}{p_0} \neq 0$, ma soprattutto per poterci costruire - sulle basi di un problema semplice - lo strumento matematico che ci servirà poi per affrontare il problema generale.

Ragioniamo direttamente su: d) la struttura del progetto tiburtino che consiste in 4 sequenze fondamentali, ciascuna composta di un tratto rettilineo e di uno focalizzante (v. fig.2). I parametri fondamentali di questa macchina sono:

Raggio nominale: $R = 333.3$ cm

Lunghezza tratti rettilinei: $2L = 100$ cm

indice del campo = $n_0 = 0.60$

f) la struttura del progetto di Wilson che consiste in 4 sequenze fondamentali, ciascuna composta da un tratto rettilineo e da una serie di tratti focalizzanti, disposti come nella fig.2. Le notazioni fondamentali per questa struttura sono compendiate nella fig.2.

Poniamo:

$2L = 101.6$ cm = lunghezza tratto rettilineo

$l_{\sim 1} = 10.16$ cm = lunghezza 1° settore con campo guida

$l_+ = 68.82$ cm = lunghezza settore focalizzante

$l_- = 141.8$ cm = lunghezza settore defocalizzante

$2l_{\sim 2} = 22.86$ cm = lunghezza 2° settore con campo guida

Sia nel caso (d) che nel caso (f) consideriamo una particella iniettata, con lo stato iniziale (x_0, x'_0) , alla metà

(3) E.R. Caianiello and A. Turrin - N. Cim., 10, 594 (1953).

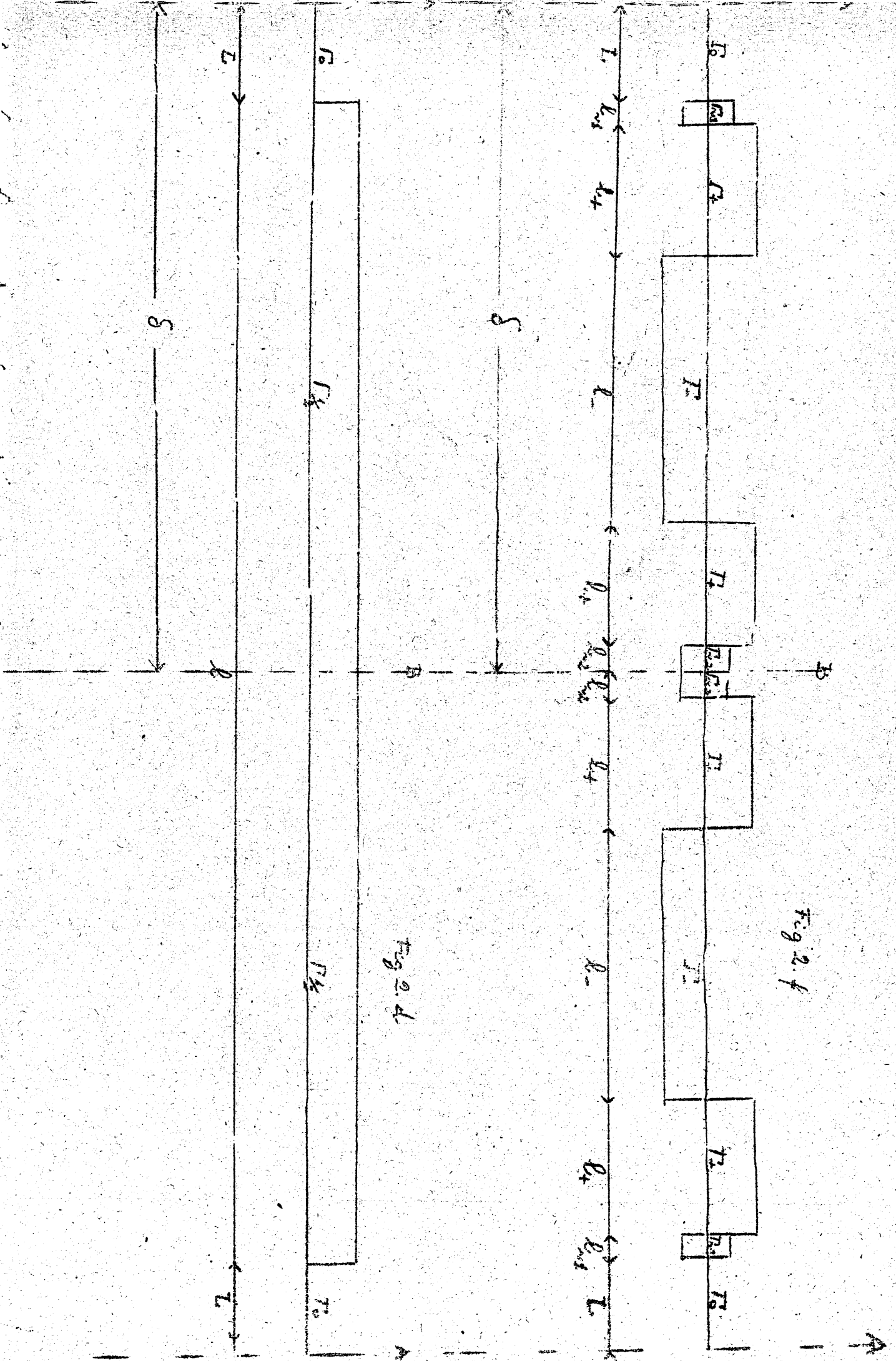


Fig. 2.4

Fig. 2.f

di una sezione diritta della macchina (Punto A di fig. 2).
 Ciò non solo per schematizzare nel modo corretto l'iniezione,
 ma anche per ottenere, come vedremo fra breve, la matrice
 della sequenza fondamentale in forma ortogonale.

All'entrata del settore focalizzante attiguo alla sezione diritta lo stato della particella sarà:

$$IV.1) \quad \begin{cases} x_L = x_0 + L x'_0 \\ x'_L = x'_0 \end{cases}$$

La IV.1) si può compendiare nella trasformazione vettoriale

$$IV.1') \quad \begin{vmatrix} x_L \\ \lambda_\Delta x'_L \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ \lambda_\Delta x'_0 \end{vmatrix}$$

In essa compare una costante arbitraria $\lambda_\Delta \neq 0$ avente le dimensioni di una lunghezza che - eseguito che sia il prodotto matrice per vettore indicato nella IV.1') - non entra a far parte della espressione IV.1). Allora: lo stato cinematico di una particella libera può rappresentarsi col vettore $\bar{x} = \begin{vmatrix} x \\ \lambda_\Delta x' \end{vmatrix}$ (così all'iniezione $\bar{x}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ \lambda_\Delta x'_0 \end{vmatrix}$).

Per quanto detto, il valore di λ_Δ può essere scelto arbitrariamente, cioè può essere scelta arbitrariamente l'unità di lunghezza della seconda componente - individuante la pendenza dell'orbita rispetto a - del vettore \bar{x} .

All'uscita dalla semi-sezione diritta l'elettrone (sia nel caso (d) che nel caso (f)) entra in una sezione magnetica focalizzante di lunghezza l . Per quanto detto nel par. III (formula III.2_d oppure III.2_{f+}) alla fine di questo settore lo stato finale dell'elettrone sarà

$$IV.2) \quad \begin{cases} x = x_L a + \lambda x'_L b \\ x' = -\frac{x_L}{\lambda} b + x'_L a \end{cases}$$

dove è stato posto

$$IV.2') \quad \begin{cases} a = \cos \frac{\rho}{\lambda} \\ b = \sin \frac{\rho}{\lambda} \end{cases} \quad \text{costanti della macchina.}$$

(Per il progetto tiburtino $a = 0.5459$ $b = 0.8379$ $\lambda = 527.0 \text{ cm}$)

Anche le IV.2) si possono compendiare nella trasformazione vettoriale

$$IV.2'') \quad \begin{vmatrix} x \\ \lambda_{\Delta} x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} b \\ -\frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_L \\ \lambda_{\Delta} x'_L \end{vmatrix}$$

dove $\lambda_{\Delta} \neq 0$ può ancora essere costante indeterminata qualunque.

Posto ora

$$IV.3) \quad \Gamma_0 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$IV.3') \quad \Gamma = \begin{vmatrix} a & \frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} b \\ -\frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} b & a \end{vmatrix}$$

le IV.1' e 2'') si possono scrivere

$$IV.4) \quad \bar{x}_L = \Gamma_0 \bar{x}_0$$

$$IV.4') \quad \bar{x} = \Gamma \bar{x}_L$$

Sostituendo la IV.4) nella IV.4') si trova subito la trasformazione che subisce il vettore \bar{x}_0 al passaggio attraverso un semitratto rettilineo ed uno focalizzante:

$$IV.5) \quad \bar{x} = \Gamma \Gamma_0 \bar{x}_0$$

dove

$$IV.5') \quad T_0 = \begin{vmatrix} a & \frac{\lambda}{\lambda_0} (a \frac{L}{\lambda} + b) \\ -\frac{\lambda_0 b}{\lambda} & a - \frac{\lambda L}{\lambda} \end{vmatrix}$$

Iterando questo procedimento fino alla fine della sequenza fondamentale si trova:

$$IV.5'') \quad \begin{vmatrix} x_c \\ \lambda_0 x_c' \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} x_0 \\ \lambda_0 x_0' \end{vmatrix}$$

dove: caso d) per il sincrotrone convenzionale la matrice della sequenza fondamentale è

$$IV.5''_d) \quad \Delta = T_0 T_0$$

cioè:

$$IV.5''_d) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a - \frac{L}{\lambda} b & \frac{\lambda}{\lambda_0} \left[2 \frac{L}{\lambda} a + b \left(1 - \frac{L^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ -\frac{\lambda_0 b}{\lambda} & a - \frac{L}{\lambda} b \end{vmatrix}$$

$$IV.5''_d) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a - \frac{L}{\lambda} b & \frac{\lambda}{\lambda_0} \left[2 \frac{L}{\lambda} a + b \left(1 - \frac{L^2}{\lambda^2} \right) \right] \\ -\frac{\lambda_0 b}{\lambda} & a - \frac{L}{\lambda} b \end{vmatrix}$$

caso f) per il sincrotrone di R.R. Wilson la matrice della sequenza fondamentale è:

$$IV.5''_f) \quad \Delta = T_0 T_{N_2} T_0 T_{N_2} T_0 T_{N_2} T_0 T_{N_1} T_0$$

In ogni caso (f) e (d) la matrice Δ della sequenza fondamentale si può scrivere sotto la forma

$$IV.5''') \quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \gamma & \frac{1}{\lambda_0} \Delta_1 \\ -\frac{\lambda_0}{\lambda} \Delta_2 & \frac{1}{2} \gamma \end{vmatrix}$$

dove: γ = traccia (Δ)

λ_{Δ} = numero per ora arbitrario $\neq 0$

{ caso (d): $\bar{A} = \lambda = 527.0$ cm (v. formula III.2_d)
caso (f): $\bar{A} = R = 384.0$ cm (scelta per comodità di calcolo)

Scegliendo per sequenza fondamentale la sequenza compresa tra i punti (A, A) di fig.2 si ottiene dunque una matrice Δ di forma particolare: gli elementi della sua diagonale principale risultano uguali. Ciò è dovuto al fatto che il punto A è centro di simmetria della struttura dinamica teorica della macchina.

Anche il punto B gode di questa proprietà, e si potrebbe vedere (ripetendo il ragionamento qui fatto per A) che scegliendo per sequenza fondamentale quella compresa fra 2 punti consecutivi (B, B) di fig.2 la forma della Δ sarebbe ancora del tipo IV.5^{na}). Ma atteniamoci alla scelta (A, A) e proponiamoci di particularizzare ancor più la forma della Δ , col renderla ortogonale.

V. La matrice Δ espressa in forma ortogonale.

Si dimostra⁽³⁾ che nell'ipotesi di inesistenza di inomogeneità di qualunque natura, cioè per una struttura ideale e per $\frac{\Delta h}{k_0} = 0$, le oscillazioni sono stabili solo se

$$V.1) \quad |\text{traccia}(\Delta)| = |\gamma| < 2$$

d) è per il progetto tiburtino ?) è per il progetto di R.R.

$$|\gamma| = 0.9328$$

Wilson

$$|\gamma| = 0.954$$

In luogo della Δ si può considerare - a caratterizzare la natura dinamica della sequenza fondamentale - la coppia dei suoi autovalori (λ_1, λ_2). Gli autovalori della matrice Δ sono per definizione le radici λ_1 e λ_2 dell'equazione

$$V.2) \quad \lambda^2 - \gamma\lambda + \det(\Delta) = 0.$$

E' per qualunque Racetrack di qualunque struttura $\det(\Delta) = 1$.

Posto (ciò che è possibile per quanto detto all'inizio di questo paragrafo)

$$V.2') \quad \frac{1}{2}\gamma = \cos\varphi \quad \text{con} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

si trova subito dalla V.2) che gli autovalori della matrice sono

$$V.3) \quad \lambda_2 = \exp(\pm i\varphi) = \cos\varphi \pm i\sin\varphi.$$

$$E' \quad \lambda_1 = \lambda_2^*.$$

d) E' per il progetto tiburtino

$$\cos\varphi = 0.4664$$

f) E' per il progetto di R.R.

Wilson

$$\cos\varphi = -0.477.$$

Per quanto detto qui la Δ si potrà scrivere così:

$$V.4) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \frac{\lambda}{\lambda_1} \Delta_1 \\ -\frac{\lambda_2}{\lambda} \Delta_2 & \cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Scegliamo ora (4)

$$V.5) \quad \lambda_{\Delta} = \lambda \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(4) M. Sands and B. Touschek - N. Cim., 10, 604 (1953).

λ_Δ sarà in ogni caso un numero reale, in quanto essendo $\det(\Delta) = 1$, ne consegue

$$V.5^o) \quad \Delta_1 \Delta_2 = \sin^2 \varphi > 0;$$

allora è anche $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} > 0$.

Con tale scelta di λ_Δ si ha

$$V.4^o) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \Delta_1 \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\Delta_2 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^{\frac{1}{2}} & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Essendo $\Delta_1 \Delta_2 > 0$ potrà essere a priori soltanto

a) $\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0$

b) $\Delta_1 < 0; \Delta_2 < 0$

Nel caso a) la Δ diviene

$$V.4^a) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi + [\Delta_1 \Delta_2]^{\frac{1}{2}} \\ -[\Delta_1 \Delta_2]^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{pmatrix}$$

e nel caso b)

$$V.4^b) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi - [\Delta_1 \Delta_2]^{\frac{1}{2}} \\ +[\Delta_1 \Delta_2]^{\frac{1}{2}} \cos \varphi \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{pmatrix}$$

Dalla V.5^o) e per aver scelto $0 \leq \varphi < 2\pi$ segue

$$V.5^a) \quad \sin \varphi = \pm [\Delta_1 \Delta_2]^{\frac{1}{2}} \begin{cases} \text{segno + nel caso a)} \\ \text{segno - nel caso b)} \end{cases}$$

Concludendo, per una struttura stabile: scelta quale sequenza fondamentale del Racetrack (d oppure f), quella compresa tra i

due punti (A, A) (centri di simmetria della struttura dinamica teorica della macchina) e posto

$$\lambda_{\Delta} = \bar{\lambda} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

la matrice Δ assume la forma ortogonale

v.6)

$$\Delta = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

dove

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \gamma$$

(γ = traccia (Δ)) e dove

$\sin \varphi$ è > 0 oppure < 0 a seconda che

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases}$$

non essendo a priori possibile - se la macchina è stabile - l'esistenza dei casi

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$$

Il calcolo numerico dà:

d) $\cos \varphi = 0.4664$

e) $\cos \varphi = -0.477$

$$\Delta_1 = 0.9340$$

$$\Delta_1 = -1.15$$

$$\Delta_2 = 0.8379$$

$$\Delta_2 = -0.678$$

$$\lambda_{\Delta} = \bar{\lambda} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} = 556.5 \text{ cm}$$

$$\lambda_{\Delta} = \bar{\lambda} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^{\frac{1}{2}} = 500 \text{ cm}$$

$$\sin \varphi = 0.8846$$

$$\sin \varphi = -0.883$$

$$\varphi = 62^{\circ} 12'$$

$$\varphi = 241^{\circ}$$

VI. Espressione della potenza k-esima della matrice

Abbiamo mostrato che:

$$\text{se } \bar{x}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 \\ \Delta x_0' \end{vmatrix} \quad \left(\Delta = \sqrt{\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}} \right)$$

è lo stato iniziale della particella iniettata alla metà di un tratto rettilineo del Racetrack. Lo stato $\bar{x}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \Delta x_1' \end{vmatrix}$ della particella all'uscita della sequenza fondamentale è

VI.1) $\bar{x}_1 = \Delta \bar{x}_0$, dove la Δ è data dalla V.6).

Lo stato $\bar{x}_k = \begin{vmatrix} x_k \\ y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_k \\ \Delta x_k' \end{vmatrix}$

della particella che ha compiuto k rivoluzioni complete dall'iniezione è

VI.1') $\bar{x}_k = \Delta^k \bar{x}_0$

Dalla V.5) si trae con procedimento ricorrente

VI.2) $\Delta^k = \begin{vmatrix} \cos(k\varphi) & \sin(k\varphi) \\ -\sin(k\varphi) & \cos(k\varphi) \end{vmatrix}$

cioè: Se $\bar{x}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ è lo stato iniziale (in A), dopo $\frac{2\pi k}{4}$ rivoluzioni complete lo stato $\bar{x}_k = \begin{vmatrix} x_k \\ y_k \end{vmatrix}$ è

VI.2')
$$\begin{cases} x_k = x_0 \cos(k\varphi) + y_0 \sin(k\varphi) \\ y_k = -x_0 \sin(k\varphi) + y_0 \cos(k\varphi) \end{cases}$$

Una formula molto agile⁽³⁾ (che ci servirà in seguito) per condurre in modo semplice operazioni algebriche tra matrici di questo tipo (ad esempio per sintetizzare in un'unica matrice la somma di matrici

$$\text{VI.3)} \quad \mathcal{D}(k) = \Delta^{k-1} + \Delta^{k-2} + \dots + \Delta^2 + \Delta + \mathbb{1}$$

è la seguente:

$$\text{VI.4)} \quad \Delta = \mathbb{1} \cos \varphi + \dot{N} \sin \varphi = \exp(\dot{N} \varphi)$$

con

$$\text{VI.4')} \quad \dot{N} = \begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

gode l'essenziale proprietà che

$$\text{VI.5)} \quad \dot{N}^2 = -\mathbb{1},$$

cosicchè le operazioni algebriche sulle potenze intere della Δ possono essere espresse formalmente come analoghe operazioni algebriche sulle potenze intere di numeri complessi a modello unitario

$$\text{VI.6)} \quad \delta = \cos \varphi + i \sin \varphi = \exp(i \varphi)$$

$$\text{VI.6')} \quad \delta^k = \cos(k \varphi) + i \sin(k \varphi) = \exp(i k \varphi).$$

Per esempio, si ha

$$\text{VI.7)} \quad \Delta^k = \mathbb{1} \cos(k \varphi) + \dot{N} \sin(k \varphi) = \exp(\dot{N} k \varphi)$$

come nel campo dei numeri complessi ordinari.

VII. Lo scostamento $|x|$ massimo della particella di momento $p=p_0$ (5).

La VI.2') esprime la rotazione del vettore \bar{x}_0 di un angolo $k\varphi$. Poichè il modulo del vettore rimane costante si ha che:

VII.1)
$$x_k^2 + y_k^2 = x_0^2 + y_0^2$$

Segue immediatamente da essa che per una particella di stato $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ d'iniezione in un punto A lo scostamento x dopo un percorso pari a k sequenze fondamentali non può superare il valore

VII.2)

$$|x_k|_{max} = M_A = (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

Poichè la pendenza y_k della traiettoria avente scostamento $|x_k| = |x_k|_{max}$ risulta nulla, il valore M_A è effettivamente quello di un massimo relativo della funzione $|x|$, massimo relativo raggiunto nell'insieme dei punti A delle sequenze, (e calcolato su tutte le infinite rivoluzioni della particella).

La funzione $|x|$ presenterà naturalmente altri massimi relativi, da ricercarsi entro i settori focalizzanti. Alcuni di questi massimi relativi esistenti nei settori focalizzanti potranno a priori superare il valore $M_A = (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$.

Pertanto è necessario trovare il valore massimo di $|x|$ in almeno un altro insieme di punti C delle sequenze, entro i settori focalizzanti. L'insieme di punti C più conveniente a questa ricerca è proprio l'insieme dei punti B (fig.2).

Infatti: i massimi relativi della funzione $|x|$ (di condizioni iniziali (x_0, y_0) in un punto dell'insieme A) in ogni punto dei settori (T_1) e (T_2) attigui alla sezione dritta non differiranno apprezzabilmente da M_A , in quanto in tali regioni la funzione x è costituita da corti e pochi tratti armonici, raccordati alla soluzione x in A da corti tratti rettilinei. La regione in cui ci può essere apprezzabile differenza di $|x|_{\max}$ da M_A è poche quella costituita dai settori (T_3) (T_{v_2}) (T_{v_2}) (T_4) attigui ai punti dell'insieme B . Se M_B è il massimo relativo di $|x|$ calcolato in tutti i punti dell'insieme B , i massimi relativi in ogni punto dei settori (T_3) e (T_4) attigui a B non differiranno apprezzabilmente da M_B , in quanto in tali regioni la funzione x è costituita da corti e pochi tratti armonici raccordantisi in B .

Dunque la soluzione completa del problema si riduce a calcolare la $|x|_{\max}$ nei punti dell'insieme B e confrontare il valore M_B così trovato col valore M_A .

E' allora

$$\text{VII.3)} \quad \bar{x}_{k+\frac{1}{2}} = \delta \bar{x}_k$$

dove:

caso d):

$$\text{VII.3}_d') \quad \delta = T_{\frac{1}{2}} T_0$$

caso f):

$$\text{VII.3}_f') \quad \delta = T_{v_2} T_+ T_- T_+ T_{v_1} T_0$$

in cui

$$\text{VII.3}_d'') \quad T_{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\ell}{\lambda}\right) & \frac{\lambda}{A_0} \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\ell}{\lambda}\right) \\ -\frac{\lambda}{A} \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\ell}{\lambda}\right) & \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\ell}{\lambda}\right) \end{vmatrix}$$

Posto

VII.4)

$$\delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0} \delta_{12} \\ -\frac{\lambda_0}{\bar{\lambda}} \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix}$$

si ha:

caso d):

caso f): ($\bar{\lambda} = R$ per comodità di calcolo)

$$\delta_{11} = \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda}\right) = 0.8792$$

$$\delta_{11} = -0.467$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{\lambda} \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda}\right) + \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda}\right) = 0.5600$$

$$\delta_{12} = 1.02$$

$$\delta_{21} = \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda}\right) = 0.4766$$

$$\delta_{21} = 0.7265$$

$$\delta_{22} = \cos\left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda}\right) - \frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{1}{2} \frac{\rho}{\lambda}\right) = 0.8340$$

$$\delta_{22} = -0.564$$

Dalle VII.3), VII.4), VI.3) e VI.2) si trova subito:

$$\text{VII.5) } x_{\lambda+\frac{1}{2}} = \left[\delta_{11} x_0 + \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0} \delta_{12} y_0 \right] \cos(k\rho) + \left[-\frac{\lambda_0}{\bar{\lambda}} x_0 \delta_{12} + \delta_{11} y_0 \right] \sin(k\rho)$$

da cui

$$\text{VII.6) } |x_{\lambda+\frac{1}{2}}|_{\max} = M_B = \left\{ \delta_{11}^2 + \left[\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0} \delta_{12} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

caso d):

caso f):

Si trova:

Si trova:

$$M_B = 1.03 (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$M_B = 0.91 (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

cioè

cioè

$$M_B = 1.03 M_A$$

$$M_B = 0.91 M_A$$

Dunque in ogni caso è

$$\text{VII.7) } \boxed{|x|_{\max} = M \approx (x_0^2 + y_0^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Siamo in grado finalmente di confrontare le proprietà focalizzanti dello Strong-Focusing rispetto a quelle del Weak-Focusing qui considerati nel caso che la particella abbia momento $p=p_0$. Consideriamo pertanto i valori del rapporto $\frac{M}{R}$ per particelle di $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Caso d):

caso f):

$$\left[\frac{M}{R} \right]_{x_0=0} \approx \frac{\Delta A}{R} x_0' = 1.67 x_0' \quad \left[\frac{M}{R} \right]_{x_0=0} \approx \frac{\Delta A}{R} x_0' = 1.3 x_0'$$

Si può concludere che - nel caso delle macchine (d) ed (f) qui considerate - per particelle di momento $p=p_0$, i due tipi di macchine hanno uguali proprietà di focalizzazione.

VIII. Il moto della particella di momento $p=p_0 + \Delta p$ ⁽⁴⁾.

M. Sands e B. Touschek ⁽⁴⁾ hanno calcolato l'ampiezza delle oscillazioni forzate dovute ai disallineamenti tra i magneti. Il calcolo qui esposto per il nostro caso è analogo a quello degli Autori ⁽⁴⁾.

Consideriamo il moto della particella nel caso generale in cui $\frac{\Delta A}{p_0} \neq 0$.

Riconsideriamo una particella di stato iniziale (x_0, x_0') che parta dalla metà di una delle sezioni diritte della macchina (punto A di fig.2).

All'uscita di questa sezione sarà

$$\text{VIII.1) } \bar{x}_L = T_0 \bar{x}_0$$

L'elettrone di coordinate \bar{x}_L entra quindi nell'attiguo settore focalizzante. All'uscita di questo settore il suo vettore di stato sarà (formula III.2_f)

$$\text{VIII.2)} \quad \bar{x} = \Gamma_{\sim 1} \Gamma_0 \bar{x}_0 + \bar{\pi}_{\sim 1}$$

dove (formula III.2_f)

$$\text{VIII.2')} \quad \bar{\pi}_{\sim 1} = \begin{pmatrix} \frac{R}{1-\cos \frac{l}{\lambda}} \left(1 - \cos \frac{l}{\lambda}\right) \\ \frac{\lambda_0}{(1-\cos \frac{l}{\lambda})^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{l}{\lambda} \end{pmatrix}$$

è il vettore distorsione relativo al settore focalizzante ($\Gamma_{\sim 1}$).
($\lambda_{\sim} = R$).

All'uscita del successivo settore sarà

$$\text{VIII.3)} \quad \bar{x} = \Gamma_+ \Gamma_{\sim 1} \Gamma_0 \bar{x}_0 + [\Gamma_+ \bar{\pi}_{\sim 1} + \bar{\pi}_+]$$

dove $\bar{\pi}_+$ è il vettore distorsione relativo al settore focalizzante (Γ_+).

Alla fine della sequenza fondamentale sarà

$$\text{VIII.4)} \quad \bar{x}_1 = \Delta \bar{x}_0 + \bar{\pi}$$

dove $\bar{\pi}$ è il vettore distorsione relativo alla sequenza fondamentale. Come si vede dalle III.2_d e III.2_f, esso risulterà un vettore della forma

$$\text{VIII.4')} \quad \bar{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 \end{pmatrix} \frac{\Delta \nu}{\nu_0}$$

Le costanti $\cos \theta_1$ e $\cos \theta_2$ si calcolano una volta per tutte

caso d): E' per il progetto siburtino:

$$\text{VIII.4' d)} \quad \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \Gamma_0 \begin{pmatrix} \frac{R}{1-n_0} \left(1 - \cos \frac{l}{\lambda}\right) \\ \frac{\lambda_0}{(1-n_0)^{\frac{1}{2}}} \sin \frac{l}{\lambda} \end{pmatrix} \frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \sin \theta \left(1 - n_0\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Delta \nu}{\nu_0} \end{pmatrix}$$

cioè

$$\text{VIII.4" d)} \quad \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4.445 \\ 7.371 \end{vmatrix} \frac{\Delta \nu}{\nu_0} 10^2 \text{ cm.}$$

caso f): E' per il progetto di R.R. Wilson

$$\begin{aligned} \text{VIII.4' f)} \quad \bar{\pi} = T_0 & \left[(1 + T_{\nu_2} T_+ T_- T_- T_{\nu_2} T_{\nu_2} T_+ T_+) \bar{\pi}_{\nu_2} + \right. \\ & + T_{\nu_2} \left\{ 1 + T_+ T_- [1 + T_+ T_{\nu_2} T_{\nu_2} (1 + T_+ T_-)] \right\} \bar{\pi}_+ + \\ & + T_{\nu_1} T_+ (1 + T_- T_+ T_{\nu_2} T_{\nu_2} T_+) \bar{\pi}_- + \\ & \left. + T_{\nu_1} T_+ T_- T_+ (1 + T_{\nu_2}) \bar{\pi}_{\nu_2} \right] \end{aligned}$$

cioè

$$\text{VIII.4" f)} \quad \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.41 \\ -0.9865 \end{vmatrix} \frac{\Delta \nu}{\nu_0} 10^2 \text{ cm}$$

Dalla VIII.4) si trova che dopo $\frac{k}{4}$ rivoluzioni è

$$\text{VIII.5)} \quad \boxed{\bar{x}_k = \Delta^k \bar{x}_0 + \bar{\pi}_k}$$

dove

$$\text{VIII.5')} \quad \boxed{\bar{\pi}_k = \mathcal{D}(k) \bar{\pi}}$$

è il vettore distorsione dopo $\frac{k}{4}$ rivoluzioni complete, e la matrice $\mathcal{D}(k)$ è

$$\text{VIII.5'')} \quad \boxed{\mathcal{D}(k) = \Delta^{k-1} + \Delta^{k-2} + \dots + \Delta^2 + \Delta + \mathbb{1}.}$$

Per i calcoli che seguiranno giova esprimere in modo conciso la matrice VIII.5ⁿ).

Si trova per essa, per ora,

$$\text{VIII.5}^{\text{n})} \quad \mathcal{D}(k) = \frac{1}{2-2\cos\varphi} (\mathbb{1} - \Delta^{-1})(\mathbb{1} - \Delta^k)$$

Infatti, moltiplicando a sinistra $\mathbb{1} - \Delta$ per la VIII.5ⁿ) si trae

$$\text{VIII.5}^{\text{m})} \quad (\mathbb{1} - \Delta) \mathcal{D}(k) = \mathbb{1} - \Delta^k;$$

moltiplicando a sinistra $\frac{1}{2-2\cos\varphi} (\mathbb{1} - \Delta^{-1})$ per la VIII.5^m) si ottiene

$$\text{VIII.5}^{\text{v})} \quad \frac{1}{2-2\cos\varphi} (\mathbb{1} - \Delta^{-1})(\mathbb{1} - \Delta) \mathcal{D}(k) = \frac{1}{2-2\cos\varphi} (\mathbb{1} - \Delta^{-1})(\mathbb{1} - \Delta^k).$$

Ma il fattore che moltiplica la $\mathcal{D}(k)$ è $= \mathbb{1}$.

Infatti

$$\begin{aligned} \text{VIII.5}^{\text{vi})} \quad \frac{1}{2-2\cos\varphi} (\mathbb{1} - \Delta^{-1})(\mathbb{1} - \Delta) &= \frac{1}{2-2\cos\varphi} (2\mathbb{1} - \Delta - \Delta^{-1}) = \\ &= \frac{1}{2-2\cos\varphi} (2\mathbb{1} - \mathbb{1}\cos\varphi - \cancel{\mathbb{1}\sin\varphi} - \mathbb{1}\cos\varphi + \cancel{\mathbb{1}\sin\varphi}) = \mathbb{1} \end{aligned}$$

da cui l'asserita VIII.5^{vi}).

Si noti che dalla VIII.5^{vi}) segue, dopo elementari passaggi,

$$\text{VIII.5}^{\text{vii})} \quad \mathcal{D}(k) = \frac{\sin(k\frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\varphi}{2}} \left\{ \mathbb{1} \cos\left[(k-1)\frac{\varphi}{2}\right] + \mathbb{1} \sin\left[(k-1)\frac{\varphi}{2}\right] \right\}$$

cioè (formula VI.7)

VIII.5^{'''})

$$\mathcal{D}(k) = \frac{\sin(k \frac{\varphi}{2})}{\sin \frac{\varphi}{2}} \Delta \frac{k-1}{2}$$

che è l'espressione cercata, di cui si varremo nel seguito.

Concludendo è

VIII.6)

$$\bar{x}_k = \Delta^k \bar{x}_0 + \frac{\sin(k \frac{\varphi}{2})}{\sin \frac{\varphi}{2}} \Delta \frac{k-1}{2} \bar{\pi}$$

la soluzione del problema proposto nel caso $\frac{\Delta n}{n_0} \neq 0$.

IX. La massima ampiezza delle oscillazioni forzate.

Dalla VIII.6) e ricordando la VI.2) è per lo scostamento x dall'orbita principale dopo $\frac{k}{4}$ rivoluzioni complete ($x_0=0; y_0=0$)

$$IX.1) \quad x_k = \frac{\sin(k \frac{\varphi}{2})}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[\pi_1 \cos\left(\frac{k-1}{2} \varphi\right) + \pi_2 \sin\left(\frac{k-1}{2} \varphi\right) \right]$$

Per dato $\bar{\pi} = \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{vmatrix}$ (vettore caratteristico dalla struttura della sequenza del Racetrack e proporzionale a $\frac{\Delta n}{n_0}$) il problema consiste nel ricavare il massimo (rispetto k) della IX.1).

Posto $\frac{k\varphi}{2} \equiv \eta$, troveremo questo massimo considerando η come variabile continua nell'intervallo $0 < \eta < 2\pi$. Questo è un artificio matematico che si può applicare in quanto φ è a priori un angolo incommensurabile con $\pi (= 3,1415...)$.

Scriviamo allora la IX.1 sotto la forma

$$\text{IX.1')} \quad x_R = \sin \eta (A \cos \eta + B \sin \eta)$$

ovvero

$$\text{IX.2)} \quad x_R = M_{\pi} \sin \eta \sin(\eta + \chi)$$

dove

$$\text{IX.2')} \quad \begin{cases} A = M_{\pi} \sin \chi = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[\pi_1 \cos \frac{\varphi}{2} - \pi_2 \sin \frac{\varphi}{2} \right] \\ B = M_{\pi} \cos \chi = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[\pi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \pi_2 \cos \frac{\varphi}{2} \right] \end{cases}$$

$$\text{IX.2'')} \quad \begin{cases} M_{\pi} = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left[\pi_1^2 + \pi_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{tg } \chi = \frac{A}{B} = \frac{\pi_1 \cos \frac{\varphi}{2} - \pi_2 \sin \frac{\varphi}{2}}{\pi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \pi_2 \cos \frac{\varphi}{2}} \end{cases}$$

Si può scrivere

$$\text{IX.3)} \quad x_R = \frac{M_{\pi}}{2} \left[\cos \chi - \cos(2\eta + \chi) \right]$$

oppure

$$\text{IX.3')} \quad x_R = \frac{1}{2} \left[B - M_{\pi} \cos(2\eta + \chi) \right]$$

Allora i valori estremi per x vanno ricercati tra i valori

$$\text{IX.4)} \quad |x_R|_{\text{max}} = \frac{1}{2} \left[B \pm M_{\pi} \right]$$

$\varphi \text{ o } \chi$

~~In ogni caso è~~

IX.5)

~~$$|X_R|_{max} = \frac{1}{2} [B + M_{\pi}]$$~~

Esplicitamente:

IX.6)

$$|X_R|_{max} = \frac{1}{2} \frac{1}{|\sin \frac{\varphi}{2}|} \left[\sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2} + \underbrace{|\pi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \pi_2 \cos \frac{\varphi}{2}|}_{\text{contributo orb. chiusa}} \right]$$

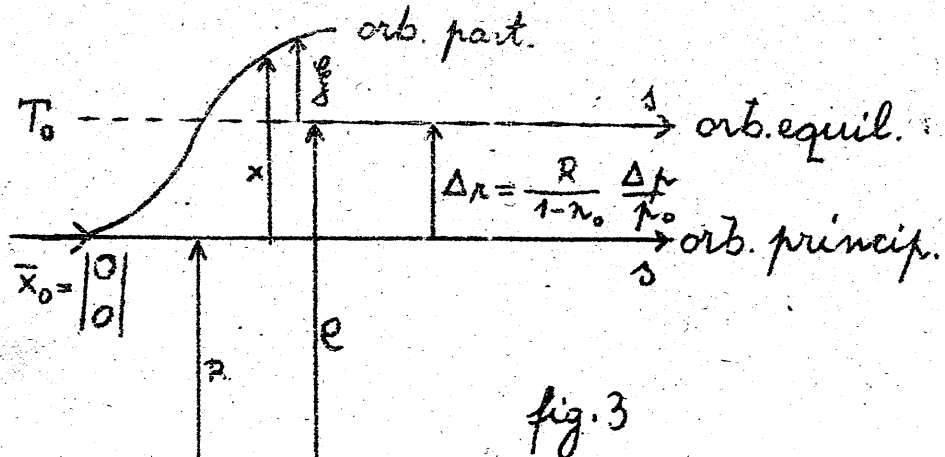
Tutto il calcolo fin qui esposto è stato fatto per calcolare la $|X_R|_{max}$ nel caso dello strong focusing, ed il calcolo è stato applicato anche al weak focusing.

Facciamo vedere con un semplice ragionamento che la IX.6) è vera nel caso del weak focusing.

Infatti, per il sincrotrone convenzionale non è necessario sviluppare tutto il calcolo fin qui esposto, ma basta partire direttamente dalla II.1):

II.1) $\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{1-n_0}{\rho^2} \varphi = 0 \quad (n=n_0; \text{form. II.6d})$

in cui è in qualunque settore magnetico $e = R + \frac{R}{1-n_0} \frac{\Delta n}{n_0}$ (fig. 3)



come supposto, la particella ha stato iniziale

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In tal caso la VII.2) applicata alla II.1) dà

$$\text{VII.2)} \quad \left| \frac{p}{\hbar} \right|_{\max} = \lambda \frac{1}{(1-n_0)^{1/2}} \frac{\Delta p}{p_0}$$

Ed essendo $x = \int \frac{p}{\hbar} ds + \Delta x$ è

$$\text{IX.7)} \quad |x_k|_{\max} = \frac{2R}{1-n_0} \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right| = 16.67 \frac{\Delta p}{p_0} 10^2 \text{ per il caso d).}$$

Resta da dimostrare che per il caso d) la IX.7) è identica alla IX.6). Pertanto riprendiamo la VIII.4'_d) che possiamo scrivere così:

$$\text{IX.8)} \quad \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \frac{2R}{1-n_0} \frac{\Delta p}{p_0}$$

Da essa segue immediatamente:

$$\text{IX.9)} \quad \left| \pi_1 \sin \frac{\varphi}{2} + \pi_2 \cos \frac{\varphi}{2} \right| = \frac{2R}{1-n_0} \sin \frac{\varphi}{2} \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right|$$

$$\text{IX.10)} \quad (\pi_1^2 + \pi_2^2)^{1/2} = \frac{2R}{1-n_0} \sin \frac{\varphi}{2} \left| \frac{\Delta p}{p_0} \right|$$

Sostituendo queste due espressioni nella IX.6) si ottiene identicamente la IX.7).

Riprendendo il nostro problema, è da osservarsi che la $|x_k|_{\max}$ così calcolata (data, sia nel caso d che nel caso f della IX.6)) non è certo il massimo assoluto di $|x|$ in tutto l'intervallo $0 \leq s \rightarrow \infty$. Applicando il ragionamento fatto nel

paragrafo VII a questo proposito, si trova anche nel caso del $\frac{\Delta h}{h_0} \neq 0$ l'opportunità di calcolare il massimo (fatto rispetto k) di $|x_{k+\frac{1}{2}}|$.

Si trova facilmente ($x_0=0, y_0=0$)

$$\text{IX.11)} \quad \bar{x}_{k+\frac{1}{2}} = \frac{\sin(k\frac{\varphi}{2})}{\sin\frac{\varphi}{2}} \cdot \delta \cdot \Delta \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \bar{\pi} + \bar{\pi}_{\frac{1}{2}}$$

dove per il vettore $\bar{\pi}_{\frac{1}{2}}$ (distorsione dopo mezza sequenza) caso d):

$$\text{IX.12}_d) \quad \bar{\pi}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1-n_0)^{\frac{1}{2}}} \begin{vmatrix} \lambda (1 - \cos \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda}) \\ \lambda_{\Delta} \sin \frac{1}{2} \frac{b}{\lambda} \end{vmatrix} \frac{\Delta h}{h_0} = \begin{vmatrix} (\pi_{\frac{1}{2}})_{1} \\ (\pi_{\frac{1}{2}})_{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.007 \\ 4.193 \end{vmatrix} \frac{\Delta h}{h_0} 10^2$$

caso f):

$$\text{IX.12}_f) \quad \bar{\pi}_{\frac{1}{2}} = \Gamma_{-2} \left[\Gamma_{+} \Gamma_{-} \Gamma_{+} \bar{\pi}_{\frac{1}{2}} + (1 + \Gamma_{+} \Gamma_{-} \Gamma_{+}) \bar{\pi}_{\frac{1}{2}} + \Gamma_{+} \bar{\pi}_{-} \right] + \bar{\pi}_{-2} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\pi_{\frac{1}{2}})_{1} \\ (\pi_{\frac{1}{2}})_{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.40 \\ -0.390 \end{vmatrix} \frac{\Delta h}{h_0} 10^2$$

Il massimo di $|x_{k+\frac{1}{2}}|$ si calcola in modo perfettamente analogo a quello adottato per $|x_k|$. Si trova

$$\text{IX.13)} \quad |x_{k+\frac{1}{2}}|_{\max} = \frac{1}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \left[\delta_{11}^2 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} \delta_{12} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} (\pi_1^2 + \pi_2^2)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left[\delta_{11} \pi_2 + \frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} \delta_{12} \pi_1 \right] \sin \frac{\varphi}{2} + \left[-\frac{\lambda}{\lambda_{\Delta}} \delta_{12} \pi_1 + \delta_{11} \pi_2 \right] \cos \frac{\varphi}{2} \right\} +$$

$$+ (\pi_{\frac{1}{2}})_{1}$$

Il confronto numerico delle due espressioni $|x_R|_{max}$ (IX.6) e $|x_{R+\frac{1}{2}}|_{max}$ (IX.13) nei due casi (d) ed (f) ci permette di confrontare le proprietà di focalizzazione dei due tipi di Racetrack qui considerati.

Si ottiene:

caso d):

$$\frac{|x_R|_{max}}{R} = 5.00 \left| \frac{\Delta A}{f_0} \right|$$

$$\frac{|x_{R+\frac{1}{2}}|_{max}}{R} = 5.07 \left| \frac{\Delta A}{f_0} \right|$$

caso f):

$$\frac{|x_R|_{max}}{R} = 0.52 \left| \frac{\Delta A}{f_0} \right|$$

$$\frac{|x_{R+\frac{1}{2}}|_{max}}{R} = 0.47 \left| \frac{\Delta A}{f_0} \right|$$

Da esse si trova subito il valore del rapporto

$$\frac{\left[\frac{|x|_{max}}{R} \right]_d}{\left[\frac{|x|_{max}}{R} \right]_f} \approx 10$$

X. Le oscillazioni forzate dovute ai disallineamenti dei settori magnetici. (4)(5).

Ci proponiamo qui di stimare l'ordine di grandezza delle oscillazioni forzate eseguite da una particella di momento $p=p_0$ per effetto dei disallineamenti fra i settori magnetici nella macchina di R.R. Wilson.

Il disallineamento di un certo i -esimo settore magnetico in una h -esima sequenza della macchina può essere caratterizzato dalle due quantità (v. fig.4) ϵ_e^{ih} , ϵ_w^{ih}

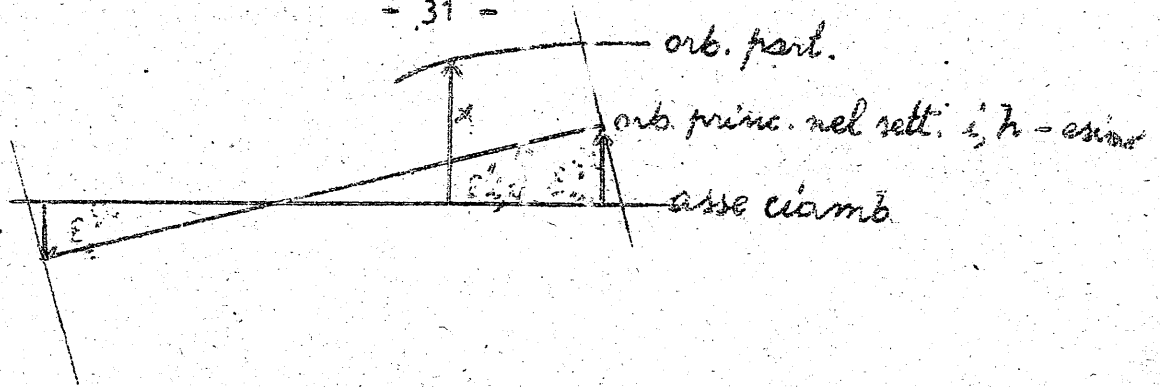


fig. 4.

oppure dal vettore disallineamento

$$X.1) \quad \bar{e}_{i,\lambda} = \begin{vmatrix} e_{i,\lambda} \\ \lambda_0 e'_{i,\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{i,\lambda} \\ \lambda_0 \frac{e_{i,\lambda} - e_{i,0}}{\lambda_0} \end{vmatrix}$$

dove con λ_0 si è indicata, al solito, la lunghezza dello i, λ -esimo settore.

È facile verificare che \bar{e}_0 è il vettore entrata nell'1-esimo settore, il vettore uscita $\bar{x}_{i,\lambda}$ è ⁽⁵⁾

$$X.2) \quad \bar{x}_{i,\lambda} = T_{i,\lambda} \bar{x}_0 + (T_{i,\lambda}^* - T_{i,\lambda}) \bar{e}_{i,\lambda}$$

dove $T_{i,\lambda}$ è la matrice caratteristica del settore e $T_{i,\lambda}^*$ è la matrice

$$X.2') \quad T_{i,\lambda}^* = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\lambda_0}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sia ora X.3) $\bar{\pi}_{i,\lambda} = \begin{vmatrix} (\pi_{i,\lambda})_1 \\ \lambda_0 (\pi_{i,\lambda})_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\pi_{i,\lambda})_1 \\ (\pi_{i,\lambda})_2 \end{vmatrix}$ il vettore distorsione
(dell'orbita)

alla fine della λ -esima sequenza.

È per la struttura di Wilson (v. fig.2)

$$X.4) \quad \bar{\pi}_{i,\lambda} = \sum_{j=1}^{\lambda_0} M_{i,j} \bar{e}_{i,j,\lambda} \quad ; \quad \lambda = 0, 1, 2, 3 \text{ (4 sequenze)}$$

dove

$$\begin{aligned}
 M_1 &= T_0 T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T_7 T_8 T_9 (T_{10}^* - T_{11}) \\
 M_2 &= T_2 \dots \dots \dots T_9 (T_{10}^* - T_{11}) \\
 M_3 &= T_0 \dots \dots \dots T_9 (T_{10}^* - T_{11}) \\
 M_4 &= T_0 \dots \dots \dots T_{10} (T_{11}^* - T_{12}) \\
 M_5 &= T_0 \dots \dots \dots T_{10} (T_{11}^* - T_{12}) \\
 M_6 &= T_0 \dots \dots \dots T_4 (T_{10}^* - T_{11}) \\
 M_7 &= T_0 \dots \dots \dots T_4 (T_{10}^* - T_{11}) \\
 M_8 &= T_0 \dots \dots \dots T_4 (T_{10}^* - T_{11}) \\
 M_9 &= T_0 T_{10} (T_{11}^* - T_{12}) \\
 M_{10} &= T_0 (T_{11}^* - T_{12})
 \end{aligned}$$

ovvero, compendiosamente,

$$X.5) \quad M_i = \begin{vmatrix} (M_i)_{11} & \frac{\lambda_i}{\lambda_0} (M_i)_{12} \\ -\frac{\lambda_0}{\lambda_i} (M_i)_{21} & (M_i)_{22} \end{vmatrix}$$

$\lambda_i = \lambda_0$, oppure λ_i , oppure λ_i (E) oppure λ_i a seconda della convenienza di calcolo.

Gli elementi di matrice $(M_i)_{11}$ per $i = 1, 5, 6, 10$ (campiguide) sono in modulo molto più piccoli di $|(M_i)_{22}|$ per $i = 2, 3, 4, 7, 8, 9$ (settori di strong focusing) e perciò trascurabili nel calcolo numerico.

Gli errori di allineamento $\epsilon_2^{i,j}$ ed $\epsilon_{11}^{i,j}$ sono da pensarsi statisticamente distribuiti, cioè è da considerarsi

$$\begin{cases}
 \text{(valor medio di } \epsilon_2^{i,j} \text{)} = \text{(valor medio di } \epsilon_{11}^{i,j} \text{)} = 0 \\
 \text{(valore quadr. medio di } \epsilon_2^{i,j} \text{ ed } \epsilon_{11}^{i,j} \text{)} = \langle \epsilon \rangle \neq 0
 \end{cases}$$

Dunque la quantità $\langle \epsilon \rangle$ caratterizza, col suo valore, l'entità dei disallineamenti.

Segue allora dalle X.4), 1) e 5') che il valor quadratico medio delle componenti di $\bar{\pi}_k$ è

$$X.7) \quad \langle \pi_1^2 \rangle = \sum_1^{10} i \left\{ \left[(M_i)_{12} - \frac{\bar{\lambda}_i}{l_i} (M_i)_{12} \right]^2 + \left[\frac{\bar{\lambda}_i}{l_i} (M_i)_{12} \right]^2 \right\} \langle E \rangle^2$$

$$\langle \pi_2^2 \rangle = \sum_1^{10} i \left\{ \left[\frac{\lambda_0}{\bar{\lambda}_i} (M_i)_{21} + \frac{\lambda_0}{l_i} (M_i)_{22} \right]^2 + \left[\frac{\lambda_0}{l_i} (M_i)_{22} \right]^2 \right\} \langle E \rangle^2$$

(indipendente dal numero d'ordine k della sequenza considerata).

Sia ora

$$X.8) \quad \bar{\pi} = \begin{vmatrix} p_3 \\ \lambda_0 p_4' \\ \lambda_0 p_4' \\ p_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_3 \\ p_3 \\ \lambda_0 p_4' \\ \lambda_0 p_4' \end{vmatrix} \quad \text{il vettore distorsione}$$

(dell'orbita), dopo una rivoluzione completa per effetto dei disallineamenti tra i settori magnetici.

Si trova con un calcolo perfettamente analogo a quelli fatti finora che la distorsione massima dell'orbita (massimo di $|X_{4k}|$) è $(k = 0, 1, 2, \dots)$.

$$X.9) \quad |X_{4k}|_{\max} = \frac{1}{2 \sin 2\varphi} \left[(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}} + |p_1 \sin 2\varphi + p_2 \cos 2\varphi| \right]$$

cioè in ogni caso

$$X.9') \quad |X_{4k}|_{\max} \leq \frac{1}{\sin 2\varphi} (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

Trattando statisticamente il problema, in questa formula si sostituisce a p_1^2 e p_2^2 rispettivamente $\langle p_1^2 \rangle$ e $\langle p_2^2 \rangle$.

E' dunque da assumersi

$$X.10) \quad \langle |X|_{\max} \rangle \sim \frac{1}{\sin 2\varphi} (\langle p_1^2 \rangle + \langle p_2^2 \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

Poichè è

$$X.11) \quad \bar{\pi} = \Delta^3 \bar{\pi}_0 + \Delta^2 \bar{\pi}_1 + \Delta \bar{\pi}_2 + \bar{\pi}_3$$

segue

$$X.12) \quad \langle \nu_1^2 \rangle + \langle \nu_2^2 \rangle = 4 \left(\langle \pi_1^2 \rangle + \langle \pi_2^2 \rangle \right)$$

In definitiva si ha per $\langle |x|_{\max} \rangle$

$$X.13) \quad \langle |x|_{\max} \rangle \sim \frac{2}{2m\omega} \left(\langle \pi_1^2 \rangle + \langle \pi_2^2 \rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

dove $\langle \pi_1^2 \rangle$ e $\langle \pi_2^2 \rangle$ sono date dalla X.7).

Si ha numericamente per la macchina di R. Wilson

$$\langle |x|_{\max} \rangle \sim 18 \langle \epsilon \rangle, \text{ cioè con un } \langle \epsilon \rangle \sim \frac{1}{2} \text{ mm}$$

Le ampiezze massime delle oscillazioni forzate sono ~ 1 cm.

I calcoli qui sviluppati sono frutto di costanti e determinanti discussioni avute col Professor E. Persico e col mio collega Dottor C. Bernardini; nonché di stimolanti discussioni avute col Professor G. Salvini e col mio collega Dottor P.G. Sona. Qui mi sento in bisogno di ringraziarli tutti.

Roma, 28 giugno 1954