Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/28 (19. 6. 54)

C. Canarutto: PONTE STUDIATO PER LA MISURA DI n CON BOBINETTA ROTANTE IN CAMPO MAGNETICO COSTANTE.

PONTE STUDIATO PER LA MISURA DI "n" CON BOBINETTA ROTANTE IN CAMPO MAGNETICO COSTANTE

1 - **Premessa.-**

Il ponte considerato è del tipo di quello di fig.1.

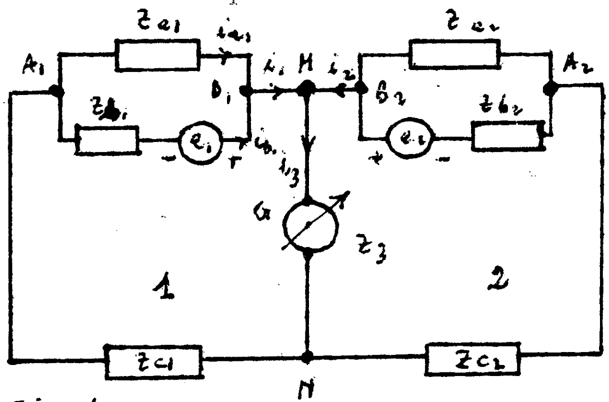

Fig. 1.-

e_1 ed e_2 sono due generatori di tensione

G è uno strumento di zero

$Z_{a_1}; Z_{b_1} \dots Z_{c_2}$ sono impedenze

Z_3 impendenza di G

i_1 ; i_2 ; i_3 ; i_{a_1} .... i_{a_2} correnti

Consideriamo per esempio la maglia 1. Si ha:

$$\begin{cases} i_{a_1} + i_{b_1} = i_1 & (1) \\ e_1 - Z_{b_1} \cdot i_{b_1} + Z_{a_1} \cdot i_{a_1} = 0 & (2) \\ Z_{a_1} \cdot i_{a_1} + Z_{c_1} \cdot i_1 + Z_3 \cdot i_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Dalle (1) e (2) si ha:

$$\begin{cases} i_{b_1} = i_1 - i_{a_1} \\ Z_{a_1} \cdot i_{a_1} = - e_1 + Z_{b_1} (i_1 - i_{a_1}) \end{cases}$$

e risolvendo:

$$(Z_{a_1} + Z_{b_1}) \cdot i_{a_1} = Z_{b_1} \cdot i_1 - e_1$$

da cui:

$$i_{a_1} = \frac{Z_{b_1}}{Z_{a_1} + Z_{b_1}} \cdot i_1 - \frac{e_1}{Z_{a_1} + Z_{b_1}}$$

e sostituendo nella (3):

$$\left(\frac{Z_{a_1} \cdot Z_{b_1}}{Z_{a_1} + Z_{b_1}} + Z_{c_1} \right) \cdot i_1 - \frac{Z_{a_1}}{Z_{a_1} + Z_{b_1}} \cdot e_1 + Z_3 \cdot i_3 = 0$$

che risolta dà:

$$Z_1 \cdot i_1 - Z_3 \cdot i_3 = K_1 \cdot e_1 \qquad (4)$$

ove si è posto:

$$z_1 = \frac{z_{a_1} \cdot z_{b_1}}{z_{a_1} + z_{b_1}} + z_{c_1}$$ impendenza totale della maglia 1

$$K_1 = \frac{z_{a_1}}{z_{a_1} + z_{b_1}}$$ percentuale di e_1 effettive ai capi di z_{a_1}

Ragionando in modo analogo per la maglia 2 e scrivendo l'equazione di Kirchoff relativa al nodo M si ha il seguente sistema:

$$\begin{cases} z_1 \cdot i_1 + z_3 \cdot i_3 = K_1 \cdot e_1 \\ z_2 \cdot i_2 + z_3 \cdot i_3 = K_2 \cdot e_2 \\ i_1 + i_2 = i_3 \end{cases}$$

Sistema che risolto dà per i_3 :

$$i_3 = \frac{K_1\, e_1\, z_2 + K_2\, e_2 \cdot z_1}{z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1} \qquad (5)$$

La tensione ai capi di z_3 è praticamente data da:

$$V_3 = z_3 \cdot i_3 = \frac{K_1 \cdot e_1 \cdot z_2 + K_2 \cdot e_2 \cdot z_1}{\frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} + z_1 + z_2}$$

che diventa - per $z_3 \gg z_1$ e z_2 :

$$V_3 = \frac{K_1 \cdot e_1 \cdot z_2 + K_2 \cdot e_2 \cdot z_1}{z_1 + z_2} \qquad (6)$$

Quando : $i_3 = 0$

è: $$- \frac{K_1 \cdot e_1}{K_2 \cdot e_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

od anche $$- \frac{e_1}{e_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{K_2}{K_1} \qquad (7)$$

relazione che deve essere verificata in grandezza e fase ove e_1 ed e_2 siano forze elettromotrici alternate, entrambe di frequenza f .

2 - <u>Caso di bobinette rotanti</u>.-

Nel caso particolare in studio le f.e.m. sono date da due bobinette montate rigidamente tra loro su un asse rotante con moto uniforme, in un campo magnetico di intensità B. Gli avvolgimenti sono così disposti che le forze elettromotrici risultano sfasate tra loro di circa 180°.

Si ha evidentemente per ciascuna di esse:

$$e = \omega B S \,\mathrm{sen}\,(\omega t + \Phi)$$

ove è: $\omega = 2\pi f$

S = area x spire della bobinetta

Φ = angolo che all'inizio dei tempi il piano normale all'asse delle bobine fa con la direzione di B.

Quindi:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{B_1 S_1}{B_2 S_2} \cdot \left(\mathrm{sen}\,\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \,\mathrm{sen}\,\varphi \right) = \frac{B_1 \cdot S_1}{B_2 \cdot S_2} \cdot \left(\cos\varphi + j \,\mathrm{sen}\,\varphi \right) \qquad (8)$$

usando la notazione complessa ed indicando questa volta con φ la differenza tra ϕ_1 e ϕ_2, ossia l'anticipo di e_1 rispetto a e_2.

Quest'angolo è evidentemente uguale all'angolo tra gli assi delle due bobinette (a meno di 180°).

Se si costruisce un ponte come in fig.1, in virtù della (7) all'equilibrio un analogo sfasamento dovrà aversi sul rapporto:

$$\frac{Z_1}{K_1} \cdot \frac{K_2}{Z_2}$$

Per realizzarlo, il ponte è pensabile più specificatamente come in fig.2

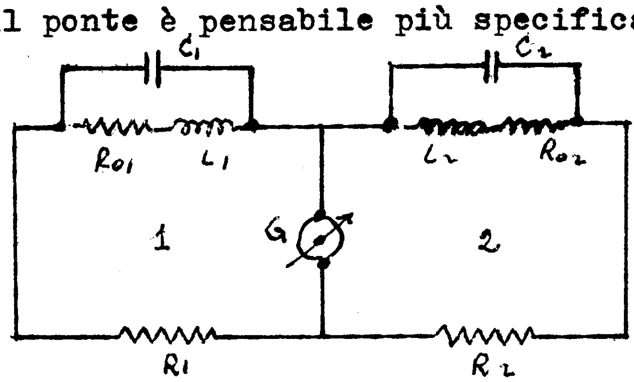

Fig.2.-

ove le capacità C_1 e C_2 sono previste proprio per rifasare dello sfasamento φ le due tensioni generate dalle bobinette L_1 ed L_2 assieme a quello aggiunto dalla presenza delle due induttanze L_1 ed L_2 in generale non uguali.

Per la maglia 1 si ha per esempio:

$$z_1 = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_{01}+j\omega L_1} + j\omega C_1} = R_1 + \frac{R_{01}+j\omega L_1}{jR_{01}\omega C_1 + 1 - \omega^2 L_1 C_1}$$

$$K_1 = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_{01}+j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1}{jR_{01}\omega C_1 + 1 - \omega^2 L_1 C_1}$$

quindi:

$$\frac{z_1}{K_1} = R_1\left(jR_{01}\cdot\omega C_1 + 1 - \omega^2 L_1 C_1\right) + R_{01} - j\omega L_1 = R_1(1-\omega^2 L_1 C_1) + R_{01} + j\left(\omega L_1 + R_{01}\cdot R_1\omega C_1\right)$$

Perciò:

$$\frac{z_1}{K_1}\cdot\frac{K_2}{z_2} = \frac{R_1(1-\omega^2 L_1 C_1) + R_{01} + j(\omega L_1 + R_{01}\cdot R_1\omega C_1)}{R_2(1-\omega^2 L_2 C_2) + R_{02} + j(\omega L_2 + R_{02}\cdot R_2\omega C_2)} = \frac{B_1\cdot S_1}{B_2\cdot S_2}(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

Dalle (8) appare evidente che gli effetti delle C_1 e C_2 sono opposti l'uno all'altro, ossia se per esempio i segni sono come in (8), ad un effetto rifasante di C_1 corrisponde una effetto sfasante di C_2. Evidentemente per il nostro scopo basta considerare le capacità che contribuiscono a rifasare - e quindi ad azzerare il ponte.

Se $C_2 = 0$ allora la (8) diventa:

$$\frac{B_1 S_1}{B_2 S_2}\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi) = \frac{R_1(1-\omega^2 L_1 C_1) + R_{01} + j(\omega L_1 + R_{01}\cdot R_1\omega C_1)}{R_2 + R_{02} + j\omega L_2} =$$

$$= \frac{(R_1+R_{01})\cdot(R_2+R_{02}) - R_1\omega^2 L_1 C_1 (R_2+R_{02}) - j\omega L_2(R_{01}+R_1-R_1\omega^2 L_1 C_1)}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2} +$$

$$+ \frac{j(R_2+R_{02})(\omega L_1 + R_{01}\cdot R_1\omega C_1) + \omega L_2(\omega L_1 + R_{01}\cdot R_1\omega C_1)}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2} =$$

$$= \frac{(R_1+R_{01})(R_2+R_{02}) + \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2\cdot C_1 R_1\left[L_2 R_{01} - L_1(R_2+R_{02})\right]}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2} +$$

$$+j\cdot\frac{\omega L_1(R_2+R_{02})-\omega L_2(R_1+R_{01})+\omega\cdot L_2 R_1\cdot\omega^2 L_1 C_1+(R_2+R_{02})(R_{01}R_1\omega C_1)}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2}=$$

$$=\frac{(R_{01}+R_1)(R_{02}+R_2)+\omega^2 L_1 L_2-\omega^2 C_1 R_1\left[L_1(R_2+R_{02})-L_2\cdot R_{01}\right]}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2}+$$

$$+j\cdot\frac{\omega L_1(R_2+R_{02})-\omega L_2(R_1+R_{01})+\omega C_1 R_1\cdot\left[R_{01}(R_2+R_{02})+\omega^2\cdot L_1 L_2\right]}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2}. \qquad (9)$$

Dall'esame del termine immaginario di questa relazione, si osserva che il rifasamento vieno compiuto soltanto dal termine

$$\frac{\omega\cdot C_1 R_1\left[R_{01}(R_2+R_{02})+\omega^2 L_1\cdot L_2\right]}{(R_2+R_{02})^2+\omega^2 L_2^2}$$

il quale deve provvedere sia a bilanciare gli eventuali sfasamenti dovuti all'ineguaglianza dei termini

$$\omega L_1(R_2+R_{02}) \qquad e \qquad \omega L_2(R_1+R_{01})$$

sia quelli dovuti all'angolo φ tra gli assi delle bobinette.

3 - <u>Caso particolare numerico</u>.-

Si calcola nel seguente caso particolare, la capacità necessaria a controbilanciare uno sfasamento φ tra gli assi delle bobinette.

Sia $B_1 S_1 = B_2 S_2$

$R_1 = R_2 = 5000$ ohm

$R_{01} = R_{02} = 20$ ohm

$L_1 = L_2 = 3.10^{-3}$

$f = 25$ Hz

$\omega = 314/2 \cdot 1/sec$

Dal termine immaginario della (9) si ha:

$$\operatorname{sen}\varphi \cong \omega\, C_1\, R_{01} = C_1 \times 20 \times \frac{314}{2} = 3140 \cdot C_1$$

Per $C_1 = 1\,\mu F$

$$\operatorname{sen}\varphi \cong \varphi = 3{,}14 \cdot 10^{-3} \qquad \text{radianti}$$

$\varphi^{\circ} \cong 10'$ (dieci minuti primi di grado)

4 - <u>Determinazione della precisione richiesta nelle misure delle diverse quantità.-</u>

Osserviamo che la precisione richiesta nelle misure di B per ottenere un n preciso all' 1% è:

di 1,5/10 000 per n = 20

di 3/100 000 per n = 0,6

Pertanto, se si vuole ammettere che sia

$$\cos\varphi = 1$$

con un errore inferiore a $2/10^5$ dovrà essere $\varphi \leq 20'$.

Se inoltre $R_1 = R_2 =$ 10 000 ohm essi devono essere noti a meno di:

1,5 ohm per n = 20

0,3 ohm per n = 0,6

Con analoga precisione devono essere noti evidentemente anche R_{01} ed R_{02}.

Inoltre con ottima approssimazione si può dire che se si vuole che

$$\frac{B_1\ S_1}{B_2\ S_2}$$

sia noto a meno delle quantità prima dette deve essere l'espressione:

$$\frac{\omega^2 L_1 L_2 - \omega^2 C_1 R_1 \left[L_1 (R_2 + R_{02}) - L_2 R_{01}\right]}{(R_{01} + R_1)(R_{02} + R_2)} \cong \frac{\omega^2 L_1 L_2 - \omega^2 C_1 \cdot L_1 \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2} =$$

$$= \omega^2 \frac{L_1 L_2}{R_1 R_2} - \omega^2 \cdot C_1 L_1 \qquad (10)$$

nota a meno delle stesse quantità.

Nelle ipotesi fatte più sopra, e per

$$C_1 = 10^{-6}\ F$$

la (10) vale circa:

$$\frac{(0,5)^2}{10^8} - (157)^2 \cdot 10^{-6} \times 3 \cdot 10^{-3} = 25 \cdot 10^{-10} - \frac{3}{4} \cdot 10^{-4} \cong \frac{3}{4} \cdot 10^{-4}$$

Ciò comporta che il termine

$$\omega^2 \cdot L_1 L_2$$

è sempre trascurabile nei nostri conti. Quanto a C_1 L_1 ed ω l'errore totale ammesso su $\omega^2 C_1 L_1$ è di $\frac{1,5}{10^4} \Big/ \frac{3}{4 \cdot 10^4} = 2$ per n = 20 e di $\frac{3}{10^5} \Big/ \frac{3}{4 \cdot 10^4} = \frac{4}{10}$ per n = 0,6.

Se l'errore è supposto equamente suddiviso tra le tre quantità, gli errori ammessi sono nei due casi:

C_1	L_1	f	
$0,6\ \mu F$	$20 . 10^{-3} H$	$\frac{1}{3} 25 \cong 8$ Hz	per n = 20
$0,1\ \mu F$	$0,4 . 10^{-3} H$	$\frac{2}{30} 25 \cong 2$ Hz	per n = 0,6

(Da notare che l'errore ammesso su f è solo la metà si quello ammesso su C_1 ed L_1 in quanto f incide col quadrato del suo valore nell'espressione $\omega^2 C_1 L_1$).

\+

Pisa 19 Giugno '54 Claudio Canarutto