

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/27 (12. 6. 54)

F. Amman: SUI METODI DI PONTE NELLE MISURE IN c. a.

Fernando Amman

Sui metodi di ponte nelle misure in corrente alternata.

I) Ponte con lati passivi per la misura di impedenze.

Nelle misure in corrente alternata con circuiti a ponte, le capacità verso terra dei lati del ponte e dei collegamenti, fanno sì che la relazione esprime l'equilibrio del ponte è diversa da quella che vale in corrente continua (quando in questo caso si ritengono nulle le conduttanze verso terra, condizione che può considerarsi soddisfatta nella grande maggioranza dei casi).

Il circuito equivalente, ad una determinata frequenza, di ciascun lato del ponte, di impedenza Z , può essere quello rappresentato in fig.1; le capacità distribuite verso terra possono cioè considerarsi concentrate agli estremi.

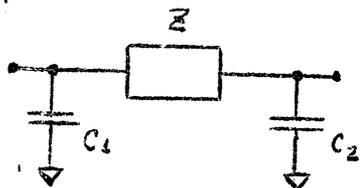


fig. 1

Adottando questo circuito equivalente per tutti i lati del ponte (comprese naturalmente le diagonali), il circuito equivalente del ponte, per un valore di frequenza, diviene quello indicato in fig.2. Come elemento caratteristico dei lati si è presa l'ammettenza Y inverso dell'impedenza Z , grandezza che più si presta nel nostro caso ai calcoli.

Le Y_{Ti} sono le ammettenze verso terra concentrate ai nodi.

Se tali ammettenze fossero nulle, la condizione di equilibrio, esprime il fatto che i nodi 2 e 4 sono equipotenziali, sarebbe data

$$1) \quad Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4$$

Condizione perchè all'equilibrio sia valida la 1) è che le correnti nei lati 1-2 e 1-4 siano uguali rispettivamente a quelle nei lati 2-3 e 4-3, che cioè la corrente sia nulla nei lati 2-T e 4-T.

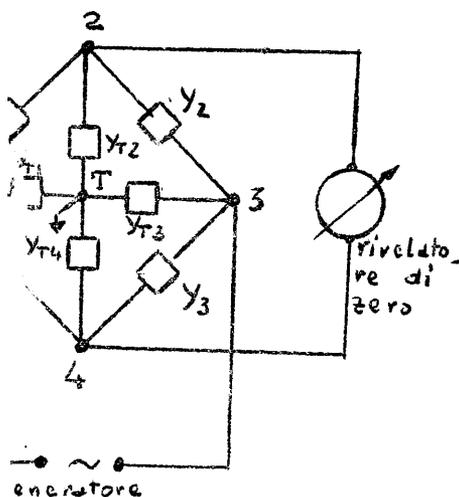


fig. 2

Quindi in generale, quando la Y_{T_2} e la Y_{T_4} non siano nulle, all'equilibrio la 1) non vale più.

Per trovare la relazione esistente tra le otto ammettenze quando nel lato 2-4 non circola corrente (ponte in equilibrio), conviene semplificare la rete di fig.2, ricorrendo ad una trasformazione stella-poligono, dovuta al Campbell, e dimostrata nel caso più generale dal Marino (Rendiconti della R.Accademia dei Lincei, 1931, serie VI, volume XIII, pag.66 e pag.606; Bottani-Sartori, Elettrotecnica, vol.I, pag.292); mediante questa, nella rete si può sopprimere il nodo T, riducendola così alla rete di un ponte di Wheastone convenzionale (fig.3), nella quale i valori delle ammettenze dei lati sono legati

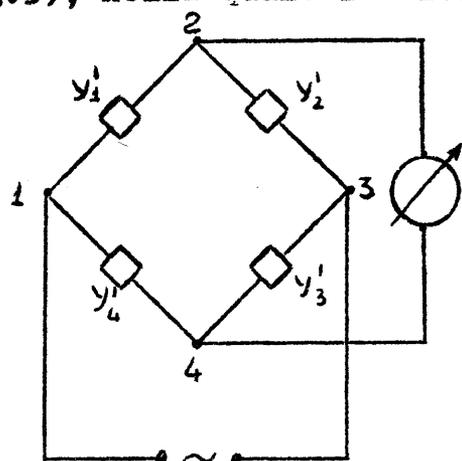


fig-3

alle ammettenze primitive dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 Y'_1 &= Y_1 + \frac{Y_{T_1} Y_{T_2}}{M} \\
 Y'_2 &= Y_2 + \frac{Y_{T_2} Y_{T_3}}{M} \\
 Y'_3 &= Y_3 + \frac{Y_{T_3} Y_{T_4}}{M} \\
 Y'_4 &= Y_4 + \frac{Y_{T_4} Y_{T_1}}{M}
 \end{aligned}$$

essendo $M = Y_{T_1} + Y_{T_2} + Y_{T_3} + Y_{T_4}$

La suddetta trasformazione stella-poligono cambia anche i valori delle ammettenze delle due diagonali 1-3 e 2-4; siccome però tali ammettenze non entrano nella relazione esprime l'equilibrio, perchè possono considerarsi conglobate rispettivamente nel generatore e nel rivelatore di zero, non sono state indicate in fig.3 nè si è data la loro espressione trasformata.

Per l'equilibrio del ponte dovrà essere:

$$3) \quad Y'_1 Y'_3 = Y'_2 Y'_4$$

ossia, sostituendo le 2) nella 3) e sviluppando:

$$4a) \quad Y_2 Y_4 - Y_1 Y_3 = \frac{Y_{T_4}}{M} (Y_1 Y_{T_3} - Y_2 Y_{T_1}) + \frac{Y_{T_2}}{M} (Y_3 Y_{T_1} - Y_4 Y_{T_3})$$

oppure

$$4b) Y_2 Y_4 - Y_1 Y_3 = \frac{Y_{T1}}{M} (Y_3 Y_{T3} - Y_2 Y_{T4}) + \frac{Y_{T3}}{M} (Y_1 Y_{T4} - Y_4 Y_{T2})$$

La 4a) è identicamente soddisfatta, quando siano soddisfatte le tre relazioni, delle quali, come è facile constatare, due sole sono indipendenti:

$$5a) Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4$$

$$5b) Y_1 Y_{T3} = Y_2 Y_{T1}$$

$$5c) Y_4 Y_{T3} = Y_3 Y_{T1}$$

Le 5) ci dicono quindi che all'equilibrio la relazione 1) vale ancora, se però è verificata anche o la 5b) o la 5c), che esprimono la condizione che i tre nodi 2-4 e T sono allo stesso potenziale e che quindi nei lati 2-T e 4-T non passa corrente.

Spesso, nei circuiti di misura in c.a., uno dei nodi viene messo a terra; è bene notare che neppure in tal caso all'equilibrio vale la relazione 1). Supponendo, per esempio, di mettere a terra il nodo 2, si ha:

$$6) Y_{T2} = \infty$$

Sostituendo la 6) nella 4a) si ottiene:

$$7) Y_2 Y_4 - Y_1 Y_3 = Y_3 Y_{T1} - Y_4 Y_{T3}$$

cioè, anche in questo caso, condizione perchè valga la 1) è che sia verificata la 5c).

Queste considerazioni portano al dispositivo di correzione, noto col nome di "terra di Wagner", consistente nel mettere in parallelo alle Y_{T1} e Y_{T3} due ammettenze variabili, in modo tale da soddisfare le 5). Praticamente in molti casi è sufficiente, invece che disporre due ammettenze, ciascuna delle quali variabili in valore e angolo caratteristico, usare due resistori ad alta resistenza, variando i quali si rende minima la d.d.p. tra i nodi 2 e 4 e il nodo T. La correzione va fatta per successive approssimazioni, collegando volta a volta lo strumento indicatore di zero tra i nodi 2 (o 4) e la terra T, e tra i nodi 2 e 4.

Se si prende in esame la 4b) invece che la 4a), si vede che essa è soddisfatta quando lo siano due delle tre relazioni:

$$8a) Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4$$

$$8b) Y_2 Y_{T4} = Y_3 Y_{T2}$$

$$8c) Y_1 Y_{T4} = Y_4 Y_{T2}$$

Questo è un caso particolare in cui all'equilibrio è valida la 1), pur non essendo nulle le correnti nei lati 2-T e 4-T.

Queste condizioni portano alla realizzazione di un altro dispositivo di correzione, assolutamente analogo al primo, che consiste nel porre due ammettenze variabili in parallelo alle Y_{T_2} e Y_{T_4} ; per il resto valgono le stesse considerazioni fatte sopra.

Può darsi il caso, per certi valori delle ammettenze dei lati e delle ammettenze verso terra, che nessuno dei due citati dispositivi sia fisicamente realizzabile con elementi normali passivi (quando la parte reale di una delle due ammettenze da aggiungere in parallelo per soddisfare le condizioni 5) e 8) è negativa).

Il sistema di terra qui proposto, e da noi usato in un circuito diverso, ma con lo stesso scopo (vedi parte II), supera questo impedimento, oltre ad essere di più facile realizzazione di un'ammettenza variabile in valore e angolo caratteristico, permettendo di ottenere gli stessi risultati.

Il principio di esso consiste nelle spostare il potenziale globale del ponte verso terra, fino a portare al potenziale di terra uno dei due nodi, o il 2 o il 4, e di conseguenza anche l'altro, quando il ponte sia in equilibrio.

Quando i nodi 2, 4 e T sono equipotenziali, tra le ammettenze del ponte vale la relazione 1) perchè nei lati 2-T e 4-T non circola corrente. Ciò si può constatare anche sulla relazione 4 a); dato che, se due punti sono allo stesso potenziale, l'ammettenza esistente tra essi può essere tolta senza alterare nulla, si può porre nella 4 a):

$$9) \quad Y_{T_2} = Y_{T_4} = 0$$

e ricavare quindi la 1).

Nelle due ammettenze Y_{T_1} e Y_{T_3} circolerà corrente, ma essa non altera la misura, costituendo semplicemente un carico aggiunto per il generatore.

Per realizzare un dispositivo che permetta di spostare in blocco il potenziale del ponte verso terra, bisogna disporre di una sorgente ausiliaria di tensione, isofrequenziale con quella del generatore principale, e variabile in valore e fase. Si collega quindi uno dei morsetti di tale sorgente a terra e l'altro ad un punto qualunque della diagonale di alimentazione.

Per la misura si procede poi in modo analogo a quanto già indicato più sopra: collegando volta a volta l'indicatore di zero tra i nodi 2 (o 4) e T, e tra i nodi 2 e 4, si azzerano rispettivamente con successive approssimazioni, le tensioni esistenti tra detti nodi, la prima, operando sul valore e sulla fase della tensione della sorgente ausiliaria, la seconda operando sull'ammettanza del lato variabile del ponte.

In fig.4 è rappresentato un circuito di ponte per misure in corrente alternata a frequenza di rete, col dispositivo di terra sopra descritto.

La sorgente ausiliaria di tensione è un variatore di fase V, collegato alla rete dal quale

è derivato un potenziometro R. Uno degli estremi di R è a terra; il suo cursore è collegato al punto di mezzo della diagonale di alimentazione mediante le due ammettenze eguali Y_0 , che possono essere due condensatori di opportuna capacità, per esempio dell'ordine di $10^4 - 10^5$ pF. Questo collegamento è comodo per la simmetria del sistema.

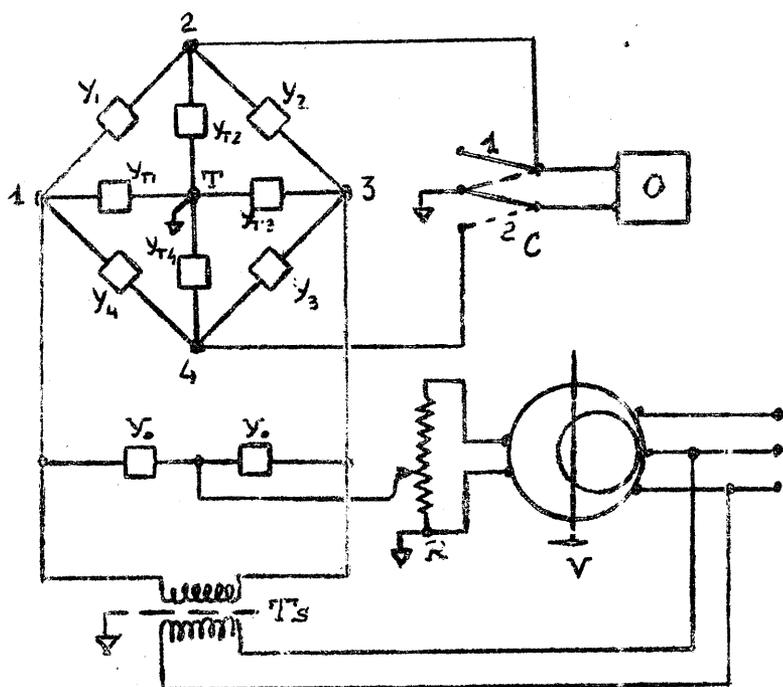


fig- 4

Il ponte è alimentato dalla rete attraverso un trasformatore schermato Ts, il cui schermo, insieme agli schemi dei lati del ponte e dei collegamenti, è a terra. Lo strumento indicatore di zero è l'oscillografo O.

La misura procede così: posto il commutatore C nella posizione 1 (linea piena) si azzerava la tensione dell'oscillografo operando sul variatore V e sul potenziometro R; si porta quindi C nella posizione 2 (linea tratteggiata) e si azzerava la tensione in O operando sul lato variabile del ponte.

Vi è da osservare che, essendo lo strumento di zero un oscillografo, bisogna collegare a terra uno dei suoi morsetti; teoricamente, se la tensione di alimentazione fosse perfettamente sinusoidale, sarebbe inutile collegare il nodo 2 (già portato preventivamente al potenziale di terra) al morsetto di terra dell'oscillografo; siccome in pratica vi sono delle armoniche che è impossibile annullare, è più conveniente fare tale collegamento, che naturalmente non toglie alcuna validità alla trattazione che precede.

Osserviamo ancora che il potenziale degli schermi in generale non sarà quello di terra, e che quindi, collegandoli direttamente a terra, si ha una corrente nei lati 1-T e 3-T (quando naturalmente i nodi 2 e 4 siano al potenziale di terra), e le due correnti non saranno in generale uguali tra loro, bensì tali da provocare nelle Y_{T1} e Y_{T3} cadute di tensioni uguali rispettivamente a quelle che si hanno nelle Y_1 e Y_2 (o Y_4 e Y_3). Tali correnti non alterano la misura, ma costituiscono semplicemente un carico aggiunto per il generatore, come già detto.

D'altra parte sarebbe errato cercare di annullare il potenziale tra gli schermi e la terra, collegando per esempio gli schermi al nodo 2 (invece che a terra direttamente) ed eseguire poi la misura come sopra descritto. In tal caso infatti sarebbe nulla la corrente dal nodo T verso terra, ma le correnti nei lati 2 e 3 non sarebbero uguali; si avrebbe infatti la Y_1 in parallelo con la Y_{T1} e la Y_2 in parallelo con la Y_{T3} ; l'espressione esprime l'equilibrio sarebbe la 7) e non la 1).

Infatti la condizione generale di validità della 1) (escluso cioè il caso particolare in cui siano soddisfatte le 8)), è che la corrente nel lato 1-2, sia uguale a quella nel lato 2-3⁽⁴⁾, cioè che siano nulle le correnti nei lati 2-T e 4-T. Se le ammettenze Y_{T2} e Y_{T4} hanno un valore finito, tale condizione equivale all'equipotenzialità dei tre nodi 2, 4 e T; se invece una di esse, o la Y_{T1} o la Y_{T4} , è infinita (corto circuito tra i nodi 2 e T, o 4 e T) non vi è più equivalenza tra le due condizioni, perchè in un lato di ammettenza infinita può circolare corrente, pur essendo nulla la tensione ai suoi estremi.

e che la corrente nel lato 1 - 4 sia uguale a quella nel lato 4 - 3

Ritornando al circuito di misura, le due operazioni di azzeramento sopra descritte vanno ripetute: praticamente se il valore del lato variabile del ponte durante la prima operazione non è molto discosto dal valore finale, basta una sola sequenza di operazioni, e cioè azzeramento della tensione tra il nodo 2 e la terra, e azzeramento della tensione tra i nodi 2 e 4.

II) Ponte per la misura di f.e.m. alternate.

Consideriamo ora il circuito a ponte per la misura del rapporto tra due f.e.m. alternate. Analogamente a quanto fatto nel par.I le capacità distribuite verso terra dei lati e dei collegamenti, possono essere concentrate ai nodi del ponte.

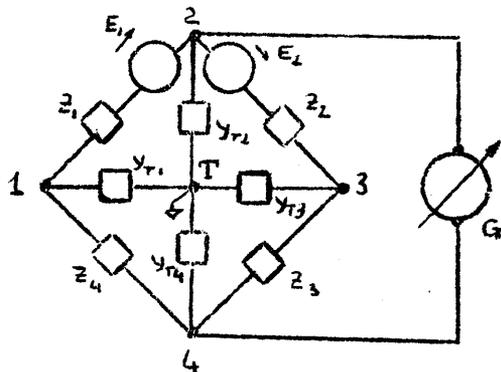


fig. 5

In fig.5 è rappresentato il circuito: nei lati 1-2 e 2-3 vi sono i circuiti equivalenti di due generatori aventi f.e.m. E_1 e E_2 , e impedenze interne Z_1 e Z_2 ; Z_3 e Z_4 sono le impedenze degli altri due lati del ponte; le Y_{r_i} sono le ammettenze verso terra e G è il rivelatore di zero.

Come già visto nel caso del ponte di impedenze, anche qui la presenza delle ammettenze verso terra fa sì che l'espressione del rapporto tra le due f.e.m. è diversa in corrente alternata e in corrente continua. Com'è noto, all'equilibrio (tensione nulla tra i nodi 2 e 4) in corrente continua (trascurando le conduttanze verso terra) si ha:

$$1) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Z_4 + Z_1}{Z_3 + Z_2} = \frac{Z_4}{Z_3} \frac{1 + Z_1/Z_4}{1 + Z_2/Z_3} = \frac{Z_4}{Z_3} (1 + k_0)$$

Poichè normalmente si assume come valore del rapporto tra le due f.e.m. il valore del rapporto delle impedenze (che nel caso di corrente continua si riducono al solo termine reale) Z_4 e Z_3 , k_0 rappresenta l'errore compiuto assumendo tale ipotesi; esso è detto "errore di consumo" perchè dovuto alle cadute di tensione nelle impedenze interne dei due generatori.

Per trovare la relazione analoga alla 1), valida nel caso di corrente alternata, bisogna risolvere la rete di fig.5 e imporre quindi la condizione che sia nulla la corrente nel lato 2-4.

Per far ciò si ricorre alla già citata trasformazione stella-poli-gono; diversamente da quanto fatto nel part.I, in questo caso nella rete trasformata bisognerà tener conto dell'impedenza nella diagonale 1-3, mentre quella nella diagonale 2-4 non ha alcuna influenza quando

il ponte è in equilibrio.

Sviluppando i calcoli si trova che, quando nella diagonale 2-4 non passa corrente (ponte in equilibrio), vale la seguente relazione:

$$2) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Z_4}{Z_2} \frac{Z_2'}{Z_1'} \frac{Z_4' + Z_1' \left(1 + \frac{Z_3' + Z_4'}{Z_T'}\right)}{Z_3' + Z_2' \left(1 + \frac{Z_3' + Z_4'}{Z_T'}\right)}$$

nella quale:

$$\frac{1}{Z_1'} = \frac{1}{Z_1} + \frac{Y_{T1} Y_{T2}}{M}$$

$$\frac{1}{Z_2'} = \frac{1}{Z_2} + \frac{Y_{T2} Y_{T3}}{M}$$

$$3) \quad \frac{1}{Z_3'} = \frac{1}{Z_3} + \frac{Y_{T3} Y_{T4}}{M}$$

$$\frac{1}{Z_4'} = \frac{1}{Z_4} + \frac{Y_{T4} Y_{T1}}{M}$$

$$\frac{1}{Z_T'} = \frac{Y_{T1} Y_{T3}}{M}$$

$$M = Y_{T1} + Y_{T2} + Y_{T3} + Y_{T4}$$

Sostituendo le 3) nella 2) si possono ricavare le condizioni perchè sia:

$$4) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Z_4}{Z_3}$$

perchè cioè la misura non sia affetta dall'errore di consumo.

Esse sono tre, delle quali due sole indipendenti:

$$5a) \quad Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$$

$$5b) \quad Z_3 Y_{T3} = Z_4 Y_{T1}$$

$$5c) \quad Z_2 Y_{T3} = Z_1 Y_{T1}$$

In generale è impossibile soddisfare tali condizioni, perchè le impedenze interne Z_1 e Z_2 non sono, in generale, proporzionali alle rispettive f.e.m. E_1 e E_2 (e quindi alle impedenze Z_4 e Z_3).

Non è neppure possibile trovare delle condizioni tali per cui valga la 1).

Si può vedere come si trasforma la relazione generale 2) quando, mediante uno dei dispositivi di terra descritti nel paragrafo I, si porti al potenziale di terra il nodo 2 e si porti poi all'equilibrio il ponte.

Distinguiamo due casi: primo, tutte le schemature del ponte e dei collegamenti sono sempre connesse al nodo 2 (e quindi $Y_{T2} = \infty$); secondo, le schemature sono sempre connesse a terra (è bene ricordare, come è già stato notato nel par. I, che nel caso di ponte di impedenze, solo il secondo dei metodi sopracitati è lecito). Nel primo caso si ha quindi $Y_{T2} = \infty$; quando il ponte è in equilibrio e i nodi 2 e 4 sono al potenziale di terra, nella ammettenza Y_{T4} non passa corrente, e quindi può essere tolta senza alterare nulla. Ponendo nella 2) le due condizioni:

$$4) \quad \begin{aligned} Y_{T2} &= \infty \\ Y_{T4} &= 0 \end{aligned}$$

si ottiene la seguente relazione:

$$5) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Z_4}{Z_3} \frac{1 + Z_1/Z_4 (1 + Z_4 Y_{T3})}{1 + Z_2/Z_3 (1 + Z_3 Y_{T3})} = \frac{Z_4}{Z_3} (1 + k_1)$$

Nel secondo caso invece all'equilibrio, quando i nodi 2 e 4 sono al potenziale di terra, non passa corrente nei lati 2-T e 4-T; si può quindi porre:

$$6) \quad \begin{aligned} Y_{T2} &= 0 \\ Y_{T4} &= 0 \end{aligned}$$

e, sostituendo le 6) nella 2), si ottiene

$$7) \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{Z_4}{Z_3} \frac{1 + Z_1/Z_4 (1 + (Z_3 + Z_4) \frac{Y_{T1} Y_{T3}}{Y_{T1} + Y_{T3}})}{1 + Z_2/Z_3 (1 + (Z_3 + Z_4) \frac{Y_{T1} Y_{T3}}{Y_{T1} + Y_{T3}})} = \frac{Z_4}{Z_3} (1 + k_2)$$

Calcoliamo ora l'entità di questi errori sistematici di consumo k_1 e k_2 facendo le seguenti ipotesi:

$$Z_3 + Z_4 = Z_{\text{tot}} \quad \text{costante (misura con divisore di tensione)}$$

$$Z_4 = Z_{\text{tot}} (0.5 + d\alpha) \quad \text{essendo } d\alpha \text{ piccolo, dell'ordine di } 10^{-2}$$

$$Z_3 = Z_{\text{tot}} (0.5 - d\alpha)$$

$$Z_1 = Z_2 = \chi Z_{\text{tot}} \quad \text{essendo } \chi = \text{cost e piccolo rispetto all'umidità (dell'ordine di } 10^{-3}\text{)}.$$

$$Y_{T_1} = Y_{T_3} = \text{cost} \quad \text{dello stesso ordine di grandezza di } \frac{1}{Z_{\text{tot}}}$$

con queste ipotesi, limitandosi ai termini di primo ordine, dalla 5) e dalla 7) si ricavano le seguenti espressioni per l'errore di consumo nel caso di f.e.m. continue e nei due casi suesposti di f.e.m. alternate:

$$8) \quad k_0 = - 8 \chi d\alpha$$

$$9) \quad k_1 = - \frac{8 \chi}{1 + \frac{Z_{\text{tot}} Y_{T_1}}{2}} d\alpha$$

$$10) \quad k_2 = - 8 \chi \left(1 + \frac{Z_{\text{tot}} Y_{T_1}}{2}\right) d\alpha$$

Dalla 9) e dalla 10) si può vedere che l'errore di consumo è minore nel primo caso (schemi connessi al nodo 2) che nel secondo (schemi connessi sempre a terra); quando il valore delle ammettenze Y_{T_1} e Y_{T_3} (supposte uguali) tende allo zero, i due errori tendono a divenire uguali tra loro ed uguali all'errore di consumo nella misura di f.e.m. continue.

Può essere interessante calcolare l'errore di consumo che si ha nella misura dell'indice del campo n ; questa grandezza, a meno di costanti, per un campo piano ha l'espressione:

$$11) \quad n \sim \frac{1}{dr} \frac{E_1/E_2 - E_1^*/E_2^*}{E_1/E_2 + E_1^*/E_2^*}$$

essendo E_1 e E_2 le differenze di potenziale tra le due sonde esterne e quella centrale nel campo incognito; E_1^* e E_2^* le d.d.p. tra le stesse sonde in un campo uniforme; dr è l'intervallo di derivazione, cioè la metà della distanza tra le due sonde esterne.

La distanza dx viene misurata in via indiretta, ponendo le tre sonde in un campo con gradiente (e quindi valore di n) noto; essa è data quindi, con notazioni analoghe a quelle usate, dalla:

$$12) \quad dx \sim \frac{E_1'/E_2' - E_1^*/E_2^*}{E_1'/E_2' + E_1^*/E_2^*}$$

In definitiva si ha la seguente espressione di n :

$$13) \quad n \sim \frac{E_1'/E_2' - E_1^*/E_2^*}{E_1'/E_2' + E_1^*/E_2^*} \quad \frac{E_1'/E_2' + E_1^*/E_2^*}{E_1'/E_2' - E_1^*/E_2^*}$$

Il valore di n misurato sarà invece:

$$14) \quad n_m \sim \frac{Z_4'/Z_3' - Z_4^*/Z_3^*}{Z_4'/Z_3' + Z_4^*/Z_3^*} \quad \frac{Z_4'/Z_3' + Z_4^*/Z_3^*}{Z_4'/Z_3' - Z_4^*/Z_3^*}$$

Con le stesse ipotesi già fatte, e limitandosi ai termini di primo ordine, l'errore sistematico ϵ nella misura di n , dovuto al consumo, ha la seguente espressione:

$$15) \quad \epsilon = \frac{n - n_m}{n} = 2 \rho^* \left\{ \frac{\rho}{\rho^2 - \rho^{*2}} (k - k^*) - \frac{\rho'}{\rho'^2 - \rho'^{*2}} (k' - k'^*) \right\}$$

dove $\rho = \frac{Z_4}{Z_3}$; $\rho' = \frac{Z_4'}{Z_3'}$; $\rho^* = \frac{Z_4^*}{Z_3^*}$

k sono gli errori di consumo definiti nella 9) e nella 10).

Ripetiamo che, ammesse le ipotesi precedenti sui valori degli elementi costituenti il ponte, l'approssimazione lineare per il calcolo di ϵ (e quindi la formula 15)) è sufficiente; volendo tener conto dei termini del secondo ordine si arriva alla seguente formula:

$$16) \quad \epsilon = 2 \frac{\rho \rho^*}{\rho^2 - \rho^{*2}} (k - k^*) \left\{ 1 + 2 \frac{\rho' \rho'^*}{\rho'^2 - \rho'^{*2}} (k' - k'^*) \right\} - 2 \frac{\rho' \rho'^*}{\rho'^2 - \rho'^{*2}} (k' - k'^*) +$$

$$+ \frac{\rho' k' + \rho^* k^*}{\rho' + \rho^*} \left\{ 2 \frac{\rho' k' - \rho^* k^*}{\rho' - \rho^*} - \frac{\rho' k' + \rho^* k^*}{\rho' + \rho^*} \right\} - \frac{\rho k - \rho^* k^*}{\rho - \rho^*} \left\{ \frac{\rho k - \rho^* k^*}{\rho - \rho^*} - 2 \frac{\rho k + \rho^* k^*}{\rho + \rho^*} \right\}$$

Sulla formula 15) si possono fare alcune interessanti considerazioni. Se, per determinare $d r$, ci si serve di un campo tale che sia $k' = k$, tale cioè da dare gli stessi valori agli elementi caratteristici del circuito sia nel campo incognito che in quello a gradiente noto, l'errore di consumo risulta nullo.

In effetti, nel rilievo di n , ci siamo messi, per quanto possibile, in queste condizioni.

Risulta inoltre che, per $k' \neq k$, l'errore risulta minore collegando gli schemi al nodo 2 piuttosto che direttamente a terra (basta sostituire la 9) o la 10) nella 15)).

Nel circuito da noi realizzato, in cui si ha il dispositivo di terra descritto al termine del par.I, con schemi collegati al nodo 2, l'errore di consumo è praticamente nullo nella zona utile del campo, ed assume valori dell'ordine di 10^{-4} - 10^{-5} (assai inferiori quindi agli errori sperimentali) all'esterno di essa.

Milano, 4 giugno 1954