

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/26 (7. 6. 54)

P. G. Sona: PERDITE DI SCATTERING NEL GAS RESIDUO NEL SINCRONE.

PERDITE PER SCATTERING NEL GAS RESIDUO  
NEL SINCROTRONE

P.G. Sona

Sommario.-

Si generalizza la teoria di Greenberg e Berlin (R.S.I., 22, 293 (1951)), prendendo in considerazione simultaneamente le oscillazioni di betatrone verticali e radiali. Si dà un criterio per separare i piccoli dai grandi angoli di scattering. Nelle tabelle I, II, III sono riportati i risultati ottenuti per il valore delle perdite con i dati del "Progetto III" del sincrotrone da 1 BeV.

1.- Significato dei simboli usati.-

- a = apertura radiale utile della ciambella (cm)
- b = apertura verticale utile della ciambella (cm)
- R<sub>0</sub> = raggio dell'orbita centrale = 333,3 cm
- n = indice del campo = 0,5
- Λ = fattore di allungamento per le sezioni diritte =  $\frac{2 \pi R_0 + 4 l_0}{2 \pi R_0} = 1,191$
- B = induzione sull'orbita centrale (gauss)
- B<sub>0</sub> = induzione massima sull'orbita centrale = 10,000 gauss
- p = pressione del gas residuo in mm di Hg.
- T = temperatura assoluta del gas residuo (°K).
- β c = velocità dell'elettrone
- γ m<sub>0</sub> =  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  m<sub>0</sub> = massa relativistica dell'elettrone
- E<sub>i</sub> = energia totale d'iniezione (MeV)
- β<sub>i</sub>, γ<sub>i</sub> = valori di β, γ all'iniezione
- t<sub>i</sub> = istante di iniezione, contato a partire dall'istante in cui B = 0

*retta*

- $t_0$  = tempo di salita di B, da 0 a  $B_0$  (sec)  
 $(dB/dt)_i$  = velocità di salita all'iniezione (gauss/sec)  
 $\sigma$  =  $\frac{2\pi R_0^2 \Lambda}{\beta_i^3 C(1-n)} \frac{1}{E_i} \left(\frac{dE}{dt}\right)_i = 6,93 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\beta_i^3 E_i} \left(\frac{dB}{dt}\right)_i$  cm = spirelizzazione  
 $\omega_0$  = velocità angolare dell'elettrone sull'orbita centrale ( $\text{sec}^{-1}$ )  
 $\omega_1$  =  $\sqrt{1-n} \omega_0$  = pulsazione delle oscillazioni radiali di betatrone ( $\text{sec}^{-1}$ ).  
 $\omega_2$  =  $\sqrt{n} \omega_0$  = pulsazione delle oscillazioni verticali di betatrone ( $\text{sec}^{-1}$ ).  
 $C_1$  = ampiezza dell'oscillazione radiale di betatrone (cm)  
 $C_2$  = ampiezza dell'oscillazione verticale di betatrone (cm)  
 $W_1$  =  $1/2 \gamma m_0 \omega_1^2 C_1^2$  = energia dell'oscillazione radiale di betatrone  
 $W_2$  =  $1/2 \gamma m_0 \omega_2^2 C_2^2$  = energia dell'oscillazione verticale di betatrone  
 $\psi$  = angolo di scattering  
 $\chi_1$  = angolo di scattering proiettato sul piano orizzontale  
 $\chi_2$  = angolo di scattering proiettato sul piano verticale  
 $\alpha_1$  =  $\frac{a \cdot (1-n)^{1/2}}{2 R_0 \Lambda^{1/2}}$  = angolo massimo di scattering permesso dalla ciambella nel piano orizzontale a partire dall'orbita centrale  
 $\alpha_2$  =  $\frac{b \cdot n^{1/2}}{2 R_0 \Lambda^{1/2}}$  = angolo massimo di scattering permesso dalla ciambella nel piano verticale a partire dall'orbita centrale  
 $W_{1m}$  = energia massima dell'oscillazione di betatrone orizzontale permessa dalla ciambella  
 $W_{2m}$  = energia massima dell'oscillazione di betatrone verticale permessa dalla ciambella  
 $S(\psi, \beta) d\Omega$  = sezione d'urto differenziale per scattering entro l'angolo solido  $d\Omega$ .  
 $N$  =  $1,93 \cdot 10^{19}$  P/T = numero di atomi per  $\text{cm}^3$  del gas residuo (biatomico)

2.- Estensione della teoria della diffusione per scattering multiplo.-

Si veda l'articolo citato di Greenberg e Berlin, ed anche Blachman e Courant in Phys. Rev. 74, 140, (1948).

Sia  $P(W_1, W_2, t) dW_1 dW_2$  il numero di elettroni che al tempo  $t$  hanno energie di oscillazione comprese fra  $W_1$  e  $W_1+dW_1$ ,  $W_2$  e  $W_2+dW_2$ .

Si trova allora con lo stesso metodo di Greenberg e Berlin<sup>(1)</sup>, che la funzione  $P$  soddisfa l'equazione differenziale:

$$\frac{\delta P}{\delta t} = g_1 \frac{\delta}{\delta W_1} \left( W_1 \frac{\delta P}{\delta W_1} \right) - \frac{\omega_1}{\omega_1} \frac{\delta}{\delta W_1} (W_1 P) +$$

$$+ g_2 \frac{\delta}{\delta W_2} \left( W_2 \frac{\delta P}{\delta W_2} \right) - \frac{\omega_2}{\omega_2} \frac{\delta}{\delta W_2} (W_2 P)$$

dove

$$g_1 = (1/2) \chi_{m_0} \beta^2 c^2 \cdot N \beta c \cdot \langle \chi_1^2 \rangle$$

$$g_2 = (1/2) \chi_{m_0} \beta^2 c^2 \cdot N \beta c \cdot \langle \chi_2^2 \rangle$$

$$\langle \chi_1^2 \rangle = \int \chi_1^2 \cdot \text{sd } \Omega \quad \langle \chi_2^2 \rangle = \int \chi_2^2 \cdot \text{sd } \Omega$$

Le condizioni al contorno sono:

$$P(W_1, W_2, t_i) = P_0(W_1, W_2) \text{ distribuzione iniziale}$$

$$P(W_{1m}, W_{2m}, t) = 0 \text{ alle pareti.}$$

Ammetteremo che la ciambella sia di sezione rettangolare, e non terremo conto delle oscillazioni di sincrotrone.

Le grandezze  $\langle \chi_1^2 \rangle$ ,  $\langle \chi_2^2 \rangle$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $W_{1m}$ ,  $W_{2m}$  sono funzioni solo del tempo attraverso  $\beta$ : la funzione  $\beta = \beta(t)$  dipende dalla forma della salita di  $B = B(t)$ , che supporremo nota.

Poniamo:

$$x_1 = \frac{W_1}{W_{1m}} \quad ; \quad x_2 = \frac{W_2}{W_{2m}} \quad ; \quad P(W_1, W_2, t) dW_1 dW_2 = f(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2$$

(1) Per tale metodo vedere Chandrasekhar - Rev. Mod. Phys., 15 (1943) pag. 31 e seguenti.

Allora:

$$\frac{\delta \dot{f}}{\delta t} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \cdot \frac{\delta}{\delta x_1} (x_1 \frac{\delta \dot{f}}{\delta x_1}) + \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot \frac{\delta}{\delta x_2} (x_2 \frac{\delta \dot{f}}{\delta x_2}) + \quad X$$

$$+ (\frac{\dot{W}_{1m}}{W_{1m}} - \frac{\dot{\omega}_1}{\omega_1}) \frac{\delta}{\delta x_1} (x_1 f) + (\frac{\dot{W}_{2m}}{W_{2m}} - \frac{\dot{\omega}_2}{\omega_2}) \frac{\delta}{\delta x_2} (x_2 f)$$

Trascurando gli ultimi due termini del secondo membro, (che sono connessi con lo smorzamento delle oscillazioni), come fanno Greenberg e Merlin per trovare una soluzione approssimata dell'equazione, si ottiene:

$$(1) \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\delta}{\delta x_1} (x_1 \frac{\delta f}{\delta x_1}) + \frac{\partial L}{\partial x_2} \frac{\delta}{\delta x_2} (x_2 \frac{\delta f}{\delta x_2}) \quad X$$

Cerchiamo le soluzioni elementari di questa equazione, ponendo:

$$f = A_1(x_1) \cdot A_2(x_2) \cdot \phi_1(t) \cdot \phi_2(t)$$

Si trova allora:

$$\frac{\dot{\phi}_1}{\phi_1} + \frac{\dot{\phi}_2}{\phi_2} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{1}{A_1} \frac{\delta}{\delta x_1} (x_1 \frac{\delta A_1}{\delta x_1}) + \frac{\partial L}{\partial x_2} \frac{1}{A_2} \frac{\delta}{\delta x_2} (x_2 \frac{\delta A_2}{\delta x_2})$$

Scegliamo  $\phi_1$  e  $\phi_2$  in modo che sia separatamente:

$$\frac{\dot{\phi}_1}{\phi_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{1}{A_1} \frac{\delta}{\delta x_1} (x_1 \frac{\delta A_1}{\delta x_1})$$

$$\frac{\dot{\phi}_2}{\phi_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2} \frac{1}{A_2} \frac{\delta}{\delta x_2} (x_2 \frac{\delta A_2}{\delta x_2})$$

In questo modo le variabili sono separate, e si trova come soluzione generale dell'equazione (1):

$$(2) \quad f = (x_1, x_2, t) = \sum_{p,q=1}^{\infty} C_{pq} J_0(\lambda_p x_1^{1/2}) \cdot J_0(\lambda_q x_2^{1/2}) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\lambda_p^2 \tau_1 + \lambda_q^2 \tau_2)}$$

dove:

$$\tau_1 = \int_{t_0}^t \frac{\partial L}{\partial x_1} dt \quad ; \quad \tau_2 = \int_{t_0}^t \frac{\partial L}{\partial x_2} dt$$

$$e J_0(\lambda_p) = 0 \quad J_0(\lambda_q) = 0 \quad \lambda_p > 0, \lambda_q > 0$$

I valori di  $C_{pq}$  sono determinati dalla distribuzione iniziale.  
 Il rendimento per scattering è dato dal quoziente:

$$\frac{\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdot f(x_1, x_2, t_0)}{\int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdot f(x_1, x_2, t_i)}$$

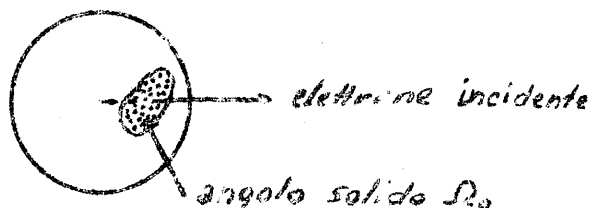
### 3.- Separazione degli angoli di scattering piccoli e grandi

La teoria di Greenberg e Berlin schematizza il fenomeno discontinuo dello scattering degli elettroni da parte del gas residuo con un fenomeno di diffusione continuo in cui il coefficiente di diffusione dipende dal valore dei parametri  $g_1$  e  $g_2$ , e quindi da  $\langle \chi_1' \rangle$ ,  $\langle \chi_2' \rangle$ : questi due valori medi sono calcolati integrando su tutto l'angolo solido, ma dato che tutta la teoria è basata sull'ammissione che gli angoli di scattering importanti siano quelli piccoli, bisogna verificare che effettivamente solo questi ultimi influiscano sul valore di  $\langle \chi_1' \rangle$  e di  $\langle \chi_2' \rangle$ . Courant (R.S.I 24, 836, 1953) ha invece osservato che i due valori medi sono influenzati sensibilmente dai grandi angoli, ed ha proposto di modificare la teoria dividendo gli angoli di scattering in due categorie: angoli maggiori dell'angolo  $\alpha$  permesso dalla ciambella e calcolato a partire dall'orbita centrale, ed angoli minori di  $\alpha$ .

La separazione degli angoli di scattering piccoli e grandi è necessaria per due ragioni:

- 1°) perchè agiscono in modo diverso sulla sorte dell'elettrone deviato;
- 2°) perchè tutta la teoria di Greenberg e Berlin è fatta considerando piccoli gli angoli di scattering, e questa approssimazione compare in tutte le formule in cui entrano gli angoli.

Per effettuare questa separazione useremo il seguente procedimento: divideremo la superficie sferica di raggio  $l$ , rappresentante tutte le possibili direzioni dell'elettrone dopo un urto, in due parti, mediante una linea chiusa fissa, scelta in un modo opportuno, attorno alla direzione dell'elettrone prima dell'urto (vedi figura);



calcoleremo il rendimento per scattering multiplo secondo la teoria di Greenberg e Berlin, eseguendo gli integrali  $\langle \chi_1^2 \rangle$  e  $\langle \chi_2^2 \rangle$  sull'angolo solido  $\Omega_0$ ; terremo conto degli scattering che cadono al di fuori di  $\Omega_0$ , calcolando il rendimento per scattering singolo come se tutti gli elettroni prima dell'urto fossero sull'orbita centrale, considerando perduto un elettrone che subisce una deviazione al di fuori di  $\Omega_0$ ; prenderemo per rendimento complessivo il prodotto dei due rendimenti. (2)

#### 4.- Calcolo del rendimento per scattering.

Se  $\bar{\sigma}(\beta)$  è la sezione d'urto per scattering esterni ad  $\Omega_0$ , il rendimento per scattering singolo è dato da:

$$e^{-N\sigma} \int_{\Omega_0} \beta \bar{\sigma} d\Omega$$

Faremo il calcolo per lo scattering multiplo assumendo che la distribuzione iniziale sia di forma particolarmente semplice.

(2) Greenberg e Berlin intendono per scattering singolo lo scattering di un elettrone che non ne ha mai subito alcuno prima; qui invece si deve intendere per scattering singolo un qualunque scattering esterno ad  $\Omega_0$ , che può anche avvenire dopo molti scattering interni ad  $\Omega_0$ .

Poniamo  $\gamma_1 = \frac{c_1}{a/c}$  ;  $\gamma_2 = \frac{c_2}{b/c}$  ( $0 < \gamma_1 < 1$ ,  $0 < \gamma_2 < 1$ )

Supporremo che la distribuzione iniziale sia della forma:

$$[3] \quad J_0(\lambda_1 y_1) \cdot J_0(\lambda_1 y_2) dy_1 dy_2$$

dove  $\lambda_1$  è la prima radice positiva dell'equazione  $J_0(\lambda \rho) = 0$ . Con questa ammissione si ha che la funzione di distribuzione  $\beta$  degli elettroni è la prima soluzione elementare dell'equazione [1]; la soluzione generale [2] si riduce in questo caso al solo primo termine della sommatoria.

La distribuzione iniziale [3] ha un massimo per il valore  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$  delle ampiezze di oscillazione, e tende a zero avvicinandosi alle pareti della ciambella: è quindi una distribuzione ragionevole dal punto di vista fisico; qualsiasi altra distribuzione fisicamente ammissibile avrà una componente notevole della forma [3]. Con l'ipotesi ora fatta i risultati prendono una forma particolarmente semplice ed espressiva.

Infatti in questo caso il rendimento per scattering multiplo è semplicemente

$$e^{-\frac{1}{4} \lambda_1^2 (\tau_1 + \tau_2)}$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \int_{t_i}^{t_0} \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial t} \right) dt$$

Si verifica facilmente che:

$$\tau_1 + \tau_2 = Nc \int_{t_i}^{t_0} \beta \left[ \frac{\langle \kappa_1^2 \rangle}{\alpha_1^2} + \frac{\langle \kappa_2^2 \rangle}{\alpha_2^2} \right] dt$$

Il rendimento complessivo è quindi:

$$R = e^{-Nc \int_{t_i}^{t_0} \beta \left\{ \left[ \frac{\langle \kappa_1^2 \rangle}{\alpha_1^2} + \frac{\langle \kappa_2^2 \rangle}{\alpha_2^2} \right] + \frac{\lambda_1^2}{4} + \bar{J} \right\} dt}$$

Da questa formula si vede che l'assorbimento per scattering multiplo è equivalente ad un assorbimento per scattering singolo



con sezione d'urto:

$$\left[ \frac{\langle \chi_1^2 \rangle}{\alpha_1^2} + \frac{\langle \chi_2^2 \rangle}{\alpha_2^2} \right] \frac{\Delta_1^2}{4}$$

Si deve ora scagliere la linea che delimita l'angolo solido  $\Omega_0$ , dalla quale dipendono  $\bar{S}$ ,  $\langle \chi_1^2 \rangle$ ,  $\langle \chi_2^2 \rangle$ .

Si può adoperare uno dei seguenti criteri:

1) staccare dalla superficie sferica la zona permessa dalle dimensioni della ciambella per gli scattering a partire dall'orbita centrale, cioè un rettangolo;

2) applicare il criterio variazionale di rendere stazionario il valore dell'espressione

$$\left[ \frac{\langle \chi_1^2 \rangle}{\alpha_1^2} + \frac{\langle \chi_2^2 \rangle}{\alpha_2^2} \right] \frac{\Delta_1^2}{4} + \bar{S}$$

per piccole deformazioni della linea stessa; così facendo il valore di R dipende poco dalla forma della linea in quell'intorno; si trova con questo criterio che la linea dev'essere una ellisse di equazione

$$\left( \frac{\chi_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\chi_2^2}{\alpha_2^2} \right) \frac{\Delta_1^2}{4} = 1$$

(ricordare che  $\chi_1$  e  $\chi_2$  sono gli angoli proiettati, e che in questo caso si tratta di angoli piccoli).

3) Applicare ancora il criterio variazionale, limitandosi però a linee di forma circolare con centro sulla direzione dell'elettro-ne incidente.

Sceglieremo l'ultimo di questi criteri perchè semplifica il calcolo di  $\bar{S}$  e di  $\langle \chi_1^2 \rangle$ ,  $\langle \chi_2^2 \rangle$ .

L'angolo di apertura  $\alpha_0$  del cono circolare  $\Omega_0$  così scelto deve essere scelto tale che

$$\frac{d}{d\alpha_0} \left\{ \left[ \frac{\langle \chi_1^2 \rangle}{\alpha_1^2} + \frac{\langle \chi_2^2 \rangle}{\alpha_2^2} \right] \frac{\Delta_1^2}{4} + \bar{S} \right\} = 0$$

Tenendo conto che ora  $\langle \chi_1^2 \rangle = \langle \chi_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \psi^2 \rangle$ , si trova

$$\frac{1}{2\bar{S}} = \left[ \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \right] \cdot \frac{\Delta_1^2}{8}$$

Per questo valore di  $\alpha_0$  la funzione integranda  $\left[ \frac{\langle \chi_1^2 \rangle}{\alpha_1^2} + \frac{\langle \chi_2^2 \rangle}{\alpha_2^2} \right] \frac{\lambda_1^2}{4} + \bar{S}$  ha un minimo, ed il suo valore è:

$$\frac{\langle \psi^2 \rangle}{2} \left[ \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \right] \frac{\lambda_1^2}{4} + \bar{S} = \frac{\langle \psi^2 \rangle}{\alpha_0^2} + \bar{S}$$

Si ha quindi:

$$R = e^{-Nc \int_{t_i}^{t_0} \beta \cdot \left[ \frac{\langle \psi^2 \rangle}{\alpha_0^2} + \bar{S} \right] dt}$$

Porremo:

$$Seq = \frac{\langle \psi^2 \rangle}{\alpha_0^2} + \bar{S}$$

L'ordine dei calcoli deve essere il seguente:

- 1) Si trova  $\alpha_0$  dalla formula  $\frac{1}{\alpha_0^2} = \left[ \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} \right] \cdot \frac{\lambda_1^2}{8}$   
(il valore di  $\lambda_1$  è 2,4048)
- 2) Si calcolano  $\langle \psi^2 \rangle = 2\pi \int_0^{\alpha_0} S(\psi) \cdot \psi^2 d\psi$  e  $\bar{S} = 2\pi \int_{\alpha_0}^{\infty} S(\psi) d\psi$
- 3) Si ricava

$$Seq(\beta) = \frac{\langle \psi^2 \rangle}{\alpha_0^2} + \bar{S}$$

### 5.- Calcolo di $\alpha_0$ .

Nella formula che dà il rendimento  $R$  le dimensioni della ciambella compaiono soltanto attraverso  $\alpha_0$ .

Con i dati del Progetto III° si ha:

$a = 16,7$ cm	$\alpha_1 = 14,5 \cdot 10^{-3}$	X
$b = \begin{cases} 5 \text{ cm.} \\ 6 \text{ cm.} \\ 7 \text{ cm.} \end{cases}$	$\alpha_2 = 5,32 \cdot 10^{-3}$	$\alpha_0 = 5,88 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2 = 6,39 \cdot 10^{-3}$	$\alpha_0 = 6,88 \cdot 10^{-3}$
	$\alpha_2 = 7,45 \cdot 10^{-3}$	$\alpha_0 = 7,80 \cdot 10^{-3}$

### 6.- Calcolo di $Seq(\beta)$ .

Una buona approssimazione per la sezione d'urto ad angoli piccoli è data dalla formula seguente:

$$S(\psi) d\Omega = 4 Z_c^2 \frac{z^2}{\beta^4 \gamma^2} \frac{1}{(\psi^2 + \Theta_m^2)^2} d\Omega \quad \times$$

con

$r_c$  = raggio classico dell'elettrone  
 $Z$  = numero atomico medio del gas residuo  
 $\Theta_m = 1,22 \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{z}{\beta \gamma}$        $\Theta_m = 1,22 \cdot \frac{1}{137} \cdot \frac{z}{\beta \gamma}^{1/3}$       X

Questa formula è dedotta mediante l'approssimazione di Born, del modello di Thomas-Fermi (Polière: Zeitsch. für Natur. 2a, 133, 1947; Annis, Bridge, Clbert: Phys. Rev. 89, 1216, 1953; vedi anche il rapporto n.11 di G. Bernardini, pag. 8).

Il calcolo è stato eseguito ponendo  $\beta = 1$  e  $z = \gamma, \gamma = \sqrt{z, z.8, z}$  per tener conto dello scattering anelastico.

Si trova allora:

$$[4] \quad S_{eq} = 4\pi z_i^2 \frac{z^2}{\delta^2} \frac{1}{\alpha_0^2} \ln \left( 1 + \frac{\alpha_0^2}{\alpha_m^2} \right) \quad ; \quad \alpha_m^2 = 0,193 \cdot 10^{-4} \frac{z^{4/3}}{\delta^2}$$

7.- Calcolo numerico del rendimento.

I°: Salita lineare:

$$B = B_0 \cdot t/t_0$$

In questo caso, ponendo  $\beta = 1$  si ha:

$$R = e^{-\eta} = e^{-NC \int_{t_i}^{t_0} S_{eq} dt} = e^{-NC \frac{t_0}{\delta_0} \int_{\delta_i}^{\delta_0} S_{eq}(\delta) d\delta} = e^{-NC \frac{t_0}{\delta_0} \int_{\delta_i}^{\delta_0} S_{eq}(\delta) d\delta}$$

Si trova, partendo dalla [4]

$$\int_{\delta_i}^{\delta_0} S_{eq}(\delta) d\delta = \frac{4\pi z_i^2 z^2}{\alpha_0^2} \left\{ \frac{1}{\delta_i} \ln(1 + K\delta_i^2) + \sqrt{z} \cdot \pi - z \sqrt{K} \operatorname{arctg}(\delta_i \sqrt{K}) \right\}$$

con  $K = \alpha_0^2 \cdot \frac{13z^2}{1,2z^2 \cdot z^{4/3}}$

II° Salita sinusoidale senza bias:  $B = B_0 \cdot \sin \omega t$

Poichè le perdite sono confinate nel primo tratto, praticamente rettilineo, della sinusoide, si può fare il calcolo con la stessa formula del caso lineare, sostituendo al posto di  $t_0$  il valore  $t'_0 = 1/\omega$  (il vero tempo di salita sarebbe  $\pi/2\omega$ ).

III° Salita sinusoidale con bias totale (\*):  $B = B_0(1 - \cos \omega t)$

In questo caso si trova:

$$R = e^{-\eta} = e^{-NC \int_{t_i}^{t_0} S_{eq} dt} = e^{-NC \frac{1}{\omega \delta_0} \int_{\delta_i}^{\delta_0} S_{eq}(\delta) \cdot \cos \omega t dt d\delta}$$

dove  $\cos \mathcal{D} = 1 - \frac{\delta}{\delta_0}$

(\*) Nel caso di bias non totale  $B = (B_0 + B_c)(1 - \cos \omega t) - B_c$  si può senz'altro affermare che: a parità di valore massimo del campo magnetico, di frequenza e di energia di iniezione (oltre che delle altre variabili ovvie), le perdite sono sempre minori di quelle che si avrebbero con bias totale (ma non molto minori quando  $B_c/B_0$  è piccolo).-

In questo caso l'integrale  $\int_{\gamma_i}^{28} \sec \chi \, d\chi$  è stato calcolato per via numerica, fra i limiti  $\gamma_i$  e 28:

$$\int_{\gamma_i}^{28} \sec \chi \, d\chi$$

Il valore ottenuto in questo modo è abbastanza approssimato, perchè per  $\chi > 28$  ( $E > \sim 14$  MeV) le perdite diventano trascurabili.

Con i valori di R e  $B_0$  del "Progetto III°" il valore di  $\frac{1}{\delta_0}$  è:  $0,5115 \cdot 10^{-3}$ .

Nelle tabelle I, II, III sono riportati i valori di  $\eta$ , R, 1-R, e della spiralizzazione  $\sigma$  ottenuti combinando in tutti i modi possibili i seguenti valori dei parametri:

$$p = 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-5} - 5 \cdot 10^{-5} \text{ mm Hg}$$

$$E_1 = 1,5 \text{ MeV} - 2,5 \text{ MeV} \text{ (energia totale d'iniezione)}$$

Forma della salita di B :

lineare con tempo di salita  $t_0 = 0,5 - 0,25 - 0,1$  sec.

oppure sinusoidale pura con frequenza  $\nu = 20 - 30$  Hz

oppure sinusoidale con bias totale con frequenza  $\nu = 20 - 30$  Hz

$$b = 5 - 6 - 7 \text{ cm.}$$

$$a = 16,7 \text{ cm.}$$

Per il calcolo di R si è posto  $T = 300^\circ\text{K}$

Gli altri valori fissi dei parametri sono:

$$R_0 = 333,3 \text{ cm.}$$

$$n = 0,6$$

$$\Lambda = 1,191$$

$$Z = 7,7$$

$$B_0 = 10.000 \text{ gauss.}$$

## 8.- Discussione dei risultati.

I risultati ottenuti sono probabilmente alquanto pessimistici rispetto al vero, perchè nel calcolo non si è tenuto conto del termine di damping adiabatico nell'equazione differenziale, ed anche

perchè la sezione d'urto adoperata, con  $Z = 7,7$ , è leggermente superiore a quella reale.

Si deve però tener presente che le inomogeneità del campo e le oscillazioni di sincrotrone portano ad una riduzione della apertura utile della cimbella; di questo si tiene già conto in parte quando si prende una distribuzione iniziale come la  $J_0$ . Complessivamente ci si può aspettare una precisione del 20% sul valore di  $1-R$ , la frazione perduta.

TABELLA I

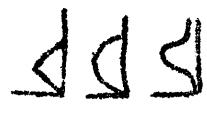
b = 5 cm.

Salita di B	to $\mu$ c	$\sigma$ cm	p = 10 <sup>-5</sup> mm HG			p = 2.10 <sup>-5</sup> mm HG			p = 5.10 <sup>-5</sup> mm HG		
			$\eta$	R	1-R	$\eta$	R	1-R	$\eta$	R	1-R
E <sub>I</sub> = 1,5 MeV	0,5 $\mu$ c	0,10	6,44	0,0016	0,9984	19,88	0	1	32,2	0	1
	0,25 $\mu$ c	0,24	3,22	0,040	0,960	6,44	0,016	0,984	16,1	0	1
	0,1 $\mu$ c	0,52	1,25	0,28	0,72	2,58	0,096	0,904	6,44	0,096	0,904
	20 Hz	6,6	0,405	0,50	0,50	0,210	0,84	0,16	0,225	0,54	0,46
	30 Hz	3,8	0,070	0,53	0,07	0,110	0,87	0,13	0,350	0,70	0,30
	20 Hz	0,35	0,813	0,44	0,56	1,63	0,20	0,80	4,06	0,017	0,983
E <sub>I</sub> = 2,5 MeV	0,5 $\mu$ c	0,52	0,510	0,53	0,47	4,05	0,31	0,69	2,71	0,067	0,933
	0,25 $\mu$ c	0,06	5,36	0,007	0,993	10,7	0	1	26,8	0	1
	0,1 $\mu$ c	0,12	3,63	0,069	0,931	5,36	0,047	0,953	13,4	0	1
	20 Hz	0,23	1,07	0,34	0,66	2,14	0,12	0,88	5,36	0,0047	0,9953
	30 Hz	5,4	0,0568	0,94	0,06	0,114	0,89	0,11	0,126	0,65	0,35
	20 Hz	0,25	0,530	0,53	0,47	1,06	0,35	0,65	2,65	0,070	0,930
30 Hz	0,38	0,38	0,35h	0,70	0,307	0,19	0,51	1,77	0,17	0,83	

v = frequenza di ripetizione  
 to = tempo di salita nel caso lineare  
 R = rendimento =  $e^{-\eta}$   
 1-R = frazione perduta  
 $\sigma$  = spiralizzazione  
 p = pressione

E<sub>I</sub> = energia totale d'iniezione  
 b<sub>I</sub> = altezza della ciambella

Salita di B



$\Delta$  = lineare  
 $\Delta$  = sinusoidale senza bias  
 $\Delta$  = sinusoidale con bias totale

X

TABELLA II

b = 6 cm

Salita di B	f <sub>0</sub> x c g Hz	σ cm	p = 10 <sup>-5</sup> mm Hg			p = 2.10 <sup>-5</sup> mm Hg			p = 5.10 <sup>-5</sup> mm Hg		
			η	R	1-R	η	R	1-R	η	R	1-R
E <sub>1</sub> = 1,5 MeV	0,15 x c	0,10	5,23	0,0054	0,9346	10,5	0	1	36,1	0	1
	0,15 x c	0,21	2,61	0,074	0,926	5,23	0,0054	0,9946	13,1	0	1
	0,1 x c	0,52	1,05	0,35	0,65	2,09	0,12	0,88	5,23	0,0054	0,9946
	20 Hz	6,6	0,0832	0,92	0,08	0,166	0,85	0,15	0,416	0,66	0,34
	30 Hz	9,8	0,0555	0,95	0,05	0,444	0,90	0,10	0,222	0,26	0,24
	20 Hz	0,35	0,782	0,46	0,54	1,56	0,21	0,79	3,91	0,20	0,18
E <sub>1</sub> = 2,5 MeV	30 Hz	0,52	0,521	0,59	0,41	1,04	0,35	0,65	2,60	0,074	0,926
	0,15 x c	0,06	4,27	0,014	0,986	8,54	0	1	24,4	0	1
	0,25 x c	0,12	2,14	0,12	0,88	4,27	0,014	0,986	10,7	0	1
	0,1 x c	0,29	0,854	0,43	0,57	1,71	0,18	0,82	4,27	0,014	0,986
	20 Hz	3,6	0,0680	0,93	0,07	0,136	0,87	0,13	0,340	0,71	0,29
	30 Hz	5,4	0,0453	0,96	0,04	0,0906	0,91	0,09	0,226	0,80	0,20
20 Hz	0,25	0,506	0,60	0,40	1,04	0,36	0,64	2,53	0,074	0,926	
30 Hz	0,38	0,338	0,71	0,29	0,676	0,51	0,49	1,69	0,19	0,21	

f = frequenza di ripetizione

t<sub>0</sub> = tempo di salita nel caso lineare

R = rendimento = e<sup>-γ</sup>

1-R = frazione perduta

σ = spiralizzazione

p = pressione

E<sub>1</sub> = energia totale d'iniezione

b = altezza della ciambella

Salita di B

= lineare

= sinusoidale senza bias

= sinusoidale con bias totale

X



TABELLA III

B = 7 cm.

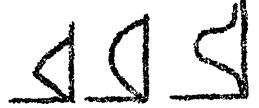
Salita di O	Co Hz	σ cm.	P = 10 <sup>-5</sup> mm Hg			P = 2 · 10 <sup>-5</sup> mm Hg			P = 5 · 10 <sup>-5</sup> mm Hg		
			η	R	1-R	η	R	1-R	η	R	1-R
E <sub>1</sub> = 1,5 MeV	0,5 Hz	0,10	1,11	0,042	0,958	8,82	0	1	22,1	0	1
	0,25 Hz	0,21	2,21	0,11	0,89	1,11	0,012	0,988	11,0	0	1
	0,1 Hz	0,52	0,882	0,11	0,59	1,26	0,12	0,88	1,11	0,012	0,988
	30 Hz	6,6	0,0703	0,93	0,07	0,441	0,87	0,13	0,351	0,70	0,30
	20 Hz	9,8	0,0468	0,95	0,05	0,0336	0,91	0,09	0,221	0,70	0,30
	20 Hz	0,35	0,607	0,54	0,16	1,114	0,30	0,70	3,035	0,048	0,952
	30 Hz	0,52	0,104	0,67	0,33	0,809	0,44	0,56	2,024	0,13	0,87
	0,5 Hz	0,06	3,55	0,029	0,971	2,09	0	1	17,7	0	1
	0,25 Hz	0,12	1,77	0,17	0,83	3,55	0,029	0,971	8,86	0	1
	0,1 Hz	0,23	0,709	0,49	0,51	1,42	0,24	0,76	3,55	0,029	0,971
E <sub>1</sub> = 2,5 MeV	20 Hz	3,6	0,0564	0,95	0,05	0,113	0,89	0,11	0,282	0,75	0,25
	30 Hz	5,4	0,0326	0,96	0,04	0,0752	0,93	0,07	0,188	0,83	0,17
	20 Hz	0,25	0,3265	0,69	0,31	0,753	0,47	0,53	1,88	0,15	0,85
	30 Hz	0,38	0,251	0,78	0,22	0,702	0,60	0,40	1,35	0,23	0,77

ν ≠ frequenza di ripetizione  
 t<sub>0</sub> = tempo di salita nel caso lineare

R = rendimento = e<sup>-μ</sup>  
 1-R = frazione perduta  
 σ = spiralizzazione  
 P = pressione

E<sub>1</sub> = energia totale d'ionizzazione  
 b<sup>1</sup> = altezza della ciambella

Salita di B



= lineare

= sinusoidale senza bias

= sinusoidale con bias tot.