

Laboratori Nazionali di Frascati

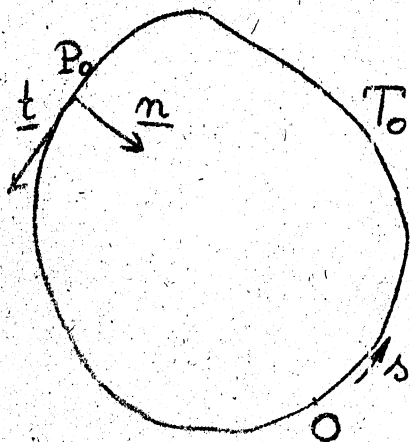
LNF-54/23 (13. 5. 54)

P. G. Sona: TEORIA LINEARE DELLA FOCALIZZAZIONE IN UN SIN-
CROTRONE A FOCHEGGIAMENTO FORTE.

P.G. Sona

TEORIA LINEARE DELLA FOCALIZZAZIONE IN UN SINCROTRONE A FOCHEGGIAMENTO FORTE

1. Si abbia una linea piana e chiusa T_0 , non intrecciata e avente la curvatura sempre dello stesso verso; supporremo che le traiettorie degli elettroni stiano tutte in un intorno del 1° ordine di questa linea; perciò interessa conoscere la distribuzione del campo magnetico in un intorno del 1° ordine della linea stessa (teoria lineare).

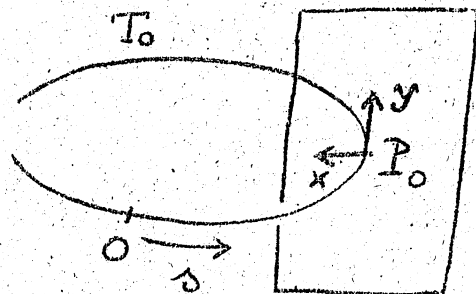


Inoltre supporremo che il campo magnetico sia fisso nel tempo e che non ci sia campo elettrico. Non faremo l'ipotesi che T_0 debba essere una possibile traiettoria, perchè vogliamo tener conto fin da ora delle possibili irregolarità del campo considerandole come infinite-sime del 1° ordine, e di quello che

accade variando di quantità infinitesime del 1° ordine l'impulso della particella. T_0 è soltanto una linea geometrica di riferimento, vicino alla quale vogliamo che si muovano gli elettroni (potrebbe essere per esempio l'asse della ciambella).

Consideriamo in ogni punto P_0 di T_0 , il piano normale a T_0 , e in questo piano un sistema di riferimento con l'origine in P_0 , l'asse x diretto come n normale principale, e l'asse y diretto come b binormale; la posizione di un punto P su questo piano è individuata dalle due coordinate x, y ; il piano stesso poi può essere individuato dalla lunghezza s dell'arco $\widehat{OP_0}$.

contato su T_0 a partire da un punto fisso O nel verso di \underline{t} (verso del moto degli elettroni). Quindi il punto P è indivi-



duato dalle tre coordinate x , y , s ; le linee $x=\text{cost.}$, $y=\text{cost.}$ sono le traiettorie ortogonali del piano normale e il sistema di coordinate così costruito è un sistema ortogonale, anche in una regione di estensione finita attorno a T_0 .

Per fare la teoria lineare considereremo x e y come infinitesimi di 1° ordine (rispetto al raggio di curvatura). Il campo magnetico \underline{B} si potrà, in ogni punto $P=(x, y, s)$, scomporre nelle componenti B_x , B_y e B_s parallele a \underline{n} , \underline{b} , \underline{t} rispettivamente, dove \underline{n} , \underline{b} , \underline{t} sono i tre versori del triedro principale nel punto $P_0=(0, 0, s)$. B_x , B_y e B_s sono funzioni di x , y , s . Faremo le seguenti convenzioni sui segni: \underline{t} ha il verso del moto degli elettroni; il verso di \underline{b} è tale che \underline{n} , \underline{b} , \underline{t} è destrorsa; il prodotto vettoriale va eseguito in modo che la terna che ne risulta sia destrorsa. Allora l'equazione del moto dell'elettrone è:

$$\gamma m_0 \underline{a} = \frac{e}{c} \underline{v} \wedge \underline{B},$$

con γm_0 = massa relativistica ($\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $v = \beta c$);
 e = valore assoluto della carica dell'elettrone;
 \underline{a} = accelerazione dell'elettrone.

Poichè manca il campo elettrico, l'impulso \underline{p} dell'elettrone ha modulo costante. Poniamo $A = \beta \gamma \frac{m_0 c^2}{e} = \frac{pc}{e}$
 A è proporzionale all'impulso p .

Se $\rho = \rho(s)$ è il raggio di curvatura di T_0 , si trova che le equazioni delle traiettorie sono, tenendo conto solo dei termini di 1° ordine e ignorando le condizioni imposte a \underline{B} dalle equazioni di Maxwell:

$$(1) \begin{cases} A x'' = -\left(\frac{A}{p} + B_y\right) - \frac{A}{s^2} x + y' B_s - \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y\right) \\ A y'' = B_x - x' B_s + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} x + \frac{\partial B_x}{\partial y} y\right), \end{cases}$$

dove

1) le funzioni incognite sono $x=x(s)$, $y=y(s)$ e $x' = \frac{dx}{ds}$, $y' = \frac{dy}{ds}$ ecc.

2) le grandezze B_x , B_y , B_s , $\frac{\partial B_x}{\partial x}$, $\frac{\partial B_x}{\partial y}$, $\frac{\partial B_y}{\partial x}$, $\frac{\partial B_y}{\partial y}$

che compaiono nelle equazioni vanno calcolate nel punto P_0 di T_0 di coordinate $0, 0, s$, cioè all'intersezione con T_0 del piano normale a T_0 condotto per $P \equiv (x, y, s)$: dette grandezze sono perciò funzioni solo di s , note quando sia nota la distribuzione del campo magnetico.

2. Il sistema di equazioni (1) è lineare nelle due incognite $x(s)$, $y(s)$; contiene una parte non omogenea, cioè i termini $-\left(\frac{A}{p} + B_y\right)$, B_x : perchè esso sia compatibile dovremo supporre che questi termini siano infinitesimi di 1° ordine come gli altri; è da notare che sono questi termini non omogenei che impediscono a T_0 di essere una traiettoria possibile: se essi infatti fossero nulli, il sistema ammetterebbe la soluzione $x = \text{cost.} = 0$, $y = \text{cost.} = 0$. La condizione $\frac{A}{p} + B_y = \text{infinitesimo di 1° ordine}$ implica anche una condizione per gli impulsi dell'elettrone, perchè A è funzione di p : il sistema (1) è compatibile solo per impulsi che differiscono da un certo punto fisso p_0 per quantità infinitesime del 1° ordine.

Con l'impostazione data le irregolarità del campo, gli errori d'allineamento, e le differenze fra gli impulsi vengono trattate simultaneamente (come è del resto logico se si pensa che gli errori di allineamento dal punto di vista teorico sono

vere e proprie irregolarità del campo, e la differenza in impulso equivale ad una irregolarità del campo, perchè variando il campo si può portare la traiettoria a coincidere con T_0).

Sia $x = \xi(s)$, $x' = \xi'(s)$, $y = \eta(s)$, $y' = \eta'(s)$ la soluzione particolare di (1) corrispondente alle condizioni iniziali $x_0 = x(0) = 0$, $x'_0 = x'(0) = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, $y'_0 = y'(0) = 0$. Siano poi:

$$\begin{cases} x = \phi_1(s) \\ x' = \phi_1'(s) \\ y = \psi_1(s) \\ y' = \psi_1'(s) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \phi_2(s) \\ x' = \phi_2'(s) \\ y = \psi_2(s) \\ y' = \psi_2'(s) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \phi_3(s) \\ x' = \phi_3'(s) \\ y = \psi_3(s) \\ y' = \psi_3'(s) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \phi_4(s) \\ x' = \phi_4'(s) \\ y = \psi_4(s) \\ y' = \psi_4'(s) \end{cases}$$

le quattro soluzioni della parte omogenea del sistema (1) corrispondenti rispettivamente alle quattro condizioni iniziali

	I	II	III	IV
$x_0 =$	1	0	0	0
$x'_0 =$	0	1	0	0
$y_0 =$	0	0	1	0
$y'_0 =$	0	0	0	1

La soluzione generale di (1) è allora:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \phi_1 + x'_0 \phi_2 + y_0 \phi_3 + y'_0 \phi_4 + \xi \\ x' &= x_0 \phi_1' + x'_0 \phi_2' + y_0 \phi_3' + y'_0 \phi_4' + \xi' \\ y &= x_0 \psi_1 + x'_0 \psi_2 + y_0 \psi_3 + y'_0 \psi_4 + \eta \\ y' &= x_0 \psi_1' + x'_0 \psi_2' + y_0 \psi_3' + y'_0 \psi_4' + \eta' \end{aligned}$$

Se i termini non omogenei sono nulli, è $\xi = 0$, $\xi' = 0$, $\eta = 0$, $\eta' = 0$.

Consideriamo la matrice $M(s)$:

$$M(s) = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' & \psi_4' \end{vmatrix}$$

Partendo dalle equazioni (1), si dimostra facilmente che $\det. M(s) = \text{cost.} = 1$ (essenzialmente perchè nel sistema (1) x'' non contiene x' e y'' non contiene y').

Cerchiamo se esiste una possibile traiettoria chiusa dopo un giro; se L è la lunghezza di T_0 , questo equivale ad imporre:

$$x(L) = x(0), \quad x'(L) = x'(0), \quad \text{ecc.}$$

Se consideriamo x, x', y, y' come componenti di un vettore \underline{v} , funzione di s , e così ξ, ξ', η, η' come componenti di un vettore \underline{q} , funzione di s , si ha:

$$\underline{v}(s) = M(s) \underline{v}_0 + \underline{q}(s), \quad \text{dove } \underline{v}_0 \text{ è il vettore } \underline{v}(0).$$

Perchè esista una ed una sola traiettoria chiusa, deve essere $\det. \|M(L) - 1\| \neq 0$, cioè la matrice $M(L)$ non deve avere l'autovalore 1. Supponiamo che questa condizione sia soddisfatta per un certo valore p_0 dell'impulso e per una assegnata distribuzione del campo magnetico. Variando l'impulso di un Δp infinitesimo di 1° ordine, la parte omogenea di (1) resta invariata al 1° ordine, e quindi la matrice $M(L)$ si può assumere invariata; è cambiata invece la parte non omogenea del sistema (1); perciò per ogni valore p dell'impulso attorno a p_0 esiste una ed una sola traiettoria chiusa, dipendente da p , se $\det. \|M(L) - 1\| \neq 0$. Questo risultato vale per una distribuzione qualunque del campo magnetico, quindi anche in presenza di inomogeneità.

Dopo K giri si ha, ponendo $\underline{v} = \underline{v}(KL)$, $D = M(L)$, $\underline{z} = \underline{q}(L)$:

$$\underline{v}_K = D^K \underline{v}_0 + [D^{K-1} \underline{z} + D^{K-2} \underline{z} + \dots + D^1 \underline{z} + \underline{z}]$$

Perchè ci sia focalizzazione, \underline{v}_K deve essere limitato al crescere di K , qualunque sia \underline{v}_0 e qualunque sia \underline{z} (perchè \underline{z} dipende dalle irregolarità del campo, non controllabili).

Quindi devono essere limitati al crescere di K separatamente i due termini $D^K \underline{v}_0$ e $(D^{K-1} \underline{z} + \dots + \underline{z})$.

Perchè il primo sia limitato gli autovalori di D devono avere tutti modulo ≤ 1 , ma dato che $\det. D=1$, tutti gli autovalori di D devono essere di modulo 1.

Il termine $(D^{K-1} \underline{z} + \dots + \underline{z})$, se $\det. \|D - 1\| \neq 0$, si può scrivere

$$D^{K-1} \underline{z} + \dots + \underline{z} = (D^K - 1) (D - 1)^{-1} \underline{z}$$

e il vettore ottenuto è limitato se sono limitati al crescere di K tutti gli autovalori di $D^K - 1$. Se λ è autovalore di D , il corrispondente autovalore di $D^K - 1$ è $\lambda^K - 1$, che è limitato se mod. $\lambda \leq 1$; deve essere quindi mod. $\lambda = 1$, e si riottiene la condizione che deriva dal 1° termine.

Se $\det. \|D - 1\| = 0$, cioè se D ammette l'autovalore 1, allora per \underline{z} coincidente con l'autovettore corrispondente il 2° termine non è limitato.

Complessivamente le condizioni trovate per la focalizzazione e perchè non si sovrappongono gli errori dovuti alle irregolarità nei successivi giri sono:

$$\text{mod. } \lambda = 1, \quad \lambda \neq 1 \text{ per tutti gli autovalori di } D.$$

Abbiamo già visto che la condizione $\lambda \neq 1$ assicura la esistenza di un'orbita chiusa per ogni valore di D .

Supponiamo che T_0 sia fatta di N archi uguali di forma lunghezza, e che anche la distribuzione del campo magnetico attorno a T_0 sia rigorosamente periodica con la stessa periodicità N . La lunghezza di un periodo sia $l = \frac{L}{N}$. La matrice associata con un periodo della macchina sia Δ , cioè $\Delta = M(1)$.

Allora

$$D = \Delta^N$$

Se ν è autovalore di Δ , e λ il corrispondente autovalore di D , è $\lambda = \nu^N$.

Si ha $\det. \|\Delta\| = 1$.

Le condizioni trovate prima per la matrice D portano di conseguenza che gli autovalori di Δ devono avere modulo 1, ed essere diversi dalle radici N^{me} dell'unità.

Cerchiamo se esiste una traiettoria con periodicità N (e quindi chiusa dopo un giro). Si deve imporre: $\underline{v}(\ell) = \underline{v}_0$ nell'equazione

$$\underline{v}(s) = M(s) \underline{v}_0 + q(s) \text{ e quindi: } 1 - M(\ell) \underline{v}_0 = q(\ell)$$

Si trova così che c'è una ed una sola orbita periodica per ogni valore dell'impulso se $\det. \|M(\ell) - 1\| \neq 0$, cioè se Δ non ha l'autovalore 1. Se Δ avesse per autovalore una radice N^{ma} dell'unità diversa da 1 accadrebbe che esiste un'orbita periodica ed una sola (che è chiusa dopo un giro); ma essendo $\det. \|D - 1\| = 0$, esistono infinite orbite chiuse dopo un giro, ottenute sovrapponendo alla prima una oscillazione con periodicità sottomultipla di N .

Perciò se la macchina ha struttura rigorosamente periodica, e se si esclude il caso $\det. \|D - 1\| = 0$, l'unica traiettoria possibile chiusa dopo un giro (una per ogni valore dell'impulso) è periodica. Questo risultato vale anche quando sono presenti inhomogeneità periodiche con la stessa periodicità N (per esempio i fringing fields).

3. Si devono ora studiare gli autovalori della matrice D ; essa ha tutti gli elementi reali, perciò gli autovalori sono reali oppure a due a due complessi e coniugati; il prodotto degli autovalori è 1. La genericità di D viene ancora diminuita se si tiene conto delle condizioni imposte al campo magnetico B dalle equazioni di Maxwell, che non abbiamo ancora considerato.

Le equazioni di Maxwell impongono le condizioni su T_0 :

$$\alpha) \frac{\partial B_s}{\partial s} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

$$\beta) \frac{\partial B_x}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial x} + \frac{B_s}{e} = 0$$

$$\gamma) \frac{\partial B_s}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial s} = 0$$

$$\delta) \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

La 2° e la 3° di queste condizioni non implicano alcuna restrizione perchè $\frac{\partial B_s}{\partial x}$ e $\frac{\partial B_s}{\partial y}$ non entrano nelle equazioni (1). Tenendo conto delle altre due condizioni, e ponendo:

$$a(s) = \frac{1}{A} B_s \quad ; \quad b(s) = \frac{1}{A} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial B_x}{\partial y} ;$$

$$c(s) = \frac{1}{A} \frac{\partial B_x}{\partial x}, \text{ e quindi } \frac{1}{A} \frac{\partial B_y}{\partial y} = -c - a' ; \quad \frac{1}{e^2(s)} = d(s) \geq 0 ;$$

$$h_1(s) = -\frac{1}{A} \left(\frac{A}{e} + B_y \right) ; \quad h_2(s) = \frac{1}{A} B_x ,$$

si può scrivere il sistema (1) nella forma:

$$(2) \quad \begin{aligned} x'' &= -(d+b)x + (c+a')y + ay' && + h_1 \\ y'' &= cx + by - ax' && + h_2 \end{aligned}$$

oppure servendosi della notazione vettoriale:

$$(3) \quad \underline{v}' = F(s) \underline{v} + \underline{h}(s), \text{ dove:}$$

$$F(s) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(d+b) & 0 & (c+a') & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & -a & b & 0 \end{vmatrix} , \quad \underline{h}(s) = \begin{vmatrix} 0 \\ h_1 \\ 0 \\ h_2 \end{vmatrix}$$

Il sistema (3) è un sistema lineare non omogeneo a coefficienti periodici (periodici almeno dopo un giro).

Abbiamo visto che la soluzione della parte omogenea è della forma:

$$(4) \quad \underline{v}(s) = M(s) \underline{v}_0, \text{ dove la matrice } M(s) \text{ dipende da } F(s);$$

anzi $M(s)$ è l'unica soluzione dell'equazione fra matrici

$$M'(s) = F(s) \cdot M(s) \quad \text{tale che} \quad M(0) = 1$$

La soluzione generale di (3) si ottiene aggiungendo al 2° membro della (4) una soluzione particolare; la soluzione particolare tale che $\underline{v}(0) = 0$ ha la forma:

$$M(s) \int_0^s M^{-1}(\sigma) \underline{h}(\sigma) d\sigma,$$

come facilmente si verifica. Si ha quindi in generale:

$$\underline{v}(s) = M(s) \underline{v}_0 + M(s) \int_0^s M^{-1}(\sigma) \underline{h}(\sigma) d\sigma.$$

Il 2° termine a destra è il vettore che abbiamo chiamato $q(s)$.

Un caso particolare notevole del sistema (3) si ha quando $\underline{h}(s) = 0$ (assenza di inomogeneità, unico valore p_0 per l'impulso dell'elettrone) e $F(s) = \text{cost.} = F$; cioè T_0 è un cerchio e la distribuzione del campo magnetico è indipendente dall'azimut. La soluzione di (3) è allora:

$$\underline{v} = e^{F \cdot s} \cdot \underline{v}_0.$$

Eseguendo il calcolo, si trova che si ha la miglior focalizzazione per una struttura della macchina identica a quella di un weak-focusing con $n=0.5$. Con i simboli qui usati il valore di n è

$$n(s) = \frac{\partial B_y}{\partial x} \frac{e}{B_y}$$

Calcoliamo la derivata della seguente espressione costruita con i termini della matrice $M(s)$:

$$\Phi_i \Phi_j' + \Psi_i \Psi_j' - \Phi_i' \Phi_j - \Psi_i' \Psi_j.$$

Essa è, sostituendo al posto delle Φ'' e Ψ'' le loro espressioni date dal sistema (2):

$$\begin{aligned} & a'(\Phi_i \Psi_j - \Psi_i \Phi_j) + a(\Phi_i \Psi_j' + \Phi_i' \Psi_j - \Psi_i \Phi_j' - \Psi_i' \Phi_j) = \\ & = \frac{d}{ds} [a(\Phi_i \Psi_j - \Psi_i \Phi_j)] \end{aligned}$$

Perciò:

$$(5) \quad C_{ij}(s) = \phi_i \phi_j + \psi_i \psi_j - \phi_i' \phi_j' - \psi_i' \psi_j' - a(s) (\phi_i \phi_j' - \psi_i \psi_j') = \cos st = C_{ij}(0)$$

dove

$$C_{ij}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -a(0) & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ a(0) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

L'equazione degli autovalori di D

$$\begin{vmatrix} \phi_1 - \lambda & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' - \lambda & \phi_3' & \phi_4' \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 - \lambda & \psi_4 \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_3' & \psi_4' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

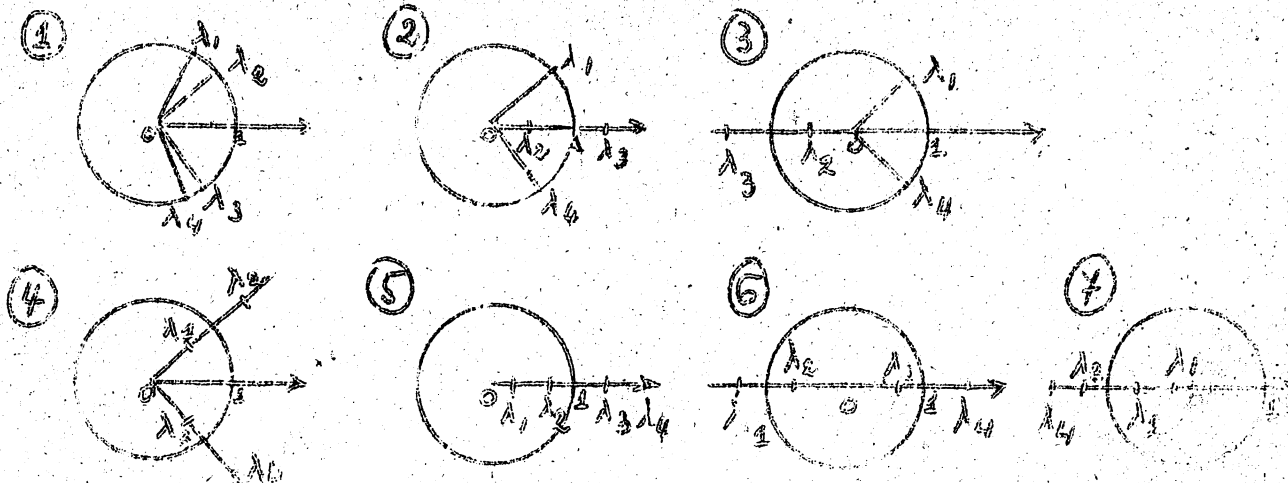
dove le ϕ, ψ, ϕ', ψ' sono calcolate per $s = \lambda$ è della forma:

$$(6) \quad \lambda^4 - \lambda^3 I_1 + \lambda^2 I_2 - \lambda I_3 + 1 = 0,$$

dove $I_1 = \phi_1 + \phi_2 + \psi_3 + \psi_4$,

$$I_3 = \begin{vmatrix} \phi_2' & \phi_3' & \phi_4' \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_2' & \psi_3' & \psi_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_3 & \phi_4 \\ \psi_1 & \psi_3 & \psi_4 \\ \psi_1' & \psi_3' & \psi_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_4' \\ \psi_1' & \psi_2' & \psi_4' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \phi_1' & \phi_2' & \phi_3' \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

Applicando due volte la relazione (5), si trova che $I_1 = I_3$, cioè l'equazione (6) è reciproca. Tenendo conto che essa è a coefficienti reali, le possibili disposizioni delle sue radici nel campo complesso, quando le radici sono distinte, sono:



Perchè ci sia focalizzazione le radici devono essere messe come in (1). Cambiando con continuità la struttura della macchina, cambia con continuità la disposizione delle radici, e dalla configurazione di tipo (1) si può passare a quelle di tipo (2), (3), (4) nel caso generico. Perchè questo accada si deve passare per una configurazione in cui si ha una radice doppia

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, oppure $\lambda_1 = \lambda_4 = -1$, e le altre due radici complesse e coniugate; oppure per la configurazione $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_1^* = \lambda_2^*$.

In ognuno di questi casi c'è almeno una radice doppia. Se i parametri che definiscono la struttura della macchina sono tali che l'equazione (6) dà uno dei casi ora detti, una piccola variazione dei parametri stessi può portare (non è detto che lo faccia sempre) all'instabilità. Si dice che la macchina lavora su una risonanza. Quando la macchina non lavora su una risonanza, qualsunque tipo di errore nella struttura, purchè sufficientemente piccolo, non porta mai all'instabilità.

Nello spazio dei parametri che definiscono la struttura della macchina (per es. i coefficienti di Fourier delle funzioni note di s che entrano nella $F(s)$), si hanno zone di stabilità e zone di instabilità; sarebbe interessante studiare la struttura topologica di tali zone; per esempio sarebbe interessante sapere se la zona di stabilità è connessa, cioè se si possono unire due punti qualunque della zona di stabilità con una linea che non esca mai dalla zona stessa (probabilmente non è possibile in generale, ma non è cosa certa). E' da notare poi che non è da escludersi a priori il caso che lavorando su una risonanza, qualunque piccola variazione dei parametri porti sempre ad una configurazione stabile; si tratterebbe cioè di una risonanza apparente.

4. In questo numero considereremo una macchina senza perturbazioni (macchina ideale). Per una macchina a gradiente alternato, il sistema (1) diventa:

$$(7) \quad \begin{cases} x'' = - \left(\frac{1}{\rho} + \frac{By}{A} \right) - \frac{1}{\rho^2} x - \frac{1}{A} \frac{\partial By}{\partial x} x \\ y'' = \frac{1}{A} \frac{\partial By}{\partial x} y \end{cases}$$

Le oscillazioni radiali e verticali sono separate. Non essendo irregolarità, per il valore p_0 dell'impulso deve essere identicamente $\frac{1}{\rho} + \frac{By}{A} = 0$; per un elettrone di impulso $p = p_0 + \delta p$, ponendo $n(s) = \frac{\partial By}{\partial x} \cdot \frac{\rho}{By}$, il sistema (7) diventa:

$$(8) \quad \begin{cases} x'' + \frac{1-n}{\rho^2} x = - \frac{\delta p}{p_0} \cdot \frac{1}{\rho} \end{cases} \quad \text{oscillazioni radiali}$$

$$(9) \quad \begin{cases} y'' + \frac{n}{\rho^2} y = 0 \end{cases} \quad \text{oscillazioni verticali}$$

La matrice $M(s)$ prende la forma:

$$M(s) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} \end{vmatrix}$$

Studieremo le oscillazioni radiali, indicando ora con $Q(s)$ la matrice a due righe e due colonne:

$$Q(s) = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{vmatrix} \quad \text{Si ha } \det \| Q \| = 1.$$

Lo studio dell'equazione (9) è analogo, anzi è più semplice perchè manca la parte non omogenea.

I termini della matrice $Q(s)$ si ricavano immediatamente dalle soluzioni della parte omogenea dell'equazione (8) corri-

spondenti alle condizioni iniziali

	I	II
x_0	1	0
x'_0	0	1

L'equazione (8) senza il termine $\frac{1}{p}$ va integrata una volta per tutte, e si costruisce così la matrice $Q(s)$.

Se ora $\underline{v}(s)$ è il vettore di componenti x, x' , e $\underline{h}(s)$ il vettore di componenti $0, -\frac{\delta p}{p_0} \cdot \frac{1}{p}$, la soluzione di (8) è:

$$\underline{v}(s) = Q(s) \underline{v}_0 + Q(s) \int_0^s Q^{-1}(\sigma) \underline{h}(\sigma) d\sigma.$$

Si ha facilmente:

$$Q^{-1} = \begin{vmatrix} Q_{22} & -Q_{12} \\ -Q_{21} & Q_{11} \end{vmatrix}$$

Per trovare l'orbita periodica chiusa si deve porre $\underline{v}(l) = \underline{v}_0$; allora:

$$\begin{aligned} [1 - Q(l)] \underline{v}_0 &= Q(l) \cdot \int_0^l Q^{-1}(\sigma) \cdot \underline{h}(\sigma) d\sigma \\ \underline{v}_0 &= [1 - Q(l)]^{-1} \cdot Q(l) \cdot \int_0^l Q^{-1}(\sigma) \cdot \underline{h}(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Da questa si ha la soluzione:

$$\bar{\underline{v}}(s) = Q(s) \cdot [1 - Q(l)]^{-1} \cdot Q(l) \cdot \int_0^l Q^{-1}(\sigma) \cdot \underline{h}(\sigma) d\sigma + Q(s) \int_0^s Q^{-1}(\sigma) \cdot \underline{h}(\sigma) d\sigma.$$

Essendo $\underline{h}(s) = \underline{h}(s) = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{\delta p}{p_0} \cdot \frac{1}{p} \end{vmatrix}$, si trova che $\bar{\underline{v}}(s)$ è proporzionale a δp , cosa che si vede anche direttamente dalla (8). La prima componente di $\bar{\underline{v}}(s)$ dà la forma dell'orbita periodica chiusa. Come si vede, la formula generale è piuttosto complicata. Nel caso pratico può essere conveniente scrivere in ogni settore della macchina la soluzione più generale della

equazione (8) con due costanti arbitrarie, e poi determinare le costanti stesse scrivendo le condizioni di raccordo fra i successivi settori e le condizioni di periodicità. Il valore $\langle \bar{x}(s) \rangle$ dedotto dalla forma dell'orbita chiusa è proporzionale a $\frac{\delta p}{p_0}$ secondo un coefficiente che dipende dalla struttura della macchina. Per $\bar{x}(s)$ vale la formula

$$\bar{x}(s) = \alpha(s) \cdot \frac{\delta p}{p_0},$$
 con $\alpha(s)$ funzione solo di s ; cioè dimezzando δp , dimezza il valore di $\bar{x}(s)$ per ogni s ; la forma dell'orbita chiusa cambia solo per un cambiamento della scala di $\bar{x}(s)$.

La traiettoria, più generale, si ottiene sovrapponendo all'orbita chiusa la soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$(10) \quad x'' + \frac{1-h}{\rho^2} x = 0 \quad (\text{equazione delle oscillazioni di betatrone}).$$

Si può vedere che il valore di $\langle x(s) \rangle$ ottenuto con questa sovrapposizione è uguale a $\langle \bar{x}(s) \rangle$, perchè il valor medio della soluzione dell'equazione (10) è nullo.

Siano infatti ν e ν^* gli autovalori della matrice $Q(1)$, e \underline{u} , \underline{u}^* i corrispondenti autovettori; la soluzione generale di (10) si può mettere nella forma (\underline{v} = vettore di componenti x , x'):

$$(11) \quad \underline{v}(s) = K Q(s) \underline{u} + K^* Q(s) \underline{u}^*$$

dove $\underline{v}(0) = K \underline{u} + K^* \underline{u}^*$ rappresenta le condizioni iniziali.

Dopo un numero P di periodi si ha:

$$\underline{v}(P \cdot \ell) = K \mathcal{D}^P \underline{u} + K^* \nu^{*P} \underline{u}^*$$

Se si sceglie P abbastanza grande, si può fare in modo che ν^P si discosti infinitamente poco da -1 , e allora:

$$\underline{v}(P \cdot \ell) = -K \underline{u} - K^* \underline{u}^* = -\underline{v}(0)$$

A partire da questo valore di $s = P \cdot \ell$, la soluzione della (10) è quella stessa trovata nell'intervallo $0 < s < P \cdot \ell$, col segno cambiato. Quindi su $2P$ periodi di oscillazione il valor medio di $x(s)$, soluzione della (10), è zero.

Cerchiamo la forma dell'involuppo delle oscillazioni di betatrone date dalla (10).

Per far questo, poniamo $\lambda =$ autovalore di $Q(\ell)$ corrispondente all'autovettore $\underline{u} = e^{i\phi}$ (ϕ è determinato a meno di un multiplo di 2π).

Evidentemente si ha, a causa della struttura periodica della macchina:

$$Q(s+\ell) = Q(s) \cdot Q(\ell)$$

Ponendo

(12) $\underline{w}(s) = e^{-i\phi \frac{s}{\ell}} Q(s) \cdot \underline{u}$ si trova che $\underline{w}(s)$ è periodico con periodo ℓ ; infatti

$$\begin{aligned} \underline{w}(s+\ell) &= e^{-i\phi \frac{s+\ell}{\ell}} \cdot e^{-i\phi} \cdot Q(s) \cdot Q(\ell) \cdot \underline{u} = \\ &= e^{-i\phi \frac{s}{\ell}} \cdot e^{-i\phi} \cdot Q(s) \cdot e^{i\phi} \underline{u} = \underline{w}(s) \end{aligned}$$

Si ha quindi dalla (11) e dalla (12)

$$\underline{x}(s) = K \cdot e^{i\phi \frac{s}{\ell}} \underline{w}(s) + K^* \cdot e^{-i\phi \frac{s}{\ell}} \underline{w}^*(s)$$

Prendendo solo la prima componente e separando la parte reale dal coefficiente dell'immaginario si ha:

$$\begin{aligned} x(s) &= 2 \operatorname{Re} \left\{ (K_1 + i K_2) \left(\cos \phi \frac{s}{\ell} + i \sin \phi \frac{s}{\ell} \right) (w_{11} + i w_{12}) \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \left[(K_2 w_{12} - K_1 w_{11}) + i (K_2 w_{11} + K_1 w_{12}) \right] \left[\cos \phi \frac{s}{\ell} + i \sin \phi \frac{s}{\ell} \right] \right\} = \\ &= 2 \left\{ (K_2 w_{12} - K_1 w_{11}) \cos \phi \frac{s}{\ell} - (K_2 w_{11} + K_1 w_{12}) \sin \phi \frac{s}{\ell} \right\} \end{aligned}$$

Per trovare la forma dell'involuppo $X(s)$ si deve prendere il massimo di $x(s+ml)$ al variare di $m=0, 1, 2, 3 \dots \infty$.

Nel caso generico in cui $\phi/2\pi$ è un numero irrazionale si ha:

$$X(s) = 2 \sqrt{(K_2 w_{12} - K_1 w_{11})^2 + (K_2 w_{11} + K_1 w_{12})^2} = 2 \sqrt{K_2^2 + K_1^2} \cdot \sqrt{w_{12}^2 + w_{11}^2}$$

I valori di K_2 e K_1 dipendono dalle condizioni iniziali. È chiaro che la forma dell'involuppo è determinata a meno di un fattore di proporzionalità arbitrario; interessa quindi solo il valore di

$$(13) \quad \frac{X(s)}{X(0)} = \frac{\sqrt{w_{12}^2(s) + w_{11}^2(s)}}{\sqrt{w_{12}^2(0) + w_{11}^2(0)}} = \frac{|w_1(s)|}{|w_1(0)|}$$

Questa formula mostra che l'involuppo è periodico con periodo l .

Sia $\Delta = Q(l)$; gli autovettori di Δ sono:

$$u = \begin{pmatrix} -\Delta_{12} \\ \Delta_{11} - \nu \end{pmatrix} \quad u^* = \begin{pmatrix} -\Delta_{12} \\ \Delta_{11} - \nu^* \end{pmatrix}$$

Dalla (12) si ha:

$$|w_1(s)| = |Q_{11}(s) u_1 + Q_{12}(s) u_2| = |-Q_{11}(s) \Delta_{12} + Q_{12}(s) (\Delta_{11} - \nu)|$$

$$|w_1(0)| = |\Delta_{12}| \quad \text{perchè } Q(0) = 1$$

Perciò:

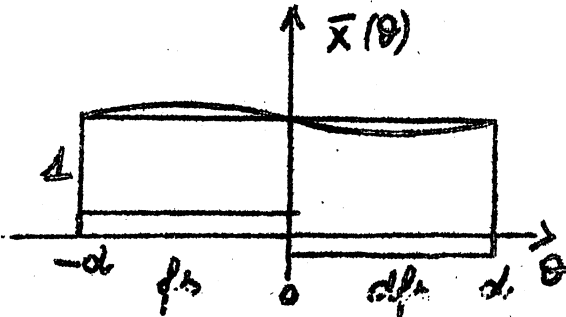
$$(14) \quad \frac{X(s)}{X(0)} = |Q_{12}(s) \frac{\Delta_{11} - \nu}{\Delta_{12}} - Q_{11}(s)| =$$

Si verifica facilmente che $\frac{X(l)}{X(0)} = 1$; infatti:

$$\frac{X(l)}{X(0)} = \left| \Delta_{12} \cdot \frac{\Delta_{11} - \nu}{\Delta_{12}} - \Delta_{11} \right| = |1 - \nu| = 1$$

La formula (14) dà esplicitamente la forma dell'involuppo.

5. Come esempio consideriamo un sincrotrone circolare a gradiente alternato senza sezioni diritte, con i settori di ugual lunghezza, con $|n| \gg 1$, e nelle condizioni di massima focalizzazione, cioè $|n_1| = |n_2| = \frac{N^2}{2}$, se N è il numero dei periodi = 2 volte il numero dei settori.



Se per $s=0$ è $\bar{x}=1$, il valore massimo di \bar{x} è 1.33 a metà del settore fs.; il valore minimo è 0.71 a metà del settore dfs.; lo spostamento del raggio istantaneo è 0.21.

La figura rappresenta un periodo della macchina; prendendo come origine degli azimut θ il punto di raccordo fra i due settori, nel settore foccheggiante è $-\alpha < \theta < 0$; nel settore successivo è $0 < \theta < \alpha$, con $\alpha = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}$.

La soluzione generale dell'equazione (8) è allora, trascurando 1 di fronte a $|n|$, e ponendo $\psi = \sqrt{|n|} \theta$

$$\begin{cases} x = A \cos \psi + B \sin \psi & \rho \frac{\delta p}{p_0} \frac{1}{|n|} \text{ per } -\alpha < \theta < 0 \\ x = C \cos \psi + D \sin \psi & \rho \frac{\delta p}{p_0} \frac{1}{|n|} \text{ per } 0 < \theta < \alpha \end{cases}$$

Imponendo le condizioni di raccordo per $\theta=0$ e a quelle di periodicità, e tenendo conto che $\alpha = \frac{\pi}{2}$, si trova che l'orbita chiusa ha la forma indicata in figura, con un massimo a metà del settore dfs.; la differenza fra il massimo ed il valor minimo di x è circa $\frac{1}{3}$ dello stesso valor medio; il valore medio è poi circa 5 volte la distanza fra l'asse della ciam-bella e il raggio di equilibrio di un settore per l'elettrone con impulso $p_0 + \delta p$. E' chiaro che in questo caso, aggiungendo una sezione diritta al centro del settore fs. o dfs., la traiettoria chiusa è la stessa con l'aggiunta di un tratto parallelo alla retta $x=0$ in corrispondenza della sezione diritta.

Prima di calcolare la forma coll'involuppo delle oscillazioni di betatrone, osserviamo che nelle ipotesi fatte, se N è multiplo di 4 , la macchina lavora esattamente su una risonanza (perchè se $\nu = e \cdot \phi$, è $\cos \phi = \cos \sqrt{N} \alpha \cos h \sqrt{N} \alpha = 0$ essendo $\sqrt{N} \alpha = \frac{\pi}{2}$; perciò $\nu = 1$, e $\phi = \frac{\pi}{2}$). In ogni caso, il calcolo indicato dalla (14) è ancora eseguibile. Si trova allora un grafico della forma:



Il valore del minimo nel settore dfs è circa 0.63; il valore del massimo nel settore fs è circa 1.38.

6. Le considerazioni svolte interessano in modo particolare il problema dell'iniezione. Se consideriamo una particella iniettata esattamente nell'orbita periodica chiusa, al crescere adiabatico del campo B varia linearmente il $\delta p = p - p_0$ col tempo (perchè cresce p_0), e la particella spiralizza verso l'asse della ciambella descrivendo orbite chiuse (nel senso che variano adiabaticamente) che si scostano sempre meno dall'asse; quando il δp cambia segno l'orbita chiusa passa dall'altra parte dell'asse della ciambella. La spiralizzazione, cioè la contrazione dell'orbita chiusa, è funzione dell'azimut. Per calcolarla, supponiamo di aver messo l'equazione dell'orbita chiusa sotto la forma

$$\frac{\bar{r}(s)}{r_0} = \alpha(s) \frac{\int p}{p_0} \quad (r_0 = \text{raggio delle sezioni curve; } \alpha(s) \text{ fattore di forma).}$$

($\delta p = p - p_0$, p è costante, p_0 è variabile).

Da questa si ha, tenendo conto che $\frac{\int p}{p_0}$ e $\frac{\bar{r}(s)}{r_0}$ sono piccoli:

$$p_0 = \left[1 - \frac{\bar{r}(s)}{r_0 \alpha(s)} \right] p$$

$$\frac{dp_0}{dt} = - \frac{F}{v_0 \cdot \alpha(s)} \cdot \frac{d\bar{x}(s)}{dt}$$

La spiralizzazione $\bar{C}(s)$ è

$$\bar{C}(s) = -T \cdot \frac{d\bar{x}(s)}{dt}, \text{ dove } T \text{ è il tempo impiegato}$$

dalla particella a descrivere un giro (all'iniezione).

Allora

$$\begin{aligned} \bar{C}(s) &= +T \frac{v_0 \cdot d(s)}{p} \frac{dp_0}{dt} = T \frac{v_0 \cdot \alpha(s)}{p_0} \frac{dp_0}{dt} = \\ &= T \cdot v_0 \cdot \alpha(s) \frac{dB_0}{dt} \cdot \frac{1}{B_0} \end{aligned}$$

dove B_0 è il valore del campo sull'asse della ciambella.

Mediando su s si può calcolare la spiralizzazione media; quella che interessa è invece la spiralizzazione all'azimut dell'iniettore.

È chiaro che conviene mettere l'iniettore in una posizione dove $\alpha(s)$ ha un massimo, cioè dove è massima la distanza fra l'orbita chiusa e l'asse della ciambella. Nell'esempio del numero (5) l'iniettore andrebbe messo a metà di un settore fs . radialmente. Tale posizione è conveniente anche per le oscillazioni di betatrone intorno all'orbita chiusa; infatti il loro inviluppo ha un massimo in quella posizione. Conviene studiare una struttura della macchina in cui i due massimi (quello dell'orbita chiusa e quello dell'inviluppo) siano vicini, anche quando ci sono le sezioni diritte. Per questo che si è detto al numero (5), e disponendo l'iniettore come sopra, la particella che viene iniettata nell'orbita chiusa ha il suo raggio istantaneo di equilibrio nel settore fs . radialmente ad una distanza dall'asse della ciambella che è meno di $\frac{1}{6}$ della distanza fra l'iniettore e lo stesso asse.

Per un sincrotrone senza sezioni diritte, come quello considerato al n° (5), il valore di $\alpha(s)$ all'iniettore è $\sim \frac{6,4}{|n|}$. Dalla formula che dà la spiralizzazione, nelle seguenti ipotesi: $|n| = 20$; raggio = 333 cm; energia d'iniezione 2 MeV totale; energia massima 1000 MeV; eccitazione sinu-

soidale senza bias a 30 Hertz, si ottiene una spiralizzazione all'azimut dell'iniettore di circa 6 mm, che è più che sufficiente perchè gli elettroni iniettati evitino l'iniettore nei giri successivi. Se si dispone l'iniettore a 3 cm dall'asse della ciambella l'intervallo utile del tempo d'iniezione è così $\sim \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ mm}} \sim 5$ giri $\sim \frac{1}{3} \mu\text{sec.}$; questo vale finchè l'iniettore emette elettroni con energia costante; se l'iniettore potesse dare un impulso in cui gli elettroni emessi hanno energia crescente col tempo, in modo che l'orbita periodica chiusa, funzione dell'energia di iniezione, passi sempre per la bocca dell'iniettore mentre il campo magnetico cresce, si può circa raddoppiare la durata dell'iniezione e il rendimento; infatti le particelle emesse per prime dall'iniettore in 10 giri spiralizzano di ~ 6 cm, cioè passano dall'altra parte dell'asse della ciambella, ad una distanza di 3 cm da esso: supponiamo che la zona utile della ciambella sia larga 6 cm in tutto. Con un impulso di questa forma, della durata di $\sim \frac{2}{3} \mu\text{sec.}$, l'energia degli elettroni emessi per ultimi dovrebbe essere circa il 6% più grande di quella degli elettroni iniettati per primi; infatti

$$\frac{\sqrt{x_{\text{max}}}}{r_0} \approx \alpha_{\text{max}} \frac{J_p}{P_0} \approx \frac{6,4}{|n|} \frac{J_p}{P_0} = \frac{6,4}{20} \frac{J_p}{P_0}$$

Ma $\sqrt{x_{\text{max}}} = 6 \text{ cm}$ quindi

$$\frac{J_p}{P_0} = \frac{20}{6,4} \frac{6 \text{ cm}}{333 \text{ cm}} \approx 6\%$$

Il 6% è il valore dello spread nell'impulso permesso da un'apertura radiale utile di 6 cm (senza tener conto delle oscillazioni radiali di betatrone intorno alle orbite chiuse).

Roma, 13 maggio 1954