

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF-54/22 (2. 5. 54)

C. Canarutto: PRECISIONI E SENSIBILITA' RICHIESTE NELLA MISURA
DI n IN CORRENTE CONTINUA

PRECISIONI E SENSIBILITA' RICHIESTE NELLE MISURE DI "n" IN c.c.

0-1 Generalità.

E' noto che è per definizione

$$(01-1) \quad n = - \frac{r}{B} \frac{dB}{dr} = - \frac{r}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dr} \right) = n_r + n_t$$

ove si è posto $n_r = - \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r}$ e $n_t = - \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial t} \frac{dt}{dr}$

Nelle presenti note ci occuperemo solo della misura del primo termine della (01-1), che ripetiamo:

$$n_r = - \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r} \quad (01-2)$$

0-2

Si ha per la definizione stessa di n_r (01-2) che essa è una quantità misurata a tempo costante o - se meglio si vuole (essendo $b(t)$ una funzione ad un solo valore) - a campo costante.

1-1 Precisioni richieste

Da considerazioni teoriche e dall'esperienza compiuta su macchine simili si ha che è necessario poter conoscere n_r con la precisione dell' 1+2%.

L'errore percentuale $\frac{\delta n_r}{n_r}$ è dato da:

$$\frac{\delta n_r}{n_r} = \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta B}{B} + \frac{\delta \Delta B}{\Delta B} + \frac{\delta \Delta r}{\Delta r} \quad (11-1)$$

ossia è la somma degli errori percentuali compiuti nelle misure di r , Δr , B , ΔB .

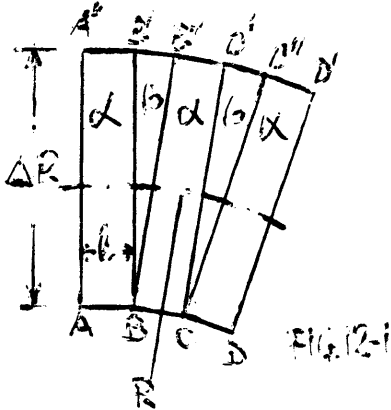
1-2 Precisione in r .

Per ottenere la precisione richiesta in r (dal 2 al 5‰) occorre che la curvatura azimutale del campo magnetico sia in ogni punto nota con la precisione indicata, che corrisponde per una pre-

cisione del $2^{\circ}/_{00}$ a circa 6 mm su 3 m.

Osserviamo a questo proposito che il campo magnetico del sincrotrone è realizzato con una disposizione di lamierini non uniformemente circolare.

Si pensa infatti che la struttura azimutale sarà costituita come indicato in fig. 12-1, ossia con due gruppi di elementi α e β .



Gli α sono costituiti da parallelepipedi composti di lamierini tutti lunghi ΔR disposti a contatto l'uno dell'altro; quelle β invece sono costituite a gradinate da lamierini di diversa lunghezza. Considerando le poligonalì ABDD ed A'B'B'C'C'D' come inscritte nelle circonferenze $\bar{R} - \frac{\Delta R}{2}$ e $\bar{R} + \frac{\Delta R}{2}$ (con R raggio dell'orbita stabile). Il punto del segmento AB a massima distanza dall'arco ideale di circonferenza AB di raggio $R - \Delta R$ è evidentemente il punto medio (vedi Fig.12-2). Si ha per $MN = x$

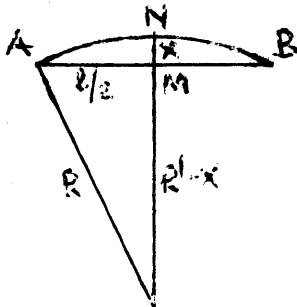


FIG. 12-2

$$x(R-x) = \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$x^2 - R'x + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0 \quad (12-1)$$

$$x = \frac{R' - \sqrt{R'^2 - l^2}}{2}$$

quantità che diminuisce al crescere di R' .

Osservando ancora che se pur fosse x uguale in corrispondenza per es. di AB e di A'B' la quantità $x/R' = \int r/r$ cala al crescere di R' si ha che basterà assicurare che x sia minore del limite assegnato di 6 mm in corrispondenza del bordo interno AB per essere certi che la condizione è assicurata per ogni raggio.

Dalla (12-1) si ricava, per $x = 6\text{mm}$:

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 3.000 \text{ mm}^2$$

$$\frac{l}{2} = 100 \cdot \sqrt{1,8} = 130 \text{ mm}$$

Ogni pacchetto di lamierini dovrà quindi essere inferiore in larghezza a 260 mm affinché - almeno in ogni zona α - il raggio del campo magnetico possa reputarsi noto con la precisione richiesta.

Nelle zone β i lamierini sono ancora tra loro paralleli, ma tagliati a gradinata secondo la fig. 12-3. Se il punto P è disposto sulla circonferenza di raggio $R + \Delta R/2$ varrà per i segmenti PB' e PB'' la limitazione di essere entrambi minori di 260 mm.

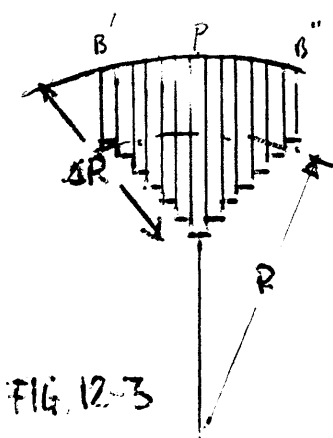


Fig. 12-3

Le condizioni ora trovate non sono molto difficili da realizzare. E' in ogni caso evidente che è necessario avere una circonferenza di riferimento tracciata con una precisione sul raggio non inferiore al mm. per avere il margine sufficiente per contenere nella imprecisione totale ammessa di 6 mm., la imprecisione del coordinatometro (inferiore al 1/2 mm.) e quelle di impacchettamento dei lamierini. Per queste ultime am-

mettendosi in definitiva una x non superiore ai 4 mm., la massima ammissibile si riduce a 220 mm.

1-3 Precisione in ΔR .

Per osservare la precisione richiesta di $\frac{\Delta z}{z} < 0,25 - 0,50 \%$ supposto $\Delta z = 2$ cm., dovrà essere $\Delta R \leq \frac{0,5}{100} \text{ mm} = \frac{\Delta z}{400} \text{ mm}$ (nel caso più restrittivo. Infatti consideriamo i due casi seguenti: a) misura con una bobinetta che si sposta tra due posizioni fisse; b) misura con due bobinette e metodo a pante.

Caso a) : Occorre disporre di un coordinatometro costruito con la precisione negli spostamenti radiali migliore di 5/100 mm.

Caso b) : Occorre conoscere con una precisione migliore dei 5/100 mm. le posizioni relative degli assi magnetici delle due bobinette.

1-31

Consideriamo ora l'errore dovuto al fatto che non è materialmente possibile misurare i valori di B in un punto, ma è necessario mediare i valori di B su una superficie non infinitesima (fig.13-1).

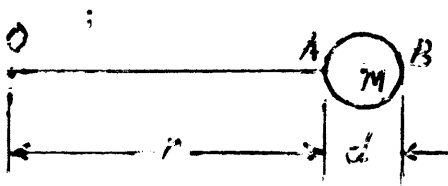


fig 13-1

Si supponga di disporre di una bobinetta di diametro d e con il suo centro M disposto alla distanza r dal centro O del campo magnetico. Siano A e B gli estremi del diametro disposto nella direzione OM .

Si può allora, esprimendo in termini finiti la (2), scrivere con buona approssimazione:

$$\begin{cases} \frac{B_M - B_A}{B_M + B_A} = n \frac{\frac{d}{2}}{2 - \frac{d}{4}} \\ \frac{B_B - B_M}{B_M + B_B} = n \frac{\frac{d}{2}}{2 + \frac{d}{4}} \end{cases} \quad (13-1)$$

Da cui risolvendo:

$$\begin{cases} B_M - B_A = n \frac{\frac{d}{2}}{2 - \frac{d}{4}} \cdot \frac{B_M + B_A}{2} \\ B_B - B_M = n \frac{\frac{d}{2}}{2 + \frac{d}{4}} \cdot \frac{B_M + B_B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_A \left(\frac{1}{2} n \frac{\frac{d}{2}}{2 - \frac{d}{4}} + 1 \right) = B_M \left(-\frac{1}{2} n \frac{\frac{d}{2}}{2 - \frac{d}{4}} + 1 \right) \\ B_B \left(1 - \frac{1}{2} n \frac{\frac{d}{2}}{2 + \frac{d}{4}} \right) = B_M \left(1 + \frac{1}{2} n \frac{\frac{d}{2}}{2 + \frac{d}{4}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_A = B_M \frac{2(2 - \frac{d}{4}) - n \frac{d}{2}}{2(2 - \frac{d}{4}) + n \frac{d}{2}} \\ B_B = B_M \frac{2(2 + \frac{d}{4}) + n \frac{d}{2}}{2(2 + \frac{d}{4}) - n \frac{d}{2}} \end{cases}$$

e quindi il valor medio tra i valori estremi B_A e B_B vale:

$$\frac{B_A + B_B}{2} = \frac{1}{2} B_M \left\{ \frac{22 - \frac{d}{2}(n+1)}{22 + \frac{d}{2}(n-1)} + \frac{22 + \frac{d}{2}(n+1)}{22 - \frac{d}{2}(n-1)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} B_M \left\{ \frac{4r^2 - 2d(n-1) - 2d(n+1)}{4r^2 - d^2/4(n-1)^2} + \frac{d^2/4(n^2-1) + 4r^2 + 2d(n-1) + 2d(n+1) + d^2/4(n^2-1)}{4r^2 - d^2/4(n-1)^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} B_M \frac{8r^2 + d^2/2(n^2-1)}{4r^2 - d^2/4(n-1)^2} = K B_M \quad \text{con} \quad K = \frac{4r^2 + d^2/4(n^2-1)}{4r^2 - d^2/4(n-1)^2} = \frac{1 + \frac{1}{36} \frac{d^2}{r^2} (n^2-1)}{1 - \frac{1}{36} \frac{d^2}{r^2} (n-1)^2}$$

(13-2)

Consideriamo i due casi seguenti, e calcoliamone il coefficiente K

- a) $r = 3 \text{ m} ; d = 1 \text{ cm} ; n = 0,6$
- b) $r = 3 \text{ m} ; d = 1 \text{ cm} ; n = 20$

Caso a):

$$K = \frac{1 + \frac{1}{36} \frac{1}{9 \cdot 10^4} (0,36 - 1)}{1 - \frac{1}{36} \frac{1}{9 \cdot 10^4} (0,4)^2} = \frac{1 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 0,64 \cdot 10^4}{1 - \frac{1}{6} \frac{0,16}{9 \cdot 10^4}}$$

$$= \frac{1 + 3,6 \cdot 10^{-7}}{1 - 10^{-7}}$$

per cui si può assumere con buona approssimazione che il valore mediato misurato che è dato da $\frac{1}{S} \int_S r^2 dS$ con S superficie della bobina differisce di meno di una unità su 10^6 da quello voluto B_M .

Caso b):

$$K = \frac{1 + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^4} \cdot 400}{1 - \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10^4} \cdot 360} = \frac{1 + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{1 + \frac{3}{10^4}}{1 - \frac{2,5}{10^4}}$$

con che si ha che B_M differisce dal valore mediato di circa $\frac{5}{10}$ unità su 10^4 . Questa è una approssimazione appena sufficiente, per cui in caso di strong focusing converrà tendere ad usare bobine di diametro minore.

13-2

E' in questa sede utile vedere di quanto ci si discosta nella misura di n misurando il ΔB in due punti distanti tra loro di una quantità finita Δz , anzichè in due punti infinitamente vicini tra loro.

Ricordiamo che è valevole la seguente relazione:

$$B_2 = B_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^n \quad 13-1$$

dalla quale si ricava derivando la (01-1) e che sviluppata in serie di Taylor (arrestando lo sviluppo al terzo termine) dà:

$$B_2 = B_1 - \frac{n B_1}{r_1} \Delta z + n(n+1) B_1 \frac{(\Delta z)^2}{2 r_1^2}$$

ove

$$\Delta z = r_2 - r_1$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} n &= \frac{r_1}{B_1 \Delta z} \left[-\Delta B + n(n+1) \frac{B_1}{2 r_1^2} (\Delta z)^2 \right] \\ &= - \frac{r_1 \Delta B}{B_1 \Delta z} + n(n+1) \frac{\Delta z}{2 r_1} \quad (13-2) \end{aligned}$$

La quantità misurata è il primo termine del secondo membro della (13-2). Perciò il valore di n differisce da quello misurato di una quantità dell'ordine di:

$$n(n+1) \frac{\Delta z}{2 r_1} \quad (13-3)$$

Se si vuole che questo errore sia inferiore all'1% di n dovrà essere:

$$(n+1) \frac{\Delta z}{2 r_1} \leq \frac{1}{100}$$

Consideriamo i due casi:

- a) $r = 3 \text{ m}$; $n = 0,6$
 b) $r = 3 \text{ m}$; $n = 20$

Caso a):

risulta:

$$\Delta r \leq \frac{1}{100} \cdot \frac{6}{1.6} = \frac{3.7}{100} \text{ m} = 3.7 \text{ cm}$$

Caso b):

risulta:

$$\Delta r \leq \frac{1}{100} \frac{6}{21} = 3 \text{ mm}$$

Da questi esempi risulta che nel caso a) (weak focusing) è pensabile poter usare metodi a ponte con due bobinette - come più oltre verrà indicato - ottenendo una precisione su n dell'ordine del 2% (1% dovuto all'imprecisione del metodo + 1% dovuto all'imprecisione della misura), mentre nelle strong focusing, due bobinette con i loro assi distanti 3,5 cm determinerebbero una imprecisione dovuta al metodo di circa il 10%.

Perciò, se nello strong focusing si vuol mantenere la stessa precisione nel metodo, quale quella del weak focusing, è necessario spostare la bobinetta di una quantità non superiore ai 3 mm.

1-40 Precisione in dB/B

I metodi per misurare questa quantità sono essenzialmente, come precedentemente accennato, due:

- a) metodo a ponte che usufruisce di un circuito come quello di fig. 14-1.
- b) spostamento di una bobinetta nel campo magnetico.

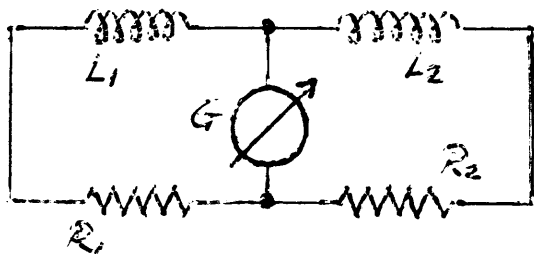


Fig 14-1

1-41

Occorre subito, però, richiamare l'attenzione sul fatto che in entrambi i casi la misura di questa quantità viene fatta attraverso una misura di flussi, per cui è di primaria importanza conoscere con buona precisione il prodotto area-spire massimo di ciascuna bobina, nonché la direzione secondo la quale questo prodotto è massimo.

1-42

La precisione richiesta nella taratura del prodotto area spire di una bobina è dell'ordine del $0,5\%$ nel caso b), mentre nel caso a) è del $0,5\%$ la precisione con la quale deve essere conosciuta la differenza nel prodotto area spire delle due bobine.

1-43

Quanto alla posizione dell'asse magnetico di una bobina distinguiamo ancora i due casi:

- a) si è dimostrato in 1-3 che la posizione reciproca degli assi delle due bobinette deve essere nota a meno di $5/100$ mm nel caso di weak focusing; nel caso dello strong focusing la precisione diventa assolutamente proibitiva dovendosi avere (per $n=20$) una precisione di circa $1/200$ mm.
- b) La posizione dell'asse in questo caso non è assolutamente vincolata, o meglio - per quanto detto in 1-2 - essa deve essere nota a meno di circa 6 mm. di spostamento lungo il raggio. Una imprecisione di c mm, con c inferiore a 6mm, significa solo che le curve iso- n sono note con una imprecisione di posizione radiale di c mm.

1-44

Quanto alla precisione angolare α a meno della quale deve essere noto l'asse di ciascuna bobina, consideriamo qui solo l'influenza che la deviazione stessa comporta nella conoscenza del prodotto area spire massimo.

Vale la formula:

$$\phi = BS \cos \alpha$$

con α l'angolo tra l'asse delle bobinette e la direzione del campo magnetico, che si può scrivere (ricordando che con approssimazione sufficiente al nostro caso è $\cos \alpha \approx (1 - \frac{\alpha^2}{2})$):

$$\phi = BS (1 - \frac{\alpha^2}{2})$$

Se si vuole che il prodotto:

$$S (1 - \frac{\alpha^2}{2})$$

sia noto a meno dell' 1‰ - essendosi fissato per S la precisione dello $0,5\text{‰}$ - rimane per $\frac{\alpha^2}{2}$ la precisione dello $0,5\text{‰}$, ossia è sufficiente che

$$\alpha^2 \leq \frac{1}{1000}$$

$$\alpha \leq \frac{1}{32}$$

di radiante, pari a circa $1^\circ 30'$

Questa precisione è necessaria per il caso a) solo tra la differenza di orientazione delle bobinette; per il caso b) invece, proprio sull'angolo tra l'asse della bobina e l'asse del campo magnetico.

1-450

Analizziamo ora più da vicino i due sistemi di misura di $\frac{c \cdot k}{\lambda}$, che abbiamo già indicato con a) e b).

1-451

Caso a) - Il sistema consiste in due bobine che mediano il campo magnetico in due cerchi di superficie S_1 ed S_2 i cui centri distano l'uno dall'altro di Δr . Come si è già detto in 13-2, il metodo è impraticabile per strong focusing ($n=20$), mentre per il weak focusing ($n=0,6$) si assume $\Delta r \leq 2$ cm.

Il circuito elettrico da realizzare è quello indicato in fig. 14-2, ove i simboli hanno i seguenti significati:

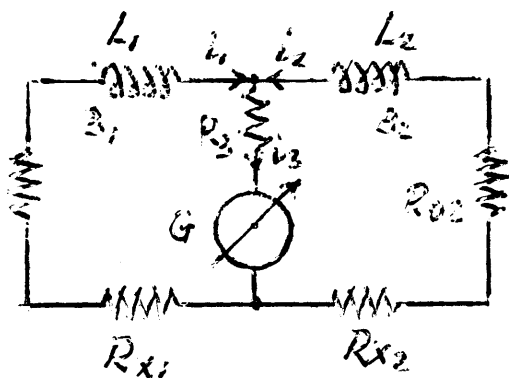


FIG. 14-2

- L_1 = induttanza della bobinetta 1
- L_2 = induttanza della bobinetta 2
- R_{01} = resistenza della bobinetta 1
- R_{02} = resistenza della bobinetta 2
- R_{k1} = resistenza in serie della bobinetta 1
- R_{k2} = resistenza in serie della bobinetta 2
- B_1 = intensità del campo magnetico abbracciato da 1 (valor medio)
- B_2 = intensità del campo magnetico abbracciato da 2 (valor medio)
- G = strumento di zero
- R_3 = resistenza dello strumento di zero
- $R_1 = R_{01} + R_{k1}$
- $R_2 = R_{02} + R_{k2}$

Si presentano ora due possibilità fondamentali che nel seguito indicheremo con α) e con β).

- α) Le bobinette sono fisse mentre il campo magnetico viene acceso o spento, chiudendo od aprendo, rispettivamente, il circuito di alimentazione del magnete.
- β) Il campo magnetico è costante nel tempo, mentre vengono fatte ruotare le bobinette nel campo magnetico stesso.

Caso α).

G è uno strumento di zero misuratore di corrente continua.

Vale il seguente sistema:

$$(14-1) \quad \begin{cases} e_1 - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - R_3 i_3 = \mathcal{E} \\ e_2 - R_2 i_2 - L_2 \frac{di_2}{dt} - R_3 i_3 = 0 \\ i_1 + i_2 = i_3 \end{cases}$$

che risolto dà:

$$\begin{cases} e_1 - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} = R_3 i_3 \\ e_2 - R_2 (i_2 - i_1) - L_2 \frac{d(i_2 - i_1)}{dt} = R_3 i_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e_1 - R_1 i_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} = R_3 i_3 \\ (L_2 + R_2 i_1 + L_2 \frac{di_1}{dt}) = R_3 i_3 + R_2 i_3 + L_2 \frac{di_3}{dt} \end{cases}$$

$$e_1 L_2 + e_2 L_1 + (L_1 R_2 - L_2 R_1) i_1 = (R_3 L_2 + R_3 L_1 + R_2 L_1) i_3 + L_1 L_2 \frac{di_3}{dt}$$

$$i_1 = i_3 \frac{R_3 (L_2 + L_1) + R_2 L_1}{L_1 R_2 - L_2 R_1} - \frac{e_1 L_2 + e_2 L_1}{L_1 R_2 - L_2 R_1} + \frac{L_1 L_2}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \frac{di_3}{dt}$$

per cui sostituendo nella prima della 14-1 si ha:

$$\begin{aligned} e_1 - R_1 i_3 \frac{R_2 L_1 + R_3 (L_1 + L_2)}{L_1 R_2 - L_2 R_1} - R_1 \frac{L_1 L_2}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \frac{di_3}{dt} + R_1 \frac{e_1 L_2 + e_2 L_1}{L_1 R_2 - L_2 R_1} - \\ - L_1 \frac{di_3}{dt} \frac{R_2 L_1 + R_3 (L_1 + L_2)}{L_1 R_2 - L_2 R_1} - \frac{L_1^2 L_2}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \frac{d^2 i_3}{dt^2} + L_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{e_1 L_2 + e_2 L_1}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \right) = R_3 i_3 \end{aligned}$$

ed ordinando:

$$\begin{aligned} i_3 \left[-R_1 \frac{R_2 L_1 + R_3 (L_1 + L_2)}{L_1 R_2 - L_2 R_1} - R_3 \right] + \frac{di_3}{dt} \left[-\frac{R_1 L_1 L_2 - L_1^2 R_2 - R_3 L_1 (L_1 + L_2)}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \right] - \\ - \frac{L_1^2 L_2}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \frac{d^2 i_3}{dt^2} = -R_1 \frac{e_1 L_2 + e_2 L_1}{L_1 R_2 - L_2 R_1} - e_1 = \frac{L_1 L_2 \frac{de_1}{dt} + L_1^2 \frac{de_2}{dt}}{L_1 R_2 - L_2 R_1} \\ i_3 (R_1 R_2 L_1 + R_1 R_3 (L_1 + L_2) + R_3 R_2 L_1 - R_1 R_3 L_2) + \frac{di_3}{dt} L_1 [R_1 L_2 + L_1 R_2 + R_3 (L_1 + L_2)] + \\ + L_1^2 L_2 \frac{d^2 i_3}{dt^2} = R_1 (e_1 L_2 + e_2 L_1) + e_1 (L_1 R_2 - L_2 R_1) + L_1 \left(L_2 \frac{de_1}{dt} + L_1 \frac{de_2}{dt} \right) \\ i_3 (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) + \frac{di_3}{dt} [L_1 (R_2 + R_3) + L_2 (R_1 + R_3)] + L_1 L_2 \frac{d^2 i_3}{dt^2} = \\ = e_1 R_2 + e_2 R_1 + L_2 \frac{de_1}{dt} + L_1 \frac{de_2}{dt} \quad (14-2) \end{aligned}$$

si pone:

$$\begin{aligned} c &= R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 \\ b &= L_1 (R_2 + R_3) + L_2 (R_1 + R_3) \\ a &= L_1 L_2 \end{aligned}$$

Inoltre si suppone:

$$e_1 = E_1 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} = \frac{d\phi_1}{dt}$$

$$e_2 = E_2 \varepsilon^{-\frac{t}{T}} = \frac{d\phi_2}{dt}$$

con (alla chiusura del circuito di eccitazione del magnete):

$$\phi_1 = \phi_{M_1} (1 - \varepsilon^{-\frac{t}{T}})$$

$$\phi_2 = \phi_{M_2} (1 - \varepsilon^{-\frac{t}{T}})$$

Integrando rispetto al tempo la (14-2) si ha, facendo le sostituzioni ora poste:

$$\begin{aligned} c q_3 + b \frac{dq_3}{dt} + a \frac{d^2 q_3}{dt^2} &= (R_2 \phi_{M_1} + R_1 \phi_{M_2}) (1 - \varepsilon^{-\frac{t}{T}}) + (L_2 \dot{\phi}_{M_1} + L_1 \dot{\phi}_{M_2}) \frac{\varepsilon^{-\frac{t}{T}}}{T} = \\ &= (R_2 \phi_{M_1} + R_1 \phi_{M_2}) + \left[(R_2 \phi_{M_1} + R_1 \phi_{M_2}) + \left(\frac{L_2 \phi_{M_1} + L_1 \phi_{M_2}}{T} \right) \varepsilon^{-\frac{t}{T}} \right] = M + N \varepsilon^{-\frac{t}{T}} \quad (14-3) \end{aligned}$$

con $M = R_1 \phi_{M_2} + R_2 \phi_{M_1}$

$$N = R_1 \phi_{M_2} + R_2 \phi_{M_1} + \frac{L_1 \phi_{M_2} + L_2 \phi_{M_1}}{T}$$

Una soluzione particolare si ha per $q_3^* = R + S \varepsilon^{-\frac{t}{T}}$

con $R = \frac{M}{c}$ ed $S = \frac{N}{\frac{a}{T} - \frac{b}{T} + c}$

La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (14-3) è:

$$q_{30} = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t}$$

con $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si può dimostrare che $b^2 - 4ac$ è sempre > 0 e quindi, essendo anche a, b, c quantità essenzialmente > 0 , α e β sono sempre reali e < 0 ; ne deriva che q_{30} è sempre aperiodico.

Indicheremo con α la soluzione in valore assoluto minore.

Cioè

$$|\alpha| < |\beta|$$

od anche

$$\alpha > \beta$$

Infine è

$$q_3 = q_{30} + q_3^* = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} + R + S e^{-\frac{t}{T}}$$

Le condizioni ai limiti sono:

per $t = 0$ sia $q_3 = 0$ e $\frac{dq_3}{dt} = 0$

per cui:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} A+B &= -q_3^* = R+S e^{-\frac{t}{T}} \\ \alpha A + \beta B &= -\frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}} \end{aligned} \right\} \\ \alpha B - \beta B &= \alpha(R+S e^{-\frac{t}{T}}) + \frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}} \\ B &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left[\alpha(R+S e^{-\frac{t}{T}}) + \frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] \\ A &= R+S e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{\alpha-\beta} \left[\alpha(R+S e^{-\frac{t}{T}}) + \frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] = \\ &= -\frac{1}{\alpha-\beta} \left[\beta(R+S e^{-\frac{t}{T}}) + \frac{S}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right] \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} q_3 &= R \left\{ \frac{\beta}{\alpha-\beta} e^{\alpha t} + \frac{\alpha}{\alpha-\beta} e^{\beta t} + 1 \right\} + S e^{-\frac{t}{T}} \left\{ \left(-\frac{\beta}{\alpha-\beta} + \frac{1}{T} \right) e^{\alpha t} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{1}{T} \right) e^{\beta t} + 1 \right\} \end{aligned}$$

Affinchè q_3 sia nullo per ogni t è sufficiente che sia:

$$\begin{cases} R = 0 \\ S = 0 \end{cases}$$

ossia, riconrdando le posizioni fatte, basta che sia:

$$\begin{cases} R_1 \phi_{M_2} + R_2 \phi_{M_1} = 0 \\ L_1 \phi_{M_2} + L_2 \phi_{M_1} = 0 \end{cases}$$

ossia:

$$-\frac{\phi_{M_2}}{\phi_{M_1}} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{L_2}{L_1} \quad (14-4)$$

Si osserva però che se è possibile regolare la R_2 ed R_1 per soddisfare la prima parte della (14-4) non altrettanto facile è regolare L_1 ed L_2 , per cui non sembra facile con tale metodo ottenere l'e-

quilibrio del ponte per ogni t .

Consideriamo ora il caso β).

Il circuito elettrico viene leggermente modificato con l'aggiunta di un condensatore variabile C per ogni ramo. Lo schema si presenta come in fig. 14-3 (i simboli hanno significato analogo a quello indicato in corrispondenza della fig. 14-2).

Lo strumento di zero è sensibile alle correnti alternate e pertanto - dal punto di vista di principio - potrebbe essere per esempio un oscillografo (con eventuale preamplificatore), un galvanometro a vibrazione, un telefono ecc.

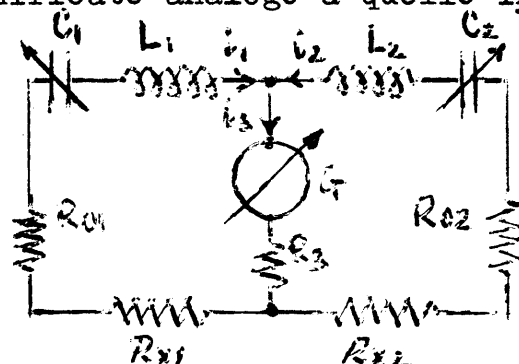


Fig. 14-3

Le bobinette ruotano con frequenza costante f , per cui le correnti del circuito hanno pulsazione

$$\omega = 2\pi f$$

Si può così scrivere:

$$\begin{cases} e_1 = R_1 i_1 + R_3 i_3 + j\omega L_1 i_1 - \frac{1}{\omega C_1} i_1 \\ e_2 = R_2 i_2 + R_3 i_3 + j\omega L_2 i_2 - \frac{1}{\omega C_2} i_2 \\ i_1 + i_2 = i_3 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} j e_1 &= R_1 i_1 + R_3 i_3 + j i_1 (\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}) \\ e_2 &= R_2 (i_3 - i_1) + R_3 i_3 + j (i_3 - i_1) (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) \end{aligned}$$

$$i_1 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] = e_1 - R_3 i_3$$

$$e_2 = R_2 i_3 + R_3 i_3 + j i_3 (\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}) - \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \frac{e_1 - R_3 i_3}{R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right)}$$

$$\begin{aligned} e_2 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] &= \left[R_2 + R_3 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] i_3 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] - \\ &- \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] (e_1 - R_3 i_3) \end{aligned}$$

$$i_3 \left\{ \left[R_2 + R_3 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] + R_3 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \right\} =$$

$$= e_2 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] + e_1 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right]$$

$$i_3 = \frac{e_2 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] + e_1 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right]}{\left[R_2 + R_3 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] + R_3 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right]}$$

(14-5)

Condizione sufficiente affinché i_3 sia nullo lungo tutto il periodo è che sia nullo il numeratore della (14-5). In particolare dovrà essere:

$$\begin{cases} e_2 R_1 + e_1 R_2 = 0 \\ e_2 \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) + e_1 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = 0 \end{cases} \quad (14-6)$$

Fissa restando sempre la

$$e_2 = e_1 \frac{R_2}{R_1} \quad (14-7)$$

ricavata dalla prima delle (14-6),

Consideriamo due possibilità per azzerare il primo membro della seconda della (14-6).

- 1) Sia $\frac{1}{C_1} = 0$ (ossia nel circuito di fig 14-2 sia presente solo il condensatore C_2).

In tal caso è:

$$\frac{1}{\omega C_2} = e_1 \omega L_1 + e_2 \omega L_2 = \omega S_1 B_1 \cdot \omega L_1 + \omega S_2 B_2 \cdot \omega L_2$$

Supponendo $S_1 = S_2$; $L_1 = L_2$ si ha:

$$\frac{1}{\omega C_2} = \omega^2 S L (B_1 + B_2)$$

In effetti i collegamenti delle bobinette sono così disposti che B_1 e B_2 sono di segni opposti, per cui si ha:

$$B_1 + B_2 = \Delta B$$

e quindi

$$\frac{1}{\omega C_2} = \omega^2 S L \Delta B = \omega^2 S L \cdot \left(n \frac{\Delta z}{r} B \right)$$

$$\frac{1}{C_2} = \omega^3 S L \left(n \frac{\Delta z}{r} B \right)$$

per cui C_2 non dipende soltanto da L ma anche dall'intensità del campo e dalla posizione delle bobinette nel campo.

Posto per esempio:

$$\begin{array}{ll} S = 0,5 \text{ m}^2 & L = 5/100 \text{ A} \\ n = 0,6 & \Delta z = 2 \text{ cm} \\ r = 3 \text{ m} & B = 100 \text{ gauss} \end{array}$$

si ha:

$$\frac{1}{C_2} = (2\pi)^3 \cdot 1000 \cdot 0,5 \cdot \frac{5}{100} \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{300} \cdot 10^{-2} = 0,2 \frac{1}{\text{F}}$$

da cui

$$C_2 = 5 \text{ F} \text{ quantità assolutamente enorme.}$$

2) Si pone:

$$\begin{cases} \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} \\ \omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\omega^2 L_1} \\ C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_2} \end{cases}$$

posto ancora

$$f \approx 10 \text{ Hz}$$

$$L_1 = L_2 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

si ha:

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{(2\pi \cdot 10)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = \frac{1}{200} \text{ F} = 5000 \mu\text{F}$$

quantità anch'essa troppo elevata

Se in ogni caso si osservasse una impossibilità di azzerare il ponte a causa degli sfasamenti converrebbe provvedere ad aumentare le induttanze L_1 ed L_2 e poi rifasare con i condensatori.

Supposta verificata la seconda delle (14-6), secondo il criterio del caso 2), la 14-5 si riduce a:

$$i_3 = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = \frac{e_1 B_1 B_2 + e_2 B_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \quad (14-8)$$

Determiniamo la sensibilità dello strumento di zero e la precisione necessaria alle cassette di resistenza.

Dalla (14-8), supponendo di avere azzerato il ponte, si ha:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{S_1}{S_2}$$

da cui :

$$\frac{\Delta B}{B_1} = \frac{B_2 - B_1}{B_1} = \frac{R_2}{R_1} \frac{S_1}{S_2} - 1 \quad (14-9)$$

Ma è

$$\frac{\Delta B}{B_1} = n \frac{\Delta z}{z} = e_1 B_1 \frac{z}{300} = \frac{e_1 z}{400}$$

quantità che si vuole nota al $2,5\%$, per cui nelle quantità $\frac{R_2}{R_1} \frac{S_1}{S_2}$ occorrerà poter stimare l'uno su centomila.

Scrivendo:

$$R_2 = R_1 + \Delta R$$

$$S_1 = S_2 + \Delta S$$

la 14-9 diventa

$$\frac{\Delta B}{B_1} = \frac{(R_1 + \Delta R)(S_2 + \Delta S) - R_1 S_2}{R_1 S_2} = \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta S}{S_2} \quad (\text{trascurando gli infinitesimi d'ordine superiore})$$

per cui si dovrà poter leggere almeno 5 unità su 10^6 in R ed altrettante su S.

Da ciò consegue - tra l'altro - che è necessario disporre di due cassette di resistenza a 5 decadi la cui decade superiore sia precisa almeno al 2-3 per 10^5 . Si osserva che cassette a 5 decadi della precisione voluta sono ottenibili solo con la decade superiore non inferiore a 10000 ohm in scatti di 1000 ohm.

Per quanto riguarda la sensibilità dello strumento di zero, dalla (14-8) si ha quanto segue.

Supponiamo che sia ΔV_3 la tensione minima percepita dallo strumento; posto $S_1 = S_2$ e $R_1 = R_2 = R$ e $R_3 \gg R$ l'errore ΔB è dato allora da:

$$\Delta B = \Delta i_3 \frac{R^2 + 2R R_3}{\omega S R} \approx \Delta i_3 \frac{R + 2R_3}{\omega S} = \frac{\Delta V_3}{\omega S} \left(\frac{R}{R_3} + 2 \right) \approx \frac{2}{\omega S} \Delta V_3$$

per

$$\begin{aligned} R &= 10 \text{ Kohm} & f &= 10 \text{ Hz} \\ R_3 &= 1 \text{ Mohm} & S &= 0,5 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

ed essendo - per avere un errore per questa causa non superiore all' 1/1000:

$$\Delta B = \frac{0,4}{100} \cdot \frac{1}{1000} \text{ B}$$

si ha:

$$\Delta V_3 = \frac{0,5 \cdot 62,8}{2} \Delta B \approx 15,7 \Delta B = 15,7 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ B} = 62,8 \cdot 10^{-6} \text{ B}$$

dal che si può ricavare la seguente tabella:

TABELLA I

B	V
10 gauss	$6 \cdot 3 \cdot 10^{-8} \text{ V}$
100 gauss	$6 \cdot 10^{-7} \text{ V}$
1000 gauss	$6 \cdot 10^{-6} \text{ V}$
10000 gauss	$6 \cdot 10^{-5} \text{ V}$

Nel caso di strong focusing, a prescindere dall'errore del metodo (discusso in 13-2) consideriamo i due casi seguenti:

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad n = 20 & r &= 1,5 \text{ cm} \\ \beta) & \quad n = 20 & r &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Caso α)

$$\frac{\Delta B}{B} = 20 \cdot \frac{1,5}{300} = \frac{1,5}{15} = \frac{1}{10}$$

Ammettendo un errore del $2,5\%$ come somma degli errori in R, S e V si ottiene che è necessaria una precisione in R di una parte su 10^4 , una precisione in S di una parte su 10^4 mentre per ΔV_3 si ha $\Delta V_3 = 15,7 \cdot 10^{-4} B$ da cui:

Tabella II

B(gauss)	V_3 (Volt)
10	$1,5 \cdot 10^{-7}$
100	$1,5 \cdot 10^{-6}$
1000	$1,5 \cdot 10^{-5}$
10000	$1,5 \cdot 10^{-4}$

Caso, β)

$$\frac{\Delta B}{B} = 20 \cdot \frac{3}{3000} = \frac{2}{100}$$

ammettendo ancora un errore massimo del $2,5\%$ come somma degli errori in R, S e V si ottiene che è necessaria una precisione in R di 2 parti su 10^5 , in S si 3 parti su 10^5 .

Per quanto riguarda V, si ha che dovuto alla piccolezza del raggio si potrà avere mediatamente in S $\leq \frac{5}{1000} \text{ m}^2$. Da ciò, conservando gli altri dati, si ha:

$$\Delta V_3 = \frac{62,8}{2} \cdot \frac{5}{1000} \cdot \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{2}{200} B = 3,14 \cdot 10^{-6} B$$

da cui:

TABELLA III

B (gauss)	V_3 (Volt)
10	$3 \cdot 10^{-9}$
100	$3 \cdot 10^{-8}$
1000	$3 \cdot 10^{-7}$
10000	$3 \cdot 10^{-6}$

1-452 Caso b).

Spostamento di una bobina nel campo magnetico in direzione radiale. Si ricorda che nel caso di weak focusing è ammesso uno spostamento di 3 cm. mentre in quello di strong focusing solo uno di 3 mm. La misura di ΔB e B viene compiuta misurando un ϕ ed un $\Delta \phi$ per cui se si vuole ottenere la precisione del 5‰ in $\Delta B/B$ è necessario che siano note al 2‰ le quantità ϕ , $\Delta \phi$ ed all'1‰ S (sezione delle bobine).

Per misurare B si dispone la bobinetta nel punto desiderato e si accende o spegne il campo. Si misura il flusso abbracciato con un flussometro in classe 0,2 il quale per i diversi ranges di misura indicati deve avere le seguenti portate fondo scala.

$$\text{Sia } S = 0,5 \text{ mm}^2$$

TABELLA IV

B (gauss)	M (Maxwell spire fondo scala)
10	50.000
100	500.000
1000	5.000.000
10000	50.000.000

Quanto a ΔB si ha sempre:

$$\Delta B \approx n B \frac{\Delta^2}{2}$$

Weak focusing,

$$\Delta B = 0,6 \cdot \frac{B}{300} = \frac{e \cdot c}{100} B$$

per cui con $S = 0,5 \text{ mm}^2$, si ha, ^{per} per mantenere l'errore al di sotto di 2‰ è necessario disporre di flussometro in classe 0,2 delle seguenti portate:

TABELLA V

B (gauss)	M (Maxwell spire fondo scala)
10	300
100	3000
1000	30000
10000	300000

Strong focusing:

$$\Delta B = 20 \frac{3}{300} B = \frac{2}{100} B$$

per cui ancora per $S = 0,5 \text{ mm}^2$, con uno strumento in classe 0,2, è necessario disporre di strumenti con le seguenti portate fondo scala in Maxwell spire.

TABELLA VI

B (gauss)	M(Maxwell spire fondo scala)
10	1000
100	10000
1000	100000
10000	1000000

Ricapitolazione delle precisioni e sensibilità necessarie

nella misura di n in c.c. - Definizione $n = - \frac{r}{B} \frac{\partial B}{\partial r}$

A) CASO WEAK FOCUSING: $n = 0,6$

1) Precisione del metodo

Errore per $\Delta z \leq 3,7$ cm

$$\leq \frac{10}{1000}$$

Errore per aver mediato il B su bobine di diametro ≤ 1 cm.

trascurabile

Errore dovuto all'impacchettamento dei lamierini, per larghezza di ogni pacco ≤ 260 mm.

$$\leq \frac{2}{1000}$$

2) Precisione di misura

r Per imprecisioni nella conoscenza della posizione radiale del coordinatometro rispetto al centro ≤ 1 mm.

$$\leq \frac{1}{3000}$$

I (con 1 bobina) II (con pante)

Δz Nel caso I con un coordinatometro che abbia errore radiale $\leq 5/100$ mm

$$\leq \frac{2,5}{1000}$$

Nel caso II con conoscenza nella posizione reciproca degli assi migliore di $5/100$ mm

$$\leq \frac{2,5}{1000}$$

S Area spire di ciascuna bobinetta nel caso I, taratura necessaria

$$\frac{0,5}{1000}$$

ΔS Differenza sul prodotto area spire delle due bobinette nel caso 2°

$$\frac{0,5}{1000}$$

α Angolo dell'asse della bobinetta con il campo magnetico; nel caso I per un errore $\leq 1^{\circ}30'$

$$\leq \frac{0,5}{1000}$$

Errore per mancanza di parallelismo negli assi $\leq 1^{\circ}30'$ nel caso 2°

$$\leq \frac{0,5}{1000}$$

<u>A. B</u>	Caso II Imprecisione di $5/10^6$ sulle resistenze	$\frac{1}{1000}$
	Insensibilità \leq a quelle indicate in Tab. I dello strumento di zero	$\leq \frac{1}{1000}$
<u>B</u>	Caso I Per strumenti in classe 0,2 e portata fondo scala \leq di quella indicata in tabella IV	$\frac{2}{1000}$
<u>d B</u>	Caso I Per strumenti in classe 0,2 e portata fondo scala \leq di quella indicata in tabella V	$\frac{2}{1000}$

Si osserva che per il primo caso l'errore sul valore dell'area viene contato due volte. Per i due casi si ha quindi in totale con le ipotesi fatte:

Caso I (bobina spostata di 2 cm)	Errore di metodo	$\frac{12}{1000}$
	Errore di misura	$\frac{8}{1000}$
	Errore totale	2%
<hr/>		
Caso II (ponte con assi distanti 2 cm)	Errore di metodo	$\frac{12}{1000}$
	Errore di misura	$\frac{5,5}{1000}$
	Errore totale	1,75%

B) CASO STRONG FOCUSING

1) Precisione del metodo

	<i>Caso I</i>	<i>Caso II</i>
	<i>Bobina spostata</i>	<i>ponte</i>
Spostamento di 3 mm	$\frac{10}{1000}$	
Distanza dagli assi di 15 mm		$\frac{50}{1000}$
Errore per aver mediato su una bobina di diametro 1 cm.	$\frac{0,5}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
Errore dovuto all'impacchettamento dei lamierini per pacchi \leq 260 mm	$\frac{2}{1000}$	$\frac{2}{1000}$

2) Precisioni di misura

<u>r</u>	Per imprecisione sulla conoscenza della posizione radiale del coordinatometro ≤ 1 mm.	$\frac{1}{3000}$	$\frac{1}{3000}$
Δ	Caso I. Per imprecisione di 5/100 mm su 3 mm errore circa	$\frac{20}{1000}$	
	Caso II. Per imprecisione di 5/100 mm su 2 cm.		$\frac{2,5}{1000}$
<u>S</u>	Area spire: necessaria per ciascuna bobina una precisione di taratura del	$\frac{0,5}{1000}$	
Δ	Differenze nel prodotto area spire tra le due bobinette: errore di taratura ammesso:		$\frac{0,5}{1000}$
α	Angolo dell'asse della bobinetta con il campo magnetico. Per errore $\leq 1^{\circ}30'$	$\frac{0,5}{1000}$	
	Errore di parallelismo tra gli assi delle due bobinette minore di $1^{\circ}30'$		$\frac{0,5}{1000}$
$\frac{\alpha\beta}{\beta}$	Caso II. Imprecisione in R di una parte su 10^4 Insensibilità dello strumento di zero \leq a quella indicata in Tab.II		$\frac{1}{1000}$
β	Caso I Per strumenti in classe 0,2 e portate fondo scala \leq di quelle di tabella IV	$\leq \frac{2}{1000}$	$\frac{1}{1000}$
$\Delta\beta$	Caso I Per strumenti in classe 0,2 e portate fondo scala \leq di quelle di tabella VI	$\leq \frac{2}{1000}$	

Quindi ricordando che l'errore sull'area viene contato due volte nel caso I, si ha:

	Errore di metodo	$\frac{13}{1000}$
Caso I° (bobina spostata di 3 mm;)	Errore di misura	$\frac{25}{1000}$
	Errore Totale	3,8%

Caso II°
(Ponte con assi
bobinette distanti
1,5 cm)

Errore di metodo	$\frac{53}{1000}$
Errore di misura	$\frac{5,5}{1000}$
Errore totale	5,8%

— • —

Pisa - 2 Maggio '54

Claudio Canarutto