

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 54/11
18. 3. 1954.

G. Sacerdoti: STUDIO DELLA DISUNIFORMITA' AZIMUTALE DEL
CAMPO MAGNETICO NELL'INTRAFFERRO DI UN SINCROTRONE,
DOVUTE ALLE CAPACITA' DEI CONDUTTORI. -

STUDIO DELLE DISUNIFORMITÀ AZIMUTALI DEL CAMPO
MAGNETICO NELL'INTRAFERRO DI UN SINCROTRONE DO-
VUTE ALLA CAPACITÀ DEI CONDUTTORI. - =====

G. Sacerdoti

1.- Generalità.-

Moltissime sono le cause delle deformazioni azimutali del campo magnetico. Tra queste ricordiamo: imprecisioni meccaniche nel montaggio del magnete, flussi dispersi alle testate e le correnti nei circuiti di eccitazione che variano al variare dell'azimut. *disomogeneità magnetiche del materiale ecc.*

Le deformazioni azimutali del campo più pericolose sono quelle che contengono armoniche più basse, ^{Bernardini} che cioè si ripetono periodicamente uno o due volte in un giro: le deformazioni di periodo elevato sono meno sentite dagli elettroni.

Poter prevedere sia il tipo (armonica principale) sia la ampiezza di questa perturbazione ha importanza per poter stabilire sia la disposizione, sia le dimensioni delle bobine di correzione.

In questo studio viene cercato l'effetto delle capacità degli avvolgimenti sull'andamento delle perturbazioni azimutali del campo. L'ordine seguito sarà:

- 1) stima di massima del valore della perturbazione dovuto alle capacità per un sincrotrone effettivo delle dimensioni del Turbino II;
- 2) calcolo più preciso di queste perturbazioni;
- 3) esame della disposizione e dimensioni delle bobine ausiliarie per correggere questa disuniformità azimutale.

In appendice verrà spiegato il procedimento usato per il calcolo di cui al punto 2). Il calcolo di cui al punto 1) si mostra già di per sé sufficiente a stimare i valori delle perturbazioni: però il calcolo in 2), oltre ad essere una verifica del calcolo in 1),

(eventuali risonanze etc.) è un esempio che può servire per il calcolo di analoghi effetti in sincrotroni di dimensioni più notevoli.

2.- Stima di massime del valore della perturbazione azimutale dovuta alle capacità per un sincrotrone effettivo delle dimensioni del "Tiburtino 2°" .-

Gli avvolgimenti del Tiburtino II° sono costituiti da quattro bobine (una per quadrante) in serie, agli estremi delle quali è collegato un generatore di corrente alternata ed uno di corrente continua. Un estremo è pure messo a terra. L'eccitazione risultante è riportata in fig. 1.

Queste bobine sono dotate di una capacità verso terra (nucleo del magnete). Quando la componente alternata della corrente di eccitazione è massima, minima è la tensione ai capi delle capacità distribuite nei conduttori, e massima è la corrente che alle capacità porta la corrente di carica. Vicino all'iniezione la corrente per capacità è quindi massima e massima è la disuniformità azimutale provocata da questa corrente.

Consideriamo ora in che misura queste correnti per capacità influiscono sulla disuniformità del campo. Il circuito di eccitazione - schematizzando - si può pensare equivalente a quello di fig.2.

Per il conduttore che collega l'avvolgimento 2 con l'avvolgimento 4 (per i simboli ci si riferisce ai simboli di fig.2) dovrà passare la corrente $I_3 + I_4$ che carica la capacità verso terra dell'avvolgimento 3 e 4. Se N è il numero di spire delle bobine di un quadrante (tutti i quadranti hanno lo stesso numero di spire) la differenza delle amperspire che agiscono sul quadrante 2 e sul quadrante 4 sarà data da un'espressione del tipo (1):

$$A_{s4f} + A_{s2p} = N I_3 + K_2 N I_2 + K_4 N I_4 \quad (1)$$

A_{s4f} = amperspire che agiscono alla fine dell'avvolgimento 4

A_{s2p} = " " " al principio dell'avvolgimento 2

K_2 e K_4 sono numeri ^u pari compresi tra 0 ed 1

Si vede immediatamente dalla (1) come sorgano quindi perturbazioni azimutali del campo e di prima armonica: le amperspire variano da quadrante a quadrante. In uno stesso quadrante queste variazioni di amperspire dal principio del quadrante alla fine sono invece quasi nulle e confronto delle differenze che si hanno tra quadrante e quadrante. Facendo un calcolo di massima si possono valutare queste correnti.

Riportiamo qui il significato dei simboli che utilizzeremo. I valori numerici che si trovano accanto sono i valori stabiliti per il "Tiburtino I°".

- $I_{\max \text{ ecc}}$ = corrente massima di eccitazione = 5500 ampère
- V_{\max} = tensione di eccitazione massima del magnete = $1/2 I \omega I_{\max \text{ ecc}}$
- $I_{\text{alt max}}$ = corrente massima alternata di eccitazione = $1/2 I_{\max \text{ ecc}}$
- f = frequenza di eccitazione = $\frac{\omega}{2\pi}$
- p_i = perimetro del fascio dei conduttori interno = 0,7 m
- p_e = perimetro del fascio dei due conduttori esterno = 1 m
- l = lunghezza del fascio di conduttori di un quadrante = 5 m
- L = induttanza del magnete = circa 16×10^{-3} henry
- d = distanza media di un avvolgimento da terra = 9 mm
- ϵ_r = costante dielettrica del materiale isolante = 4
- A_{si} = amperspire complessive all'iniezione (015 gauss) = $\frac{66 \cdot 000 \cdot 15}{10000} \sim 100 \text{ A}$
- B_i = B iniezione = 15 gauss
- N = numero di spire = 12
- S = $(p_i - p_e)^L$

La capacità di una bobina verso terra sarà approssimativamente data dall'espressione (2):

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{h} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{l(R+R)}{d} = \frac{5 \cdot 47 \cdot 4}{0,009} \cdot 8,856 \cdot 10^{-12} =$$

$$= \frac{380 \cdot 10^{-9}}{9} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ Fmax}$$

Il quadrante 4 sarà portato ad una tensione massima circa $3,5/4$ V sinusoidale ($\omega = 180$). Questa sollecitazione provoca una corrente massima data dalla espressione (3):

$$I_{\max} = \frac{3,5}{4} V_{\max} \omega C \approx \omega L I_{\max} \omega C \cdot \frac{3,5}{4} \quad (3)$$

Le amperspire differenza tra quelle che agiscono nella fine della bobina 4 e al principio della bobina 1 avranno il valore dato dall'espressione (3). Tale espressione si giustifica tenendo conto che i quadranti 3, 2, 1 sono portati ad una tensione rispetto terra crescente linearmente al crescere del numero del quadrante, e che le correnti necessarie alla carica delle loro capacità sono proporzionali alle tensioni

$$(A_{34} - A_{14})_{\max} = N I_3 + N I_2 + N I_1 + I_4 = I_4 + N_2 I_3 + N_2 I_2 + N_2 I_1 \quad (4)$$

Le formula che ci permette di calcolare la differenza di amperspire tra il 1° ed il 4° quadrante quando un capo del primo (il capo collegato al generatore di tensione) sia a terra, è la formula (5). Tale formula è stata ottenuta sostituendo la (1) e la (3) nella (4).

$$\Delta = A_{p4} - A_{p1} \approx \frac{1}{2} I_{\max} \omega \frac{L \omega}{h} S \varepsilon [1,5 N + 1] \frac{3,5}{4} \quad (5)$$

Questa formula (5) vale se le bobine dei quattro quadranti sono in serie. Se lo schema di eccitazione fosse quello di fig. 4 sarebbe valida la espressione (6) per calcolare la differenza massima di amperspire azimutali:

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{I_{\max} \omega^2}{3} \frac{L S \varepsilon}{h} [N + 1] \varepsilon \quad (6)$$

In fatti la tensione nel quadrante 4 ed 1 rispetto terra risulta in media circa 1/3 della differenza di tensione ai capi del generatore a c.a. Tale tensione provoca nei rami 1-2 e 4-3 due correnti opposte. Vanno perciò sommate onde trovare la differenza tra le amperspire in 4 e quelle in 1; le differenze di amperspire tra il principio di 1 e la fine di 2 e il principio di 3 e la fine di 4.

Con le formule (5) e (6) sono state calcolate le tabelle A e B. In A si trovano i valori delle differenze di amperspire massime tra 1 e 4, per le frequenze; $f = 20$ ($\omega = 126$); $f = 25$ ($\omega = 158$); $f = 30$ ($\omega = 189$), nel caso che il circuito di eccitazione sia quello di fig.2 e nel caso che il circuito di eccitazione sia quello di fig.4. Tali valori sono stati calcolati con i valori numerici del "Tiburtino I°".

In B si è calcolata la percentuale che queste amperspire rappresentano rispetto le amperspire totali di eccitazione che si hanno all'iniezione. A tale fine è necessario ricordare il valore delle amperspire A_1 che si hanno all'iniezione (ci si riferisce ancora ai dati del Tiburtino I°):

$$A_i = \frac{A_{2 \text{ max}}}{B_{\text{max}}} \quad B_i = \frac{65'000}{10'000} : 24 = 94 \text{ Amp}$$

Da questi calcoli approssimati si deduce come la disposizione più indicata di un avvolgimento sia una spira ogni quadrante. Le dimensioni di queste spire debbono essere tali da sopportare circa 94 ampère al massimo.

Le correnti di queste spire devono essere in fase (0° o 180°) rispetto alle correnti principali.

Il dimensionamento verrà stabilito nel § 3.-

3.- Calcolo in migliore approssimazione dell'andamento delle correnti nei conduttori di un quadrante.-

Questo calcolo è stato svolto più che per una verifica parziale dei ragionamenti di cui al § 2, per il fatto che può servire di base per un calcolo degli effetti delle capacità in sincrotroni più grandi ove gli effetti delle risonanze possono rendere lontano dal vero i risultati che si otterrebbero con procedimento approssimato come quello usato al § 2.

Lo schema di calcolo usato è in appendice ampiamente spiegato; qui riassumerò ^{solo} in sommi capi il concetto informatore. Prendo alcune distribuzioni di correnti arbitrarie, una cui combinazione il buon senso ci suggerisce possa approssimare sufficientemente la distribuzione reale delle correnti nei nostri conduttori.

Tali distribuzioni di correnti io chiamerò modi di corrente e saranno rappresentabili con delle espressioni del tipo:

$$q^i(t) f_i(x) \quad \begin{array}{l} x = \text{coordinata generica del} \\ \text{nostro conduttore} \\ q(t) = \text{funzione incognita del tempo} \end{array}$$

Se la nostra soluzione del problema è una funzione del tipo (7)

$$q'(tx) = \sum_{i=1}^n q^i(t) f_i(x) \quad \begin{array}{l} n = \text{numero dei modi presi in} \\ \text{considerazione} \end{array} \quad (7)$$

si avrà che, se noi diamo uno spostamento virtuale di cariche dq_i , il lavoro fatto dalle forze motrici provocate dalla corrente soluzione del problema (lavori per cadute resistive, per cadute induttive e capacitive) sopra tale spostamento virtuale di cariche è uguale al lavoro fatto dalle forze motrici esterne.

Scrivendo tali eguaglianze tra i lavori per spostamenti virtuali delle n distribuzioni si ottengono n equazioni lineari differenziali che risolte ci forniscono i valori q^i incogniti. Infatti

i lavori interni sono esprimibili come somma di termini proporzionali alle derivate delle correnti (lavori per cadute induttive), termini proporzionali alle correnti (lavori per cadute ohmiche); e agli integrali delle correnti (lavori per cadute capacitive). Valendo per le costanti del sistema lineare teoremi di reciprocità, si può interpretare il sistema differenziale come il sistema risolutivo di un circuito a costanti concentrate, se ^{si ha} ~~in~~ numero finito ^{i modi}.

Nel nostro caso vi saranno correnti provocate dalle differenze di potenziale tra i conduttori e tra i conduttori e terra, oltre alla corrente principale. Noi assumeremo come modi di corrente (o di cariche) tre sole distribuzioni:

Modo 1 : una che rappresenta la corrente di circolazione principale;

Modo 2 : una corrente che fornisce alla bobina del quadrante la quantità di elettricità che si accumula nella capacità tra la bobina e terra;

Modo 3 : una corrente che fornisce le cariche che si accumulano tra i conduttori vicini (Ci riferiamo al tipo di eccitazione della fig. 2 ed i valori numerici si riferiscono al progetto del "Tiburtino I°").

Per determinare questi modi tracciamo i grafici delle tensioni relative a cui ogni conduttore si viene a trovare rispetto i vicini. Calcoliamo le capacità lineari che questo conduttore ha rispetto quelli vicini. Moltiplicando la tensione per la capacità troviamo la distribuzione relativa delle cariche sui conduttori. Integrando queste quantità di elettricità lungo il conduttore, troviamo la quantità di elettricità che attraverso ogni singola sezione deve passare per portare la carica accumulata. Così otteniamo il modo.

Analogamente abbiamo proceduto per il modo che approssima la carica spostata verso terra.

Nel caso 2) si ha che la quantità di elettricità che esce dall'avvolgimento di un quadrante è nulla e quindi che il lavoro esterno su uno spostamento virtuale di questa distribuzione di cariche è nullo. Non così per il caso 3).

Costruita la distribuzione di queste cariche si è passati a calcolare i lavori reciproci tra le distribuzioni di correnti (si sono trascurati i lavori per resistenza). Nei calcoli si era tenuto conto anche dei flussi dispersi (cosa però esagerata e di poco peso sul risultato).

Dai dati precedentemente calcolati si è ottenuto il quadro dei valori delle capacità e delle induttanze proprie e mutue tra i modi prescelti, riportato in Tabella C.

Il modo 3) è descritto in modo tale che 93.3384 rappresenta la corrente di entrata nel quadrante 4. Le equazioni risolutive del circuito ottenute in base ai dati numerici della tabella C risultano (sistema 1):

$$\begin{aligned} I_a & 4,1 \cdot 10^{-3} - 4,68 I_b - 4,96 I_c = V \\ -I_a & 4,68 + I_b 422 + 3160 \cdot 10^{10} \int I_b dt + 630 I_c = 0 \\ -I_a & 4,84 + I_b 630 + I_c 3400 + 4,1 \cdot 10^{15} \int I_c = + 3V 3384 \end{aligned}$$

Sistema 1

Riportiamo pure le eguaglianze che ci collegano le correnti fittizie alle correnti reali:

- $i_{co \max}$ = corrente massima nei conduttori provocata dalle capacità tra gli avvolgimenti (massima nello spazio e nel tempo) = $I_b \cdot 1130$ Amp (se V è espresso in Volt)
- $i_{cI \max}$ = corrente massima nei conduttori del 4° settore provocata dalle capacità tra l'avvolgimento del 4° settore e terra = $I_c \cdot 3384$

Il sistema (1) nel caso in cui ω sia uguale a 180, si riduce al sistema (2):

$$\begin{aligned} \int I_a \quad 0,74 - \int 3,02 I_b - \int 1412 I_c &= V_{max}/4 \\ -\int I_a \quad 302 + \int I_b \quad 22.860 - \int I_b \quad 17,5 \cdot 10^{10} + \int 113000 I_c &= 0 && \text{SISTEMA 2} \\ -\int I_a \quad 1412 + \int 113000 I_b + \int 612000 I_c - \int 610 \cdot 10^{10} I_c &= +3.3384 V_{max}/4 \end{aligned}$$

Da queste equazioni si vede come influenze per termini mutui non ve ne siano praticamente tra i modi b e c; cioè il modo b non influenza nulla o quasi il modo c e viceversa. Così sono trascurabili le induttanze proprie e mutue dei modi 2 e 3.

La teoria approssimata svolta al § 2 nella quale si sono introdotte queste ipotesi risulta perciò sufficiente.

Dalle equazioni del sistema (2) (essendo con $\omega = 180$ $V_{max} = 7520$), si ottiene:

$$I_{cc \max} = B_{max} 3384 = 3385 - \frac{12.063}{4} \frac{7520}{610 \cdot 10^{10}} = 1,33 \cdot 10^{-2} \text{ Amp.}$$

Da cui si può ricavare:

$$\Delta A_{s \max} = 0,35 \text{ Ampere}$$

La differenza tra i valori ora trovati e quelli trovati nel §2 dipendono esclusivamente dal valore delle capacità che è stato calcolato con maggiore precisione.

4.- Dimensionamento e disposizione delle bobine di correzione.

La bobina di correzione prevista per la correzione delle perturbazioni azimutali dovute alle capacità parassite negli avvolgimenti deve portare solo un Ampère: può essere costituita da conduttori di 1-2 mm di sezione con disposizione ad 8 come in fig.5.

La disposizione II permette una correzione più completa della disposizione I (fig.5), però l'alimentazione di questo circuito è più complicata. Dobbiamo notare come entrambe le disposizioni illustrate in fig.5 siano disaccoppiate dal circuito principale: sarà però bene prevedere una regolazione opportuna per disaccoppiarlo con un certo rigore. Sarà anche bene verificare sperimentalmente prima del fissaggio definitivo delle bobine di correzione, e questo è detto in generale, che effettivamente gli accoppiamenti tra queste ed il circuito principale siano nulli.

Valutiamo ora l'angolo di fase tra la tensione di alimentazione principale e la tensione di alimentazione della bobina di correzione 2'. (fig.5, disposizione I), nel caso che tale bobina sia costituita da una spira sola di rame di sezione 1 mm^2 . I dati che seguono sono stati calcolati con riferimento alle dimensioni del "Tiburtino I°".

La impedenza offerta dal circuito 2' risulta di $0,75 + j 0,014 \text{ ohm}$. Se V è la tensione di eccitazione principale, la corrente principale risulta = $- j V$

Se V_1 è la tensione della bobina di correzione, la corrente in questa bobina è uguale a $\sim \frac{V_1}{0,75 + j 0,014}$

Tali correnti devono essere in fase per quel che abbiamo visto nei paragrafi precedenti.

Da ciò risulta:

$$\gamma \varphi = \frac{0,24}{0,014} \quad \text{ove } \varphi = \text{angolo tra } V_1 \text{ e } V_2$$

Per ottenere l'eccitazione ausiliaria di queste bobine basterà usare un apparecchio sfasatore e un divisore di tensione; l'apparecchio di alimentazione sarà un motorino sull'asse dell'eccitazione principale.

Per controllare l'eccitazione ausiliaria prevederemo un voltmetro ed un amperometro con portata massima 10 Ampère e 10 Volt, rispettivamente, e di sensibilità non critica. La regolazione invece deve essere fina a sufficienza e per tale regolazione si agisce sulla fase e sul modulo della tensione di alimentazione.

Anche ~~per~~ una alimentazione in corrente continua dello stesso circuito sarebbe bene prevedere per correggere inomegenità azimutali dovute a residui magnetici inomogenei.

5.- Riassunto e conclusioni.

In questa relazione si è studiato l'effetto delle capacità parassite degli avvolgimenti sulle perturbazioni azimutali del campo magnetico. Nel § 1 si è impostato il problema. Nel § 2 si è fatto un calcolo di massima delle perturbazioni portate da queste capacità quando il circuito di alimentazione abbia a terra un capo del generatore e c.e. o il punto centrale dell'avvolgimento di eccitazione (di mezzo rispetto ai due capi di alimentazione). La perturbazione risultante è di la armonica e tali perturbazioni risultano dell'ordine del 0,35% e 0,15% rispettivamente per i due casi presi in esame quando la frequenza di eccitazione è 20 Hz, (tali perturbazioni sono uguali alla frequenza di eccitazione del magnete). Nel § 3 si è verificato se la teoria approssimata svolta nel paragrafo 2 era sufficiente; e la risposta trovata è affermativa. Nel § 4 si è prospettata la disposizione, il dimensionamento e l'alimentazione del circuito correttivo, nonché l'apparecchiatura di misura necessaria al controllo del circuito di correzione.

In appendice si trova un'ampia spiegazione del metodo applicato per la soluzione del problema, usato nel paragrafo 3.

18 Marzo 1954

Giancarlo Sacerdoti

APPENDICE - UN METODO PER APPROSSIMARE LA SOLUZIONE DELLE
EQUAZIONI DI MAXWELL

1.- Introduzione.-

L'intenzione di questo scritto è di esporre un metodo di soluzione delle equazioni di Maxwell, che presenta molte analogie strutturali e concettuali con quello dei lavori virtuali che noi troviamo in meccanica (statica e dinamica dei corpi rigidi ed elastici).

Il metodo è stato suggerito dal Sig. Prescott Crout nell'aprile 1947 ~~[in una memoria originale. Non mi risulta che vi siano precedenti trattazioni].~~ Un estratto si trova nel P.I.R.E. del Novembre 1947. ~~[Il Crout usa il metodo da lui proposto, senza giustificazione rigorosa e senza preoccuparsi dei limiti della sua validità.]~~

Il procedimento può essere dedotto dalle equazioni di Maxwell analogamente come il metodo dei lavori virtuali può essere dedotto dalle equazioni fondamentali della meccanica.

Nella trattazione che segue, mi propongo di trovare una giustificazione rigorosa del metodo del Crout e di determinarne i limiti di validità. Esporrò infine ~~due~~ ^{due} metodi ~~corretti~~ ^{corretti} (affini a quello approssimato del Crout) senza limiti nella loro validità, ^{ma} meno utili, in quanto molto complicati e di difficile trattazione.

L'ordine di esposizione sarà il seguente: 2) esposizione del metodo proposto dal Crout; 3) richiami matematici; 4) impostazione del problema della soluzione delle equazioni di Maxwell in modo rigoroso mediante modi di correnti; 5) ipotesi che giustificano il metodo del Crout; 6) approssimazione della soluzione delle equazioni di Maxwell mediante modi di campi elettrici; 7) esempio di un circuito equivalente al nucleo di un trasformatore con $\mu = \text{cost.}$

Questi procedimenti (n.1, n.4, n.6) e in special modo quello esposto del Crout (n.1) rendono trattabili alcuni problemi (come quelli dei circuiti equivalenti del nucleo di un trasformatore) riconducendoli a problemi di comportamenti di circuiti, sui quali vi è già una notevole letteratura, e nei quali l'elettrotecnico può, per il maggiore esercizio e la maggiore sensibilità acquisitivi, prevedere meglio le reazioni e le perturbazioni elettriche.

2.- Metodo usato dal Crout.-

Il Crout fa l'ipotesi che un numero k di "modi di corrente" combinati linearmente, possa in ogni istante approssimare la distribuzione delle correnti del sistema preso in considerazione (per "modo di corrente" il Crout intende una distribuzione del tipo $q'_k(t) \cdot u_k(x, y, z)$; $k = 1, 2, \dots, n$).

Secondo l'ipotesi del Crout, tutte le cariche che nascono dal k esimo modo sono proporzionali a q'_k ; tutte le correnti, ed in conseguenza i campi magnetici sono proporzionali a q'_k , tutte le tensioni indotte che nascono dalla variazione della corrente dal k esimo modo sono proporzionali a q'_k .

Consideriamo il nostro sistema elettrico al tempo t . Diamo uno spostamento virtuale δq_k al modo. Alla variazione δq_k corrisponde un campo di flusso di carica dal k esimo modo, il quale campo può essere considerato come composto di un infinito numero di tubi di flusso elementari sottili e chiusi. La carica che fluisce in ciascuno di essi è proporzionale a δq_k .

Determiniamo il lavoro virtuale necessario a provocare il moto di cariche associato con la variazione δq_k attraverso il campo elettromagnetico ~~presente~~ al tempo t .

Per un singolo tubo il lavoro virtuale è dato dalla carica che passa per detto tubo, proporzionale a δq_k , moltiplicata per forza controelettrica dovuta al campo magnetico + totale caduta di tensione dovuta alla resistenza + differenze di potenziale dovute alle cariche & al potenziale impresso .

(Nella espressione fra parentesi il primo termine è la f.c.e.m. dovuta alla derivata del flusso magnetico che avvolge il tubo, il secondo termine è la d.d.p. resistiva, il terzo termine la d.d.p. capacitiva, il quarto termine è la f.e.m. esterna o forza e.m. impressa). Il lavoro della f.e.m. esterna è uguale a quello della f.e.m. interna per uno spostamento di cariche virtuali qualsiasi. Indicando con

δW_c	lavoro virtuale richiesto dalle capacità
δW_r	" " " " resistenze
δW_L	" " " " induttanze
δW_e	" " " " sorgenti

le tensioni generalizzate di capacità sono:

$$\frac{\delta W_c}{\delta q_k} = \frac{1}{C_{K_1}} q_1 + \frac{1}{C_{K_2}} q_2 \dots \dots + \frac{1}{C_{K_n}} q_n = V_{cK}$$

le tensioni generalizzate di induzione sono:

$$\frac{\delta W_L}{\delta q_k} = L_{K_1} q_1'' + L_{K_2} q_2'' \dots \dots + L_{K_n} q_n'' = V_{LK}$$

le tensioni generalizzate di resistenza sono:

$$\frac{\delta W_r}{\delta q_k} = R_{K_1} q_1' + R_{K_2} q_2' \dots \dots + R_{K_n} q_n' = V_{rK}$$

le tensioni generalizzate di sorgenti sono:

$$\frac{dW_e}{\delta A_k} = E_{K_i}$$

C_{ij} R_{ij} L_{ij} sono costanti secondo l'ipotesi del Gout (poniamo in evidenza che questo è vero solo se si trascurano i ritardi nelle formule dei potenziali di Kirchoff).

V_{ok} V_{Lk} V_{Rk} sono i lavori virtuali relativi alle cadute capacitiva induttiva e resistiva dovute a distribuzioni di correnti non date dalla q_k .

L'eguaglianza dei lavori della f.e.m. esterna e della f.e.m. interna per uno spostamento di cariche virtuali qualsiasi viene espressa dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
 Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \dots + Z_{1n} I_n &= E_1 + V_1 \\
 Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \dots + Z_{2n} I_n &= E_2 + V_2 \\
 \dots & \\
 Z_{n1} I_1 + Z_{n2} I_2 + \dots + Z_{nn} I_n &= E_n + V_n
 \end{aligned} \tag{1}$$

ove

$$V_i = V_{e_i} + V_{i_i} + V_{l_i} \quad Z_{ij} = L_{ij} \frac{d}{dt} + R_{ij} + \frac{1}{C_{ij}} \int_0^t dt$$

Nella ipotesi del Crout è

$$L_{ij} = L_{ji}; \quad C_{ij} = C_{ji}; \quad R_{ij} = R_{ji} \tag{2}$$

ed inoltre

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n L_{ij} x_i x_{ji} \quad \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n x_l x_{kl} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{ij} x_i x_{ji}$$

sono forme quadratiche (per la dimostrazione vedi articolo già citato del P.I.R.E.) definite positive

Soddisfatte le (2) si può sempre trovare un circuito elettrico le cui equazioni risolutive sono le (1).

Fin d'ora si può osservare che anche se pensiamo di aumentare indefinitamente n , pur ammettendo che il sistema dei modi sia completo e che si possano trascurare i ritardi, col metodo del Crout potremmo ugualmente non avvicinarci alla soluzione delle equazioni di Maxwell.

Dal punto di vista matematico ciò sarà chiaro, in quanto secondo il procedimento del Crout le relazioni ottenute possono non soddisfare le equazioni di Maxwell. Il credere che seguendo il procedimento del Crout si possa giungere alla soluzione delle equazioni di Maxwell sarebbe come se si ammettesse valido il teorema nel paragrafo 4) senza le ipotesi di cui alle (8) come vedremo più a

vanti.

Queste considerazioni sono importanti se si opera su un sistema completo di infiniti modi di correnti.

3.- Richiami matematici.-

Chiamiamo modo in un campo vettoriale che vari nel tempo mantenendo costante la direzione in ogni singolo punto e costante il rapporto tra i moduli dei vettori di due punti qualsiasi.

Esso potrà esprimersi con $K(t) \vec{V}(xyz)$. Una successione di modi $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ si dirà completa rispetto ad una classe di campi vettoriali ed a una zona dello spazio, se un campo qualsiasi, appartenente a quella classe e a quella zona è esprimibile mediante una combinazione lineare di termini (anche infinita) della successione.

Consideriamo le equazioni di Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = \gamma \vec{E} + \varepsilon \frac{\delta(\vec{E} - \vec{E}_i)}{\delta t} \quad (3)$$

$$\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}_i) = -\mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} \quad (4)$$

$$\text{div } \mu \vec{H} = 0 \quad (5)$$

Ammettiamo di voler cercare le soluzioni di dette equazioni quando per $t = 0$ lo spazio è in quiete e per $t > 0$ sorga un campo impresso E_1 , relativamente ad un tempo $t_1 < t$. Sia inoltre limitata la zona ove si manifesta il campo E_1 . Allora potremo costruire un sistema completo (con alcune limitazioni aprioristiche sulla zona di discontinuità delle soluzioni), con procedimento analogo di quello adottato nel caso di una dimensione, mediante combinazioni di prodotti di seni e coseni di $\frac{x}{\lambda_x} \varepsilon^{in} \frac{y}{\lambda_y} \varepsilon^{in} \frac{z}{\lambda_z} \varepsilon^{in}$ per i punti interni al prisma di lati $2\lambda_x, 2\lambda_y, 2\lambda_z$ ($\lambda_x = ct + a$; $\lambda_y = ct + b$; $\lambda_z = ct + d$ con a, b, d , lati del prisma che continua la zona ove si manifesta il campo impresso e la zona conduttrice) e dando a tali combinazioni all'esterno del prisma il valore 0.

Questo sistema è completo relativamente alle soluzioni delle equazioni di Maxwell per $t < T$. Altri sistemi completi potremo determinare con corrispondenza fra insiemi base sotto alcuni vincoli di univocità e continuità delle corrispondenza (essendo la classe di funzioni rispetto alle quali i sistemi sono completi; contiene quasi dappertutto.).

Solo l'esistenza di un sistema completo di campi ci rende giustificati i procedimenti seguenti per la soluzione delle equazioni di Maxwell che per la completezza dei sistemi di modi scelti portano ad un'approssimazione tanto maggiore quanto più grande è n .

4.- Soluzione delle equazioni di Maxwell in modo rigoroso mediante modi di correnti.-

Poniamo che le zone conduttrici siano limitate. Dato un campo impresso E_1 , se le equazioni di Maxwell ammettono soluzioni, allora in ogni punto dello spazio sarà determinato il valore di E e così nei punti dei conduttori sarà determinata una corrente δE . Le correnti, essendo la zona limitata, vengono ad essere (con alcune limitazioni riguardo la natura delle discontinuità) esprimibili mediante una sommatoria di modo di correnti $\sum \bar{u}_k(x,y,z) q'_k(t)$

Dato un modo di corrente K , definiamo:

$$\begin{aligned}
 Q_k(t) &= \int_0^t \text{div } u_k dt = \left[\int_0^t q'_k(t) dt \right] \text{div } u_k(x,y,z) \\
 Q_k(t) &= \int_0^t |u_k \cdot n| dt = \left[\int_0^t q'_k(t) dt \right] |u_k(x,y,z) \cdot n| \\
 V_k(t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{Q_k(t-\frac{r}{c})}{r} dV + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \frac{q_k(\frac{R^2}{c})}{r} dS \quad (6) \\
 A_k(t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{q'_k(t-\frac{r}{c})}{r} dV \\
 H_k &= \frac{1}{\mu} \text{rot } A_k \\
 E_k &= \text{grad } V_k - \mu \frac{\delta A_k}{\delta t} \quad \text{fuori dei conduttori (7)} \\
 \bar{E}_k &= \frac{u_k}{\delta} \quad \text{dentro i conduttori (7 bis)}
 \end{aligned}$$

$u_k = \bar{u}_k(x,y,z) q'_k(t)$

Se esiste la soluzione delle equazioni di Maxwell per una determinata distribuzione di E_1 , si potrà certo determinare una distribuzione di correnti, e di campi esterni ad esse, legati mediante le (7) e perciò ottenibili mediante una combinazione del sistema di campi legato alla sua volta al sistema di modi di correnti completo mediante le (7).

Se in particolare m modi bastano ad approssimare la soluzione soddisfacentemente, per determinare i coefficienti del tempo che concretano la combinazione di questi m modi, procediamo come segue. Per ogni modo determiniamo:

$$V_k(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} t^i f_{ik}(x,y,z)$$

$$A_k(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} t^i \vec{f}_{ik}(x,y,z)$$

$$\vec{H}_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ik} t^i \vec{H}_{ik}(x,y,z)$$

$$E_m - E_i = \sum_{i=0}^{\infty} \text{del tipo precedente}$$

Imponiamo la relazione di circuitazione (4) per $m - p$ ($p < m$) cammini parte interni e parte esterni alla parte conduttrice per la combinazione $\sum_0^m H_k$, $\sum_0^m E_k$. Se si prendessero tutti esterni i cammini la (4) si ridurrebbe ad una identità.

All'interno si pone $E = \frac{\sum_0^m u_k}{\delta}$

Imporre le circuitazioni (4), se integrate in un tubo di flusso significa imporre l'eguaglianza fra lavori interni ed esterni.

Inoltre per p punti si impone:

$$\text{div } \frac{u}{\delta} = \int_0^t \text{div } u \, dt + \text{div } E_i$$

o analoga relazione superficiale.

Quando $\sum_0^m E_k = \sum_0^m \frac{u_k}{\delta}$, allora le correnti sono legate al campo da esso provocato, mediante i potenziali ritardati di Kirchoff, secondo le proprietà locali della materia.

Se, dato $u(t,x,y,z) = \sum_0^m A_k(t) u_k(x,y,z)$, legghiamo $\delta u(t,x,y,z)$ $H = \sum H_k$ e $E = \sum E_k$ mediante le (6) (7) nei punti conduttori; se inoltre imponiamo che

sia:

$$\text{rot}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_i) = \mu \frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} \quad (4)$$

e che

$$\mathbf{S} = \text{div} \frac{\mathbf{u}}{\delta} + \text{div} \mathbf{E}_i \quad (8')$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{\delta} - \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} \quad \text{sulle superfici} \quad (8'')$$

allora necessariamente:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \delta \mathbf{E} + \varepsilon \frac{d(\mathbf{E} - \mathbf{E}_i)}{dt}$$

cioè la soluzione soddisfa le equazioni di Maxwell. *perché un campo E definito come nella (7)*

Dalla (4), se soddisfatta, abbiamo:

$$\frac{\mathbf{u}}{\delta} = \mathbf{E}_i - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \text{grad} V' \quad \text{nei punti interni}$$

Se estendiamo le (7) all'interno, otteniamo

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_i - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \text{grad} V'' \quad (V'' \text{ definito come nella (6)})$$

da cui:

$$\Delta(V'' - V') = \text{div} \frac{\mathbf{u}}{\delta} - \text{div} \mathbf{E}''$$

Ma, per la relazione di Lorenz $\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon \frac{dV}{dt} = 0$

$$\text{div} \mathbf{E}'' = \text{div} \mathbf{E}_i - \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{A} + \Delta V'' = \text{div} \mathbf{E}_i + \varepsilon$$

da cui otteniamo

$$\Delta(V'' - V') = 0$$

E in conseguenza, essendo $V'' - V' = 0$ sulla superficie, sarà $V'' - V' = 0$ *per le (8'')* dappertutto. E il procedimento ci porta alla soluzione esatta.

Per avere un criterio per stabilire l'approssimazione raggiunta, si può determinare il campo impresso nell'interno necessario a provocare il campo trovato con la nostra soluzione e confrontarlo col campo realmente esistente; essendo

$$\mathbf{E}' = \frac{\sum \mathbf{U}_k}{\delta} \quad \mathbf{E}'_{\text{imp}} = \mathbf{E}' - \text{grad} V - \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

la

$$\int_0^T \frac{\int (E_{\text{imp}} - E'_{\text{imp}})^2 dV}{\int E_{\text{imp}}^2} dt \quad (9)$$

ci dà un indice dell'approssimazione raggiunta.

5.- Ipotesi che giustificano il metodo del Crout.-

Se si pone:

$$\begin{aligned}
 E(\text{nei conduttori}) &= \sum_k \frac{u_k}{\delta} \\
 V(\text{esterno}) &= \sum_k v_k = \sum_k \left(\int \frac{r_k(t)}{r} dv + \int \frac{q_k(t)}{r} dS \right) \\
 E(\text{esterno}) &= \mu \dot{V} + \mu \frac{dA}{dt}
 \end{aligned}$$

($\mu \frac{dA}{dt}$ quasi sempre trascurabile)

e si impone solo l'egualianza dei lavori (4) e non delle divergenze (8) e si trascurano i ritardi, si ricade nel metodo del Crout. Ciò è lecito solo quando i ritardi possono essere trascurati (fenomeni lentamente variabili), quando le correnti nei conduttori sono a divergenza nulla ($E_1 = 0$ e $\rho = 0$) e quando sulle superfici di vaporazione dei conduttori è $E_{\text{esterno}} = \eta/\epsilon$ essendo $\frac{\eta}{\delta}$ trascurabile rispetto ad η .

In tali condizioni, operando su un numero n grande di modi di correnti a $\text{div} = 0$, il metodo del Crout porta a soluzione abbastanza approssimate, ma sempre in modo limitato in quanto l'approssimazione avviene a meno di un campo derivante da un potenziale, perchè le (8) non sono necessariamente soddisfatte.

6.- Approssimazione della soluzione delle equazioni di Maxwell mediante modi di campi elettrici.-

Per l'approssimazione della soluzione mediante modi di campi elettrici si procede così:

a) Poichè esiste la soluzione delle (3) (4) (5), esisterà una $\vec{E}(txyz)$ che per $t < T$ sarà esprimibile mediante una:

$$\sum_k a_k(t) v_k(xyz)$$

b) Limitiamo la \sum a n termini v_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tali che l'andamento fisico intuitivo del fenomeno ci faccia presumere sufficientemente approssimativa la soluzione (si potrà fare la verifica a posteriori).

- c) Ammesso $\mu =$ costante dalle (3) e (5) ricaviamo le H, associate ad ogni singolo modo

$$\vec{H}_i = a_i(t) k_{1i}(x, y, z) + a'_i(t) k_{2i}(x, y, z)$$

- d) Imponiamo che la (4) sia valida per n cammini ove la E e la H siano $E = \sum E_i$; $H = \sum H_i$ Abbiamo così n equazioni differenziali lineari la cui soluzione ci dà la soluzione del problema.
- e) Se invece di limitarci ad un semplice cammino, integriamo su un tubo di flusso, veniamo ad interessare una zona di campo maggiore e ci avviciniamo maggiormente alla combinazione che approssima più di tutte le possibili le soluzione.
- f) Le circuitazioni integrate su tubi di flusso ci danno i lavori del nostro campo elettromagnetico più il lavoro eseguito dal campo impresso, su una certa distribuzione di corrente uniforme nel tubo. Questa somma di lavori è uguale a zero.

Giuseppe Sacerdoti

18 Marzo 1954

— • —

TABELLA A

Tabella delle differenze di amperspire massime lungo l'azimut al varia e della frequenza nel caso del Tiburtino I° per le eccitazioni del tipo di fig.2 e di fig.4.-

$2\pi f = \omega$	126	158	189
Caso in cui un capo del generatore a c.a. sia a terra (fig.2)	0,325	0,56	0,8
Caso in cui sia a terra la fine dell'avv.2 ed il principio dell'avv.3 (fig.4)	0,143	0,245	0,35

TABELLA B

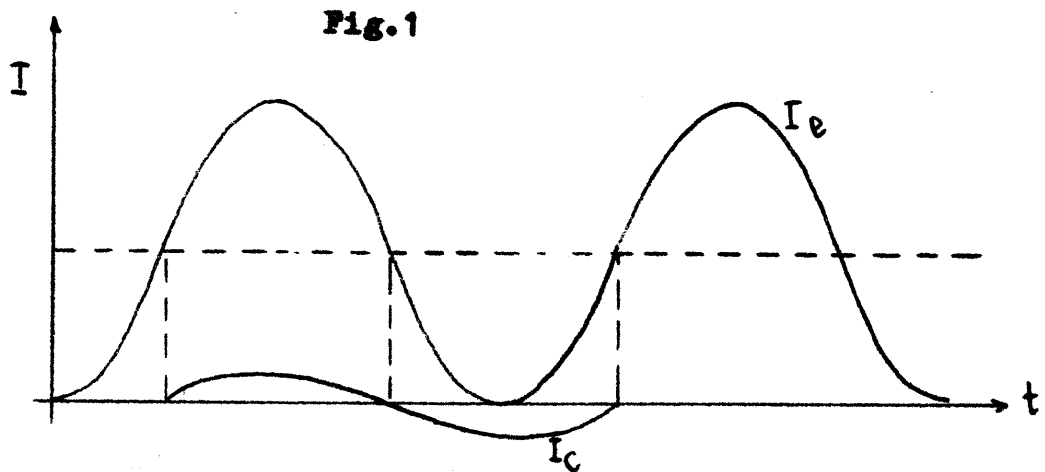
Tabella dei rapporti percentuali della differenza di amperspire massime lungo l'azimut riferiti alle amperspire che si hanno all'iniezione al variare della frequenza nel caso del Tiburtini I° per le eccitazioni del tipo di fig.2 e di fig.4 (Campo all'iniezione B = 14 gauss).-

$2\pi f = \omega$	126	158	189
Caso in cui un capo del generatore a c.a. sia a terra (fig.2.)	0,35	0,6	0,85
Caso in cui sia a terra la fine dell'avv.2 ed il principio dell'avv.3 (fig.4.)	0,15	0,26	0,37

TABELLA C

In questa tabella sono indicati i valori dei parametri concentrati del circuito equivalente che ci serve a determinare le correnti per capacità che si hanno in un quadrante. Si trovano anche in questa tabella le tensioni generalizzate, cioè i lavori che le tensioni esterne reali fanno sul modo i esimo quando $q_i = 1$ A ; $V =$ tensione ai capi di un quadrante. Per trovare C_{ik} basta leggere sulla riga Mod.1 e sulla colonna Mod.2 il parametro corrispondente nella colonna C.

Modo	Modo 1		Modo 2		Modo 3		Tensione generalizzata
Costante del circuito equivalente	L	C _{Farad}	L	C _{Farad}	L	C _{Farad}	
Modo 1	$4,2 \cdot 10^{-3}$	0	-0,97	0	-4,86	0	V
Modo 2	-0,97	0	127	$\frac{1}{3600 \cdot 10^{10}}$	630	0	0
Modo 3	-4,86	0	630	0	3900	$\frac{1}{41 \cdot 10^{15}}$	3.V. 3384



In questa figura sono indicate qualitativamente le correnti seguenti:

I_e = corrente di eccitazione principale del magnete

I_c = corrente all'entrata di un quadrante provocata dalle capacità parassite tra i conduttori ed il magnete: varia da quadrante a quadrante

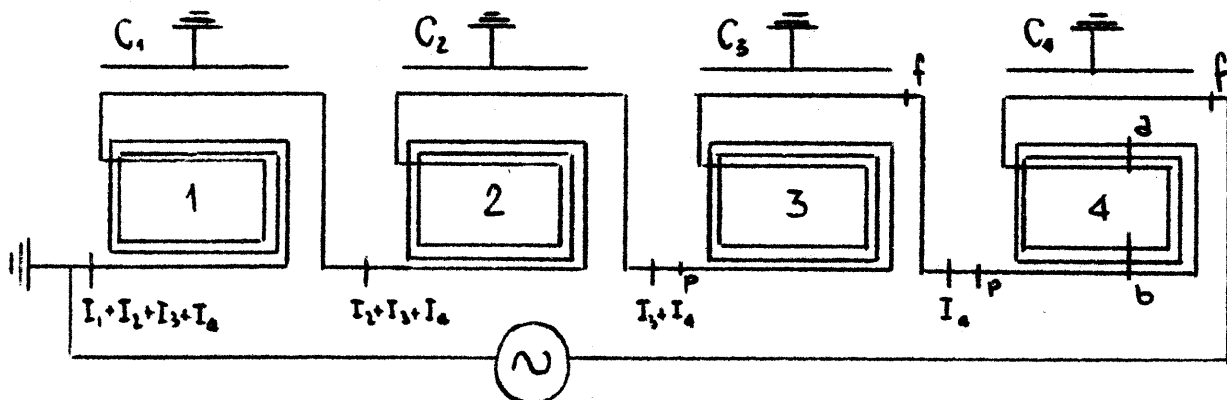
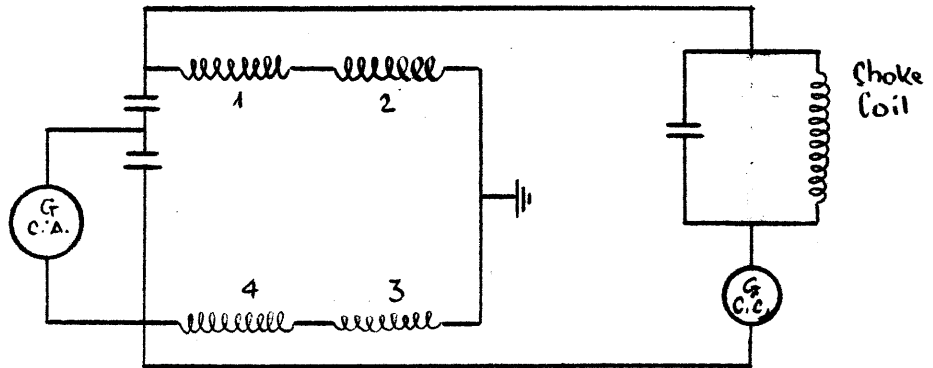


Fig.2 - Schema degli avvolgimenti principali

I numeri cardinali nel centro di ogni avvolgimento rappresentano il settore a cui l'avvolgimento si riferisce. Il contrassegno C rappresenta la capacità da un avvolgimento rispetto terra (magnete). I_i rappresenta la corrente provocata dalle capacità parassite dell' i esimo quadrante e sta ad indicare il fascio di conduttori esterni; b indica il fascio di conduttori interni; f la fine dell'avvolgimento di un quadrante; p il principio.

Fig. 4

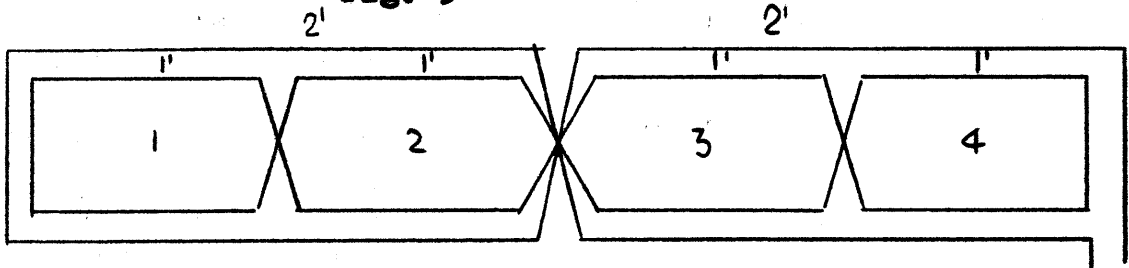


Schema di alimentazione del sincrotrone, con a terra il punto di collegamento tra il quadrante 2 e 3 dell'avvolgimento del sincrotrone, mentre il principio della bobina del quadrante 1 e la fine di quella del quadrante 4 sono ai capi del g. c.c. In tal caso il g.c.c. sarebbe portato tutto in tensione rispetto terra.

1, 2, 3, 4, = avvolgimenti del sincrotrone.

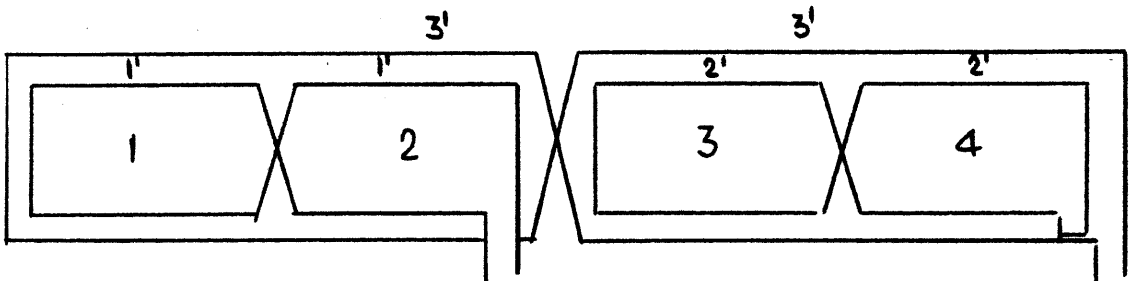
Fig. 5

Disposizione Ia



I numeri cardinali non accentati stanno ad indicare i quadranti. Quelli accentati le bobine.-

Disposizione IIa



Disposizione schematica delle bobine di correzione per correggere le disuniformità azimutali provocate dalle capacità parassite degli avvolgimenti.-