

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 54/10
18. 3. 1954.

C;Bernardini: PERDITE DI SCATTERING ED ERRATA. -

Gruppo Teorico

Rapporto n. 11

C. Bernardini

PERDITE DI SCATTERING

Essendo le dimensioni orizzontali della doughnut molto più grandi delle dimensioni verticali, ci limiteremo a considerare la diffusione nel piano in cui si svolgono le oscillazioni verticali. L'energia delle particelle, E , è certo $\gg E_0 = m_0 c^2$, così che $\beta = \frac{v}{c} \approx 1$ e, per il caso che il gas residuo sia aria,

$$\frac{Z}{137\beta} \approx 0.05 \ll 1$$

cioè vale l'approssimazione di Born.

Se χ indica la proiezione dell'angolo di scattering sul piano di oscillazione, assumeremo la seguente espressione per la sezione d'urto differenziale

$$(1) \quad H_e(\chi) d\chi = \frac{2\pi n Z^2 r_e^2 E_0^2}{E^2} \frac{d\chi}{(\chi^2 + \Theta_m^2)^{3/2}}$$

in cui $Z \approx 7.2$, n è il numero di centri diffondenti per cc., $r_e = 2.8 \times 10^{-13}$ cm, e Θ_m è un angolo fissato dalla distribuzione elettronica degli atomi del gas. Una tale forma di $H_e(\chi)$ corrisponde all'approssimazione in cui un campo Coulombiano è schermato con un fattore esponenziale; sono possibili molte scelte approssimate di campi atomici che portano a varie espressioni di $H_e(\chi)$ e Θ_m ma in seguito adotteremo la (1) in quanto semplifica notevolmente i calcoli. Quanto a Θ_m faremo (sin quando sarà possibile) la sola ipotesi che dipenda linearmente da $1/E$.

Sino a che si trascura il damping le equazioni delle oscillazioni verticali di betatrone hanno la forma seguente:

$$(2) \quad z'' + \frac{z}{\lambda^2} = 0$$

essendo λ scelto in modo da tener conto delle eventuali sezioni diritte. Chiameremo x l'ascissa contata lungo l'orbita; in $x=x_0$ avviene l'iniezione. Per un dato x , la traiettoria di un elettrone sarà caratterizzata da una coppia di valori (z, z') dell'altezza ed inclinazione sul piano mediano; per doughnut di piccola apertura z' è praticamente l'angolo che forma la traiettoria con l'asse delle x in quanto $\lambda \gg b$ (altezza doughnut): uno scattering di un angolo χ significa allora che la z' si muta in $z'+\chi$.

Sia $n(z, z', x)$ il numero di particelle per unità di area, nel piano (z, z') , che hanno percorso un tratto x . Chiamiamo poi

$$(3) \quad z'_m(z) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{b^2}{4} - z^2 \right)^{1/2}$$

il massimo valore di z' (per una certa z) compatibile con le condizioni di urto contro le pareti. Ciò posto, la funzione $n(z, z', x)$ - che supporremo in seguito normalizzata ad 1 per $x=0$ - è soluzione dell'equazione:

$$(4) \quad \frac{\partial n}{\partial x} = -z' \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{z}{\lambda^2} \frac{\partial n}{\partial z'} - k_e n + \int_{-z'_m}^{z'_m} H_e(z'-z') n(z, z', x) dz'$$

con le condizioni

$$(5) \quad \begin{aligned} n(z, z'_m(z), x) &= 0 \\ n(z, z', x) &= n_0(z, z') \end{aligned}$$

k_e è la probabilità di una collisione per unità di percorso $n_0(z, z')$ è specificata dalla distribuzione iniziale delle

oscillazioni di betatrone.

Quando $z'_m \rightarrow 0$ la n tende alla forma

$$c(x) \int (z) \int (z')$$

con $c(x_0)=1$ e

$$\frac{dc}{dx} = -\kappa_c c$$

Questa é l'approssimazione suggerita da Wilson. Se invece $z'_m \rightarrow \infty$ l'equazione (4), a parte i termini dovuti all'esistenza di una forza di richiamo, si riduce al tipo ben noto della equazione di diffusione per scattering multiplo (Rossi, High Energy Particles, pag.69 e seg.; Bethe, Phys. Rev., 89, 1256, 1953, v. eq. (1) pag.1257 e bibliogr. ivi citata). In questo caso la distribuzione angolare è con buona approssimazione gaussiana, per angoli non troppo grandi ed in assenza di forza di richiamo.

Il nostro caso si differenzia da quelli sopra citati per due ragioni:

- a) esistenza della forza di richiamo;
- b) esistenza di pareti che limitano le dimensioni laterali del fascio.

a) e b) insieme introducono un parametro caratteristico

$$(6) \quad z'_M = z'_m(0) = \text{massimo di } z'_m = \frac{b}{2\lambda}$$

il quale specifica l'ordine di grandezza degli angoli maggiormente interessati nella diffusione elastica: siccome z'_m può essere dell'ordine di \mathcal{O}_m avverrà che una troppo grossolana conoscenza di \mathcal{O}_m si tradurrà, in tali casi, in una cattiva valutazione del numero di particelle che vengono assorbite dalle pareti; l'andamento qualitativo di $n(z, z', x)$ in funzione di z e z' invece è certamente meno sensibile alle variazioni di \mathcal{O}_m .

Conviene ricorrere ad alcune semplificazioni e precisamente:

- 1) uno sviluppo di Fokker-Planck del termine integrale di (4);
- 2) la considerazione di casi in cui la distribuzione iniziale è sensibilmente \neq o solo se $z'^2 \ll z_M'^2$.

-0-

Poniamo

$$(7) \quad \chi_n(z; z', x) = \int_{z' - z_M'(z)}^{z' + z_M'(z)} \chi^n H_e(\chi) d\chi$$

Con le semplificazioni 1) e 2) ora citate e sino a termini dell'ordine di χ_0 , si ha:

$$(8) \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = -z' \frac{\partial \chi}{\partial z} + \left(\frac{z}{\lambda^2} + \chi_0 \right) \frac{\partial \chi}{\partial z'} - (k_e - \chi_0) n + \frac{1}{2} \chi_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z'^2}$$

In questa equazione, nell'approssimazione $z'^2 \ll z_M'^2$ supposta in 2), e con l'espressione (1) di $H_e(\chi)$,

$$\chi_0 = z \frac{q^2}{\lambda^2} \frac{z_M'}{(z_M'^2 + \Theta_{in}^2)^{1/2}}$$

$$\chi_1 = z \frac{A}{E^2} z' \quad , \quad A = \frac{q^2}{\lambda^2} \frac{z_M'}{(z_M'^2 + \Theta_{in}^2)^{3/2}}$$

essendo

$$\lambda = E \Theta_{in} \quad , \quad q^2 = 2\pi n z^2 \nu^2 E_0^2$$

Trascureremo in un primo momento, nella (8), il termine in χ_1 :

$$(8') \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = -z' \frac{\partial \chi}{\partial z} + \left(\frac{z}{\lambda^2} + \chi_0 \right) \frac{\partial \chi}{\partial z'} - (k_e - \chi_0) n$$

Se le equazioni del moto avessero la forma

$$(9) \quad z'' = -\frac{z}{\lambda^2} - \chi_1$$

La (8') potrebbe scriversi

$$\frac{dn}{dx} = -(K_e - \chi_0)n$$

e poi

$$n(z, z', x) = n_0(z, z') e^{-\int_{x_0}^x (K_e - \chi_0) dx}$$

intendendo ora per z e z' soluzioni di (9) verificanti le stesse condizioni iniziali che per l'equazione (2). Da una valutazione numerica si vede che il termine in χ_0 è però sostanzialmente trascurabile così che, posto

$$(10) \quad \tau = \int_{x_0}^x (K_e - \chi_0) dx$$

La frazione di elettroni assorbita dalle pareti è data da

$$(11) \quad \tau = \tau_0 e^{-\tau}$$

-0-

Procederemo ora di includere il termine in χ_0 che è il termine di diffusione vero e proprio. Continueremo a trascurare l'effetto di

L'equazione (8) può scriversi

$$(12) \quad \frac{dn}{dx} = -(K_e - \chi_0)n + \frac{1}{2} \chi_0 \frac{z^2}{\lambda^2}$$

Faremo ancora l'ipotesi 2) di pag.4, ed in più le seguenti:

(α) $n(z, z', x)$ può scriversi $\nu(x)f(z, z')$;

(β) $df/dx=0$; cioè, in virtù delle equazioni del moto (2), f dipende praticamente dall'ampiezza $\sqrt{y}=(z^2+\lambda^2 z'^2)^{1/2}$. Porremo $f(z, z')=f(y)$. Si ottengono le equazioni seguenti

$$(13) \quad \frac{df}{dy} + 2\lambda^2 z'^2 \frac{d^2f}{dy^2} = -\frac{\mu^2}{\lambda^2} f$$

$$(14) \quad \frac{d\nu}{dx} = -(\kappa_e - \chi_e + \mu^2 \chi_e) \nu$$

essendo μ un parametro di separazione.

Se nella (13) trascuriamo il termine in z'^2 , la soluzione prende la forma

$$(15) \quad f = e^{-\frac{\mu^2}{\lambda^2} y}$$

non si può però imporre la prima delle condizioni (5), relativa a valori di y confrontabili con b , cioè di z' confrontabili con z'_H ; infatti quella condizione è ora semplicemente

$$(16) \quad f(b^2) = 0$$

non è perciò possibile determinare i valori di μ a partire da (15) ed usando (16). Per far ciò, ed ottenere poi una soluzione della forma

$$(17) \quad n(z, z', x) = n(y, z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \nu_{\ell}(x) f_{\ell}(y)$$

dovremo fare un ulteriore passo: mediamo (v. appendice) la equazione (13) su molti periodi di oscillazione; essa assume con ciò la forma

$$(18) \quad f'' + \frac{1}{y} f' + \frac{\mu^2}{\lambda^2 y} f = 0$$

Le soluzioni compatibili con la prima delle (5) sono

$$f_{\ell} = J_0 \left(\lambda_{\ell} \left(\frac{y}{b_0^2} \right)^{1/2} \right)$$

essendo J_0 una funzione di Bessel e $J_0(\lambda_e) = 0$. Con ciò si è trovato

$$\mu_e = -\frac{1}{2} \frac{x}{b} \lambda_e$$

Conservando la notazione (10), posto $y/b = \xi$, si ha la seguente forma esplicita dello sviluppo (17):

$$(19) \quad n(y, x) = e^{-\tau} \sum_{e=1}^{\infty} v_e(x) J_0(\lambda_e \xi^{1/2}) e^{-\mu_e^2 \alpha_2}$$

in cui i coefficienti $v_e(x)$ si ricavano dalla seconda delle condizioni (5) ed α_2 sta per

$$\int_{x_0}^x \chi_1(x) dx$$

Come già s'è detto a pag. , il valore numerico di questi due parametri, τ , ed α_2 , è fortemente influenzato dalla scelta di Φ_m .

Integrando poi la (19) su tutti i valori di y tra 0 e b si ottiene la frazione di particelle che non è stata assorbita dalle pareti.

Se supponiamo $n_0(y) = \delta(y)$, posto $\frac{\lambda^2}{b^2} \alpha_2 = \tau_2$, questa frazione è

$$\phi(\tau, \tau_2) = 2 e^{-\tau} \sum_{s=1}^{\infty} [\lambda_s J_1(\lambda_s)]^{-1} \exp(-\frac{1}{4} \lambda_s^2 \tau_2) = A e^{-\tau}$$

$A(\tau_2) \gg 1$ per $\tau_2 \gg 0$; essendo poi $\tau_2 > 0$, $A(\tau_2) \leq 1$ (anche se $J_1(\lambda_s)$ è alternativamente > 0 per s dispari, < 0 per s pari).

-0-

E' ora necessario per confermare i valori numerici delle tabelle, un esame della sezione d'urto differenziale a piccoli angoli. Si può calcolare, a partire da un campo di Thomas-Fermi semplificato, della forma

$$rV(r) = \sum_{s=1}^3 c_s e^{-p_s r}$$

il rapporto tra la sezione d'urto corretta a piccoli angoli, $Q(\chi)$, e quella di Rutherford, $Q_p(\chi)$ (Moliers, Zeitsch. für Natur. 2a, 133, 1947). In definitiva si trova che la (1) è, in approssimazione di Born, una sezione d'urto abbastanza soddisfacente se si sostituisce $\mathcal{Q}_{m,1}$ con $1.22 \mathcal{Q}_{m,1}$ (Annis, Bridge, Olbert, Phys. Rev., 89, 1216, 1953, formule (1) e (3)).

L'effetto del legame chimico, che altera la distribuzione elettronica e quindi il $\mathcal{Q}_{m,1}$, può essere semplificato ricorrendo ancora allo schema di Thomas-Fermi nell'approssimazione di Hund (Gombàs, Die statistische theorie des atoms, pag. 267 e seg.): il campo molecolare risulta ancora la somma di due campi centrali che danno scattering incoerente essendo la separazione tra i nuclei $\approx 10^{-8}$ cm e la lunghezza d'onda di de Broglie dell'elettrore diffuso $\approx 10^{-10}$ cm. E' perciò corretto considerare la costante c^2 di pag. proporzionale al numero di atomi ≈ 2 numero di molecole.

Per il calcolo del $\mathcal{Q}_{m,1}$ si trovano dei dati per l'azoto (Gombàs, loc. cit.). Il procedimento potrebbe essere il seguente: la sezione d'urto per $\chi = 0$ ha un valore finito, che non dipende da E , ma soltanto dalla forma del potenziale (Massey, Burhop, Electronic and Ionic impact phenomena, pag. 129). Uguagliando la (1) per $\chi = 0$ con l'espressione che si ottiene per $\chi = 0$, nell'approssimazione di Hund, si ricava il $\mathcal{Q}_{m,1}$. Il risultato però differisce certamente molto poco dal caso di due atomi liberi.

Appendice: giustificazione dell'eq. (18).

Sappiamo che le funzioni z, z' variano con x molto più rapidamente che i coefficienti χ_n . Possiamo perciò pensare di mediare ciascun membro dell'eq. (12) su molti periodi di oscillazione. Facciamo la posizione α) di pag.6 (ma non necessariamente la β)); inoltre, posto

$$y = \lambda^2 z'^2 + z^2, \quad \alpha = \text{arctg} \frac{z}{\lambda z'}$$

consideriamo lo sviluppo

$$f(z, z') = f(\sqrt{y} \sin \alpha, \lambda \sqrt{y} \cos \alpha) = a_0(y) + \sum (a_k(y) \cos k\alpha + b_k(y) \sin k\alpha)$$

Essendo

$$z' \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{z}{\lambda^2} \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

e poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} &= 2\lambda^2 \frac{\partial f}{\partial y} + 2\lambda^2 y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \\ &+ \lambda^2 \cos 2\alpha \left(2y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{2y} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{\lambda^2}{y} \sin 2\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} - 2y \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial y} \right) \end{aligned}$$

si trova

$$\left\langle z' \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{z}{\lambda^2} \frac{\partial f}{\partial z'} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} \right\rangle = 2\lambda^2 \frac{da_0}{dy} + 2\lambda^2 y \frac{d^2 a_0}{dy^2} + 2\lambda^2 \frac{da_2}{dy} + \lambda^2 y \frac{d^2 a_2}{dy^2}$$

L'eq. (12) diviene

$$a_0 \frac{dy}{dx} = -(k_0 - \chi_0) a_0 y + \lambda^2 \chi_2 y \frac{da_0}{dy} + \lambda^2 \chi_2 y y \frac{d^2 a_0}{dy^2} + \frac{1}{2} \lambda^2 \chi_2 y \frac{da_2}{dy} + \frac{1}{2} \lambda^2 y y \chi_2 \frac{d^2 a_2}{dy^2}$$

L'eq. per a_0 s'identifica con la (18) per $f(y)$ se

$$\frac{d^2 a_0}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{da_0}{dy} = 0$$

Dovendo poi essere $f(z, z_{\mu}^{\prime})=0$ si avrà

$$a_k(b^2) = 0$$

Inoltre l'andamento di a_2 nell'origine dovrà essere tale da assicurare la convergenza dell'integrale che dà il numero di elettroni. È immediato verificare che, con queste condizioni

$$a_2 = 0$$

In questo senso la (18), ottenuta con un criterio di media molto più rudimentale ma semplicissimo, può essere giustificata.⁽⁴⁾

-0-

(1) - La condizione $a_2=0$ si trova anche per il caso più generale

$$a_2'' + \frac{2}{y} a_2' = c' a_0$$

Infatti

$$a_2 = c' \int \frac{dy}{y^2} \int a_0 dy + \frac{c''}{y} + c'''$$

Dovendo essere a_2 finito nell'origine ed essendo a_0 certamente monotona e finita per $y \rightarrow 0$,

$$c' = 0, \quad c'' = 0$$

Inoltre $a_2(b^2)=0$ si traduce in $c'''=0$.

Valori delle perdite per il progetto Pisa III.

Le seguenti tabelle numeriche si riferiscono al caso in cui l'energia delle particelle varia linearmente con x:

$$E = E_i \left(\frac{x}{x_0} \right)$$

Si suppone di essere alla temperatura di 300°K. Con b si indicano le dimensioni verticali della doughnut, in cm; con p la pressione in mmHg: σ è la spiralizzazione fissata dai valori di E_i e $\frac{dE_i}{dx} = \frac{E_i}{x_0}$, espressa in cm.

Con un asterisco sono contrassegnati i casi in cui $A(\tau_2)$ è risultato sensibilmente $\neq 0$.

σ	$p=10^{-5}$		2×10^{-5}		5×10^{-5}		Energia tot. iniez.
0.1	0.90*	0.73*	1.00*	0.95*	1.00*	1.00*	$E_i = 1.5 \text{ MeV}$
0.3	0.45*	0.30	0.76*	0.55*	1.00*	0.92*	
0.6	0.22	0.15	0.45*	0.29	0.84*	0.64*	
0.9	0.16	0.10	0.30	0.19	0.68*	0.47*	
0.1	0.45*	0.26	0.75*	0.50*	0.99*	0.89*	$E_i = 2.5 \text{ MeV}$
0.3	0.16	0.10	0.32	0.19	0.77*	0.43*	
0.6	<.10	<.10	0.16	<.10	0.38	0.22	
0.9	<.10	<.10	0.11	<.10	0.26	0.16	
	b=5	6	5	6	5	6	

Per il caso di un campo magnetico variabile sinusoidalmente, con bias, il calcolo delle perdite è estremamente complicato. Se il bias è quasi totale, e l'energia di iniezione

$\gg 2$ MeV, allora una formula approssimata per τ è la seguente:

$$\tau = \frac{h_e}{\Omega} M$$

in cui

$$h_e = 4.35 \times 10^8 \text{ p}$$

Ω è la pulsazione del campo magnetico $B(t)$ in sec^{-1} ed

$$M = \frac{1}{3} \left(\frac{E_1}{E_M} \right)^{1/2} \left(\frac{W_0}{E_1} \right)^2 \left(1 + 0.3 \frac{B_{\min}}{B_1} \right)$$

E_1 è il valore massimo di E , B_{\min} e B_1 sono rispettivamente i valori minimo ed all'iniezione di B ; $W_0 = \frac{3.2}{b}$, espresso in MeV se b è in cm.

Nel peggiore dei casi, precisamente per

$$E_1 = 1.5, \quad b = 5, \quad B_{\min} = 4.9 \text{ G}$$

il valore della perdita è certamente $< 60\%$, se la pressione è di 10^{-5} mm.

---oo0oo---

I.N.F.N. - Sezione Acceleratore

Gruppo Teorico

Errata al rapporto n. 11

C. Bernardini

A pag. 6 del rapporto n°11 la formula (16) è errata: infatti la massima ampiezza consentita alle oscillazioni di betatrone è $b/2$ e non b . La (16) va quindi modificata come segue:

$$f\left(\frac{b^2}{4}\right) = 0$$

Questo cambia il valore di τ_2 e quindi di $A(\tau_2)$ corrispondente ad una certa pressione, spiralizzazione, apertura etc. La tabella di pag.11 va sostituita con la seguente:

$\tilde{\sigma}$	$p = 10^{-5}$		2×10^{-5}		5×10^{-5}		E_i
0,1	0,94	0,86	1,00	1,00	1,00	1,00	1,5
0,3	0,48	0,37	0,82	0,69	1,00	0,98	
0,6	0,24	0,18	0,48	0,37	0,89	0,81	
0,9	0,16	0,11	0,34	0,24	0,74	0,59	
0,1	0,58	0,44	0,89	0,79	1,00	1,00	2,5
0,3	0,17	0,13	0,39	0,28	0,84	0,71	
0,6	0,08	0,05	0,17	0,13	0,48	0,34	
0,9	0,05	0,03	0,11	0,08	0,31	0,21	
$t =$	5	6	5	6	5	6	

Resta valido quanto asserito per un campo magnetico con bias.

Ringrazio il Dott. P.G. Sona che mi ha fatto notare l'errore commesso.

Inoltre, a pag.8, è scritto "... se si sostituisce \textcircled{H}_m con $1.22 \textcircled{H}_m$ " senza specificare il valore scelto per \textcircled{H}_m . Il \textcircled{H}_m è stato preso, nei calcoli numerici, uguale ad $\frac{E_0 Z^3}{137 E}$ secondo un noto criterio di taglio per la sezione d'urto (v. Rossi, High Energy particles, pag.65).