

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 54/9
17.3.1954.

E. Persico e C. Bernardini: TEORIA DELLA CATTURA SEMIRAPIDA
E LENTA. -

E. Persico, C. Bernardini

TEORIA DELLA CATTURA SEMIRAPIDA E LENTA1. Introduzione.

In un precedente rapporto (E. Persico, Teoria della cattura rapida etc. Rapp. n°4; citato nel seguito con la sigla E.P.4) si è dato un metodo per calcolare il rendimento di cattura ξ_c (cioè la frazione degli elettroni, circolanti nella ciambella all'atto dell'accensione della R.F., che viene catturata) supponendo che l'accensione sia "istantanea", cioè che la tensione di cresta \mathcal{U} della cavità a R.F. si porti dal valore 0 ad un valore costante $\bar{\mathcal{U}}$ in un tempo trascurabile sia rispetto al periodo T_f delle oscillazioni di fase, che rispetto a $\sqrt{T_{0_{\text{rot}}}\vartheta}$, dove ϑ è la durata dell'iniezione (definita in E.P.4, par.1) e $T_{0_{\text{rot}}}$ è il periodo di rotazione per velocità delle particelle uguale a c.

Se invece la \mathcal{U} sale da 0 a $\bar{\mathcal{U}}$ in un tempo \textcircled{H} non trascurabile, il calcolo del rendimento di cattura diviene molto più complicato e non si può fare in modo generale. Se \textcircled{H} , pur non essendo trascurabile rispetto a $\sqrt{T_{0_{\text{rot}}}\vartheta}$, è ancora assai piccolo rispetto a T_f (cattura semirapida) è possibile usare un metodo di integrazione per serie che porta a formule abbastanza generali; se invece \textcircled{H} è confrontabile con T_f (cattura lenta) si deve ricorrere a laboriose integrazioni numeriche da farsi caso per caso.

Nel presente rapporto riferiamo i calcoli eseguiti per alcuni casi particolari di cattura semirapida ($\textcircled{H} = 1$ sec) e lenta ($\textcircled{H} = 3$ sec) adottando le costanti numeriche relative al progetto III (Tiburtino) (v. rapp. n°10) ed una legge

di salita del tipo (v. fig. 1)

$$U(t) = \bar{U} \left(\frac{t}{\tau} \right)^m \quad (1)$$

con $m=1$ (salita lineare), o, $m=4$. Le notazioni usate, quando non sono specificatamente definite, sono le stesse adoperate nel citato rapporto E.P.4.

I valori adottati per questo calcolo sono i seguenti:

Energia di iniezione $E_i = 1,5$ MeV;

Armonica della R.F. $k = 4$;

Spiralizzazione $\sigma = 0,25$ cm;

$\varphi_s = 30^\circ$;

Larghezza utile ciamb. $a' = a = 16$ cm;

Durata iniezione $\theta = 2,9$ μ s;

$K^v = 2,24$

$u = 400$ volt

$\bar{U} = 800$ volt

$C = 2,9$

2. Principio del metodo.

In E.P.4 il rendimento di cattura ρ_c è calcolato valutando graficamente il numero di elettroni per i quali le oscillazioni di fase non escono dai limiti della stabilità ed inoltre la somma delle ampiezze delle oscillazioni di sincrotrone e di betatrone non supera la semilarghezza della ciambella (tale numero risulta proporzionale all'area compresa tra la curva della fig.6 E.P.4 corrispondente alla data fase sincrona φ_s ed una retta orizzontale di ordinata proporzionale alla semilarghezza della ciambella⁽¹⁾). Lo stesso metodo

(1) Almeno nell'ipotesi che le fasi siano distribuite uniformemente tra 0 e 2π e così anche le ampiezze di betatrone tra 0 e la semilarghezza della ciambella: questa ipotesi verrà conservata nel presente rapporto.

sarà seguito nel presente rapporto, ma le curve di fig.6 E.P.4 saranno sostituite da altre costruite per punti, valutando l'ampiezza delle oscillazioni di fase, che si stabiliscono ad accensione terminata (cioè per $t > \textcircled{H}$) in funzione della fase φ_0 relativa all'inizio dell'accensione (per $t=0$).

A tale scopo si deve integrare l'equazione della fase (formula 6, E.P.4)

$$\ddot{\varphi} = M \left(1 - \frac{U}{\omega} \sin \varphi \right) \quad (2)$$

nell'intervallo di salita $0 \leq t \leq \textcircled{H}$ (in cui U è funzione di t data dalla (1)) in modo da ottenere i valori finali di questo intervallo $\varphi(\textcircled{H})$ e $\dot{\varphi}(\textcircled{H})$, i quali poi fungono da valori iniziali per le oscillazioni nel periodo di regime, $t > \textcircled{H}$ (in cui U è costante), che sono oscillazioni del tipo ordinario. L'ampiezza di queste oscillazioni è facilmente espressa in funzione di $\varphi(\textcircled{H})$ e $\dot{\varphi}(\textcircled{H})$: tutta la difficoltà sta quindi nel valutare queste ultime grandezze in funzione di φ_0 e di $\dot{\varphi}_0$ attraverso l'integrazione della (2) nel periodo di salita.

3. Specificazione delle costanti relative all'equazione (2).

La costante M (definita in E.P.4, formula 8) dipende sostanzialmente dalla durata ϑ dell'iniezione, alla quale è inversamente proporzionale: essa vale infatti

$$M = (i-n) \frac{\pi R K^*}{T_{\infty} \beta} \frac{a}{R} \frac{1}{\vartheta} \quad (3)$$

n è l'indice del campo, k l'ordine dell'armonica della R.F., K^* è definita in E.P.4 pag.4, T_{∞} è il periodo di rotazione delle particelle al limite in cui β (velocità in unità c) è uguale ad 1, a è la larghezza della ciambella ed R il raggio dell'orbita principale nei tratti curvi. È opportuno esprimere M in funzione della spiralizzazione σ definita

da $\sigma = \alpha \frac{T_{0.200}}{2\beta\theta}$:

$$M = (1-n) \frac{2\pi k K^*}{T_{0.200}^2} \frac{\sigma}{R} \quad (4)$$

Il rapporto $\frac{\bar{U}}{u}$ definisce la fase della particella sincrona:

$$\frac{\bar{U}}{u} = \sin \varphi_s \quad (5)$$

Mediante φ_s ed il periodo T_f delle oscillazioni di fase che si iniziano ad accensione terminata si può esprimere la costante M anche in quest'altro modo:

$$M = \frac{4\pi^2}{T_f^2} \operatorname{tg} \varphi_s \quad (6)$$

E' opportuno introdurre come variabile indipendente $\xi = t/\textcircled{H}$ e indicare con $f_m(\xi)$ la funzione così definita:

$$f_m(\xi) = \xi^m \quad \text{per } 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{cioè } 0 \leq t \leq \textcircled{H}$$

$$f_m(\xi) = 1 \quad \text{per } \xi \geq 1 \quad \text{cioè per } t > \textcircled{H}$$

Porremo ancora

$$\psi(\xi) = \varphi(t), \quad \psi'(\xi) = \frac{d\psi}{d\xi}, \quad \psi_0 = \psi(0) \quad \text{etc.}$$

e inoltre

$$\mu = M \textcircled{H}^2 \quad (7)$$

Ci riferiremo d'ora in avanti al caso $\varphi_s = 30^\circ$ (corrispondente, presso a poco, al valore optimum, secondo E.P.4, per i valori di E_1 , σ , k , a adottati al par.1 e per il caso della cattura rapida).

L'equazione (2) assume con ciò la forma

$$\psi'' + 2\mu f_m(\xi) \sin \psi = \mu \quad (8)$$

Risalta immediatamente il ruolo della costante adimensionale μ il cui valore numerico decide il tipo di approssimazione conveniente per l'integrazione della (8), nel senso specificato al par.1: la (7), insieme con la definizione (6) o con la definizione (3) di M mostra la dipendenza di μ da $\frac{\textcircled{H}}{T_f}$ o da $\frac{\textcircled{H}^2}{T_{,22}}$.

I casi che si esamineranno in questo rapporto saranno quelli in cui

- A) $\mu = 1.9$ (caso semirapido)
- B) $\mu = 17.1$ (caso lento)

Se si prende $T_f = 3.7 \mu \text{ sec}$ il caso A) corrisponde a $\textcircled{H} = 1 \mu \text{ sec}$ ed il caso B) a $\textcircled{H} = 3 \mu \text{ sec}$ (naturalmente con $\sin \varphi_s = \frac{1}{2}$); oppure, riferendosi alla (4) con $k=4$, i casi A) e B) si riferiscono a $\sigma = 0.25 \text{ cm}$ per $\textcircled{H} = 1 \mu \text{ sec}$ e $3 \mu \text{ sec}$ rispettivamente. Come si vede dalla (8) non è necessario però specificare il valore di σ e di \textcircled{H} , ma basta fissare il μ (cioè $\sigma \textcircled{H}^2$), la forma della salita e l'istante d'accensione (come si spiegherà meglio tra breve) per ottenere un risultato che vale per tutti quei valori di σ e \textcircled{H} per cui $\mu = 1.9$ (caso A) o $\mu = 17.1$ (caso B).

4. Significato delle soluzioni della (8) e delle loro condizioni iniziali.

L'eq. (8), unitamente ai valori iniziali $\psi_0 = \varphi(0)$ e $\psi_0' = \textcircled{H} \dot{\varphi}(0)$ che saranno precisati tra breve, determina l'andamento della fase φ di una particella durante la salita della R.F. Essa ha anche un altro significato importante. Infatti ψ' (E.P.4, form.4) è proporzionale allo scostamento $X = r_1 - R$ dell'orbita istantanea dall'orbita principale

(cioè dall'asse della ciambella⁽²⁾): l'eq. (8), per $0 \leq \mu \leq 1$, determina quindi la variazione di questa orbita istantanea durante l'accensione. In particolare, facendo $f_m \equiv 0$ (cioè sopprimendo la R.F.) si vede che $X' = \text{cost} \times \mu$, cioè che l'orbita istantanea si contrae con velocità uniforme proporzionale a μ .

Il secondo termine a primo membro della (8) sovrappone a questa contrazione uniforme un'altra variazione dipendente in modo complicato dalle condizioni iniziali e dal tempo. Per esempio, in fig. 2 è riportata la posizione, nel tempo, dell'orbita istantanea di equilibrio all'interno della ciambella (rettificata) per il caso in cui la R.F. non si accenda: un elettrone iniettato sull'orbita istantanea quando questa passa per l'iniettore e in direzione tale che esso non compia oscillazioni di betatrone, prosegue lungo una retta la cui inclinazione sull'asse è σ / lunghezza dell'orbita. Se però si accende la R.F. quando questo elettrone è giunto ad una certa distanza dall'asse (cioè che fissa la ψ') esso abbandona il moto rettilineo e uniforme (nel diagramma) per seguire una traiettoria più complicata (di cui in fig. 3 sono riportati alcuni esempi per il caso di salita lineare semirapida, con $\mu = 1.9$).

Essendo ψ' , come si è detto, proporzionale allo scostamento radiale X dall'orbita principale, se la R.F. non si accendesse vi sarebbe un istante t^* (v. fig. 2) in cui $r_1 = R$, cioè in cui l'orbita istantanea coincide con l'asse della ciambella. Le particelle iniettate dopo questo istante verrebbero perdute perchè le loro ampiezze di betatrone supe-

(2) Precisamente $X = - \frac{C}{\sqrt{2\mu}} \psi'$ dove C è la costante

$$C = \frac{R}{(1-\mu)\beta^2} \sqrt{\frac{\mu}{\pi \kappa K^2 E}}$$

(E.P.4, pag.7, form.17); E è l'energia totale della particella.

rerebbero le dimensioni radiali della ciambella. In realtà, con l'accendersi della R.F. la posizione del cerchio istantaneo dipende in modo complicato da t , ψ_0 e ψ'_0 : si perderanno anche particelle iniettate prima di t^* e si salveranno anche particelle iniettate dopo t^* ; per semplicità perciò fisseremo di regola l'inizio della accensione in modo che sia $t^* = \frac{H}{2}$. Solo nel caso (analiticamente semplice) di una salita con $m=4$ esamineremo la variazione di ρ_c con t^* .

Con questa scelta di t^* si ottiene così

$$\psi'_0 = - \frac{\omega}{2}$$

imponendo alle soluzioni di (8) con $f_m=0$ la condizione $\psi'(\frac{1}{2})=0$ di attraversamento dell'asse all'istante $t = \frac{H}{2}$.

Quanto a ψ_0 , essa può assumere, con uguale probabilità, tutti i valori compresi tra 0 e 2π , come già asserito nella nota (1).

5. La condizione di cattura.

Come già spiegato al par. 1 occorre valutare, in funzione di ψ_0 , le $\psi(1) = \psi_1$ e $\psi'(1) = \psi'_1$. Porremo in seguito

$$h_1 = \frac{\psi'_1}{\sqrt{2\mu}}$$

per $\xi > 1$ la (8) ammette l'integrale primo:

$$\frac{\psi'^2}{2\mu} - 2 \cos \psi - \psi = \text{costante} = h_1^2 - F(\psi_1)$$

essendo

$$F(\psi_1) = 2 \cos \psi_1 + \psi_1 \quad (9)$$

Il massimo ψ'_M di ψ' in funzione di ψ_0 è dato da (E.P.4, pag.6)

$$(10)$$

Come si è visto al par.4, l'ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone è

$$X_M = c \frac{\psi'_M}{\sqrt{2\mu}} = c \tilde{H}(\psi_0) \quad (11)$$

e perciò la condizione di cattura è

$$X_M \leq \frac{a'}{2} - x_M \quad (\text{E.P.4 pag 8})$$

nei casi considerati

$$\alpha = \frac{a'}{2c} = 1.05$$

6. Salita lineare semirapida.

Nel caso della salita lineare ($m=1$) la (8) può essere integrata sviluppando la $\psi(\xi)$ nell'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$ in serie di potenze di ξ . Trascurando termini dell'ordine di ξ^7 si trovano le seguenti espressioni di ψ_1 ed h_1 , (per $\psi_0 = -\frac{\mu}{2}$)

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \psi_0 - \frac{1}{3} \mu \sin \psi_0 + \frac{1}{30} \mu^2 \cos \psi_0 \left(1 + \frac{2}{3} \sin \psi_0\right) - \\ & - \frac{1}{240} \mu^3 \sin \psi_0 - \frac{1}{720} \mu^4 \cos \psi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_1 = & \left(\frac{\mu}{8}\right)^{1/2} \left\{ 1 - 2 \sin \psi_0 + \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{15} \sin \psi_0\right) \mu \cos \psi_0 - \frac{3}{40} \mu^2 \sin \psi_0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{60} \mu^3 \cos \psi_0 \right\} \end{aligned}$$

Per mezzo di tale formula e prendendo $\mu = 1.9$ (salita semirapida) sono stati calcolati ψ_1 e h_1 per diversi valori di ψ_0 : da essi, mediante la (10), si è ricavata la funzione $\tilde{H}(\psi_0)$ per tutti i valori di ψ_0 che danno luogo a moti oscillatori (cioè ad $\tilde{H} \leq \sqrt{F(30^\circ) - F(150^\circ)}$, v. E.P.4 pag.6), i quali sono quelli compresi fra -28° e 150° . Ne è risultata la curva $\tilde{H}(\psi_0)$ riportata in fig.4, dove è anche disegnata, per confronto, l'analoga curva $H(\varphi_0)$ del caso della cattura rapida, presa dalla fig.6 di E.P.4 (per $\varphi_0 = 30^\circ$). Tracciata poi la retta

orizzontale di ordinata $\tilde{H} = 1.05$ (corrispondente a $C = 2.9$, $a' = 16$ cm) si sono confrontate le aree delle due curve al disotto di questa retta. È risultato che l'area relativa alla cattura semirapida è inferiore all'altra di circa il 3.6%. Di tanto è quindi inferiore il rendimento di cattura nel caso considerato ($\tilde{H} = 1 \mu s$) rispetto al caso rapido.

7. Salita lineare lenta ($\tilde{H} = 3 \mu s$).

In tal caso la (8) è stata integrata numericamente col metodo di Milne (v. Milne, Numerical Calculus, p. 140) per dieci valori di ψ_0 , assumendo $\psi_0' = -\mu/2$ e $\mu = 17.1$. Con i valori trovati per ψ_1 e h_1 , si è proceduto come al paragrafo precedente, costruendo il diagramma della $\tilde{H}(\psi_0)$ (fig. 5) e valutandone l'area al disotto dell'ordinata $\tilde{H} = 1.05$. È risultato che il rendimento di cattura ρ_c è inferiore del 16% e quello del caso corrispondente di cattura rapida.

Le funzioni $\psi(\xi)$ ottenute con l'integrazione numerica sono rappresentate nella fig. 6

8. Salita semirapida con $m=4$.

In questo caso si possono ottenere per ψ_1 ed h_1 formule approssimate molto semplici, che consentono di esaminare il comportamento di ρ_c in funzione di ψ_0' , cioè dell'istante di accensione.

Con uno sviluppo in serie di potenze di ξ fino al termine in ξ^6 si ha dalla (8)

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi_0' + \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{15}\mu \sin \psi_0$$
$$h_1 = \frac{\psi_0'}{\sqrt{2\mu}} + \sqrt{\frac{\mu}{2}} \left(1 - \frac{2}{5} \sin \psi_0 \right)$$

Abbiamo esaminato i casi $\psi_0' = -\frac{\mu}{2}$ (fig.7), $\psi_0' = -\frac{\mu}{4}$ (fig.8) e $\psi_0' = 0$ (fig.9), per $\mu = 1.9$. I rendimenti nei tre casi stanno tra loro come 41.5 : 59 : 27.5 e sono notevolmente più piccoli (v. tabella appresso) del corrispondente rendimento nel caso rapido.

9. Riassunto dei risultati.

La tabella che segue riassume i risultati del confronto di ρ_c per i casi sopra illustrati con ρ_c^R per il caso rapido corrispondente:

(H)	m	ψ_0'	t^*	μ	ρ_c / ρ_c^R
1 μ sec	1	$-\frac{\mu}{2}$	$\frac{1}{2}$ (14)	1.9	0.96
3 μ sec	1	$-\frac{\mu}{2}$	$\frac{1}{2}$ (14)	17.1	0.84
1 μ sec	4	$-\frac{\mu}{2}$	$\frac{1}{2}$ (14)	1.9	0.29
1 μ sec	4	$-\frac{\mu}{4}$	$\frac{1}{4}$ (14)	1.9	0.41
1 μ sec	4	0	0	1.9	0.19

Roma, 17 marzo 1954

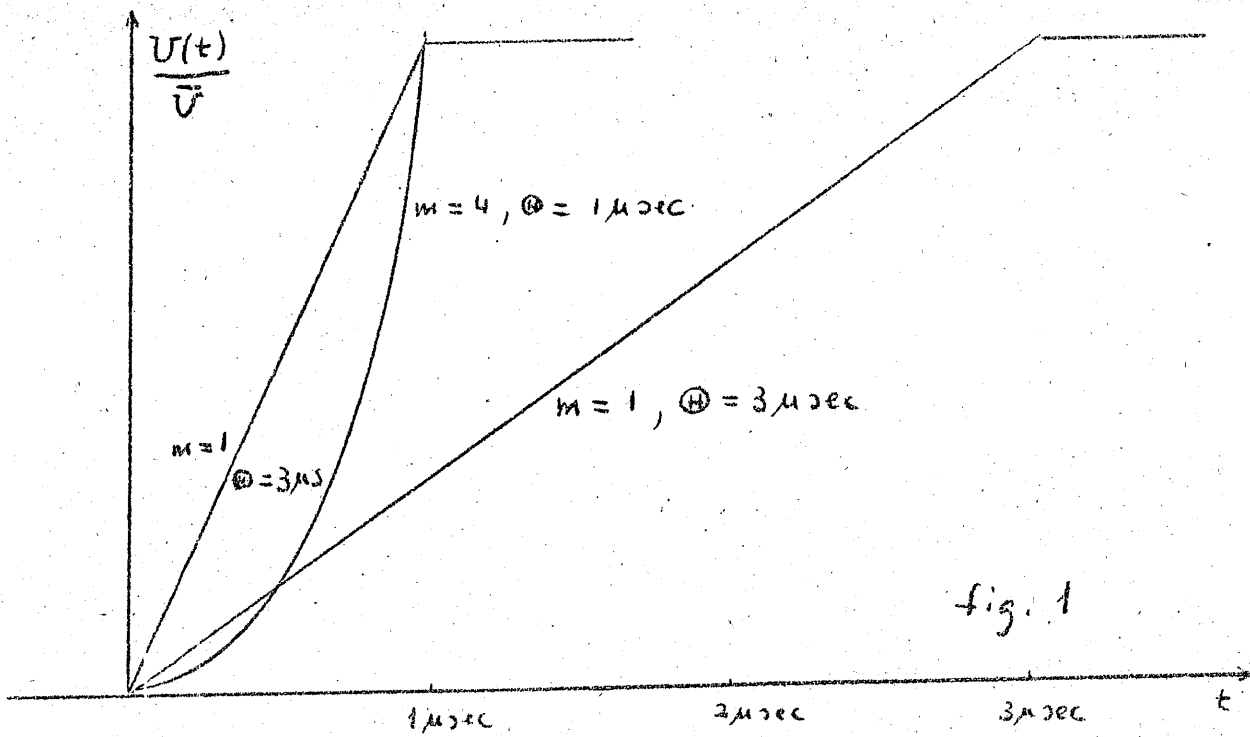


fig. 1

fig 2

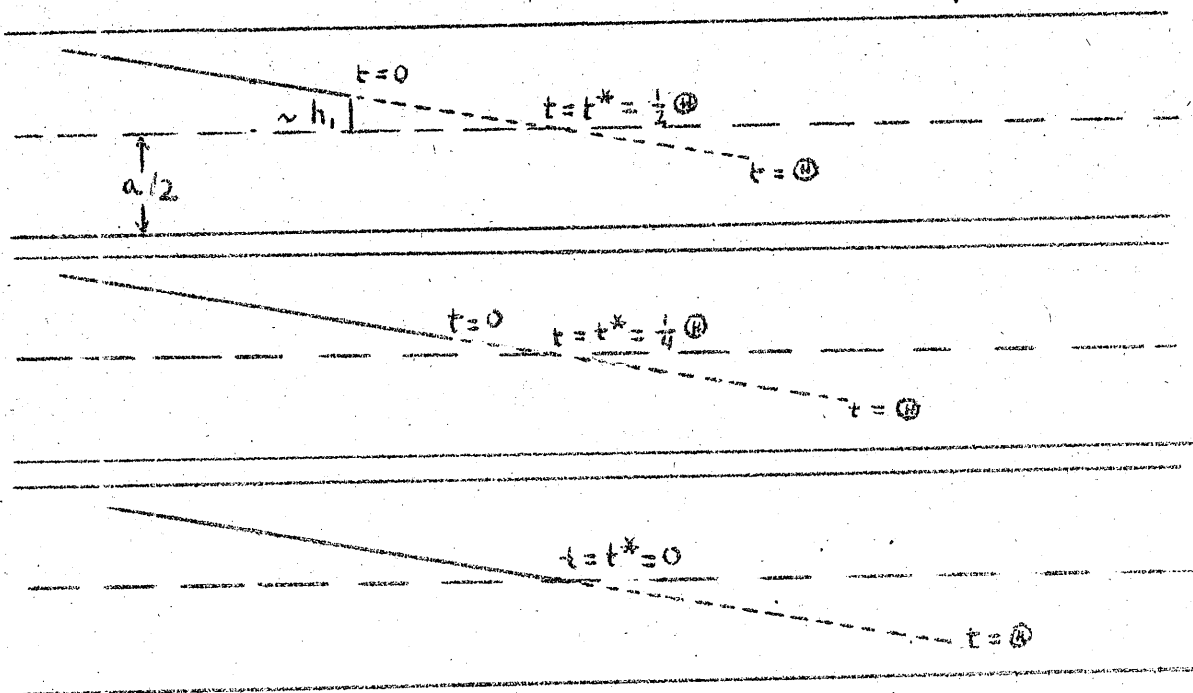
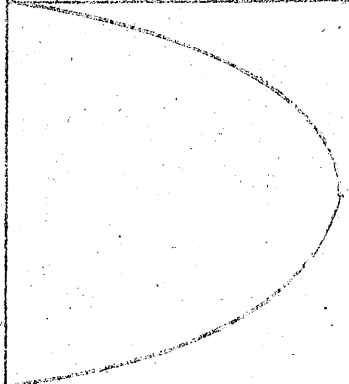


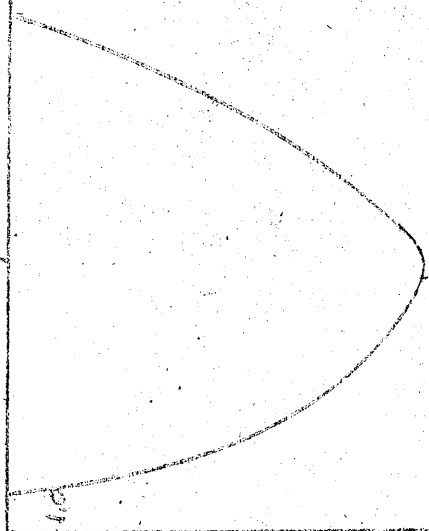
fig. 7

$\tilde{H}(\varphi_0)$



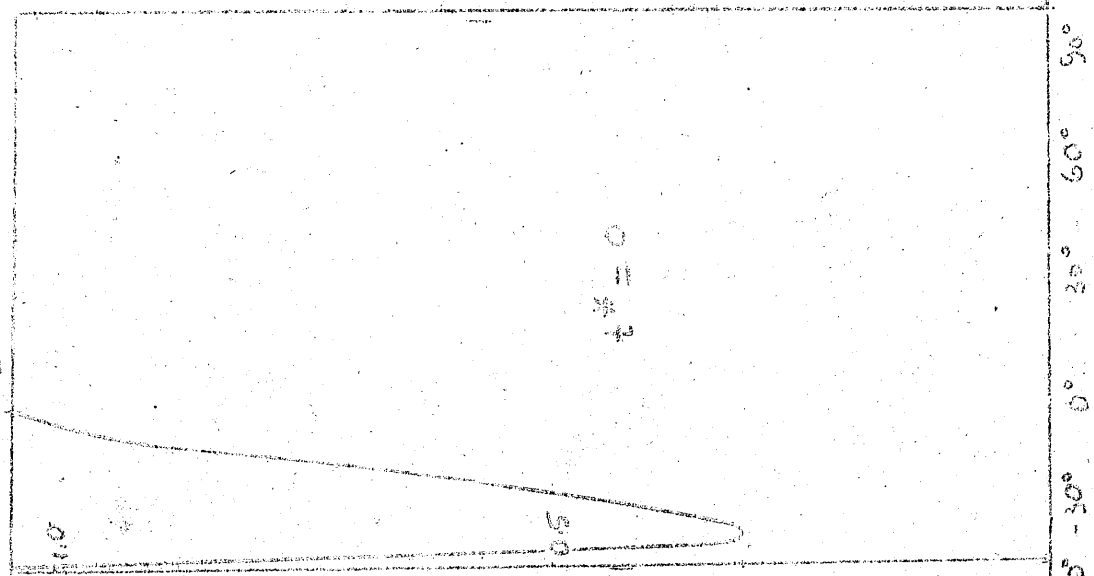
$\tilde{H} = \frac{1}{2}$

fig. 8



$\tilde{H} = \frac{1}{2}$

fig. 9



$\tilde{H} = 0$

φ_0

$h(t)$

Fig. 3

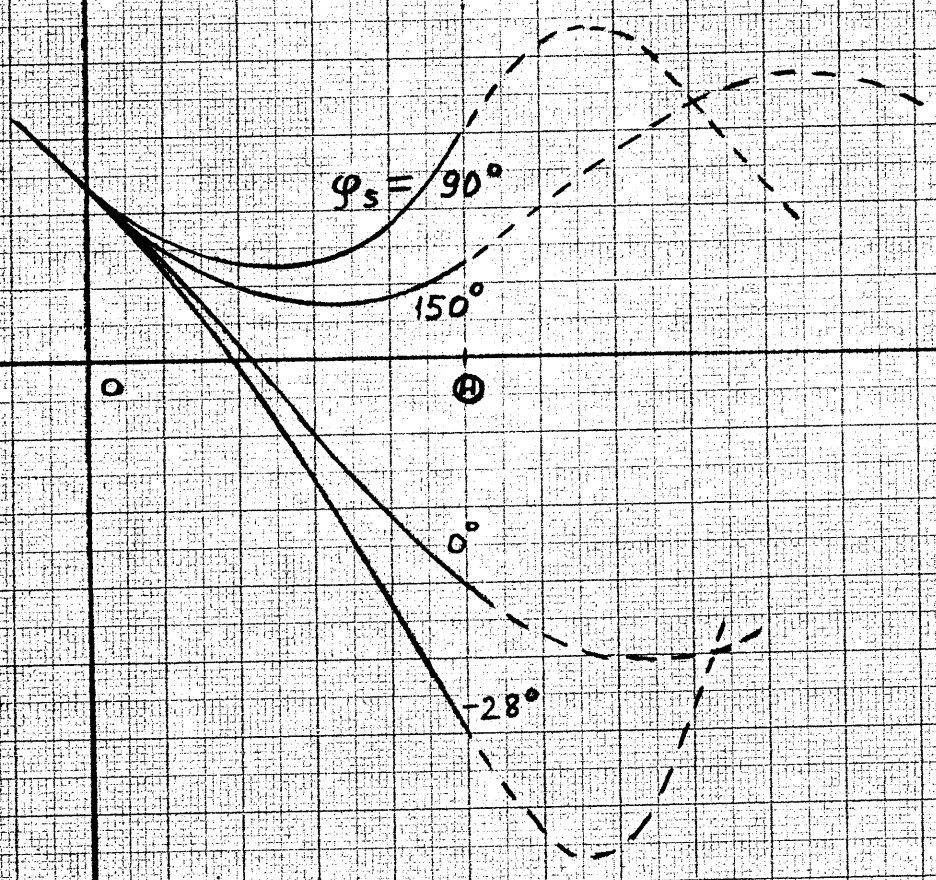


Fig. 4

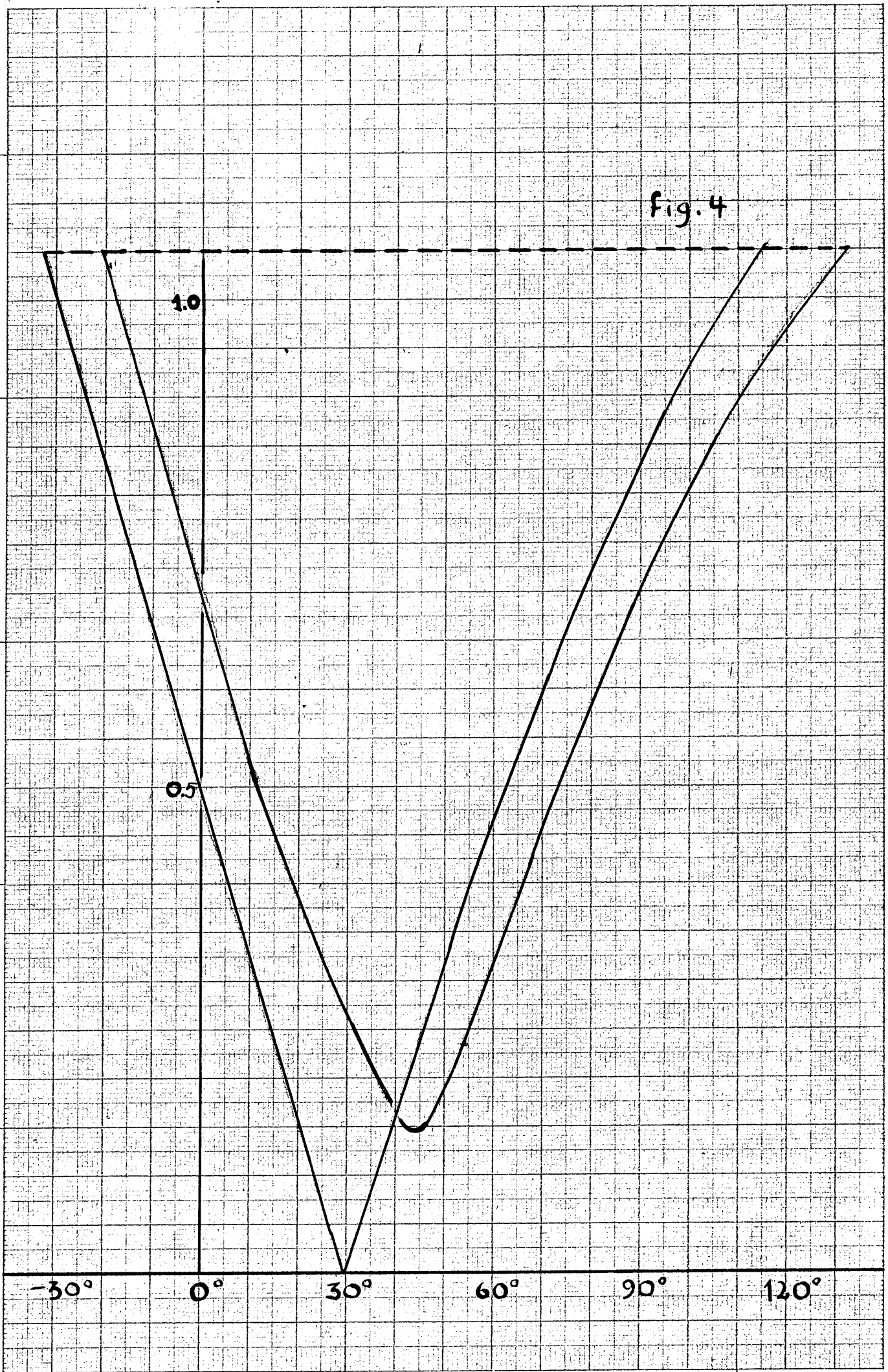
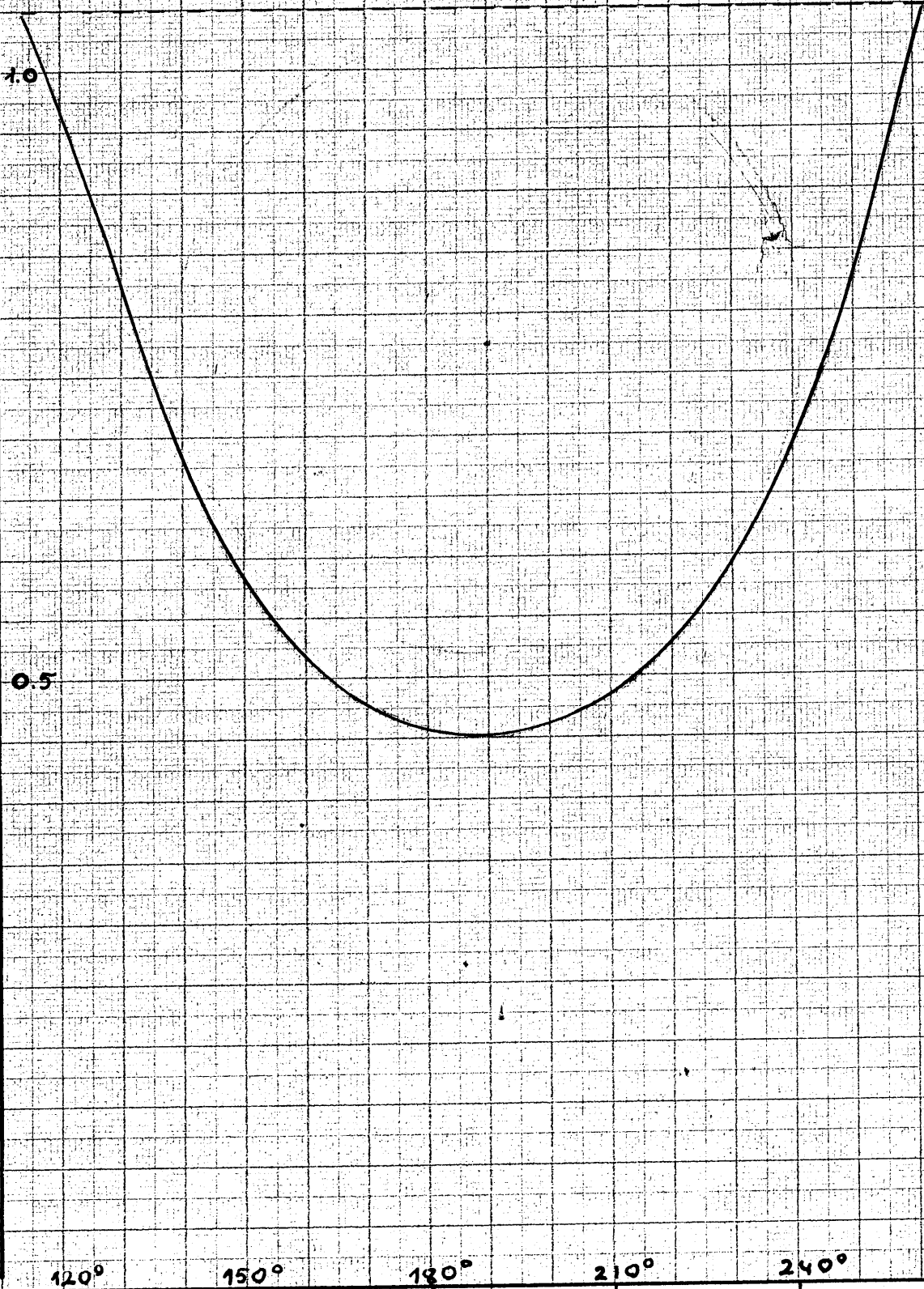


fig. 5



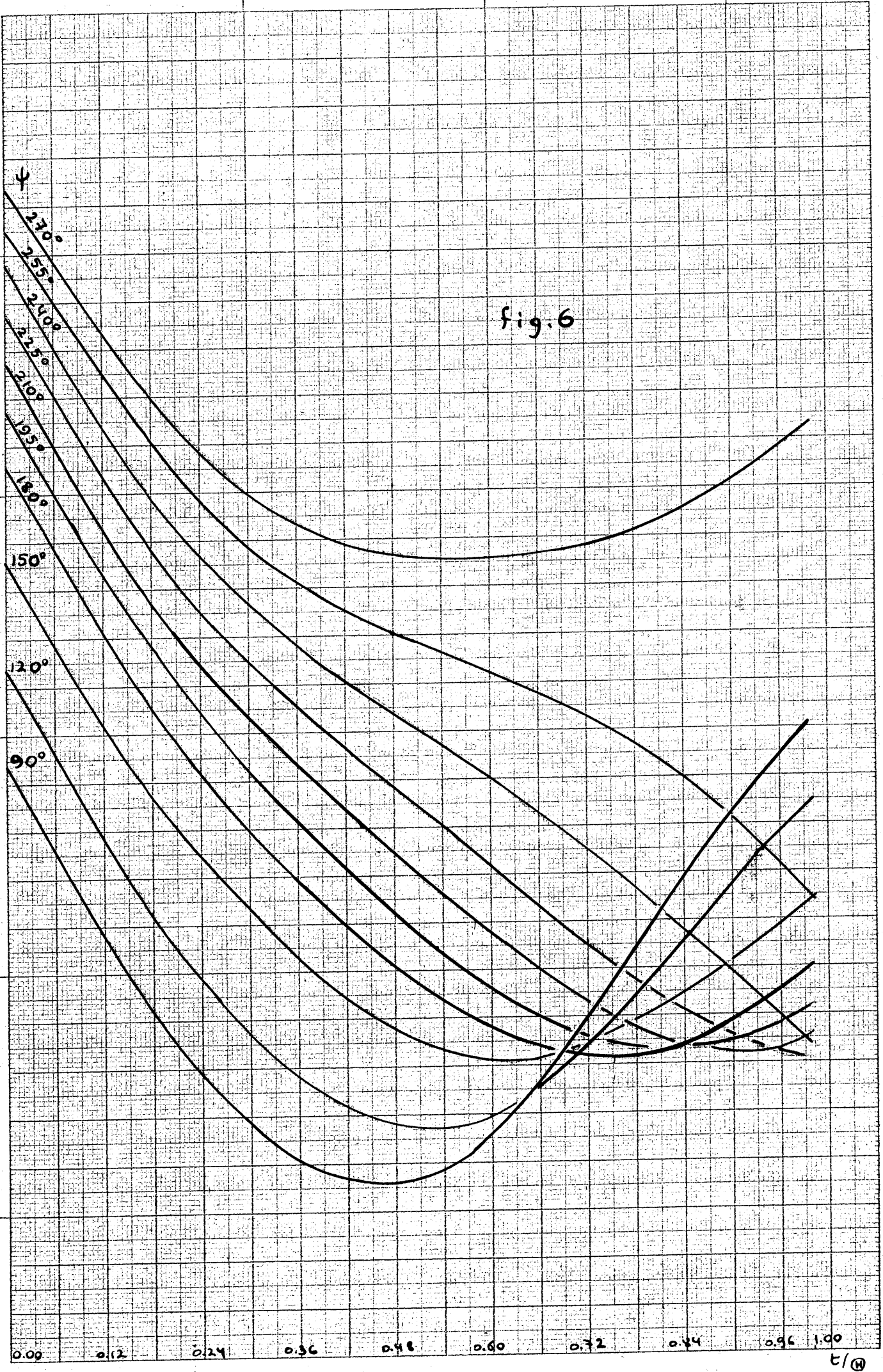


fig. 6

0.00 0.12 0.24 0.36 0.48 0.60 0.72 0.84 0.96 1.00 t/θ

110/2