

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 54/4  
13. 1. 1954.

E. Bellomo: CALCOLO DELLO SCATTERING NEL GAS RESIDUO.

*Perdite di elettroni per  
scattering nel gap anodico*  
T. 12 -  
13/11/54

Sono già note le principali caratteristiche dell'orbita seguita dalla particella in un sincrotrone . Ne alleghiamo un riassunto.

Essa compie delle oscillazioni sia radiali che verticali intorno ad un' orbita che diremo di equilibrio (oscillazioni di betatrone), oscillazioni che si smorzano come  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  in ampiezza .<sup>(\*)</sup>

L' orbita di equilibrio dipende dall' energia della particella, ed oscilla intorno all' orbita centrale in concomitanza colle oscillazioni energetiche della particella (oscillazioni di sincrotrone).

Poiché queste oscillazioni sono molto più lente (     volte nel caso nostro) possiamo senz' altro trascurarle per quanto riguarda le perdite dovute ad urti contro le pareti della ciambella, supponendo semplicemente la ciambella più stretta di tanto quanto vale la loro ampiezza di oscillazione.

Veramente potrebbero verificarsi perdite anche per la ragione che a causa di urti anelastici l' ampiezza di oscillazione di sincrotrone di alcune particelle potrebbe sorpassare l' ampiezza limite per la stabilità. Trascuriamo per il momento questo fenomeno, forse di lieve entità.

Inoltre l' ampiezza di oscillazione di sincrotrone varia, come si sa, da particella a particella e così pure dunque la larghezza apparente della ciambella.

Il calcolo che faremo non tiene conto neppure di questo, benché sia sempre utilizzabile anche in questo caso.

Il numero delle particelle non perdute è dunque valutato per difetto considerandosi appunto costante ed uguale per tutte l' ampiezza delle oscillazioni di sincrotrone, cioè la larghezza efficace della ciambella.

(\*) Consideriamo indipendenti queste oscillazioni

Il calcolo procede secondo le seguenti linee:

Se non avessimo fatto le ipotesi di cui sopra i parametri caratterizzanti la particella sarebbero l'energia totale  $E$ , l'ampiezza massima d'oscillazione di sincrotrone, le due ampiezze massime di oscillazione di betatrone, le elongazioni istantanee di oscillazione di betatrone ed il tempo  $t$ . Per quanto è stato detto e per comodità manteniamo solo: l'energia totale  $E$  ( <sup>o</sup> parametro apparente da considerarsi funzione esplicita del tempo  $t$  ), le due ampiezze massime di oscillazione di betatrone e le due posizioni istantanee, oltre naturalmente il tempo  $t$ .

La distribuzione delle particelle è dunque da considerarsi conosciuta quando sia noto il numero delle particelle per ogni intervallo di ampiezza e di elongazione a un dato istante.

Però, dato che conosciamo le leggi del moto radiale e verticale praticamente i due ultimi parametri diventano inessenziali perché conoscendo la densità in funzione delle ampiezze si passa da questa a quella in funzione anche degli altri due parametri semplicemente moltiplicando la funzione densità per i due fattori che danno nelle due componenti e per ogni ampiezza la probabilità di trovare la particella in un dato intervallo di elongazione. Così nel caso di moto praticamente armonico delle due componenti, prendendo come parametri i rapporti tra le elongazioni e le ampiezze di oscillazione (  $\xi$  e  $\eta$ , rispettivamente radiale e verticale ) basta moltiplicare per

$$\frac{d\xi}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{\pi\sqrt{1-\eta^2}}$$

fattore in questo caso indipendente dalle ampiezze di oscillazione.

Le ampiezze di oscillazione a loro volta sono legate alle energie totali radiale e verticale secondo la formula

$$W = \frac{m}{2} \omega^2 A^2$$

dove  $A$  è l'ampiezza,  $\omega$  la pulsazione radiale o verticale, ed  $m$  la massa relativistica  $\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ .

Ricordando che al crescere del campo c'è un effetto di smorzamento delle oscillazioni, conviene caratterizzare le ampiezze coi parametri

$$\frac{W}{\omega} = \frac{1}{2} m \omega A^2 \quad \text{costanti del moto.}$$

Con più comode unità useremo

$$L_z = (1-n) \frac{m}{m_0} \frac{\omega_0}{c \tau_0} (z_M - z_0)^2 \quad L_x = n \frac{m}{m_0} \frac{\omega_0}{c \tau_0} (z_M - z_0)^2$$

La funzione di cui ci interessa l'andamento col tempo è una

$$N(E(t), L_z, L_x; t)$$

il numero totale delle particelle, essendo

$$N(t) = \int_0^{(1-n) \frac{c \tau_0}{m_0} \frac{z_M^2}{2}} dL_z \int_0^{n \frac{c \tau_0}{m_0} \frac{z_M^2}{2}} dL_x N(E(t), L_z, L_x; t)$$

dove  $D_z$  e  $D_x$  sono i semidiametri della sezione retta della ciambella.

L'ampiezza di oscillazione dopo l'urto dipende da quella prima dell'urto, dal valore di  $\xi$  e di  $\eta$  e dall'angolo di deviazione, o meglio dalle sue componenti radiale e verticale. Questo considerando nulle le perdite di energia cinetica nell'urto.

In formule, nel nostro caso, come risulta dall'allegato

$$\sqrt{\frac{c p}{m_0 c^2}} \Psi_z = \pm \left( \pm \sqrt{L_z - \xi^2 L_x} - \sqrt{L_x (1 - \xi^2)} \right)$$

$$\sqrt{\frac{c p}{m_0 c^2}} \Psi_x = \pm \left( \pm \sqrt{L_x - \eta^2 L_z} - \sqrt{L_z (1 - \eta^2)} \right)$$

I segni fuori parentesi corrispondono al segno di  $\xi$  e di  $\eta$  rispettivamente.  $\Psi_z$  e  $\Psi_x$ , deviazioni nel piano orizzontale e verticale, sono da considerarsi tali che valga  $\Psi = \sqrt{\Psi_z^2 + \Psi_x^2}$ , dove  $\Psi$  è la deviazione subita dalla particella.

Dalle formule precedenti

$$d\Psi_z = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{c p}{m_0 c^2}}} \frac{\pm dL_z}{2\sqrt{L_z - \xi^2 L_x}} \quad d\Psi_x = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{c p}{m_0 c^2}}} \frac{\pm dL_x}{2\sqrt{L_x - \eta^2 L_z}}$$

Per noi il segno di  $\Psi_z$  e di  $\Psi_x$  non ha importanza perché le sezioni d'urto dipendono da  $\Psi (> 0)$ . Anche di  $d\Psi_z$  e di  $d\Psi_x$  ci interessano

solo i valori assoluti. Come è naturale, bisogna mantenere la corrispondenza tra ciascuno dei due  $\Psi_x$  (o  $\Psi_z$ ) corrispondenti a un dato  $L_x$  (o  $L_z$ ) e il relativo  $|d\Psi_x|$ ; ma ~~per costruzione con nostro caso~~ i due  $|d\Psi_x|$  coincidono.

Si può dunque mettere la sezione d'urto in funzione di  $\xi, L_x, L'_x; \eta, L_z, L'_z$ . Allora è possibile ricavare per integrazione il numero di particelle che per urto finiscono nell'intervallo  $dL'_x \cdot dL'_z$  nel tempo  $\Delta t$ . Il numero di particelle che al tempo  $t + \Delta t$  si trova in questo intervallo è allora ottenuto col solito computo: è dato da quelle già esistenti al tempo  $t$  meno quelle che comunque hanno subito un urto nell'intervallo  $\Delta t$ , più quelle che per urto, sempre nel tempo  $\Delta t$  ci sono entrate. Ne risulta un'equazione integrale differenziale per la funzione  $N(E(t), L_x, L_z, t)$ ; equazione che risolve il problema nei limiti proposti.

Sia dunque  $Q(\Psi, E) d\Psi \cdot \Delta t$  la probabilità che la particella venga deviata per urto di un angolo  $\Psi$ .

La probabilità che la particella sia deviata di un angolo di proiezioni  $\Psi_x, \Psi_z$  entro intervalli  $d\Psi_x, d\Psi_z$  è allora

$$\frac{Q(E, t)}{2\pi\Psi} |d\Psi_x| |d\Psi_z| \cdot \Delta t \quad \text{con} \quad \Psi = \sqrt{\Psi_x^2 + \Psi_z^2}$$

In funzione di  $L_x, L'_x, \xi; L_z, L'_z, \eta$ :

$$\Psi = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{c p} \sqrt{L_x(1-\xi^2) + L'_x - \xi^2 L_x + L_z(1-\eta^2) + L'_z - \eta^2 L_z} \pm \sqrt{L_x(1-\xi^2)(L'_x - \xi^2 L_x)} \pm \sqrt{L_z(1-\eta^2)(L'_z - \eta^2 L_z)}$$

e per la detta probabilità

$$\frac{1}{2\pi} \left( \sum \frac{Q(\Psi, E)}{\Psi} \right) \frac{m_0 c^2}{c p} \frac{1}{2\sqrt{L_x - \xi^2 L'_x}} \frac{1}{2\sqrt{L_z - \eta^2 L'_z}} dL'_x \cdot dL'_z \cdot \Delta t$$

dove la somma è estesa alle quattro possibili combinazioni di segno.

Moltiplicando per la probabilità di trovare la particella con ampiezze e elongazioni negli intervalli  $dL_x, dL_z, d\xi, d\eta$  data da

$$N(E(t), L_x, L_z, t) \frac{d\xi}{\pi\sqrt{1-\xi^2}} \frac{d\eta}{\pi\sqrt{1-\eta^2}} dL_x \cdot dL_z$$

e integrando poi in  $\xi, \eta, L_x, L_z$ , si ottiene, per il numero di particelle diffuse con ampiezze tra  $L'_x$  e  $L'_x + dL'_x$ ,  $L'_z$  e  $L'_z + dL'_z$

$$(1-n) \frac{cp}{m_0 c^2} \frac{D_z^2}{L_z^2} \quad n \frac{cp}{m_0 c^2} \frac{D_z^2}{L_z^2}$$

$$dL'_z dL''_z \Delta t \cdot \int_0^{s_z} dL_z \int_0^{L_z} dL_z K(E(t), L_z, L'_z; L_z, L_z) N(E(t), L_z, L_z; t)$$

dove

$$K(E(t), L'_z, L''_z; L_z, L_z) = \int_0^{s_z} d\psi \int_0^{s_z} d\eta \frac{m_0 c^2}{8\pi^3} \left( \sum \frac{Q(\Psi, E)}{\Psi} \right) \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)(L_z - \beta^2 L'_z)}} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)(L_z - \beta^2 L''_z)}}$$

ed  $s = 1$  se  $L' \geq L$ ,  $s = \frac{L'}{L}$  se  $L' < L$ .

Nello stesso intervallo il numero delle particelle perdute è dato semplicemente da

$$\Delta t \cdot \left( \int_0^{L'} Q(\Psi, E) d\Psi \right) N(E(t), L'_z, L'_z; t) dL'_z dL'_z$$

In definitiva si ottiene

$$\frac{d}{dt} N(E(t), L'_z, L'_z; t) = \int_0^{L'} Q(\Psi, E) d\Psi \cdot N(E(t), L'_z, L'_z; t) +$$

$$(1-n) \frac{cp}{m_0 c^2} \frac{D_z^2}{L_z^2} \quad n \frac{cp}{m_0 c^2} \frac{D_z^2}{L_z^2}$$

$$+ \int_0^{L_z} dL_z \int_0^{L_z} dL_z K(E(t), L_z, L_z; L_z, L_z) N(E(t), L_z, L_z; t)$$

L' equazione del moto degli elettroni in un campo magnetico è

$$\rho = \frac{c}{e} \frac{p}{H}$$

essendo  $\rho$  il raggio di curvatura dell' orbita, ed  $H$  il valore del campo magnetico.

Nel caso di moto radiale questa equazione si scrive

$$\rho_z(r) = \frac{c}{e} \frac{p}{H_z(r)}$$

Con i simboli indicati in figura valgono anche

$$\begin{aligned} ds \sin \alpha &= dr \\ ds \cos \alpha &= r d\varphi \\ d\alpha &= d\varphi - \frac{ds}{\rho} \end{aligned}$$

ds essendo la lunghezza dell' elemento d' arco.

Da queste

$$r \sin \alpha d\alpha = dr \cos \alpha - \frac{r}{\rho_z(r)} dr$$

L' equazione del moto radiale si scrive dunque

$$\frac{d(r \cos \alpha)}{dr} = \frac{r}{\rho_z(r)}$$

Se  $\frac{r}{\rho_z(r)} = A$ , cioè se  $H_z(r) = \frac{c}{e} \frac{p}{r} A$ , non esistono orbite stabili.

Vale infatti

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= Ar - C \\ \cos \alpha &= A - \frac{C}{r} \end{aligned}$$

e la traiettoria ha la forma

e l' elettrone non è trattenuto.

Se invece

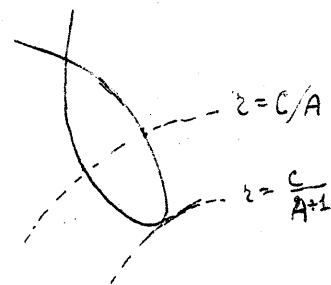
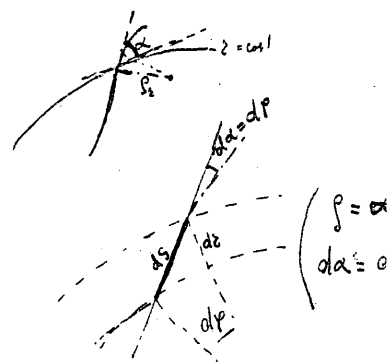
$$H_z(r) = \frac{c}{e} \bar{p}(t) \frac{f(r)}{r}$$

[  $\bar{p}(t) = \frac{e}{c} H_z(r_0) r_0$ ;  $f(r_0) = 1$ ; essendo  $r_0$  il raggio centrale della ciambella ] allora

$$\frac{d(r \cos \alpha)}{dr} = \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r)$$

$$r \cos \alpha = r_e \cos \alpha_e + \int_{r_e}^r \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) dr \quad ( \cos \alpha_e = \cos \alpha(r_e) )$$

o anche



$$r(1-\cos\alpha) = r_e (1-\cos\alpha_e) - \int_{r_e}^r \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \right) dr$$

L' elettrone può raggiungere solo quei punti per i quali è  
 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

L' orbita  $r = r_e$  è stabile quando  $\cos \alpha_e = 1$ , e  $\cos \alpha > 1$  per  $r \neq r_e$ , cioè se

$$\frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \geq 0 \quad \text{per } r \geq r_e$$

In questa ipotesi i limiti di oscillazione ( $\cos \alpha = 1$ ) sono dati dalla

$$r_e (1-\cos\alpha_e) = \int_{r_e}^r \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \right) dr ;$$

chiameremo  $r_M$  e  $r_m$  i raggi soluzione rispettivamente maggiore e minore e si ha  $r_M > r > r_m$ .

Se poi  $p = \bar{p}(t)$  allora  $r_e = r_0$ .

Si osservi che  $\alpha$  è sempre molto piccolo ( $\alpha \sim \frac{D_e}{r_0}$ , essendo  $D_e$  il semidiametro radiale della ciambella).

Quindi l' equazione del moto radiale si può scrivere

$$r \alpha^2 = r_e \alpha_e^2 - 2 \int_{r_e}^r \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \right) dr$$

Se  $f(r) = \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-n}$   $0 < n < 1$  ( focalizzazione armonica come è nel nostro caso con  $n = 0,6$  ), allora tenendo conto che

$$f(r) \sim f(r_e) + f'(r_e)(r-r_e)$$

allora  $2 \int_{r_e}^r \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \right) dr = \frac{\bar{p}(t)}{p} f'(r_e)(r-r_e)^2 ;$

infatti da  $\frac{\bar{p}(t)}{p} f(r_e) - 1 = 0$  si ottiene la precedente e l' ultimo passaggio della

$$\frac{\bar{p}(t)}{p} f'(r_e) = \frac{\bar{p}(t)}{p} \frac{1-n}{r_0} \left( \frac{r_e}{r_0} \right)^{-n} \approx \frac{\bar{p}(t)}{p} \frac{1-n}{r_0} \left( 1 - \frac{n}{r_0} (r_e - r_0) \right) = \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} - n \right) \frac{1}{r_0}$$

In definitiva  $r \alpha^2 = r_e \alpha_e^2 - \frac{1}{r_0} \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} - n \right) (r-r_e)^2$



ed anche, per il valore massimo o minimo di  $(r-r_e)$ , (coincidenti in valore assoluto),

$$r_e \alpha_e^2 = \frac{(r_M - r_e)^2}{r_e} \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} - n \right)$$

oooooooooooooooooooo

L'equazione verticale prende la semplice forma  $d\alpha' = - \frac{ds'}{\rho(z)}$

ovvero 
$$d \cos \alpha' = - \frac{dz}{\rho(z)} = - dz \frac{c}{c} \frac{H_z(z,r)}{p}$$

$H_z(z,r)$  è 0 per  $z=0$  ed è fissato dalla  $\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial H_z(r)}{\partial r} = \frac{c}{e} \bar{p}(t) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(r)}{r} \right)$

onde

$$H_z(z,r) = - \frac{c}{e} \bar{p}(t) \frac{1}{r^2} (f(r) - r f'(r)) z$$

L'equazione verticale si scrive dunque

$$\cos \alpha' = \cos \alpha'_0 + \frac{1}{2r^2} \frac{\bar{p}(t)}{p} (f(r) - r f'(r)) z^2$$

e con  $f(r) = \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-n}$

$$\alpha'^2 = \alpha_0'^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\bar{p}(t)}{p} n \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1-n} z^2 \approx \alpha_0'^2 - \frac{1}{r^2} n z^2$$

e per i limiti di oscillazione  $\left( \frac{\bar{p}(t)}{p} = 1, r \approx r_0 \right)$

$$z_M = \frac{r_0}{\sqrt{n}} |\alpha'_0|$$

Equazione temporale del moto ( radiale )

Dalle formule precedenti considerando che  $\alpha \approx \frac{dr}{ds}$  e  $\Delta r_e \omega_e = \frac{ds}{dt}$  si

ottiene 
$$r \alpha^2 \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{r_e}{r} \left[ (r_e \Delta \omega_e \alpha_e)^2 - \omega_e^2 \Delta^2 \frac{\bar{p}(t)}{p} f'(r_e) r_e (r - r_e)^2 \right] = (r_e \Delta \omega_e \alpha_e)^2 - \omega_e^2 \Delta^2 (1-n) (r - r_e)^2$$

equazione del moto armonico .

Perciò

$$\omega_e^2 \approx \Delta^2 \omega_0^2 (1-n)$$

nei tratti curvi

Analogamente per la verticale  $\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = (r_e \Delta \omega_e \alpha'_0)^2 - \Delta^2 \omega_0^2 n z^2$

$$\omega_z^2 \approx \Delta^2 \omega_0^2 n$$

sempre nei tratti curvi.

$\Delta = 1 + \frac{4l}{2\pi r_0}$   
 essendo la lunghezza di ciascuno dei tratti rettilinei

Perbò i tratti rettilinei in media non fanno cambiare la fase della particella, perché come ad essa aggiungono, così tolgono ( p. es. si pensi alla traiettoria simmetrica rispetto all' asse di oscillazione ). Avremo dunque un periodo più lungo e precisamente

$$\omega_z^2 \approx \omega_0^2 (1-n)$$

$$\omega_z^2 \approx \omega_0^2 n$$

Una maggior precisione è facilmente raggiungibile, se desiderata, non facendo evidenti approssimazioni sia nei passaggi sia nelle formule base.

-----

Applicando le formule precedenti per calcolare l' effetto del l' urto si considera il sincrotrone senza tracce rettilinee.

Altrimenti infatti l' ampiezza di oscillazione di betatrone oscillerebbe lievemente.

Si dovrebbe naturalmente considerare il valore massimo di essa, in rapporto conosciuto col valore usato .

Indicando, con un apice le variabili dopo l' urto e con uno asterisco i valori d' urto

$$\begin{aligned}
 r'^* \alpha'^*{}^2 &= r^*(\alpha^{*2} + \Delta(\alpha^{*2})) = r^* \Delta(\alpha^{*2}) - 2 \int_{z_e}^{z^*} \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \right) dr + r_e \alpha_e^2 \\
 \text{A)} \quad &= -2 \int_{z_e + \Delta z_e}^{z^*} \left[ \left( \frac{\bar{p}(t)}{p} - \frac{\Delta p}{p} \frac{\bar{p}(t)}{p} \right) f(r) - 1 \right] dr + (r_e + \Delta r_e) \cdot \underline{\alpha^2(r_e + \Delta r_e)} \\
 \text{con } \frac{\bar{p}(t)}{p} \left( 1 - \frac{\Delta p}{p} \right) (f(r_e) + f'(r_e) \Delta r_e) - 1 &= 0 \quad (\text{def. di } \Delta r_e)
 \end{aligned}$$

Al 1° ordine, con  $\frac{\bar{p}(t)}{p} = 1$ , si ottiene per  $\Delta r_e$

$$\Delta r_e = \frac{\Delta p}{p} \frac{f(r_e)}{f'(r_e)} \frac{\bar{p}(t)}{p} \approx \frac{\Delta p}{p} \frac{f(r_0)}{f'(r_0)} = \frac{\Delta p}{p} \frac{1}{f'(r_0)}$$

L' equazione della traiettoria dopo l' urto si può perciò scrivere anche

$$\begin{aligned}
 r'^* \alpha'^*{}^2 &= (r_e + \Delta r_e) \cdot \underline{\alpha^2(r_e + \Delta r_e)} - 2 \int_{z_e}^{z^*} \left[ \frac{\bar{p}(t)}{p} \left( 1 - \frac{\Delta p}{p} \right) f(r) - 1 \right] dr - \\
 &\quad - (\Delta r_e)^2 f'(r_e) \frac{\bar{p}(t)}{p}
 \end{aligned}$$

Si ottiene dunque, prima e dopo l' urto, per i valori massimi di  $r$  ( $r_M$  e  $r'_M$ )

$$\begin{aligned}
 2 \int_{z_e}^{z_M} \left[ \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) - 1 \right] dr &= r_e \alpha_e^2 \\
 2 \int_{z_e}^{z'_M} \left[ \frac{\bar{p}(t)}{p} \left( 1 - \frac{\Delta p}{p} \right) f(r) - 1 \right] dr &= (r_e + \Delta r_e) \underline{\alpha^2(r_e + \Delta r_e)} - (\Delta r_e)^2 f'(r_e)
 \end{aligned}$$

dove il secondo membro vale ( dalla A )

$$- 2 \int_{z_e}^{z^*} \frac{\Delta p}{p} \frac{\bar{p}(t)}{p} f(r) dr + r^* \Delta(\alpha^{*2}) + r_e \alpha_e^2$$

Ora, tanto per le oscillazioni radiali che verticali

$$\Delta(\alpha^2) = (\alpha^* + \varphi)^2 - \alpha^{*2} = \varphi(2\alpha^* + \varphi)$$

dove  $\varphi$  è nei due casi rispettivamente  $\psi_x$  o  $\psi_z$ , proiezioni nel piano orizzontale e verticale dell'angolo di deviazione  $\psi$ .

Quindi

$$2 \int_{r_e}^{r_M} \left[ \left( 1 - \frac{\Delta P}{P} \frac{\bar{P}(t)}{P} \right) f(r) - 1 \right] dr = r^* \psi_x (2\alpha^* + \psi_x) + 2 \int_{r_e}^{r_M} \left[ \frac{\bar{P}(t)}{P} f(r) - 1 \right] dr - 2 \int_{r_e}^{r^*} \frac{\Delta P}{P} \frac{\bar{P}(t)}{P} f(r) dr$$

Una identica formula vale se si sostituiscono i valori minimi a quelli massimi di  $r$  e  $r'$ .

Col nostro valore di  $f(r)$ , per  $\frac{\bar{P}(t)}{P} = 1$  ( $r_e = r_0$ )

$$\frac{1}{2} (1-n) \frac{(r_M - r_0)^2}{r_0} - \frac{\Delta P}{P} (r_M - r_0) = r^* \psi_x \left( \alpha + \frac{\psi_x}{2} \right) + \frac{1}{2} (1-n) \frac{(r_M - r_0)^2}{r_0} - \frac{\Delta P}{P} (r^* - r_0)$$

Ma, per la equazione del moto

$$\begin{aligned} r^* \alpha^* &= \pm \sqrt{r^*} \sqrt{r \alpha^*} = \pm \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{r - r_0}{r_0} \right] \sqrt{r_0} \cdot \sqrt{\frac{(r_M - r_0)^2 - (r^* - r_0)^2}{r_0}} \sqrt{1-n} \\ &= \pm \sqrt{(r_M - r_0)^2 - (r^* - r_0)^2} \sqrt{1-n} \end{aligned}$$

il segno dipendendo dal segno di  $\alpha^*$  cioè di  $\dot{r}^*$

Con  $\frac{\Delta P}{P} = 0$  si ottiene ancora

$$(1-n) \frac{(r_M - r_0)^2}{r_0} = \pm 2 \psi_x \sqrt{1-n} \sqrt{(r_M - r_0)^2 - (r^* - r_0)^2} + \frac{(r_M - r_0)^2}{r_0} (1-n) + r_0 \psi_x^2$$

Moltiplicando per  $\frac{m}{m_0} \frac{1}{c} \omega_0$  e ponendo  $L_z = \frac{m}{m_0} \frac{1}{c} \omega_0 (1-n) (r - r_0)$  e  $\frac{r^* - r_0}{r_M - r_0}$

$$L_z^2 = \pm 2 \psi_x \sqrt{\frac{m \omega_0}{m_0 c} r_0} \sqrt{L_z (1 - \xi^2)} + L_z + \frac{m \omega_0}{m_0 c} r_0 \psi_x^2$$

$$L_z^2 - \xi^2 L_z = \left( \sqrt{L_z (1 - \xi^2)} \pm \sqrt{\frac{m \omega_0}{m_0 c} r_0} \psi_x \right)^2$$

$$\sqrt{\frac{cP}{m_0 c}} \psi_x = \pm \left( \pm \sqrt{L_z^2 - \xi^2 L_z} - \sqrt{L_z (1 - \xi^2)} \right)$$

Una identica formula vale per le oscillazioni verticali con  $\psi_z$ ,

$$= \frac{m^* \omega_0}{m_0 c} \quad \text{e} \quad L_z = \frac{m}{m_0 c} \omega_0 n \xi$$