695

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/77
14.12.1953.

G. Salvini: INOMOGENEITA' DEL CAMPO MAGNETICO IN UN SINCROTRONE A SEZIONI DIRITTE.-

M-22

INOMOGENEITA' DEL CAMPO MAGNETICO IN UN SINCROTRONE A SEZIONI DIRITTE

(DATI PER IL GRUPPO TEORICO)

§ 0 - Definizioni.-

Gli scostamenti del valore del campo magnetico dal valore teorico dànno luogo a variazioni nelle traiettorie degli elettroni ed eventualmente alla distruzione del fascio focalizzato.

E' necessario, perciò, contenere queste inomogeneità entro certi limiti, e comunque calcolare l'effetto di esse. Questi limiti ci verranno indicati dal gruppo teorico del sincrotrone, e toccherà ai costruttori del magnete rispettarli. Ma per definire il problema del gruppo teorico e chiarire l'enunciato, si segue in questa presentazione una strada inversa. Infatti noi vogliamo qui fornire i dati sull'inomogeneità del campo, in una forma adatta per il calcolo teorico e quali si ricavano dalle misure effettuate su sincrotroni esistenti negli Stati Uniti.

I dati che qui si dànno costituiscono quindi un primo approccio ancora piuttosto indeterminato, ed hanno soprattutto lo scopo di fissare quali sono i limiti di precisione sperimentale che sono stati raggiunti sulla costruzione di magneti per sincrotrone a focheggiamento debole.

Riferiamo nel seguito sulle inomogeneità e fluttuazioni delle grandezze $Z(\theta)$; $R(\theta)$; $n(\theta)$; $n(r)$; definite nel seguente modo:

- $Z(\theta)$ = variazione con l'azimuth dell'altezza del piano magnetico mediano. Intendiamo per piano magnetico mediano il luogo dei punti tra i poli del magnete ove $H_r = 0$. Supponiamo di indicare con θ l'azimuth di un magnete circolare di raggio R e di circonferenza $2\pi r = 2\pi r_o + 4L$, ove r_o è il raggio di curvatura dei quadranti del nostro magnete, ed L è la lunghezza di una nostra sezione diritta. Allora, (per esempio) $Z(37°) = +1$ cm significa che a un azimuth di 37° dal luogo di iniezione ed al raggio dell'orbita stabile il piano magnetico mediano è 1 cm al di sopra del piano mediano geometrico. Si ammette però che Z non dipende, in questa approssimazione, dal raggio.

- $R(\theta)$ = variazione con l'azimuth della distanza radiale tra l'orbita stabile teorica di raggio r ed il luogo di raggio r_0 ove il campo verticale ha il valore B_0, valore che dovrebbe avere, teoricamente, nel luogo dell'orbita stabile. E' quindi $R(\theta) = r(\theta) - r_0$

(Si è ritenuto opportuno definire queste due lunghezze in modo analogo a quanto hanno fatto N.M. Blachman, in R.S.I., vol.22, p.569 (1951)).

- $n(r)$ = variazione lungo il raggio, restando costante θ, del valore n . Non so se $n(r) = n_0$ = cost. sia la condizione ottima. Comunque noi abbiamo sin'ora assunto come caso ideale $dn/dr = 0$.

- $n(\theta)$ = variazione lungo l'azimuth del valore n_0.

§ 1 - Fluttuazioni di $Z(\theta)$ dovute alla inomogeneità del campo.-

Si raccomandano da ogni gruppo di sincrotronisti, in particolare dal gruppo del Cosmotrone di Brookhaven (il gruppo del Cosmotrone di Brookhaven è forse quello che ha eseguito le più accurate misure di campo magnetico; molti dei nostri dati sono presi da esso ed è molto consigliabile la lettura dei loro rapporti), la misura e la correzione accurata del campo magnetico mediano. Si tratta cioè di rendere $Z(\theta)$ minimo, il che ovviamente conduce ad una utilizzazione massima della dimensione verticale della ciambella.

La funzione $Z(\theta)$ è diversa da zero per varie cause di perturbazione. Una di esse può essere la rimanenza (intensità di polarizzazione magnetica residua), come è avvenuto a Brookhaven e potrebbe avvenire a noi, se pure in minor misura. Altre cause sono tutte le dissimmetrie elettromagnetiche che intervengono in forma più o meno occulta nella costruzione.

La misura di $Z(\theta)$ si fa cercando il piano di condizione $H_r = 0$, ad esempio con bobine dipolo disposte ad asse orizzontale. La correzione per rendere $Z(\theta)$ minimo si fa con spire di correnti disposte sulle facce polari, e parallele all'orbita stabile. A Brookhaven la $Z(\theta)$ poteva determinarsi con una precisione di circa $\pm$ 1 mm ma è illusorio pensare che questi siano gli effettivi limiti di $Z(\theta)$. Assumeremo invece (in base alle vaghe indicazioni da vari sincrotroni) che $Z(\theta)$ oscil li restando entro alcuni percento (per es. $\pm$ 4 mm) della altezza 2A della ciambella e proponiamo pertanto al gruppo teorico queste date. Quanto alla forma della $Z(\theta)$, è lecito assumere che la $Z(\theta)$ sia una "funzione" di valori a caso, senza alcuna struttura privilegiata. Diamo in § 3 proposte sulla struttura di $Z(\theta)$ e di $R(\theta)$.

§ 2 - Fluttuazioni di $R(\theta)$ dovute alla inomogeneità del campo.-

Partiamo dalle fluttuazioni di B_z alla iniezione, lungo l'orbita stabile. Ancora ci rifacciamo alle misure effettuate su sincrotroni ~~mmm~~ esistenti. Se si misura lungo l'orbita stabile il campo all'iniezione si possono trovare differenze al variare di θ di alcuni percento. Ad esempio il sincrotrone dell'Istituto di Caltech dava, con un campo all'iniezione di 14 gauss una oscillazione di valori B_z iniezione compresa entro 14 $\pm$ .14 gauss ($\pm$ 1%).

Ammettiamo che a un certo valore $\bar{\theta}$, lungo l'orbita stabile, di riposo il campo, ad esempio all'iniezione, valga

$$B_z^0 = B_z + \Delta B_z \text{ ; anzichè } B_z$$

ed ammettiamo, approfittando dei piccoli valori di queste fluttuazioni, che n sia purtuttavia costante ed uguale ad n_o, che è il valore teorico. In questo caso, il valore B_z teorico si troverà non a $r = r_o$ (raggio dell'orbita stabile) ma ad un raggio r (sempre a $\theta = \bar{\theta}$) pari a

$$r = r_o \left(1 - \frac{\Delta B_z}{n B_z}\right)$$

La quantità $R(\theta)$ che a noi interessa è quindi, in prima approssimazione,

$$R(\theta) = - r_o \frac{\Delta B_z}{n B_z}$$

e quindi, data la $\Delta B_z(\theta)$ che si misura sperimentalmente, si ottiene la $R(\theta)$.

Assumendo gli errori di Caltech suddetti si avrebbe:

$$R(\theta) \simeq \pm 10^{-2} \, r_o/n$$

§ 3 - <u>Espressioni analitiche per Z (θ) ed R (θ)</u>.-

Per una trattazione analitica è conveniente sviluppare la Z(θ) e R(θ) in serie di opportune autofunzioni di un operatore che rappresenti adeguatamente la periodicità del campo.

Un metodo opportuno può essere quello di Blachman (loco citato), il quale sviluppa Z (θ) in termini dell'operatore $\left(\frac{d^2}{dt^2} + n \right)$, ma imponendo condizioni di discontinuità equivalenti alle sezioni diritte, sicchè lo sviluppo è in realtà diverso da quello ordinario di Fourier.

Per questo sviluppo rimandiamo al lavoro di Blachman, ma pensiamo che si possano già raccogliere informazioni con il normale sviluppo di Fourier,

$$Z(\theta) = \sum_{o\, n}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta$$

dato che probabilmente le prime armoniche soltanto sono importanti, e dato che non abbiamo a che fare con una situazione reale, ma con degli esempi provvisori.

Preferiamo considerare qui la R (θ) per prima.

La nostra R(θ) sarà in pratica costruita partendo da una serie di valori della ΔB_z (θ) presi lungo l'orbita stabile a regolari intervalli $\vartheta_i - \vartheta_{i-1}$. Si ha quindi alla fine una tabella di valori, e su questi può farsi un'analisi armonica approssimativa con i normali procedimenti dell'analisi.

Questo è appunto ciò che forse faremo quando avremo il magnete. Intanto, volendo stimare teoricamente quali sono le condizione di precisione che dobbiamo imporci (a parte la possibilità empirica di valerci dei sincrotroni esistenti già), possiamo procedere come segue:

a) Assunti come valori massimi di Z(θ) ed R (θ) quelli indicati, e cioè:

$$\left| R(\theta) \right| \leq \ell_0 \, 10^{-2}_{14} \quad ; \quad \left| Z(\theta) \right| \leq 4 \text{ mm}$$

noi ~~sappiamo~~ supponiamo - poichè a priori non sappiamo quali saranno le armoniche di maggiore ampiezza nelle nostre irregolarità - che l'analisi armonica delle funzioni R (θ), Z (θ) dia coefficienti a_n, b_n, tutti di uguale ampiezza R (θ), Z (θ).

Studiamo quindi separatamente il contributo di ciascuna armonica al problema dell'allargamento del fascio e delle risonanze, come già il gruppo teorico sta facendo. (Già con il dott. C. Bernardini ho fatto qualcosa in proposito)

L'assumere gli a_n, b_n contemporaneamente tutti uguali sarebbe assurdo e non rispetterebbe le condizioni di convergenza. Ma purtuttavia è un caso limite che vale la pena di esaminare: si noti – come risulta dal lavoro del gruppo teorico – che le armoniche di ordine elevato sono poco importanti per il nostro problema, tanto che vi sono sincrotroni nei quali i poli hanno struttura poligonale (per es. 24 poli separati, come M.I.T.), con distanza da polo a polo anche notevoli (per es. di 0.5 – 1 cm). D'altra parte ci attendiamo gravi limiti per quanto riguarda le armoniche basse, che si possono per altro ridurre con correcting coils (§ 4).

b) Volendo una funzione di valori di R (θ) e di Z (θ) da usarsi come esempio, credo che si possa proporre qualche funzione già ampiamente studiata, ad esempio la funzione data a pag. 604, Cap. XIV di "Calcoli numerici e grafici", autore Gino Cassinis (Ed. Mariotti-Pacini, PISA, 1928). A pag. 605 sono già tabulati i valori per 24 angoli tra 0 e 2π. E' possibile volendo costruire con essa funzioni più complicate.

c) Per quanto riguarda il lavoro che probabilmente ci attende, e cioè l'analisi armonica delle nostre R (θ), Z (θ) sperimentali, si potrà forse seguire il metodo di C.Runge ed F.Emde che è descritto a pag. 601 dell'opera citata.

d) Può avere un certo interesse studiare l'effetto di una inomogeneità locale (inomogeneità L) di elevata ampiezza, sia della R (θ) che della Z (θ). Si chiede ai teorici come queste inomogeneità L possono essere trattate. In particolare; sarebbe simpatico che in prima approssimazione gli effetti della inomogeneità L dipendessero non dalla forma della perturbazione, ma solo dalla sua "superficie", che esprimiamo come:

$$SR = \int_0^{2\pi} R(\theta)\, d\theta \qquad ; \qquad SZ = \int_0^{2\pi} Z(\theta)\, d\theta$$

Per quanto riguarda le possibili ampiezze di SR ed SZ, diamo, nel caso che non sia no possibili calcoli generali, i seguenti esempi, l'uno per R (θ), l'altro per Z (θ)

- R (θ) = 0 ovunque tranne che in un settore di ampiezza $\pi/12$, ove R (θ) vale R_o. Caso particolare $R_o(\theta)/r_e = 3/100$.
- Z (θ) = 0 ovunque tranne che in un settore di ampiezza $\pi/12$, ove Z (θ) = Z_o. Caso particolare Z_o = + 20 mm. Se questi casi sono catastrofici, si chiede di individuare i casi limite.

§ 4 - Significato dei casi numerici dati. Richieste ai teorici.-

Gli esempi numerici dati possono essere con valori troppo alti, sicchè il sincrotrone in tali condizioni non funziona. Questo non sarebbe ancora grave, poichè si può rimediare l'inomogeneità del ferro con opportune correnti, come si fa normalmente nei sincrotroni funzionanti.

In particolare per R (θ) ed Z (θ) le armoniche 0 e 1, che danno probabilmente le più gravi noie, si correggono (Caltech, M.I.T., etc.) con correcting coils intorno al polo, in un modo piuttosto empirico, e con un controllo quasi continuo durante il funzionamento del sincrotrone.

Noi chiediamo ai teorici di usare i dati numerici come punti di orientamento, fornendoci la discussione delle conseguenze delle inomogeneità nei termini più generali possibili.

§ 5 - Fluttuazioni di n(r) e di n (θ) dovute alla inomogeneità del campo.-

In questa impostazione noi trattiamo separatamente R (θ), Z (θ), n (θ) ed n(r). Questa separazione non è affatto legittima, poichè le quattro funzioni di θ ed r non sono in generale indipendenti. Tuttavia le trattiamo qui come tali, riservandoci di discutere il problema più generale della derivazione di R, Z, n, dall'unico vettore $\vec{B}$ (r, z, θ) in un secondo tempo, sulla scorta delle critiche del gruppo teorico a questi nostri dati.

a) Quanto alle fluttuazioni dell'indice n, osserviamo quanto segue: nella preparazione dei poli e nello studio statico (eccitazione in corrente continua) è effettivamente possibile arrivare a misurare un campo con una precisione di n dell'ordine dell'1 - 2 % (Cornell, Brookhaven); o addirittura è possibile arrivare a tenere n costante entro questi limiti (cfr. Cornell, ove le misure in c.c. hanno dato n = .59 ± .01).

Ma sarebbe illusorio pensare che questa obbedienza si mantenga anche durante l'effettiva fase di iniezione, date le correnti parassite, le rimanenze etc. Non abbiamo dati precisi su questo punto, anche perchè misure esatte in elettrosincrotroni grandi e a salita veloce (come il nostro probabilmente sarà) non ne esistono ancora.

Comunque è da dire che probabilmente il compito di tenere n entro limiti accettabili alla iniezione e per i primi microsecondi sarà assegnato alle correnti di correzione (correcting coils), le quali correggono in modo piuttosto grossolano nel tempo e nello spazio. Per questa ragione è da attendersi che presso l'iniezione la n non sia costante al variare di r e di ϑ, ma sia una funzione

$$n = n(r, \vartheta, t)$$

Questa situazione influisce sullo studio del meccanismo di iniezione, ed in particolare rende illusoria, come il gruppo della Sanità ha fatto osservare recentemente, la speranza di una spiralizzazione continua e regolare.

Ci riserviamo di ritornare sugli errori di n, ed in via provvisoria, tenendo conto delle informazioni sperimentali attuali, proponiamo al gruppo teorico di calcolare le variazioni del rendimento all'iniezione (intendendo come rendimento il rapporto tra il numero di elettroni immessi dall'iniettore ed il numero di elettroni catturati finalmente dalla radio frequenza) allorchè la n non è costante, ma varia a caso, cioè in modo sufficientemente adiabatico ma imprevedibile, entro un intervallo che non include risonanze gravi, per esempio tra n = .4 ed n = .8 .-

b) Se una trattazione generale di questo tipo è troppo ardua, proponiamo il seguente caso particolare:

1) $n(\vartheta, r, t) = n_o + n_2 \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi) \pm \frac{0,2 - n_2}{A} (r - r_o)$

ove:

- $n_o = 0,6$;
- n_2 ha alcuni valori scelti tra 0 e 0,2 (per es. $n_2 = 0,1$);

- la fase φ è arbitraria
- A è la semiampiezza utile della ciambella

Da questo caso discendono ad esempio le due forme più particolari:

$$n(r) = n_o \pm \frac{0,2}{A}(r - r_o)$$

$$n(\theta) = n_o + 0,2 \text{ sen } (\theta + \varphi)$$

La dipendenza dal tempo non è data, ma si suppone, nella 1), che dopo alcune diecine di microsecondi la $n(r, \theta, t)$ si riporti alla $n = n_o$.

c) Se il caso precedente risulta troppo arduo per il calcolo, si chiede al gruppo teorico di ~~xxxx~~ discutere il rendimento per vari valori di n_o, scelti costanti volta per volta.

d) Può essere che all'iniezione, e nei primi successivi microsecondi, convenga, più che una n_o = costante, una n dipendente dal tempo in modo opportuno. Per la convenienza di una particolare $n = n(t)$ mi permetto di rimandare alla [illegible] proposta del 3 Novembre '53: "Sulla convenienza di deformare il campo magnetico all'iniezione .. ...etc.".-

Mi sembra che in questa stima del rendimento non convenga mai sperare nelle particolari oscillazioni di betatrone per schivare l'iniettore, a meno che queste oscillazioni non siano già molto ampie (per es. $\gg$ 4 cm). Può forse convenire invece stimare con considerazioni statistiche la probabilità che le fluttuazioni a caso della traiettoria degli elettroni mentre il campo magnetico aumenta permettano ad essi di schivare l'iniettore nei primi giri e quindi per sempre. Una trattazione statistica dovrebbe~~xxxx~~ dare rendimenti minori del vero, poichè le correnti di correzione hanno anche il compito di deformare la statistica a nostro vantaggio.-

14 Dicembre ~~Novembre~~ '53

Giorgio Salvini

— o —