Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/76
6.12.1953.

I.F. Quercia: CAMPIONE DI CAMPO MAGNETICO COSTITUITO DA SOLENOIDE RETTILINEO.-

CAMPIONE DI CAMPO MAGNETICO COSTITUITO DA SOLENOIDE RETTILINEO

Nel seguito condidereremo un solenoide rettilineo avente le seguenti caratteristiche:

raggio = A cm

lunghezza = $2L$ cm

diametro del filo (nudo), = d cm

numero di spire per cm = n

densità di corrente nel conduttore = σ A/mm^2

campo magnetico = B in gauss

permeabilità magnetica dell'aria = μ = $12,56 \times 10^{-7} = 4\pi \times 10^{-7}$

resistività del conduttore = ρ Ωm x metro

lunghezza del conduttore = ℓ metri

supporremo inoltre che le spire successive siano a contatto, ciò che, a prescindere dallo strato di isolante, sia

$$n = 1/d$$

é quindi il numero totale delle spire sia

$$N = n \times 2L$$

La superficie del conduttore in mm^2 è data da:

$$S = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot 10^2$$

e pertanto la corrente che vi fluisce è:

$$I = \sigma \times S = \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \cdot \sigma \cdot d^2$$

La componente di B lungo l'asse del solenoide, misurata sull'asse e nel caso di solenoide infinitamente lungo, come vedremo appresso è data da:

$$B_{z\,\infty} = 10^6 \times \mu \times I \times n \quad \text{gauss}$$

sostituendovi il valore di I trovato precedentemente:

$$B_{z\,\infty} = 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{\pi}{4} \cdot 10^2 \sigma\, d^2 \times \frac{1}{d} = \pi^2 \cdot \sigma \cdot d \cdot 10 \quad \text{gauss}$$

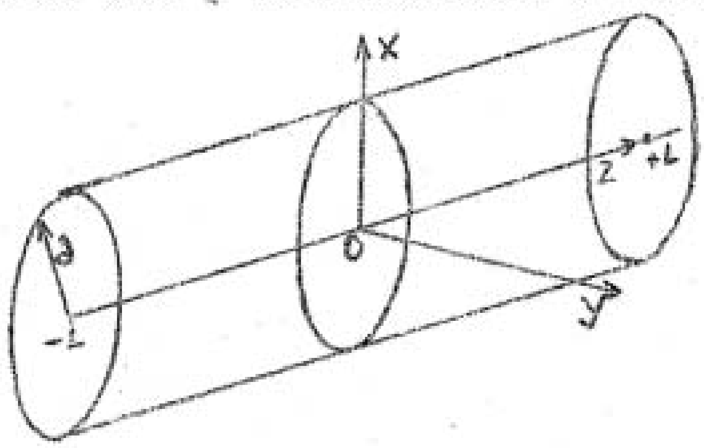
$$= 98 \times \sigma \times d$$

Come si vede il campo B_{∞} è proporzionale alla densità di corrente ammessa ed al diametro del filo.

Calcoliamo ora esattamente il campo per il solenoide di lunghezza finita. Applicheremo la formula di Laplace

$$\vec{dB} = \frac{\mu \cdot I \cdot 10^6}{4\pi} \, \frac{\vec{dl} \wedge \vec{r}}{r^3}.$$

e assumiamo un sistema di coordinate ortogonali con origine al centro del solenoide ed asse z coincidente con l'asse del solenoide:



Detto $P(x,y,z)$ un punto dell'elica cilindrica che costituisce il solenoide, e ϕ l'angolo che un piano passante per P e per l'asse z forme con l'asse x, si ha:

$$x = a\cos\phi \quad ; \quad y = a\sin\phi \quad ; \quad z = a\,\phi\, tg\,\alpha$$

dove α è definito in modo che il passo dell'elica sia dato da

$$p = 2\pi a\, tg\,\alpha \qquad cm.$$

<u>Calcolo del campo nell'origine degli assi.</u>-

In questo caso le tre componenti del vettore $\vec{r}$ saranno:

$$r_x = -a\cos\phi \quad ; \quad r_y = -a\sin\phi \quad ; \quad r_z = -a\phi\, tg\,\alpha$$

i segni negativi provengono dal fatto che si deve intendere orientato da ℓ verso 0.

Le tre componenti del vettore $\vec{d\ell}$ lungo l'elica, saranno:

$$d\ell_x = -a \sin\phi \, d\phi \; ; \; d\ell_y = a \cos\phi \, d\phi \; ; \; d\ell_z = a \, tg\alpha \, d\phi$$

Si ha ancora:

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} = a(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{1/2}$$

per cui la componente B_z del campo sarà:

$$B_z = \frac{\mu I \cdot 10^6}{4\pi} \int \frac{r_x d\ell_y - r_y d\ell_x}{a^3(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{3/2}} = \frac{B_{z\infty}}{4\pi n} \frac{1}{a} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{3/2}}$$

dove: $\phi_1 = -\frac{N}{2} \times 2\pi$ e $\phi_2 = +\frac{N}{2} 2\pi$

Consideriamo l'integrale a secondo membro: sostituiamovi:

$$y = 1+\phi^2 tg^2\alpha \qquad \text{da cui}$$
$$dy = 2\phi \, tg^2\alpha \, d\phi = 2 \, tg\alpha \, (y-1)^{1/2} d\phi$$

si ha:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{d\phi}{(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{3/2}} = \frac{1}{2 tg\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{(y-1)^{1/2} y^{3/2}} = \frac{1}{2 tg\alpha} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-y}} = \frac{1}{2 tg\alpha} \left| \frac{2(y-1)^{1/2}}{y^{1/2}} \right|_{y_1}^{y_2} =$$

$$= \frac{1}{2 tg\alpha} \left| \frac{2(\phi^2 tg^2\alpha)^{1/2}}{(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{1/2}} \right|_{\phi_1}^{\phi_2} = \left| \frac{\phi}{(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{1/2}} \right|_{\phi_1}^{\phi_2} = \frac{2N\pi}{(1+N^2\pi^2 tg^2\alpha)^{1/2}} = \frac{2\pi N}{\left(1+N^2\frac{\ell^2}{4a^2}\right)^{1/2}}$$

si ha quindi:

$$B_z = \frac{B_{z\infty}}{4\pi n a} \frac{2\pi N}{\left(1+\frac{N^2\ell^2}{4a^2}\right)^{1/2}} = B_{z\infty} \frac{N}{2\left(n^2a^2+\frac{N^2}{4}\right)^{1/2}} = B_{z\infty} \frac{1}{(1+a^2/L^2)^{1/2}}$$

che per $N=\infty$ diventa $B_{z\infty}$ come dev'essere; nel caso che $a/L \ll 1$ si può scrivere:

$$B_z \cong B_{z\infty}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2\right)$$

Quindi lo scarto percentuale dal valore del campo per solenoide infinito è dato da:

$$\frac{B_{z\infty}-B_z}{B_{z\infty}} = \frac{\Delta B_z}{B_{z\infty}} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2 \times 100$$

<u>Calcolo del campo in un punto dell'asse z a distanza di $\bar{b}$ cm dalle origini degli assi.-</u>

In questo caso le tre componenti di $\vec{v}$ diventano:

$$v_x = -a\cos\phi \;;\; v_y = -a\sin\phi \;;\; v_z = -a\phi\, tg\,\alpha + \bar{b}$$

Per fare il calcolo operiamo una traslazione degli assi lungo l'asse z in modo da portare in $\bar{b}$ l'origine. In queste condizioni il calcolo procede come nel caso precedente, salvo che i due limiti di integrazione diventano:

$$\phi_1 = -\left(\frac{N}{2}\times 2\pi + \frac{\bar{b}}{a\,tg\alpha}\right) \qquad \phi_2 = \frac{N}{2}\times 2\pi - \frac{\bar{b}}{a\,tg\alpha}$$

con questi valori si ha:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{d\phi}{(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{3/2}} = \left|\frac{\phi}{(1+\phi^2 tg^2\alpha)^{1/2}}\right|_{\phi_1}^{\phi_2} = \frac{\pi N - \frac{\bar{b}}{a\,tg\alpha}}{\left[1+\left(N\pi - \frac{\bar{b}}{a\,tg\alpha}\right)^2 tg^2\alpha\right]^{1/2}} + \frac{\pi N + \frac{\bar{b}}{a\,tg\alpha}}{\left[1+\left(N\pi + \frac{\bar{b}}{a\,tg\alpha}\right)^2 tg^2\alpha\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{\pi N a\,tg\alpha - \bar{b}}{\left[a^2 tg^2\alpha + (\pi N a\,tg\alpha - \bar{b})^2\, tg^2\alpha\right]^{1/2}} + \frac{\pi N a\,tg\alpha + \bar{b}}{\left[a^2 tg^2\alpha + (\pi N a\,tg\alpha + \bar{b})^2\, tg^2\alpha\right]^{1/2}}$$

e poichè $a\,tg\alpha = \frac{1}{2\pi n}$

$$B_z(\bar{b}) = \frac{B_{z\infty}}{2\pi n a}\,\frac{1}{tg\alpha}\left\{\frac{\pi N/2\pi n - \bar{b}}{\left[a^2+(\pi N/2\pi n - \bar{b})^2\right]^{1/2}} + \frac{\pi N/2\pi n + \bar{b}}{\left[a^2+(\pi N/2\pi n + \bar{b})^2\right]^{1/2}}\right\} =$$

$$= \frac{B_{z\infty}}{2}\left\{\frac{N/2n - \bar{b}}{\left[a^2+(N/2n - \bar{b})^2\right]^{1/2}} + \frac{N/2n + \bar{b}}{\left[a^2+(N/2n + \bar{b})^2\right]^{1/2}}\right\}$$

e poichè $N = 2L \times n$ e quindi $N/2n = L$ si ha ancora:

$$B_z(\bar z) = \frac{B_{z\infty}}{2}\left\{\frac{L-\bar z}{(a^2+(L-\bar z)^2)^{1/2}} + \frac{L+\bar z}{(a^2+(L+\bar z)^2)^{1/2}}\right\} =$$

$$= \frac{B_{z\infty}}{2}\left\{\frac{1-\bar z/L}{\left(\frac{a^2}{L^2}+\left(1-\frac{\bar z}{L}\right)^2\right)^{1/2}} + \frac{\quad}{\left(\frac{a^2}{L^2}+\left(1+\frac{\bar z}{L}\right)^2\right)^{1/2}}\right\}$$

Vogliamo ora calcolare lo scarto di $B_z(\bar z)$ rispetto a B_z cioè

$$\frac{B_z(\bar z)-B_z}{B_z} = \frac{\Delta B_z}{B_z}$$ nel caso che sia $\frac{\bar z}{L} \equiv \varepsilon \ll 1$ e $\frac{a}{L} \equiv \gamma < 1$

si ha

$$\frac{\Delta B_z}{B_z} = \frac{\frac{1+\varepsilon}{[\gamma^2+(1+\varepsilon)^2]^{1/2}} + \frac{1-\varepsilon}{[\gamma^2+(1-\varepsilon)^2]^{1/2}} - \frac{2}{[\gamma^2+1]^{1/2}}}{\frac{2}{(\gamma^2+1)^{1/2}}} \cong$$

$$\cong \frac{\frac{1+\varepsilon}{[\gamma^2+1+2\varepsilon]^{1/2}} + \frac{1-\varepsilon}{(\gamma^2+1-2\varepsilon)^{1/2}} - \frac{2}{(\gamma^2+1)^{1/2}}}{\frac{2}{(\gamma^2+1)^{1/2}}} \cong$$

$$\cong \frac{(1+\varepsilon)\left[1-\frac{1}{2}(\gamma^2+2\varepsilon)\right] + (1-\varepsilon)\left[1-\frac{1}{2}(\gamma^2-2\varepsilon)\right] - 2\left(1-\frac{1}{2}\gamma^2\right)}{2\left(1-\frac{1}{2}\gamma^2\right)} = \frac{-\varepsilon^2}{1-\gamma^2/2} \cong \frac{-(\bar z/L)^2}{1-\frac{(a/L)^2}{2}}$$

Calcolo del campo in un punto fuori dell'asse del solenoide.-

Si voglia calcolare il campo in un punto avente coordinate $x = d$; $y = 0$; $z = 0$. Si hanno i seguenti valori per le componenti del vettore $\vec{v}$ e del vettore $\vec{dl}$:

$v_x = -(a\cos\phi - d)$; $v_y = -a\sin\phi$; $v_z = -a\phi\,tg\,\alpha$

$dl_x = -a\sin\phi\,d\phi$; $dl_y = a\cos\phi\,d\phi$; $dl_z = a\,tg\,\alpha\,d\phi$

La componente z del campo in questo punto sarà:

$$B_z(d) = \frac{10^6 \mu I}{4\pi} \int \frac{r_y\, dl_x - r_x\, dl_y}{r^3} = \frac{B_{z\infty}}{4\pi n} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{(a^2 \sin^2\phi + a^2\cos^2\phi - da\cos\phi)\, d\phi}{[(x-d)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

si ha:

$$r^2 = a^2(1 + \phi^2 tg^2\alpha) - 2ad\cos\phi + d^2$$

$$B_z(d) = \frac{B_{z\infty}}{4\pi n a} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{(1 - \frac{d}{a}\cos\phi)\, d\phi}{[(1 + tg^2\alpha\,\phi^2) - 2\frac{d}{a}\cos\phi + (\frac{d}{a})^2]^{3/2}}$$

Considerìamo ora il caso del solenoide infinito ($\phi_1 = -\phi_2 = \infty$) e cerchiamo di valutare le differenze relative:

$$\frac{B_{z\infty}(d) - B_{z\infty}}{B_{z\infty}} = \frac{1}{4\pi n a} \left\{ I_1 - \frac{d}{a} I_2 - 1 \right\}$$

dove

$$I_1 = \int_{\phi_1=-\infty}^{\phi_2=+\infty} \frac{d\phi}{[1 + tg^2\alpha\cdot\phi^2 - 2\frac{d}{a}\cos\phi + (\frac{d}{a})^2]^{3/2}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{[1 + tg^2\alpha\cdot\phi^2 - 2\frac{d}{a} + (\frac{d}{a})^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{d}{a})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\phi}{(1 + K^2\phi^2)^{3/2}} \qquad \text{dove } K = \frac{tg\,\alpha}{1 - d/a}$$

si ha allora

$$I_1 \leq \left| \frac{2}{(1-\frac{d}{a})^3} \frac{\phi}{(\phi^2 K^2 + 1)^{1/2}} \right|_{\phi=\infty} \cong \left| 2\left(1 + 2\frac{d}{a}\right) \frac{\phi}{(\phi^2 tg^2\alpha + 1 - 2\frac{d}{a})^{1/2}} \right|_{\phi=\infty} = \frac{2(1+2\frac{d}{a})}{tg\,\alpha} = 4\pi n a\left(1 + 2\frac{d}{a}\right)$$

Per l'altro integrale, si ha:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\phi\, d\phi}{[1 + tg^2\alpha\,\phi^2 - 2\frac{d}{a}\cos\phi + (\frac{d}{a})^2]^{3/2}} \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\phi\, d\phi}{[1 + tg^2\alpha\,\phi^2 + 2\frac{d}{a} + (\frac{d}{a})^2]^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{d}{a})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\phi\, d\phi}{(1 + h^2\phi^2)^{3/2}} \geq \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\phi\, d\phi}{(1 + h^2\phi^2)^{3/2}} \qquad \text{dove } h = \frac{tg\,\alpha}{1 + d/a}$$

Consideriamo l'integrale:

$$M \equiv \int_0^{\infty} \frac{\cos\phi}{(1 + h^2\phi^2)^{3/2}}\, d\phi$$

sostituiamo $\cos\phi = \cos\left(\frac{1}{h}\sinh\psi\right)$

si ha $\phi = \frac{1}{h}\sinh\psi \qquad d\phi = \frac{1}{h}\cosh\psi$

$$1 + h^2\phi^2 = 1 + \sinh^2\psi = \cosh^2\psi$$

per cui,

$$M \equiv \int_0^\infty \frac{\cos\phi}{(1+h^2\phi^2)^{3/2}} = \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{h}\sinh\psi\right)\frac{1}{h}\cosh\psi}{\cosh\psi}\,d\psi = \frac{1}{h}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{h}\sinh\psi\right)d\psi =$$

$$= \frac{1}{h}\,K_0\left(\frac{1}{h}\right)$$

dove $K_0(x)$ è la funzione di Bessel di seconda specie modificata.
Consideriamo ora la derivata di (hM) rispetto a $1/h$, si ha:

$$\frac{d}{d\left(\frac{1}{h}\right)}(hM) = \frac{d}{d\left(\frac{1}{h}\right)}\left\{\frac{h}{h}\int_0^\infty \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{h^2}+\phi^2\right)^{1/2}}\,d\phi\right\} = +\frac{2}{2h}\int_0^\infty \frac{\cos\phi}{\left(\frac{1}{h^2}+\phi^2\right)^{3/2}}\,d\phi =$$

$$= +h^2\int_0^\infty \frac{\cos\phi}{(1+h^2\phi^2)^{3/2}}$$

d'altra parte vale la relazione:

$$\frac{d}{d\left(\frac{1}{h}\right)}K_0\left(\frac{1}{h}\right) = -K_1\left(\frac{1}{h}\right)$$

quindi

$$h^2\int_0^\infty \frac{\cos\phi}{(1+h^2\phi^2)^{3/2}} = -K_1\left(\frac{1}{h}\right)$$

Si ha dunque

$$I_2 \geq \frac{1}{8}\,2\int_0^\infty \frac{\cos\phi}{(1+h^2\phi^2)^{3/2}} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{h^2}\,K_1\left(\frac{1}{h}\right)$$

——— o ———

6 Dicembre '53 Italo Federico Quercia