Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/57
2.10.1953.

A. Turrin: UTILIZZAZIONE DEGLI ELETTRONI INIETTATI IN FUNZIONE DELLA DIMENSIONE TRASVERSALE DEL FASCETTO IMMESSO.-

I.N.F.N. - Sezione Acceleratore

Gruppo Teorico

Rapporto n.9

A. Turrin

UTILIZZAZIONE DEGLI ELETTRONI INIETTATI IN FUNZIONE DELLA DIMENSIONE TRASVERSALE DEL FASCETTO IMMESSO

(Risposta alla domanda n.3 del gruppo operante all'Istituto Superiore di Sanità)

A) La domanda n.3.

E' la seguente: "Ferme restando le altre condizioni (fascetto monocromatico e di apertura angolare nulla) come dipende dalle dimensioni trasversali del fascetto elettronico immesso la frazione di elettroni effettivamente utilizzata nel sincrotrone? In mancanza di informazioni più dettagliate è sufficiente indicare per il momento l'ordine di grandezza delle dimensioni laterali del fascetto che (supposte tutte le posizioni di uscita ugualmente rappresentate nel fascetto immesso) riduce a metà o ad una frazione nota gli elettroni effettivamente utilizzabili.

B) Formulazione dettagliata del problema.

a) Sono date le dimensioni della ciambella e l'indice n del campo (dati Pisa II).
b) I dettagli geometrici dell'uscita del deflettore (dati Sanità I - Vedi fig. 1 del rapporto n. 5).
c) La dimensione trasversale del fascetto immesso.
d) Si trovano di conseguenza i valori:
spiralizzazione;
intervallo di tempo di iniezione;
che rendono massima la quantità di elettroni utilizzabili.

Per non complicare senza possibile vantaggio i calcoli, non è stato introdotto il parametro individuante la pendenza del fascio iniettato nella ciambella, cioè si suppone che l'iniezione avvenga in direzione tangenziale per tutte le particelle.

Si suppone piuttosto di iniettare affondando il deflettore - senza inclinarlo - di quel tanto che basta affinchè il fascetto venga immesso nella ciambella (v. fig.1).

C) Notazioni.

Riportiamo alcune notazioni già usate che qui servono, e definiamo nuove grandezze per questo problema specifico.

ξ_0 = distanza tra il bordo interno dell'uscita del deflettore ed il mantello del fascetto immesso (=0.45 cm come dato orientativo). v. fig.1.

δ = distanza di un elettrone generico dal margine interno del fascetto (all'istante di iniezione τ_0).

δ_{max} = larghezza del fascetto immesso.

$\gamma_0 + \delta$ = distanza dell'elettrone generico (nell'istante τ_0 di iniezione) dal bordo inferiore dell'uscita del deflettore.

$\bar{x}_0 = \gamma_{\tau_0} + \xi_0$ = scostamento iniziale (all'istante di iniezione) del margine interno del fascetto dal raggio istantaneo. Esso verrà usato, invece di τ_0, per caratterizzare l'istante di iniezione di un elettrone generico e varia nell'intervallo tra $\bar{x}_{0\,inf.}$ e $\bar{x}_{0\,sup.}$

$x_0 = \bar{x}_0 + \delta$ = scostamento iniziale (all'istante τ_0 di iniezione) dell'elettrone generico dal raggio istantaneo.

σ = spiralizzazione (cioè decremento del raggio istantaneo in un giro).

γ = velocità di diminuzione del raggio istantaneo.

D) La densità di corrente delle particelle iniettate.

Supporremo che si possa (uniformemente) distribuire una data corrente elettronica entro un fascio di larghezza δ_{max} variabile a priori entro certi limiti.

La densità di corrente sarà, in tale ipotesi,

$$= \frac{cost}{\delta_{max}}$$

E) La condizione di non urto contro l'iniettore al k-esimo giro.

E', per una particella qualunque del fascio (v. formula 1 del rapporto n.3)

$$\Delta_{11}^{4K} x_0 < \gamma \tau_0 + K\sigma$$

ovvero (v. fig.1)

$$\Delta_{11}^{4K} (\bar{x}_0 + \delta) < \bar{x}_0 - \frac{\gamma}{4} + K\sigma$$

cioè

$$(1) \qquad \boxed{-\frac{1-\Delta_{11}^{4K}}{\Delta_{11}^{4K}} \bar{x}_0 + \frac{K\sigma - \frac{\gamma}{4}}{\Delta_{11}^{4K}} < \delta < \frac{1-\Delta_{11}^{4K}}{\Delta_{11}^{4K}} \bar{x}_0 + \frac{K\sigma - \frac{\gamma}{4}}{\Delta_{11}^{4K}}} \qquad K = 1, 2, \ldots$$

tali limitazioni sono rappresentate nel piano $(\bar{x}_0, \delta)$ da rette di parametri K e σ.

F) La condizione di non urto contro la parete interna.

E' (v. formula 2 del rapporto n.3)

$x_0 < D - \delta \Sigma_{max}$, ovvero, essendo $D = \delta + \Sigma_{max}$

e considerando la fig.1,

$$(2) \quad \boxed{0 < \delta < -\bar{x}_0 + (a - \bar{x}_{0sup}) = \delta_{max}}$$

che è una retta nel piano $(\bar{x}_0, \delta)$.

G) Gli elettroni emessi dal deflettore.

Sono quelli per cui

$$(3) \quad \boxed{0 < \delta < \delta_{max}}$$

H) La quantità di elettroni che non hanno urtato al termine dell'iniezione.

Sarà individuata dall'integrale

$$(4) \quad \boxed{Q = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\delta_{max}} S} \qquad \text{dove} \quad S = \int_{\bar{x}_{0inf}}^{\bar{x}_{0sup}} \delta \, d\bar{x}_0 \,,$$

e δ , per ogni valore di $\bar{x}_0$, sarà un segmento determinato dalle più restrittive delle condizioni 1, 2, 3.

Per ogni δ_{max} si tratta di trovare il massimo della Q rispetto σ , $\bar{x}_{0sup}$ e $\bar{x}_{0inf}$.

I) La quantità di elettroni utilizzabili se il fascetto ha dimensione trasversale nulla.

Si trova ponendo nella (4) $\delta_{max} \to 0$. Il calcolo ed i risultati sono identici a quelli del § I del rapporto n.5.

Cioè, assunto numericamente

$$(Aa)\qquad \boxed{Q \doteq \frac{10^{-7}}{1,7}\,\frac{1}{\delta}\,\frac{2}{\delta_{max}}\,\delta^{1}}\ ;$$

è, per $\delta_{max} \to 0$

$$\left[Q_{lim}\right]_{max} = 1,0 \quad \text{per}$$

$\epsilon = 0,06325$ cm $\qquad (\bar{y}_0 = 0;\ D^* = \ ?);$

$\bar{x}_{o\,sup} = 6$ cm $\qquad \bar{x}_{o\,inf} = 0,7266$ cm.

J) La quantità di elettroni utilizzabili per $\delta_{max} > 0$.

E' da aspettarsi a priori di dover operare con i seguenti ordini di grandezza:

$$\delta_{max} \sim \text{mm}; \qquad \bar{x}_0 \sim \text{cm}.$$

Per rappresentare allora le aree S nel piano $(\bar{x}_0, \delta)$ conviene mantenere la scala 1:1 per l'asse $\bar{X}_0$ ed adottare la scala 1:0,1 per l'asse δ.

Così le aree S che si ottengono (figg.3, 4, 5, 6) sono limitate superiormente ed inferiormente dalle rette

$$\delta = +\delta_{max}$$
$$\delta = 0$$

A destra sono limitate dalla retta $\bar{X}_0 = \bar{X}_{o\,sup}$ e dalla (2).

La massima estensione assoluta a destra di tali aree si ottiene, ad esempio, nel seguente modo:

Dalle equazioni (2) e (3) si vede che l'area ABCDE (v. fig.2) - in cui D ed E sono due punti fissi di ascissa fissa arbitraria X - ha l'espressione

$$\bar{S} = (\bar{x}_{o\,sup} - X)\,\delta_{max} - \frac{1}{2}\left(2\bar{x}_{o\,sup} - a + 2\delta_{max}\right)^2$$

la $\bar{\bar{X}}_{o\,sup}$ di optimum si ottiène uguagliando a zero la $\frac{dS}{d\bar{\bar{X}}_{o\,sup}}$, e si trova

$$(\bar{\bar{X}}_{o\,sup})_{opt} = \frac{a}{2} - \frac{3}{4}\delta_{max}\,.$$

Per trovare la massima estensione a sinistra delle aree di cui alle figure 3, 4, 5, 6 (massima estensione compatibile col calcolo della Q_{max}) bisogna esaminare il comportamento delle rette rappresentate dalle condizioni (1).

Sulla base del calcolo numerico si trova che per

$$\underset{0{,}06325 \qquad\qquad 0{,}1195}{\vdash\!\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\;\delta\;-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\dashv}$$

a) la intercetta con l'asse $\bar{\bar{X}}_o$ della retta K=3 si mantiene sempre maggiore delle intercette di tutte le altre rette con l'asse $\bar{\bar{X}}_o$.

b) tutte le rette fino a K=13, formano un angolo compreso tra 80° e 90° con l'asse $\bar{\bar{X}}_o$. Solo la retta K=7 forma un angolo ≅ 6° con l'asse $\bar{\bar{X}}_o$.

c) al variare di δ, la retta K=7 spazza il piano ($\bar{\bar{X}}_o$, δ) da destra a sinistra molto più rapidamente che non la retta K=3.

Ne consegue che finchè la retta K=7 limita a sinistra le aree S, all'aumentare di δ aumenta velocemente l'area S ed anche la Q.

Quando, all'aumentare di δ, la retta K=3 diviene il limite sinistro dell'area S, l'area S cresce ancora al crescere di δ, ma la Q diminuisce.

Allora si può concludere che si è vicinissimi al massimo della Q per quel valore di δ per cui le rette K=7 e la $\delta = \delta_{max}$ si incontrano nel medesimo punto.

Una tale condizione fornisce la σ, la $\bar{X}_{o_{inf}}$, la S e la Q_{max}.

I risultati definitivi del calcolo sono stati i seguenti:

δ_{max} (cm)	$\bar{X}_{o_{sup}}$ (cm)	$\bar{X}_{o_{inf}}$ (cm)	σ (cm)	S	Q_{max}
0	6	0.7266	0.06325		1.0
0.1	5.93	0.6	0.07731	5.3	0.81
0.2	5.85	0.5	0.09137	10.3	0.67
0.3	5.77	0.35	0.1054	15.2	0.57
0.4	5.70	0.25	0.1195	20.2	0.49

In fig. 7 è riportato il grafico della Q_{max} in funzione di δ_{max}.

Roma, 2 ottobre 1953

Fig 1.

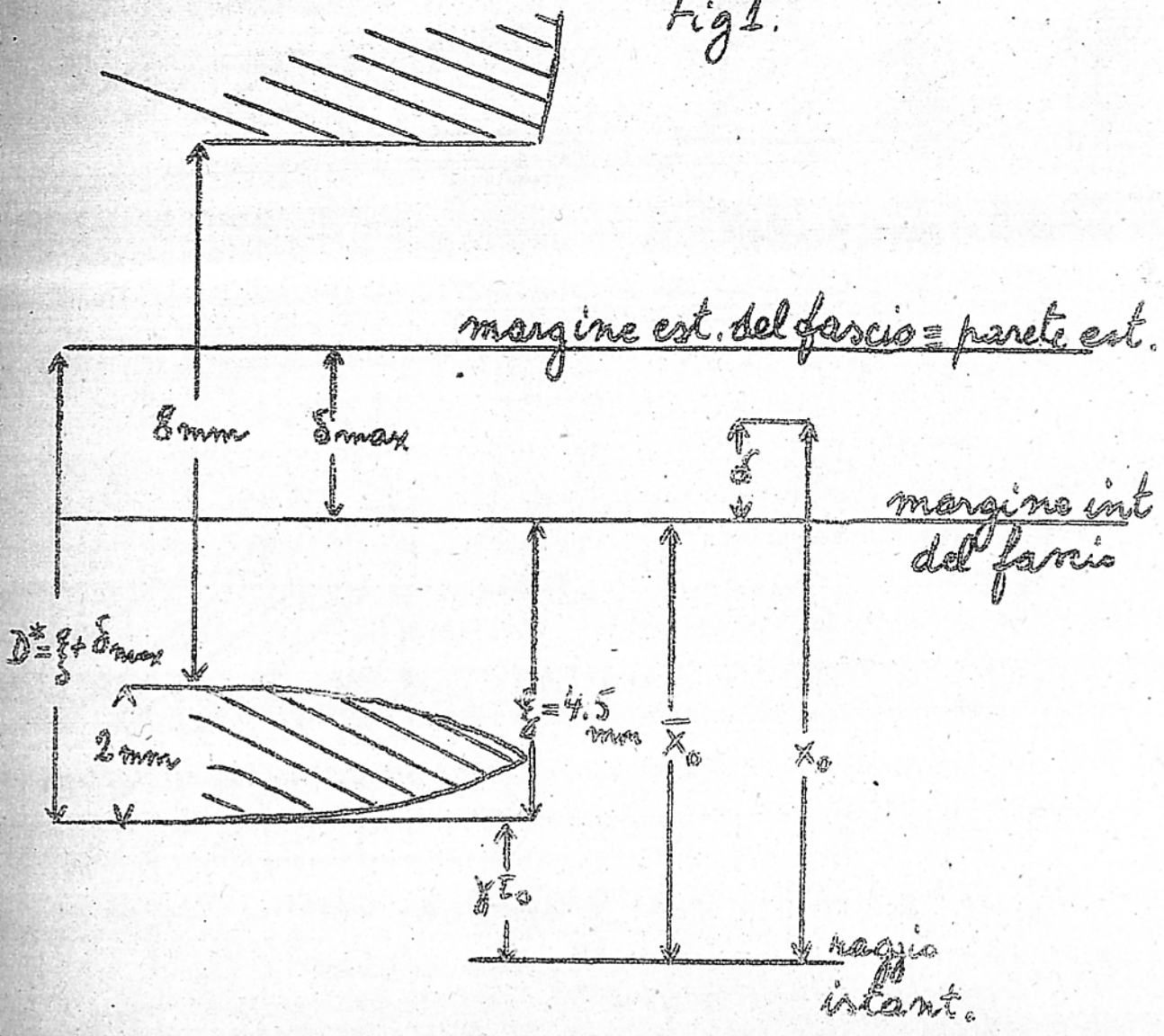
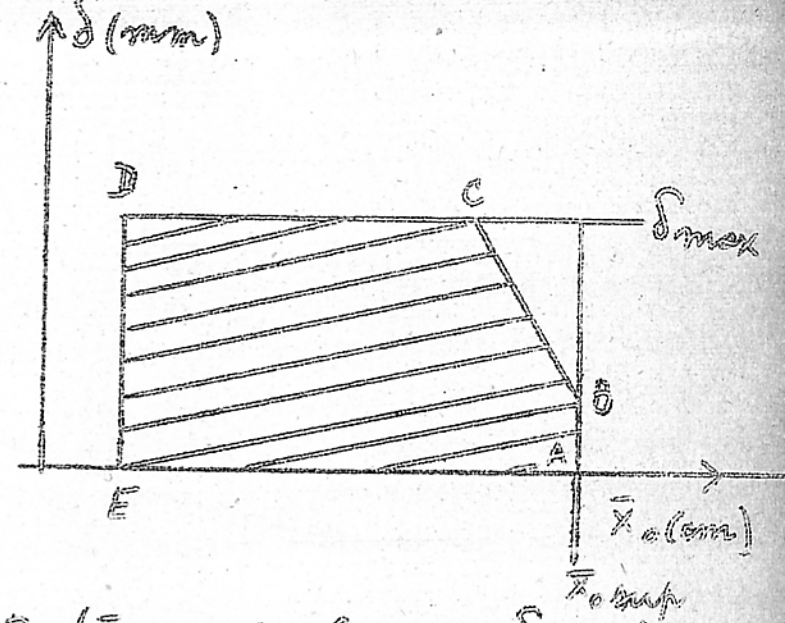


Fig 2.



$$B \equiv \left(\bar{x}_{o\,sup}\,;\; a - 2\bar{x}_{o\,sup} - \delta_{max}\right)$$

$$C \equiv \left(a - \bar{x}_{o\,sup} - 2\delta_{max}\,;\; \delta_{max}\right)$$

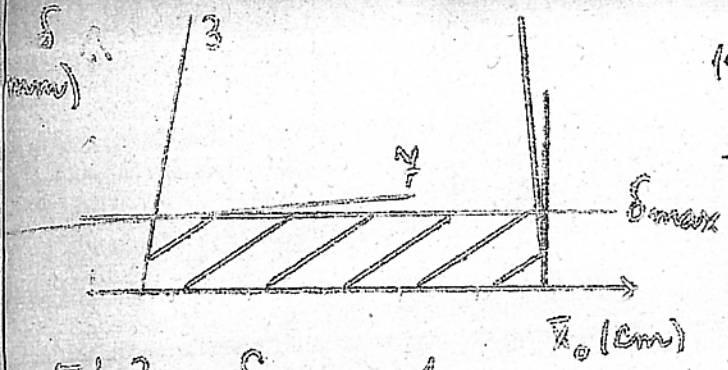


Fig 3. $\delta_{max} = 1$ mm

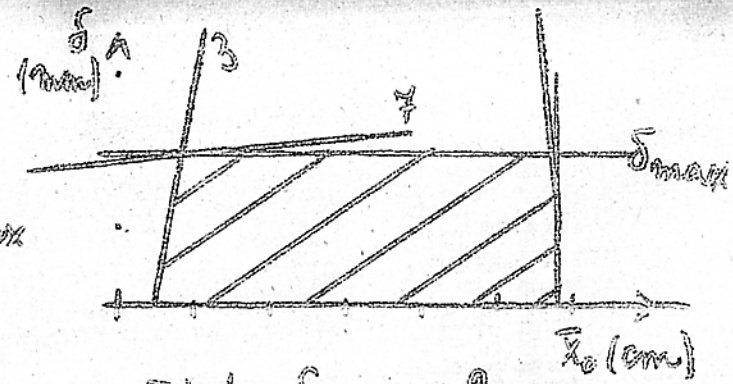


Fig 4. $\delta_{max} = 2$ mm

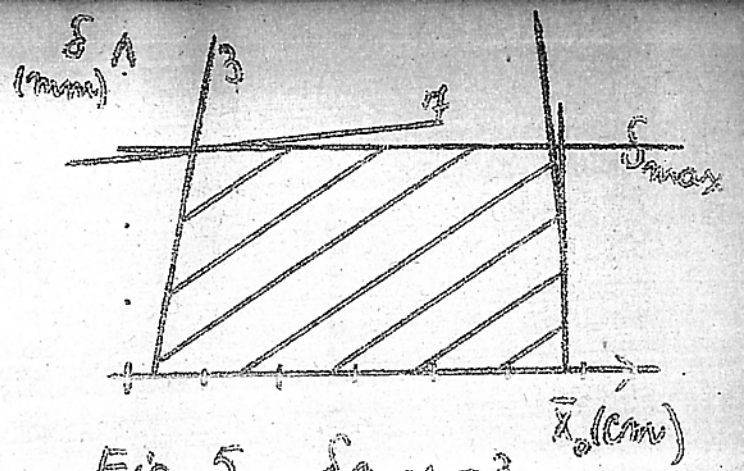


Fig. 5. $\delta_{max} = 3$ mm

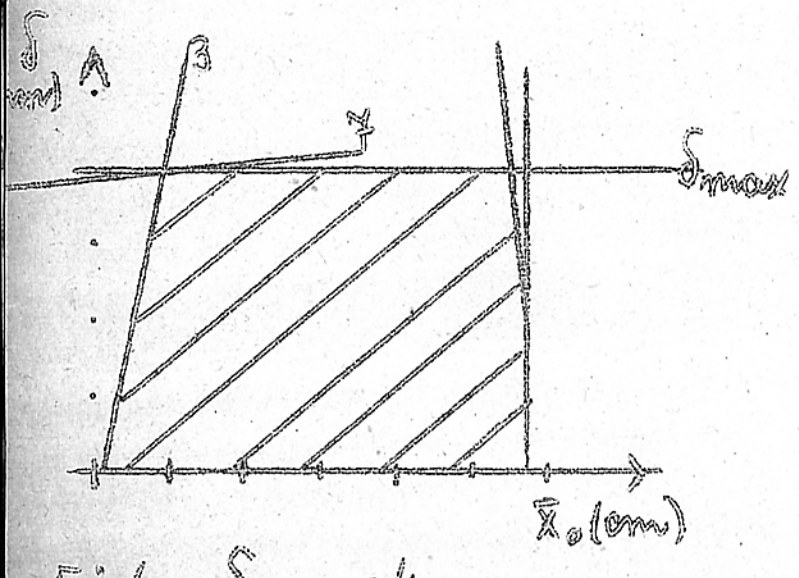


Fig 6. $\delta_{max} = 4$ mm

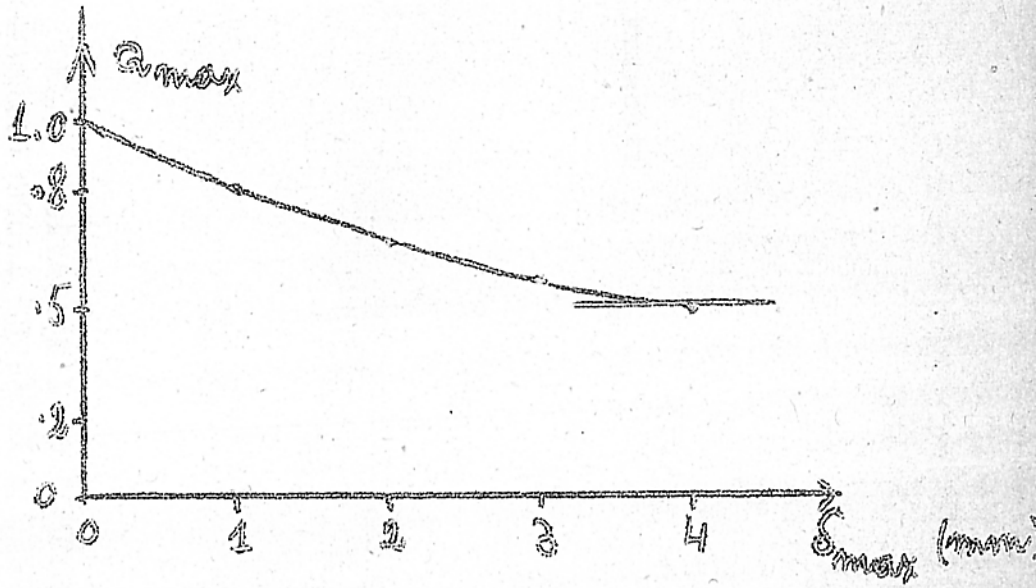


Fig 7.