Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/54
22.9.1953.

I.F. Quercia: CALCOLO PRELIMINARE DELL'ORBITA NELLA MACCHINA DI CORNELL A STRONG-FOCUSING.-

TOOZ 21/7/53 PT/I°

CALCOLO PRELIMINARE DELLE ORBITE NELLA MACCHINA DI CORNELL A STRONG - FOCUSING

I.F.Quercia

1) Per il calcolo delle orbite della macchina di Cornell a strong focusing si è seguito lo schema indicato da E.R.Caianiello ed A.Turrin in N.C. 5, 594 (1953).

Mancando notizie più precise si sono fatte le seguenti ipotesi sulla macchina di Cornell:

a) Raggio di curvatura dei tratti curvi delle orbite R = 3,80 metri

b) Indice del campo /n/ = 20

c) Lunghezza dei tratti rettilinei (ffs) 1.00 metri

d) Lunghezza dei tratti con $n>0$ (fs) $\ell_+ = \frac{2\pi R}{N}$

e) Lunghezza dei tratti con $n<0$ (dfs) $\ell_- = \ell_+ = \frac{2\pi R}{N}$

f) Numero degli elementi impiegati (numero fs + numero dfs) = $N \begin{cases} 16^{(x)} \\ 32 \end{cases}$

g) Iniezione all'inizio di un dfs

2) Consideriamo prima il caso di N = 16. Si può prendere come unità che si ripete periodicamente (4 volte in un giro) il seguente complesso di elementi:

ffs	fs	dfs	fs	dfs
$\vec{C}$	$\vec{B}$	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{A}$

←

La freccia indica il senso di circolazione degli elettroni, e le lettere indicano le matrici che corrispondono a ciascun elemento.

Indicheremo la matrice prodotto:

$$\vec{\Delta}_5 \equiv \vec{C}\,\vec{B}\,\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{A} = \vec{C}(\vec{B}\vec{A})^2$$

Con simboli evidenti si ha:

$$\vec{B}\vec{A} = \begin{vmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{12} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{vmatrix}$$

(X) NOTA: Come si vedrà con N=16 (numero fornito da G.Salvini ma evidentemente riferentesi alle lenti = fs + dfs) non si ha focalizzazione.

e per la matrice $(\vec{B}\vec{A})^2$ i seguenti 4 elementi:

$$(\vec{B}\vec{A})^2_{11} = (a_{11}b_{11}+b_{12}a_{21})^2+(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})(a_{11}b_{21}+b_{22}a_{21})$$
$$(\vec{B}\vec{A})^2_{12} = (a_{11}b_{11}+b_{12}a_{21})(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})+(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})$$
$$(\vec{B}\vec{A})^2_{21} = (a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})(a_{11}b_{11}+b_{12}a_{21})+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})$$
$$(\vec{B}\vec{A})^2_{22} = (a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})(b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22})+(b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})^2$$

La matrice $\vec{C}$ è data da:

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nel nostro caso si ha:

$$a_{11} = a_{22} = \cosh\alpha = \beta$$
$$a_{12} = a_{21} = \sinh\alpha = \gamma$$
$$b_{11} = b_{22} = \cos\alpha = b \qquad\qquad \text{con} \quad \alpha = \frac{\sqrt{|n|}}{R}\ell_{\pm} \qquad k = \frac{\sqrt{|n|}}{R}\ell_0$$
$$b_{12} = b_{21} = \sin\alpha = c$$

Perw vedere se la unità scelta focalizza o meno occorre calcolare la traccia della matrice $\vec{\Delta}_5$. A questo scopo osserviamo che si calcola facilmente la seguente identità:

$$t_r\vec{\Delta}_5 = t_r(\vec{B}\vec{A})^2 + k(\vec{B}\vec{A})^2_{21}$$

Osserviamo ancora che se λ_1 e λ_2 sono gli autovalori della matrice $\vec{B}\vec{A}$ e $2x = t_r\vec{B}\vec{A}$ sussistono le relazioni:

$$\lambda_1^2 - 2\lambda_1 x + 1 = 0$$
$$\lambda_2^2 - 2x\lambda_2 + 1 = 0$$

poichè determinante di $\vec{B}\vec{A} = 1$ .Sommando membro a membro si ha:

$$(\lambda_1^2+\lambda_2^2) - 2x(\lambda_1+\lambda_2) + 2 = 0$$

ora poichè $\lambda_1^2+\lambda_2^2 = t_r(\vec{B}\vec{A})^2 \qquad \lambda_1+\lambda_2 = t_r(\vec{B}\vec{A})$

vale la relazione: $t_r(\vec{B}\vec{A})^2 = \left[t_r(\vec{B}\vec{A})\right]^2 - 2$ quindi

$$t_r(\vec{B}\vec{A})^2 = (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})^2 - 2$$

Si ha dunque

$$t_r\vec{\Delta}_5 = (b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})^2 - 2 + k\{(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})(a_{11}b_{11}+b_{12}a_{21}) + (b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22})(a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22})\}$$

Sostituendovi i nostri parametri

$$t_r\vec{\Delta}_5 = (b\beta+c\gamma-c\gamma+b\beta)^2 - 2 + k\{(-c\beta+b\gamma)(b\beta+c\gamma)+(-c\gamma+b\beta)(-c\beta+b\gamma)\} =$$
$$= (2b\beta)^2 - 2 + 2kb\beta(b\gamma - c\beta)$$

Con i valori numerici indicati in 1 si ha:

$$\gamma = 2.79 \; ; \quad \beta = 2.96 \; ; \quad c = 0.983 \; ; \quad b = -0.185 \; ; \quad k = 1.12$$

e di conseguenza:

$$t_r \vec{\Delta}_5 = 3.41$$

Poichè la condizione di focalizzazione è che $|t_r \vec{\Delta}| < 2$ si vede che in questo caso la macchina non può funzionare.

3) Consideriamo ora il caso di N = 32. Una unità periodica della macchina può ora essere schematizzata così:

ffs	fs	dfs	fs	dfs	fs	dfs	fs	dfs
$\vec{C}$	$\vec{B}$	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{A}$	$\vec{B}$	$\vec{A}$

$\longleftarrow$

dove le matrici $\vec{A}\ \vec{B}\ \vec{C}$ hanno lo stesso significato (non lo stesso valore numerico!) del caso precedente.

Cominciamo anche questa volta con il calcolo della traccia della matrice:

$$\Delta_9 = \vec{C}\,(\vec{B}\vec{A})^4$$

Indichiamo con $\vec{E} \equiv (\vec{B}\vec{A})^2$ per cui $(\vec{B}\vec{A})^4 = \vec{E}^2$

Come precedentemente se λ_1 e λ_2 sono gli autovalori della matrice $\vec{E}$, valgono le due equazioni:

$$\lambda_{1,2}^2 - 2x\,\lambda_{1,2} + 1 = 0$$

e quindi ripetendo il ragionamento già fatto:

$$t_r \vec{E}^2 = (t_r \vec{E})^2 - 2$$

Ma abbiamo già calcolato in 2, la $t_r \vec{E} = t_r (\vec{B}\vec{A})^2$ e risulta quindi:

$$t_r (\vec{B}\vec{A})^4 = \left[(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})^2 - 2 \right]^2 - 2$$

Si ha:

$$t_r \vec{\Delta}_9 = t_r (\vec{B}\vec{A})^4 + k\,(\vec{B}\vec{A})^4_{21}$$

occorre quindi calcolare:

$$\begin{aligned}(\vec{B}\vec{A})^4_{21} = {} & \left[(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})(a_{11}b_{21} + a_{21}b_{22}) \right] \times \\ & \times \Big\{ \left[(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})^2 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) \right] + \\ & + \left[(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})(b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})^2 \right] \Big\}\end{aligned}$$

Sostituiamo in queste espressioni i nostri parametri, otteniamo:

$$t_r \vec{\Delta}_9 = (2b\beta)^4 - 4(2b\beta)^2 + 2 + k\,(b^2\gamma\beta - bc\beta^2)(b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + b^2\gamma^2 - c^2\beta^2)$$

Introduciamo i nostri valori numerici:

$$N = 32\,; \quad |n| = 20\,; \quad R = 380\,\mathrm{m}\,; \quad \ell_{\pm} = \frac{2\pi R}{32} = 78{,}5\,\mathrm{cm}\,; \qquad \ell_0 = 100\,\mathrm{cm}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{|n|}}{R}\,\ell_{\pm} = 0{,}877 \text{ radianti} = 50^\circ 15'\,; \qquad K = 1{,}175$$

dai quali si ricavano i seguenti valori dei parametri:

$$\beta = \cosh\alpha = 1{,}409\,; \quad \gamma = \sinh\alpha = 0{,}993\,; \quad b = \cos\alpha = 0{,}639\,; \quad c = \sin\alpha = 0{,}768$$

Si ottiene: $\quad t_r \vec{\Delta}_g = -1{,}37$

E' dunque $|t_r \vec{\Delta}_g| < 2$ **e quindi la macchina focalizza.**

4) Possiamo ora calcolare le orbite. Per questo bisogna calcolare tutti gli ekementi della $\vec{\Delta}_g$ **, cosa che faremo, per semplicità, numericamente.**

Cominciamo con introdurre i numeri in $(\vec{B}\vec{A})^2$ **. Si hanno i seguenti elementi:**

$$(\vec{B}\vec{A})^2_{11} = (\beta b + c\gamma)^2 + (b\gamma + c\beta)(-c\beta + b\gamma) = 1{,}98$$

$$(\vec{B}\vec{A})^2_{12} = (\beta b + c\gamma)(b\gamma + c\beta) + (b\gamma + c\beta)(-c\gamma + b\beta) = 3{,}08$$

$$(\vec{B}\vec{A})^2_{21} = (-c\beta + b\gamma)(b\beta + c\gamma) + (-c\gamma + b\beta)(-c\beta + b\gamma) = -0{,}81$$

$$(\vec{B}\vec{A})^2_{22} = (-c\beta + b\gamma)(b\gamma + c\beta) + (-c\gamma + b\beta)^2 = -0{,}75$$

Si ha dunque:

$$(\vec{B}\vec{A})^2 = \begin{vmatrix} 1{,}98 & 3{,}08 \\ -0{,}81 & -0{,}75 \end{vmatrix}$$

Per controllo calcoliamo:

determinante $(\vec{B}\vec{A})^2 = 1{,}01 \sim 1{,}00$ **, come era da aspettarsi poichè i calcoli son stati fatti con il regolo.**

Abbiamo di conseguenza:

$$(\vec{B}\vec{A})^4 = \begin{vmatrix} 1{,}98^2 - 3{,}08 \times 0{,}81 & 1{,}98 \times 3{,}08 - 3{,}08 \times 0{,}75 \\ -0{,}81 \times 1{,}98 - 0{,}75 \times 0{,}81 & -0{,}81 \times 3{,}08 + 0{,}75^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}41 & 3{,}80 \\ -0{,}99 & -1{,}93 \end{vmatrix}$$

per controllo:

$$\det(\vec{B}\vec{A})^4 = 1{,}04 \cong 1{,}00$$

E in fine:

$$\vec{\Delta}_g = \vec{C}(\vec{B}\vec{A})^4 = \begin{vmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times (\vec{B}\vec{A})^4 = \begin{vmatrix} 1{,}41 - K\cdot 0{,}99 & 3{,}80 - K\cdot 1{,}93 \\ -0{,}99 & -1{,}93 \end{vmatrix}$$

e introducendo il nostro valore di

$$\vec{\Delta}_g = \begin{vmatrix} 0{,}24 & 1{,}52 \\ -0{,}99 & -1{,}93 \end{vmatrix}$$

Per controllo:

$$\det \vec{\Delta}_g = 1{,}04 \sim 1 \quad ; \qquad \boxed{t_r \Delta_g = -1{,}69}$$

Nei calcoli seguenti adsumeremo quest'ultimo valore numerico delle $t_r \vec{\Delta}_g$ **perchè lo riteniamo più accurato del valore calcolato nel paragrafo precedente.**

Poniamo:

$$2x = t_r \vec{\Delta}_g \qquad \text{quindi} \qquad x = -0{,}85$$

e ancora: $\cos\varphi = x$ da cui $\boxed{\varphi = 148°20' = 2{,}60 \text{ radianti}}$

Calcoliamo ora la matrice $\vec{J} \equiv \frac{\Delta - \cos\varphi}{\sin\varphi}$

Si ha

$$\cos\varphi = -0{,}85 \; ; \quad \sin\varphi = 0{,}525$$

per cui:

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} 2{,}07 & 4{,}51 \\ -0{,}267 & -2{,}07 \end{vmatrix}$$

per controllo $t_r\vec{J} = 0$ **come deve essere.**

Si può ora porre:

$$\vec{\Delta} = \cos\varphi + \vec{J}\sin\varphi$$

e poichè $\vec{J}^2 = -1$ **si ha che dopo il passaggio di** m **unità del tipo considerato il valore di** $\vec{\Delta}^m$ **si calcola immediatamente.**

$$\vec{\Delta}^m = \cos m\varphi + \vec{J}\sin m\varphi$$

Per cui

$$\vec{\Delta}^m \times \vec{z} = \cos m\varphi \times \vec{z}_0 + \sin m\varphi \, \vec{J} \times \vec{z}_0$$

Per in funzionamento della macchina a noi interessa che sia contenuta entro le dimensioni trasversali della ciambella la componente z del vettore. $\vec{z}_{\#}$

Ci calcoliamo quindi:

$$\vec{J} \times \vec{z} = \begin{vmatrix} 2{,}07 & 4{,}51 \\ -0{,}267 & -2{,}07 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & z_0 \\ \frac{R}{\sqrt{|n|}} & z_0' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2{,}07 z_0 + 4{,}51 \frac{R}{\sqrt{|n|}} z_0' \\ -0{,}267 z_0 - 2{,}07 \frac{R}{\sqrt{|n|}} z_0' \end{vmatrix}$$

per cui:

$$\left| \vec{J} \times \vec{z} \right|_z = 2{,}07\, z_0 + 4{,}51 \frac{R}{\sqrt{|n|}} z_0'$$

Dopo il passaggio di m unità della macchina si ha:

$$z = \cos\vartheta\, z_0 + \sin\vartheta \left(2{,}07\, z_0 + 4{,}51 \frac{R}{\sqrt{|n|}} z_0' \right)$$

avendo posto: $m\varphi \equiv \vartheta$

Considerando $z = z(\vartheta)$ si trova che questa funzione raggiunge un estremo per

$$\frac{dz(\vartheta)}{d\vartheta} = 0 \qquad \text{cioè per} \qquad 2{,}07 + 4{,}51 \frac{R}{\sqrt{|n|}} \frac{z_0'}{z_0} = \operatorname{tg}\vartheta$$

- Cominciamo a considerare le oscillazioni verticali, dovute all'iniettore.

Facciamo le seguenti ipotesi:

a) L'iniezione avviene nel piano mediano: $z_0 = 0$

b) L'apertura della ciambella è di sezione rettangolare con lati paralleli all'asse z di altezza $2b$ cm.

Si ha in questo caso:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \infty \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2} \qquad \cos\vartheta = 0 \qquad \sin\vartheta = 1$$

per cui

$$|z|_{max} = 4{,}51 \frac{R}{\sqrt{|n|}} z_0'$$

perchè il beam sia contenuto nella ciambella occorre che sia $|z|_{max} \le b$

quindi: $z_0' \le \frac{\sqrt{|n|}}{4{,}51 \times R} b$

Nel nostro caso $|n| = 20$; $R = 380$ cm si ha

$$z_0' \le \frac{\sqrt{20}}{4{,}51 \times 380} b = 2{,}61 \times b \times 10^{-3}$$

e detto α l'angolo di emissione dall'iniettore rispetto al piano mediano, si ha:

$$\alpha \sim z_0' \le 2{,}61 \times b \times 10^{-3} \text{ radianti}$$

quindi

$$b = 2\,cm \qquad \alpha_2 \leq 5{,}22 \times 10^{-3} = 0{,}30^\circ$$

$$b = 1{,}5\,cm \qquad \alpha_{1,5} \leq 3{,}92 \times 10^{-3} = 0{,}22^\circ$$

\- Consideriamo ora le oscillazioni orizzontali attorno all'orbita di equilibrio. Facciamo l'ipotesi seguenti:

a) Le particelle sono emesse tutte parallelamente all'orbita di equilibrio, cioè $r' = 0$

b)L'apertura della ciambella in direzione radiale è di $2\,a\,cm$

Intenderemo ora:

$$x = r - r_0$$ essendo r_0 il raggio dell'orbita di equilibrio.

Valgono le stesse equazioni del caso precedente quindi, per $x_0' \equiv r_0' = 0$ si ha:

$$x = x_0 \cos\vartheta + 2{,}07 \sin\vartheta \, x_0$$

il massimo di questa funzione si ha per $\operatorname{tg}\vartheta = 2{,}07$ cioè $\vartheta = 64^\circ$

per cui $\cos\vartheta = 0{,}44$; $\sin\vartheta = 0{,}90$, e si ha:

$$|x|_{max} = (0{,}44 + 2{,}07 \times 0{,}90)\, x_0 = 2{,}30 \times x_0$$

per la limitazione della ciambella occorre che sia $|x|_{max} \leq a$, cioè

$$x_0 \leq \frac{a}{2{,}30}$$

con

$$a = 3{,}5\,cm \qquad x_0 \leq 1{,}53\,cm$$

$$a = 4\,cm \qquad x_0 \leq 1{,}74\,cm$$

\- Da queste considerazioni si rileva che conviene iniettare con un angolo $\alpha = x_0'$ tale che si riduca a zero il termine:

$$2{,}07\, x_0 + 4{,}51 \frac{R}{\sqrt{|n|}} x_0'$$

cioè

$$x_0' = -\frac{2{,}07}{4{,}51} \frac{\sqrt{|n|}}{R} x_0$$

Nel nostro caso numerico

$$\alpha = x_0' = -5{,}4 \times 10^{-3} x_0$$

Supposto di iniettare a $x_0 = a\,cm$ dall'orbita di equilibrio si ha

$$\alpha = -5{,}4 \times 4 \times 10^{-3} = -21{,}6 \times 10^{-3} \text{ radianti} = -1{,}24^\circ \qquad \text{per } a = 4\,cm$$

In queste condizioni il valore di z non supera mai il valore iniziale.

- Considerando la macchina composta di 4 unità, vediamo qual'è il valore di z dopo $1, 2, \cdots g$ giri ($m = 4, 8 \cdots 4g$).

Si ha $\vartheta = m\varphi$ con $\varphi = 148°20' = 2{,}52$ rad.

g	m	$\vartheta°$	$(\vartheta°)$	$\cos(\vartheta°)$	$\sin(\vartheta°)$
1	4	593° 20'	233° 20'	−0,597	−0,802
2	8	1168° 40'	106° 40'	−0,287	0,958
3	12	1780° 0'	340° 0'	0,940	−0,342
4	16	2373° 20'	213° 20'	−0,835	−0,549

Come si vede al terzo giro si ha $z = 0{,}94 z_0$, praticamente occorre quindi che in 3 giri vi sia una spirallizzazione pari alla lunghezza occupata dalla bocca dell'iniettore. Cioè se questa pesca nella ciambella di 1 cm, occorre spiralizzare di circa 3 mm per giro.

- Le oscillazioni del valore di z, sia in direzione verticale che radiale, si ripetono ogni qual volta l'angolo ϑ si incrementa di 2π, cioè:

$$\vartheta \equiv m\varphi = 2\pi$$

Da cui:

$$m = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{360°}{148{,}3°} = 2{,}43$$

la lunghezza d'onda λ delle oscillazioni corrisponde a 2,43 volte la lunghezza L di una unità della macchina; si ha dunque:

$$\lambda = 2{,}43 L = 2{,}43 (8 l_t + l_0) = 2{,}43 \left(8 \frac{2\pi R}{32} + l_0\right) = 16{,}8 \text{ metri}$$

Un giro completo della macchina è costituito di 4 unità L, quindi

$$Q = \frac{4L}{\lambda} = \frac{4L}{2{,}43 L} = 1{,}65$$

Dopo 17 giri ($28 \times \lambda$) le oscillazioni si ripetono (nei limiti della precisione con cui è stato fatto il calcolo numàrico)

Il rapporto tra la lunghezza di una sezione l_t e $\lambda/2\pi$ è:

$$\mu = \frac{l_t}{\lambda/2\pi} = \frac{0{,}745}{16{,}8} \times 2\pi = \frac{\pi}{11{,}3}$$