

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/53
22.9.1953.

C. Bernardini: EFFETTI DI RISONANZA.-

T/Problemi

I.N.F.N. - Sezione acceleratore

Gruppo Teorico
=====

Rapporto n.7

C. Bernardini

EFFETTI DI RISONANZA.

1 - Impostazione del problema per un sincrotrone circolare.

Nel sistema di riferimento di coordinate cilindriche (r, z, θ) le equazioni relativistiche del moto di una particella di carica e e massa m , in un campo magnetico di potenziale vettore $\vec{A} = (0, 0, A)$, sono le seguenti:

1.1 $\frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m r \dot{\theta}^2 - \frac{e}{c} r \dot{\theta} B_z$

1.1 $\frac{d}{dt} (m \dot{z}) = \frac{e}{c} r \dot{\theta} B_r$

$$m r^2 \ddot{\theta} + \frac{e}{c} r A = \text{cost}$$

Si è supposte A funzione delle sole r, z ; inoltre

1.2 $B_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA)$; $B_r = \frac{\partial A}{\partial z}$

Si assume per B_z la seguente espressione:

1.3 $B_z = B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^{n_0}$

con B_0, n_0, R costanti, supponendo che questa legge rappresenti convenientemente l'andamento del campo per un certo intervallo di valori di r attorno al valore R .

Per risolvere le 1.1 si fa uso di un metodo di approssimazioni successive giustificato da certe limi-

-2-

tazioni che si presuppongono nelle condizioni iniziali; le soluzioni così ottenute hanno le caratteristiche seguenti;

1) l'approssimazione di ordine zero rappresenta il moto di una particella di velocità angolare

$$1.4 \quad \omega_0 = \frac{e B_0}{m_0 c}$$

su di un'orbita circolare di raggio R .

2) la successiva approssimazione rappresenta la sovrapposizione di tre movimenti: quello descritto in 1), più una oscillazione parallela all'asse z ed una nella direzione del raggio. Le frequenze di queste oscillazioni sono rispettivamente

$$1.5 \quad \sqrt{r_0} \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad \sqrt{1-n_0} \frac{\omega_0}{2\pi}$$

3) i termini di ordine superiore al primo sono in genere abbastanza piccoli per essere trascurati; ma, se si verificano certe condizioni di risonanza, essi possono modificare sostanzialmente la soluzione descritta in 2).

Introduciamo la variabile $s \approx R\theta \approx R\omega_0 t$; com'è noto, per ottenere l'approssimazione l -esima, basta, nello sviluppo delle 1.1 in serie di potenze di:

$$\frac{r-R}{R} = \frac{x}{R} + \frac{z}{R} + \frac{dr}{ds} + \frac{dz}{ds}$$

trascurare i termini di esponente $l+1, \dots$

Posto

$$1.6 \quad B_r = -n_0 B_0 \frac{z}{R}$$

dalle 1.1 si ottiene, arrestandosi al prim'ordine:

1.7
$$\ddot{x} + (1 - n_0) \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{z} + n_0 \omega_0^2 z = 0$$

Le 1.7 sono note come equazioni delle oscillazioni libere del betatrone.

Includendo termini di ordine ≥ 2 le 1.7 si modificano in:

1.8
$$\ddot{x} + (1 - n_0) \omega_0^2 x = f(x, z, \dot{x}, \dot{z})$$

$$\ddot{z} + n_0 \omega_0^2 z = g(x, z, \dot{x}, \dot{z})$$

Non specificheremo per ora la forma di f e g , che in 1.8 rappresentano polinomi di grado ≥ 2 in x, z, \dot{x}, \dot{z} ; in realtà f e g contengono anche, esplicitamente, il tempo a causa delle deviazioni del campo dall'andamento assunto. Inoltre, a primo membro delle 1.8, la frequenza delle oscillazioni dovrà essere modificata per le stesse ragioni.

Questi dettagli saranno esaminati nel seguito.

Le 1.8 formano un sistema di equazioni non lineari le cui soluzioni rappresentano oscillazioni ortogonali delle particelle, lungo gli assi r e z ; i due moti sono in interazione (tramite le f e g): a causa dei termini non lineari l'ampiezza delle oscillazioni verticali può essere esaltata a spese di quella delle oscillazioni radiali e viceversa. Questa esaltazione sarà in genere trascurabile sino a che le frequenze non assumono certi valori critici; se poi f e g dipendono esplicitamente da t e sono anche, come mostreremo in seguito, funzioni periodiche di t con periodo $2\pi/\omega_0$, anche la rotazione descritta in 1) interagisce con i due modi di oscillazione.

Per chiarire ulteriormente l'uso del termine "ri-

- 4 -

sonanze" riferito alle 1.8 conviene dare subito lo schema del metodo approssimato di soluzione: si pone

$$1.9 \quad \begin{aligned} x &= x_0 + x_1 \dots \\ z &= z_0 + z_1 \dots \end{aligned}$$

essendo x_0, z_0 soluzioni di 1.7; x_1, z_1 sono soluzioni particolari di

$$1.10 \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 + (1-n)\omega_0^2 x_1 &= f(t, x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = f_0(t) \\ \ddot{z}_1 + n\omega_0^2 z_1 &= g(t, x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0) = g_0(t) \end{aligned}$$

e così via. f_0 e g_0 sono ora funzioni periodiche di t con i tre periodi

$$\frac{2\pi}{\omega_0}, \frac{2\pi}{\sqrt{n}\omega_0}, \frac{2\pi}{\sqrt{1-n}\omega_0}$$

E' evidente la possibilità di risonanze.

In seguito si darà la forma delle 1.10 sino al quarto ordine di approssimazione dello sviluppo delle 1.1 (cioè delle f e g); e per la soluzione si userà il criterio ora esposto.

Rifer. bibliogr. § 1.

Courant - Journ. of Appl. Phys. 20; 611; 1949

§ 2 - Inomogeneità del campo.

Come accennato, le funzioni f e g che compaiono al secondo membro di 1.8 vanno modificate a causa delle deviazioni del campo dalla forma 1.3.

Non si riesce, in pratica, a realizzare un magnete che assicuri un campo perfettamente omogeneo; supporremo che B_z sia della forma

$$2.1 \quad \bar{B}_z(\theta) \left(\frac{R}{r}\right)^{n_z(\theta)}$$

e che, in ogni regione accessibile alle particelle

$$2.2 \quad \left| \frac{\bar{n}_0(\theta) - n_0}{n} \right| \ll 1 \quad ; \quad \left| \frac{\bar{B}_0(\theta) - B_0}{B_0} \right| \ll 1$$

Queste "inogeneità" vengono incontrate dalle particelle una volta in ogni giro: $\bar{B}_0(\theta)$ ed $\bar{n}_0(\theta)$ sono quindi funzioni periodiche di periodo 2π ; in seguito saranno sufficienti a caratterizzarle i coefficienti del loro sviluppo di Fourier.

Courant - Loc cit. § 1

Barden - Proc Phys. Soc. London B ; 64; 579; 1951

§ 3 - Variazione radiale dell'indice.

La legge 1.3 è compatibile con le eq. di Maxwell fino a che ci si arresta alla prima potenza di x/R . Ammetteremo in seguito che le deviazioni dall'andamento 1.3 siano correzioni di ordine superiore al primo, rappresentabili con una variazione radiale dell'indice.

Per quello che ci interessa, non è necessario entrare in dettagli sulla geometria del magnete e sulla compatibilità con le eq. di Maxwell; supporremo soltanto che questi due fattori non comportino una variazione troppo rapida di n nella zona utile; vale a dire, che basti rappresentare n , entro la ciambella, con la legge

$$3.1 \quad n = n_0 + n_2 \frac{r-R}{R} = n_0 + n_2 \rho$$

Il valore numerico di

$$3.2 \quad n_2 = R \left(\frac{dn}{dr} \right)_{r=R}$$

riassume l'effetto di ogni circostanza che modifica la 1.3.

Della variazione radiale di n non si è tenuto conto nell'approssimazione delle oscillazioni libere; essa ha invece un ruolo essenziale nel calcolo degli effetti di risonanza, per le ragioni seguenti: in un sincrotrone, le oscillazioni di fase comportano oscillazioni del raggio istantaneo, attorno al valore R , molto lente rispetto alle oscillazioni di betatrone. La frequenza di queste ultime è determinata dal valore di n sull'orbita istantanea e quindi dalla 3.1.

A causa delle oscillazioni di sincrotrone, le particelle possono attraversare regioni in cui l'indice ha un valore critico: nel senso che le frequenze 1.5 verificano, con quest'indice, condizioni di risonanza.

La variazione di φ nel tempo è data da una legge del tipo

$$3.3 \quad \varphi = \varphi_{in} \cos \omega_f t$$

in cui ω_f ($\ll \omega_o$) è la pulsazione delle oscillazioni di fase e φ_{in} la loro ampiezza.

Courant - Loc. cit. § 1.

Caianiello - Nuovo cin. 10; 581; 1953.

§ 4 - Estensione al racetrack.

Come ha mostrato Blachman, la teoria delle oscillazioni libere di betatrone si estende agevolmente al racetrack imponendo alle soluzioni delle 1.7 opportune condizioni equivalenti alle variazioni di ampiezza nei tratti rettilinei. Per esempio, per le oscillazioni verticali, assumendo come variabile l'azimuth $\theta \approx \omega_o t$, queste condizioni si

scrivono

$$z\left(k\frac{\pi}{2} + \theta\right) = z\left(k\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{L}{R}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_{\theta=k\frac{\pi}{2}}$$

$$4.1 \quad \left(\frac{dz}{d\theta}\right)_{\theta=k\frac{\pi}{2} + \theta} = \left(\frac{dz}{d\theta}\right)_{\theta=k\frac{\pi}{2} - \theta}$$

In queste formule: L è la lunghezza di un tratto rettilineo, R il raggio di un settore circolare, k un numero intero, $k\frac{\pi}{2} - \theta$ l'estremo di un tratto rettilineo per $\theta < k\frac{\pi}{2}$ etc.

Imponendo poi la continuità al passaggio da un tratto rettilineo ad uno circolare si ottiene:

$$z\left(k\frac{\pi}{2}\right) = A \cos(k\mu + \phi)$$

$$4.2 \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)_{\theta=k\frac{\pi}{2}} = -A\left(1 + a\frac{c}{s} - \frac{1}{4}a^2\right)^{-\frac{1}{2}} \sin(k\mu + \phi)$$

essendo A e ϕ due costanti dipendenti dall'altezza ed inclinazione iniziali della traiettoria sul piano mediano; $c = \cos \Theta$ ed $s = \sin \Theta$; $a = \sqrt{n} \cdot \frac{L}{R}$; la costante μ è definita dalla seguente equazione

$$4.3 \quad \cos \mu = \cos \Theta - \frac{1}{2} a \sin \Theta = c - \frac{1}{2} a s$$

con

$$4.4 \quad \Theta = \sqrt{n_0} \frac{\pi}{2}$$

Tutto ciò vale per le oscillazioni radiali con la semplice sostituzione di $\sqrt{1-n_0}$ a $\sqrt{n_0}$.

(Il passaggio dalle notazioni di Blachman a quelle usuali di Blachman & Courant è molto semplice: in queste ultime la soluzione per i tratti curvi si scrive

$$z = X_k \cos \frac{\lambda}{X} + Y_k \sin \frac{\lambda}{X}$$

essendo λ l'ascissa lungo l'orbita circolare contata dall'ingresso nel k -esimo settore e $\lambda = R/\sqrt{n_0}$. Per ottenere le X_k e Y_k basta notare che

$$Y_{k+1} = c X_k + s Y_k + a Y_{k+1}$$

$$Y_{k+1} = -s X_k + c Y_k$$

per la continuità della z e della sua derivata ai confini tra due settori consecutivi. Blachman assegna invece le formule ricorrenti per le ampiezze nel punto centrale ($\theta = k \frac{\pi}{2}$) di un tratto rettilineo che sono le seguenti:

$$z \left[(k+1) \frac{\pi}{2} \right] = \left(-\frac{1}{2} a s \right) z \left(k \frac{\pi}{2} \right) + \left(s + a c - \frac{1}{4} a^2 s \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_{\theta = k \frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_{\theta = (k+1) \frac{\pi}{2}} = -s z \left(k \frac{\pi}{2} \right) + \left(c - \frac{1}{2} a s \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_{\theta = k \frac{\pi}{2}}$$

Le relazioni tra $\left(\frac{dz}{d\theta} \right)_{\theta = k \frac{\pi}{2}}$, X_k ed Y_k sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned} z \left(k \frac{\pi}{2} \right) &= \left(c - \frac{1}{2} a s \right) X_k + \left(s + \frac{1}{2} a c \right) Y_k \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{dz}{d\theta} \right)_{\theta = k \frac{\pi}{2}} &= -s X_k + c Y_k \end{aligned} \right\}$$

Il modo ora indicato non è il solo che consente di co-

struire soluzioni delle 1.7 per un racetrack. Le equazioni delle oscillazioni di betatrone sono nella forma tipica di Hill - Meissner: le soluzioni possono mettersi nella forma:

$$\exp \left(\frac{2i\mu}{\pi} \theta \right) q(\theta)$$

essendo μ ancora definite dalle 4.3 e q una funzione periodica di θ che si riduce ad una costante per L/R tendente a zero. E' immediata la condizione di stabilità

$$4.6 \quad |\cos \mu| \leq 1$$

E' chiaro poi come μ_x e μ_z (gl'indici distinguono i due casi, radiale e verticale) siano proporzionali alle frequenze fondamentali delle oscillazioni libere.

- Serber - Phys. Rev. 70; 434; 1946
 Calaniello & Turrin - Nuovo Cim. 10; 594; 1953
 Persico - Rapp. n° 6 I.N.F.N. Sez. accel.
 Pipes - Jour. of Appl. Phys. 24; 902; 1953
 Van der Pol, Strutt - Phil. mag. 5; 18; 1928

§ 5 - La condizione di risonanza.

Torniamo alle 1.10: le funzioni f e g conterranno armoniche della frequenza di rotazione ($\dot{\varphi}$) e delle due frequenze di oscillazione (essendo polinomi in x, z, \dot{x}, \dot{z})

Se p, q, r sono numeri interi, la condizione di risonanza si scrive

$$5.1 \quad p \frac{\pi}{2} - q \mu_x + r \mu_z = 0$$

Questa condizione determina i valori dell'indice che possono essere dannosi al funzionamento della macchina. Per esempio, per

$$p = -1, \quad q = 0, \quad r = 1$$

la 5.1 dà

$$\mu_z = \frac{\pi}{2}$$

Facendo uso della 4.3 si ottiene la seguente equazione per n :

$$\operatorname{ctg} \sqrt{n} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{n} \frac{L}{R}$$

Blachman & Courant - Lec. cit 4

Persico - Rapporto n° 1 I.N.F.N. Sez. accel.

§ 6 - Metodi di calcolo degli effetti di risonanza.

Distingueremo due casi, per ciascuno dei quali si seguirà un metodo differente:

1) Il fascio di particelle passa in prossimità del luogo in cui l'indice n ha un valore critico, senza però attraversarlo. In questo caso l'ampiezza delle oscillazioni forzate varia lentamente raggiungendo il suo massimo nel punto più vicino alla zona di risonanza.

2) Il fascio attraversa la zona di risonanza; durante il passaggio l'ampiezza delle oscillazioni aumenta rapidamente. In questo caso è possibile, come si vedrà, calcolare l'incremento di essa, per giro, "durante" la risonanza e il numero di giri per i quali questa è efficace.

Il caso 1), se si ha cura di scegliere opportunamente n_0 , interessa specialmente le zone in prossimità dei bordi della ciambella ed ha importanza per le prime armoniche degli sviluppi di f e g .

Blachman - loc. cit. § 4

§ 7 - Esposizione del metodo relativo al caso 1) § 6.

Riferiamoci per semplicità alle sole oscillazioni verticali. Consideriamo l'eq.

$$7.1 \quad \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + (n + \lambda) \varphi = 0$$

con le condizioni 4.1 per la φ e la $\frac{d\varphi}{d\theta}$.

Questa equazione fornisce un set di autofunzioni ortogona-

li associate a certi valori λ_m del parametro; ogni λ_m

tranne $\lambda_0 = -n$, è doppiamente degenera; ad esso corrispon-

dono due soluzioni Φ_m, Ψ_m ortogonali tra loro e che sup-

perremo anche normalizzate ad 1.

Poniamo

$$7.2 \quad \lambda_m = \nu_m - n$$

nella seconda delle 1.10 poniamo

$$g = n z(\theta)$$

Se $n \neq \nu_m$ per ogni m , la soluzione particolare della eq. per $z(\theta)$, che tende a zero con $z(\theta)$, ha la forma seguente:

$$7.3 \quad z(\theta) = - \sum_{m \neq 0}^{\infty} \frac{n}{\nu_m - n} \left\{ \Phi_m(\theta) \int_0^{2\pi} z(\theta') \Phi_m(\theta') d\theta' + \right.$$

$$\left. + \Psi_m(\theta) \int_0^{2\pi} z(\theta') \Psi_m(\theta') d\theta' \right\}$$

E' chiaro che l'ordine di grandezza di $z(\theta)$ sarà quello di $z(\theta)$ a meno che per un certo m

$$7.4 \quad a) |n - \nu_m| \ll 1 \quad (\text{ma} \neq 0)$$

$$b) \int_0^{2\pi} z(\theta') \Phi_m(\theta') d\theta' \quad (\text{o analogo con } \Psi_m)$$

dell'ordine dell'ampiezza delle oscillazioni libere.

Supporremo che entro la ciambella sia soddisfatta la condizione di focalizzazione

$$7.5 \quad 0 < n < 1$$

così che i termini con $|\nu_m| > 1$ non verificano certamente la 7.4.

Le autosoluzioni normalizzate di 7.1 con le condizioni 4.1 hanno la forma

$$7.6a \quad \bar{\Phi}_m = N_m \times \begin{cases} \cos \sqrt{\nu_m} \theta & \text{per } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\cos \sqrt{\nu_m} (\pi - \theta) & \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ \cos \sqrt{\nu_m} (2\pi - \theta) & \frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\Psi_m = N_m \times \cos \sqrt{\nu_m} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad \text{per } 0 \leq \theta < \pi$$

$$7.6b \quad - \cos \sqrt{\nu_m} \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) \quad \pi < \theta \leq 2\pi$$

in cui

$$7.7 \quad \frac{1}{N_m^2} = \pi + \frac{\sin \sqrt{\nu_m} \pi}{\sqrt{\nu_m}}$$

Il valore numerico di ν_m è dato da una delle radici delle equazioni

$$7.8a \quad \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \textcircled{H} = 1 \quad \text{se } m = 2l+1, \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

$$7.8b \quad \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{\textcircled{H}}{2} = -1 \quad m = 4l$$

$$7.8c \quad \operatorname{tg} \frac{\textcircled{H}}{2} = \frac{1}{2} a \quad m = 4l+2$$

a e \textcircled{H} sono definiti al § 4.

Se \textcircled{H}' è una radice di 7.8a, $\textcircled{H}'' = -2\textcircled{H}'$ è una radice di 7.8b e $\textcircled{H}''' = \pi - \textcircled{H}'$ di 7.8c; basta considerare la prima di queste equazioni. Per la 7.5, interessano le radici tali che

$$7.9 \quad 0 < \textcircled{H} < \frac{\pi}{2}$$

La 7.8a può anche scriversi:

$$\textcircled{H} \operatorname{tg} \textcircled{H} = \frac{2}{\Lambda - 1}$$

essendo

$$\Lambda = 1 + \frac{2L}{\pi R}$$

e per qualunque $\Lambda > 1$ ha una sola radice compresa tra 0 e $\frac{\pi}{2}$

Per tener conto anche delle 7.8b e 7.8c, interessano anche le radici di 7.8a tali che

$$\frac{\pi}{4} < \textcircled{H}' < \frac{\pi}{2} \quad (7.8b); \quad -\frac{\pi}{4} < \textcircled{H}' < 0 \quad (7.8c)$$

Blachman - Loc. cit. § 4

§ 8 - Esposizione del metodo relativo al caso 2) § 6.

Indichiamo ancora con $n\tilde{z}(\theta)$ il termine perturbativo; siano poi $z_1(\theta)$ e $z_2(\theta)$ due soluzioni di 1.7 con le condizioni 4.1, del tipo indicato alla fine del § 4; se $L/R \ll 1$, queste soluzioni sono in pratica, per ogni θ ,

$$8.1 \quad \cos\left(\frac{1+\sqrt{1-n}}{2}\theta\right) = \cos \Omega \theta, \quad \sin \Omega \theta$$

Se W è il wronkiano, costante, di z_1 e z_2 , la soluzione che soddisfa alle condizioni iniziali

$$8.2 \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0$$

è la seguente;

$$8.3 \quad z(\theta) = \frac{n}{W} \int_0^\theta [z_1(\theta)z_2(\theta') - z_2(\theta)z_1(\theta')] z(\theta') d\theta'$$

Poniamo

$$8.4 \quad \left. \begin{aligned} A(\theta) &= \int_0^\theta z_2(\theta') z(\theta') d\theta' \\ B(\theta) &= \int_0^\theta z_1(\theta') z(\theta') d\theta' \end{aligned} \right\} \times \frac{n}{W}$$

Supponiamo che dello sviluppo di Fourier di $\tilde{z}(\theta)$ sia importante solo un certo termine

$$\sim \cos \bar{\omega} t$$

nel senso che $\bar{\omega} = \Omega \omega_0$ per $t = 0$. Ω (ed eventualmente $\bar{\omega}$) varia con t per il tramite di n , cioè delle 3.1 e 3.3.

Poniamo $\omega_2 = \Omega \omega_0$. Si ha, a meno di termini inessenziali:

$$\begin{aligned} A(\theta) &\sim \int_0^t \cos(\omega_2 - \bar{\omega})\tau d\tau \sim \int_0^t \cos(\dot{\omega}_2 - \dot{\bar{\omega}})\tau^2 d\tau \sim \\ &\sim \int_0^t \cos(v^2) dv \end{aligned}$$

ed analogamente per $B(\theta)$. L'ultimo integrale è del tipo di Fresnel; $A(\theta)$ varia linearmente con θ , con ottima approssimazione, tra

$$t = 0 \quad \text{e} \quad t_m = |\omega_2 - \omega|^{-1/2}$$

Per quest'ultimo valore di t raggiunge un massimo. L'intervallo di tempo t_M è la durata efficace della risonanza.

Posto

$$8.5 \quad \delta A = [A^2(2\pi) + B^2(2\pi)]^{1/2}$$

per l'incremento di ampiezza δA in un giro, essendo

$$8.6 \quad \frac{\omega_0 t_m}{2\pi A}$$

il numero di rivoluzioni nel tempo t_M , l'incremento complessivo dell'ampiezza durante la risonanza è

$$8.7 \quad \Delta A = \frac{\omega_0 t_m}{2\pi A} \delta A$$

Blachman - loc. cit. § 4

Jahnke & Emde - Tables of functions IV ed. pg 35

§ 9 = Sviluppo al quarto ordine delle eq. del moto.

Daremo ora la forma delle funzioni f e g di § 1 sino a termini dell'ordine di $(x/R)^4$. Per tenere conto delle inhomogeneità del campo di cui al § 2 occorrerà modificare le equazioni del moto in modo da includere una componente tangenziale B_θ del campo, di ordine di grandezza \gg al primo.

Perremo

- 15 -

$$B_z = B_0 K_z = B_0 \sum_{m=0}^{\infty} k_m^{(z)}$$

$$B_r = B_0 K_r = B_0 \sum_{m=1}^{\infty} k_m^{(r)}$$

$$B_\theta = B_0 K_\theta = B_0 \sum_{m=1}^{\infty} k_m^{(\theta)}$$

9.1

Evidentemente, essendo

$$9.2 \quad O(k_{n,m}) = O\left(\frac{x^m}{r^m}\right)$$

si ha

$$k_0^{(z)} = 1$$

9.3

$$k_1^{(z)} = -n \frac{x}{r} - f_1(\theta)$$

$$k_1^{(r)} = -n \frac{x}{r} + g_1(\theta)$$

con f_1 e g_1 funzioni periodiche di θ .

Possiamo ancora, per comodità, porre

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad \zeta = \frac{r}{r_0}, \quad \alpha = \omega_0 t$$

$$\xi' = \frac{d\xi}{d\alpha}, \quad \gamma^2 = \xi'^2 + \zeta'^2$$

Con queste notazioni le equazioni del moto sono le seguenti:

ti:

$$9.4a \quad \xi'' + (1-n)\xi = f_1 \left(1 - \frac{3}{2}\gamma^2\right) + \xi^2 \left(1 + 3\xi + 3\xi^2\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\gamma^2 \left[(1-3n) + 4\xi + 6\xi^2 \right] + \frac{1}{8}\gamma^4 \sum_{l=2}^4 k_l^{(z)} + \zeta' \sum_{l=1}^3 k_l^{(\theta)}$$

9.4b

$$\xi'' + n\xi = g_1 \left(1 - \frac{1}{2}\gamma^2 - \xi\gamma^2\right) + \frac{1}{2}n\gamma^2\zeta \left(1 + 2\xi\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\gamma^2 k_2^{(r)} + \sum_{l=2}^4 k_l^{(r)} - \xi' \sum_{l=1}^3 k_l^{(\theta)}$$

§ 10 - Applicazione della condizione di risonanza.

Come assertedo all'inizio di § 8, quando $L/R \ll 1$

si ha

$$10.1 \quad \mu_z \approx \frac{1+\Lambda}{\pi} \sqrt{1-n} \quad ; \quad \mu_r \approx \frac{1+\Lambda}{\pi} \sqrt{n}$$

Poniamo

$$10.2 \quad \Omega_x = \frac{1+A}{2} \sqrt{1-n} \quad ; \quad \Omega_z = \frac{1+A}{2} \sqrt{n}$$

così che la 5.1 diviene

$$10.3 \quad p + q \Omega_x + r \Omega_z = 0$$

Nella zona utile della ciambella sia

$$10.4 \quad 0 \leq n' \leq n \leq n'' \leq 1$$

Riferiamoci alle eq. 9.4, con una espressione particolare delle k_m che specificheremo tra un momento: ci interessano i valori di n che verificano la 10.3 con

$$10.5 \quad |q| + |r| \leq 4$$

e sono compresi tra n' ed n'' . Se R è il raggio del centro della ciambella sarà

$$10.6 \quad n' = 2n_0 - n''$$

e se a è la sua larghezza radiale il valore di $|m_2|$ è dato da

$$10.7 \quad |m_2| = \frac{|n'' - n'|}{a} R$$

Supporremo che le funzioni $k_m(\theta, \xi, \zeta)$ abbiano la forma seguente:

$$10.8 \quad k_m^{(1)} = \sum_{q+r=m}^{q,r \geq 0} h_{q,r}^{(1)}(\theta) \xi^q \zeta^r$$

essendo inoltre

$$10.9 \quad h_{q,r}^{(1)}(\theta + 2\pi) = h_{q,r}^{(1)}(\theta)$$

I coefficienti $h_{p,q,r}^{(0)}$ non sono indipendenti: infatti, per le equazioni di Maxwell, che con le notazioni di § 9 hanno la forma

$$\frac{\partial K_z}{\partial \theta} = \frac{\partial K_\theta}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial K_\theta}{\partial \xi}$$

10.10
$$\frac{\partial K_r}{\partial \xi} = \frac{\partial K_z}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial K_\theta}{\partial \xi} + \frac{\partial (\xi K_\theta)}{\partial \xi} = \frac{\partial K_r}{\partial \theta}$$

$$\frac{1+\xi}{\xi} \frac{\partial (\xi K_r)}{\partial \xi} + \frac{\partial K_z (1+\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial K_\theta}{\partial \theta} = 0$$

si ha
$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h_{q,r}^{(2)}) = (r+1) h_{q,r+1}^{(2)} + r h_{q-1,r+1}^{(2)}$$

10.11
$$(r+1) h_{q,r+1}^{(r)} = (q+1) h_{q+1,r}^{(r)}$$

$$(q+1) h_{q+1,r}^{(q)} + (q+1) h_{q,r}^{(q)} = \frac{\partial}{\partial \theta} h_{q,r}^{(r)}$$

$$(q+2) h_{q+1,r}^{(r)} + (q+1) h_{q,r}^{(r)} + (r+1) h_{q,r+1}^{(z)} + (r+1) h_{q-1,r+1}^{(z)} + \frac{\partial}{\partial \theta} h_{q,r}^{(q)} = 0$$

in virtù delle 10.9 poniamo

$$h_{q,r}^{(0)} = \sum_p H_{p,q,r} e^{ip\theta}$$

10.12
$$h_{q,r}^{(r)} = \sum_p R_{p,q,r} e^{ip\theta}$$

$$h_{q,r}^{(z)} = \sum_p Z_{p,q,r} e^{ip\theta}$$

Ciò posto, le §.4 prendono la forma seguente

$$\xi'' + (1-n)\xi = \sum \alpha_{p,q,r} \exp i(p+q\Omega_x + r\Omega_z)\theta$$

10.13
$$\zeta'' + r\zeta = \sum \beta_{p,q,r} \exp i(p+q\Omega_x + r\Omega_z)\theta$$

essendo i coefficienti $\alpha_{...}$ e $\beta_{...}$ funzioni dei coefficienti $H_{...}, R_{...}, Z_{...}$ e delle ampiezze delle oscillazioni libere.

A secondo membro di 10.13 $\theta \approx \alpha \approx \omega_0 t$.

Le equazioni del moto nella forma 10.13 si prestano ora all'applicazione dei metodi descritti ai §§ 7 e 8: per semplicità, supponiamo che i valori critici dell'indice verifichino la 10.3 per una sola terna di valori p, q, r .
 0, che è lo stesso, che per un certo valore di r_1 un solo termine delle sommatorie a secondo membro induca una esaltazione di ampiezza per risonanza. Questo è giustificato dal fatto che

$$t_M \ll \frac{2\pi}{\omega_f}$$

come si vedrà meglio dagli esempi numerici.

§ 11 - Limitazione dell'ampiezza del termine di forzamento.

Siano X_M, Z_M le ampiezze delle oscillazioni libere di betatrone; siano ΔA_x e ΔA_z le ampiezze delle oscillazioni indotte dal termine di forzamento, calcolate coi metodi esposti ai §§ 7 e 8; con r_p indichiamo il valore del raggio in cui n assume il valore critico.

a è la larghezza della zona utile della ciambella nella direzione del raggio; $b(r_p)$ è la profondità della medesima in corrispondenza di $r = r_p$.

Poniamo poi $\rho_p R = |r_p - R|$.

Una particella che attraversi la risonanza non viene perduta dal fascio purchè (fig. 1)

$$11.1 \quad \Delta A_x < \frac{1}{2} a - \rho_p R - X_M$$

$$\Delta A_z < \frac{1}{2} b(r_p) - Z_M$$

- 29 -

Nella prima delle 11.1 abbiamo supposto che le oscillazioni radiali si svolgano nel piano $z = 0$; in realtà, se tra i termini di forzamento ve n'è uno indipendente da θ ($p = q = r = 0$), esso ha l'effetto di spostare il piano mediano: in questo caso bisognerà tener conto del fatto che, non essendo il contorno della sezione della ciambella, in genere, rettangolare, l'ampiezza radiale a di essa è funzione di z .

E' chiaro che, se i valori critici r_F di r sono prossimi ai bordi, bisognerà che $1/2 b(r_p)$ sia abbastanza grande per non perdere le particelle che in r_p vengono bruscamente sparpagliate dalla risonanza; in questo senso non è conveniente la forma ellittica, in quanto

$$b(r_p) \rightarrow 0 \quad \text{per } r_p \rightarrow R \pm a/2$$

§ 12 - Un caso notevole.

Non si conoscono ancora dati circa l'andamento del campo. Applicheremo tuttavia le 11.1 al caso notevole

$$p = -1, \quad q = -1, \quad r = 2$$

per il quale il valore di $n(r_p)$ è circa 0.60; molto prossimo, cioè, al valore 0.58 di n_0 . Ci riferiremo al caso 2) § 6, di attraversamento della risonanza. Oltre i dati del rapporto n° 2, cioè:

$$n_0 = n(R) = 0.58$$

$$R = 200 \text{ cm}$$

$$\Lambda = 1.191, \quad L = 60 \text{ cm}$$

12.1

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$b = \max b(r_p) = 5 \text{ cm}$$

sceghieremo

12.2 $n^0 = 0.50 = n (R-a/l)$

$n^{90} = 0.66 = n (R+a/l)$

da cui $n_2 = 2.7$

Inoltre supporremo

12.3 $\omega_f = 10^{-2} \omega_0$

Per $n_2 = 2.7$ si ha, essendo $n(r_p) = 0.60$:

$r_p - R = 1,48 \text{ cm}$, cioè

12.4 $\rho = 0.0074$

$n_2 \rho = 0.02$

Si ha anche:

12.5 $M = \frac{0.72}{\sqrt{\omega_0 |n|}}$

essendo

12.6 $|n| = n_2 \omega_f (\rho_m^2 - \rho^2)^{1/2}$

Supporremo che l'ampiezza r_m delle oscillazioni di sin= crotrone sia di \dots em, cioè

$\rho_m = 0.02$

così che

$|n| = 0.05 \omega_f$

ed infine

12.7 $\frac{\omega_0 t_M}{2\pi \Lambda} = 0.5 \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_f}} = 5$

Si deve ora calcolare l'incremento δA per giro dell'am= piezza delle oscillazioni forzate. Per questo basta valuta= re i coefficienti $\alpha_{\pm 1, \pm 1, \pm 1}$ e $\beta_{\pm 1, \pm 1, \pm 1}$ che compaiono nella 10.13 e poi gli integrali di Fresnel che figurano nella 8.5.

Bisogna considerare nelle 9.4 tutti i termini del

tipo:

$$\xi\xi^2 e^{-i\theta}, \xi\xi'^2 e^{-i\theta}, \xi\xi\xi' e^{-i\theta}, \xi\xi'^2 e^{-i\theta}, \xi\xi'^2 e^{-i\theta}, \xi\xi'\xi e^{-i\theta}$$

La somma delle ampiezze di questi termini può mettersi nella

forma

$$Q \frac{X_M Z_M^2}{R^3}$$

in cui Q dipende linearmente dai coefficienti di Fourier delle inhomogeneità del campo (M ..., R..., Z...) di indici p=-1, q=-1, r=2 oppure p=1, q=1, r=-2.

Si ottiene

12.8
$$\Delta A = 0.38 Q \frac{X_M Z_M^2}{R^3}$$

Con un indice x o z (Q_x, Q_z) distingueremo la perturbazione che si riferisce alle oscillazioni radiali da quella che si riferisce alle oscillazioni verticali. Si ha

12.9
$$\Delta A_x = 1.9 Q_x \frac{X_M Z_M^2}{R^3}$$

12.9
$$\Delta A_z = 1.9 Q_z \frac{X_M Z_M^2}{R^3}$$

Sostituiamo nelle 11.1, con l'avvertenza di moltiplicare le ΔA ora date per R, per una piccola diversità di simboli:

12.10
$$X_M \left(1 + 1.9 Q_x \frac{Z_M^2}{R^2} \right) < \frac{1}{2} a - \rho_p R = 4.52 \text{ cm}$$

12.10
$$Z_M \left(1 + 1.9 Q_z \frac{X_M Z_M}{R^2} \right) < \frac{1}{2} b(\rho_p) = 2.47 \text{ cm}$$

ovvero

12.11
$$Q_x < 0.53 \left(\frac{R}{Z_M} \right)^2 \frac{4.52 - X_M}{X_M}$$

12.11
$$Q_z < 0.53 \frac{R^2}{X_M Z_M} \cdot \frac{2.47 \cdot Z_M}{Z_M}$$

- 20 -

Da queste disuglianze, noti Q_x e Q_z , è possibile calcolare i valori limite di X_M e Z_M , oltrepassati i quali la particella è perduta dal fascio.

Se non si specifica il valore numerico di ρ_M , le 12.9 possono scriversi

$$12.12 \quad \Delta A = \frac{2.6 Q}{(\gamma^2 - 1)^{1/4}} \frac{X_M Z_M^2}{R^3}$$

essendo

$$\rho_M = \gamma \rho_P$$

(la dipendenza di ΔA da γ è in realtà più complicata, in quanto anche ΔA , oltre t_M , varia con γ , ma molto lentamente).

Sia

$$12.13 \quad N(X_M, Z_M, \gamma) dX_M dZ_M d\gamma$$

il numero di particelle per le ^{l'ampiezza, del} quali l'oscillazione di fase è compresa tra $\gamma \rho_P$ e $(\gamma + d\gamma) \rho_P$, le ampiezze delle oscillazioni di betatrone tra X_M ed $X_M + dX_M$, Z_M e $Z_M + dZ_M$. Se

$$12.14 \quad \eta(Q_x, Q_z) = \iiint N(X_M, Z_M, \gamma) dX_M dZ_M d\gamma$$

(l'integrale essendo esteso ai valori di (X_M, Z_M, γ) compatibili con le 12.10 e con la condizione di attraversamento della zona di risonanza) il numero di particelle perdute a causa dell'inomogeneità del campo considerata in questo paragrafo è dato da:

$$12.15 \quad \eta(0,0) - \eta(Q_x, Q_z)$$

- 29 -

Si ha

$$12.16 \quad \eta(Q_x, Q_z) = \int_0^{Y_M} d\gamma \int_{Z'}^{Z''} dZ_M \int_{X'}^{X''} dX_M N(X_M, Z_M, \gamma)$$

in cui

$$Y_M = \frac{a}{r_c - R}$$

$$Z' = 0$$

$$12.17 \quad Z'' =: \text{radice di: } Z_M G(Q_x, Q_z, Z_M, \gamma) = 2.47$$

$$X' = 0$$

$$X'' = 4.52 / F(Q_x, Z_M, \gamma)$$

essendo

$$G(Q_x, Q_z, Z_M, \gamma) = 1 + \frac{11.3 Q_z}{(\gamma^2 - 1)^{1/4}} \frac{Z_M}{R^2 F(Q_x, Z_M, \gamma)}$$

12.18

$$F(Q_x, Z_M, \gamma) = 1 + \frac{2.6 Q_x}{(\gamma^2 - 1)^{1/4}} \left(\frac{Z_M}{R} \right)^2$$

Assumeremo la funzione

$$\eta(Q_x, Q_z) = 1 - \frac{\eta(Q_x, Q_z)}{\eta(0, 0)}$$

come misura dell'efficienza della risonanza. Evidentemente $0 \leq \eta \leq 1$

La valutazione degli integrali del tipo 12.16 si presenta molto difficile anche nel caso di $N(X_M, Z_M, \gamma) =$ costante. Si può tuttavia dare una semplice interpretazione grafica dei risultati: sia (X_M, Z_M, γ) una terna di assi ortogonali; scegliamo un piano $\gamma =$ costante (entro i limiti $1, Y_M$) e riportiamo su di esso le rette

$$X_M = 4.52, \quad X_M = 0$$

12.19

$$Z_M = 2.47, \quad Z_M = 0$$

- 24 -

Esse limitano un rettangolo entro cui possono essere comprese le ampiezze delle oscillazioni libere di betatrone, in assenza di inhomogeneità, cioè per $Q_x = Q_z = 0$.

Riferiamoci al caso $Q_M = 0.02$, cioè $\gamma = 2.7$; se $Q_x \neq 0$ e $Q_z \neq 0$ valgono le limitazioni 12.10; i limiti della zona permessa non sono più quelli dati dalla 12.19 bensì dalle 12.10. Nel rettangolo riportiamo le curve (fig 2)

$$X_M = \frac{4.52}{1 + \delta_x Z_M^2}$$

$$X_M = \frac{1}{\delta_x Z_M} \left(\frac{2.67}{Z_M} - 1 \right)$$

dove

$$\delta = \frac{1.9 Q}{R^2}$$

esse danno il nuovo contorno della zona utile. Nella figura annessa riportiamo il caso

$$\delta_x = \delta_z = 0.4$$

Molto probabilmente un tale valore di δ è esagerato.

Supponiamo ora che $N(X_M, Z_M, \gamma) = \text{costante} \neq 0$ in un rettangolo contenuto in quello limitato dalle 12.19 e che l'area di questo rettangolo minore sia = 1 in opportune unità. Allora (fig 2) il numero di particelle perdute è dato da $1 - (\text{area } M) = (\text{area } M')$ se $N(X_M, Z_M, \gamma) = 0$ fuori di $M \neq M'$.

Se $N(X_M, Z_M, \gamma)$ non ha una espressione così semplice bisognerà invece ricorrere a 12.16; è chiaro che tuttavia l'effetto di risonanza non è importante se

I) area $M' \ll$ area M

II) $N(X_M, Z_M, \gamma)$ ha un valore, in M' , molto minore che in M .

- 25 -

- Rapporto n°2 I.N.F.N. Sez. accel.

§ 13 - Esempio relativo al caso 1) § 6.

Supponiamo che la funzione $g_1(\theta)$ definita dalla 9.3 abbia la forma:

$$13.1 \quad g_1(\theta) = n\alpha \quad \text{per } \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \varepsilon \\ = 0 \quad \text{per } 0 < \theta < \theta_0, \theta_0 + \varepsilon < \theta < 2\pi$$

e che

$$(\theta_0, \theta_0 + \varepsilon) \subset (0, \frac{\pi}{2})$$

Inoltre conserviamo i dati 12.1, modificando invece il valore di n_2 in modo che $r_p = R + a/2$ per $n = \nu_1 = 0.83$.

(§ 7). Si ha

$$n_2 = 0.8$$

Posto

$$13.2 \quad Q_m = \sin \sqrt{\nu_m} (\theta_0 + \varepsilon) - \sin \sqrt{\nu_m} \theta_0 \\ P_m = \sin \sqrt{\nu_m} (\frac{\pi}{2} - \theta_0) - \sin \sqrt{\nu_m} (\frac{\pi}{2} - \theta_0 - \varepsilon)$$

lo sviluppo di $g_1(\theta)$ in serie di Φ_m e di Ψ_m è il seguente:

$$13.3 \quad g_1(\theta) = n\alpha \sum \frac{N_m}{\sqrt{\nu_m}} [Q_m \Phi_m(\theta) + P_m \Psi_m(\theta)]$$

e la soluzione 7.3 diviene:

$$13.4 \quad z(\theta) = \alpha \sum \frac{n}{n - \nu_m} \frac{N_m}{\sqrt{\nu_m}} [Q_m \Phi_m(\theta) + P_m \Psi_m(\theta)]$$

Il termine relativo ad $m=0$ rappresenta uno spostamento del fascio, nella direzione delle z , pari al valor medio

$n \frac{\varepsilon \alpha}{2\pi}$ della perturbazione. Se ε è dell'ordine di un radiante per ottenere un innalzamento di 1 mm del piano mediano occorre che α sia ≈ 1 cm, cioè che l'innalzamento del piano mediano tra θ_0 e $\theta_0 + \varepsilon$ sia ≈ 1 cm.

Il termine successivo, con $m=1$, è quello efficace

- 26 -

allorchè $|n - \nu_1|$ ha raggiunto il suo minimo valore; senza specificare il valore di θ_0 , l'ampiezza delle oscillazioni forzate raggiunge un massimo dell'ordine di

$$\frac{\varepsilon \alpha}{|n - \nu_1|_{\text{minimo}}}$$

Dalla seconda delle 11.1 si ha

$$Z_M < \frac{1}{2} b(\rho_m) - \frac{\varepsilon \alpha}{\nu_1 - n_0 - n_2 \rho_m}$$

In figura 3 sono riportati i due casi

1) $b = \text{cost.}$ (ciambella rettangolare)

2) $b(\rho) = b \left(1 - \frac{R^2}{a^2} \rho^2 \right)^{1/2}$ (ciambella rettangolare)

Si confronta il caso a), $\varepsilon \alpha = 0$ con il caso b), $\varepsilon \alpha = 0.01$.

Le curve a' e b' si riferiscono alla ciambella di sezione rettangolare; le a'' e b'' a quella di sezione ellittica. I valori permessi di Z_M sono contenuti al di sotto della curva che si riferisce al caso in esame.

Si ripete quanto detto in fine di § 12.

§ 14 - Conclusione.

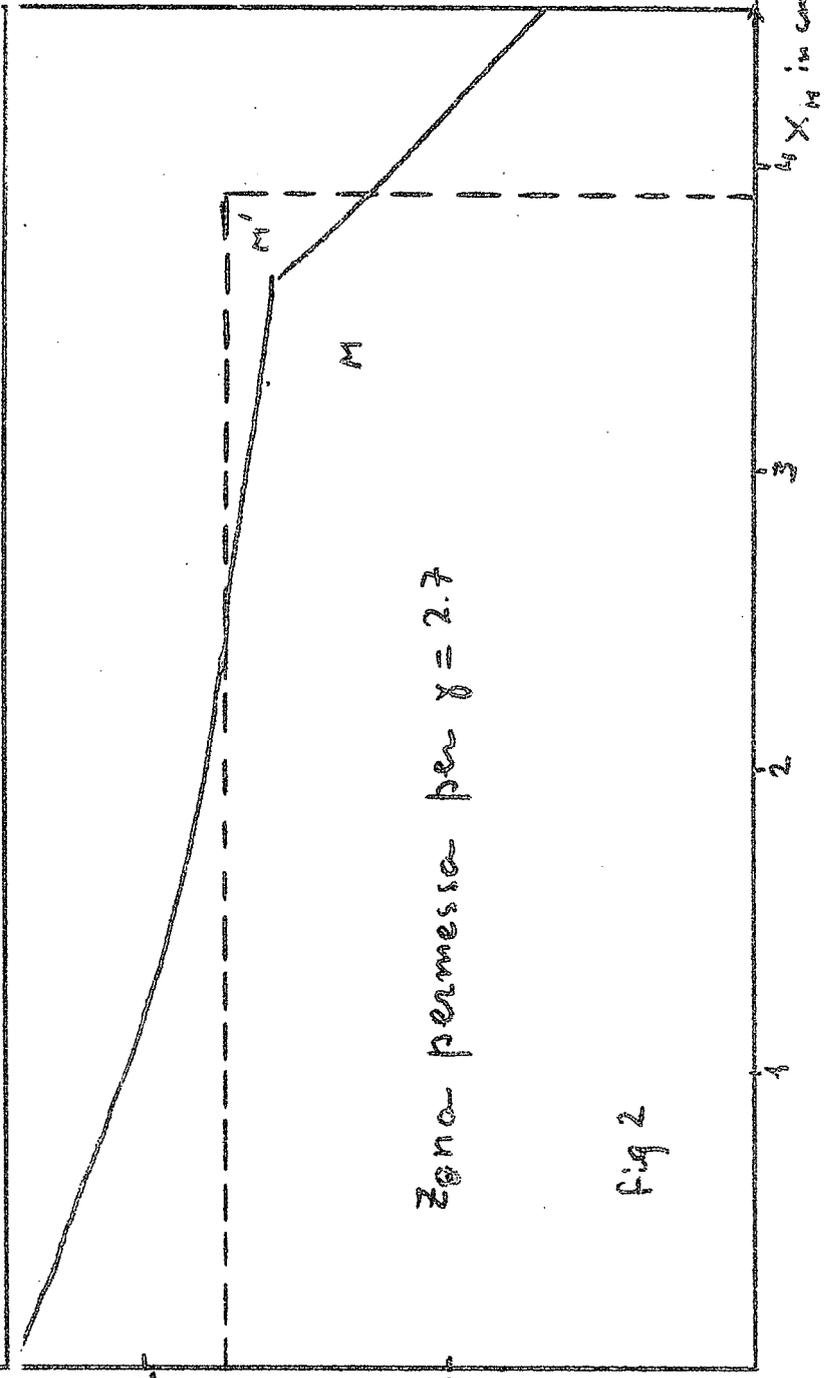
Sullo schema dei casi esposti in questi §§, è possibile esaminare ciascun altro caso di risonanza. Sono, come detto, necessari:

- 1) il valore di n_2
- 2) l'ordine di grandezza delle inomogeneità
- 3) la funzione $N(X_M, Z_M, \gamma)$

per trarre delle conclusioni definitive. Queste conclusioni si possono compendiare in forma di diagrammi, del tipo ora visto, il cui uso risulta relativamente semplice.

Z_M in cm

3



X_{10} in cm

3

2

1

Zona permessa per $\gamma = 2.7$

Fig 2

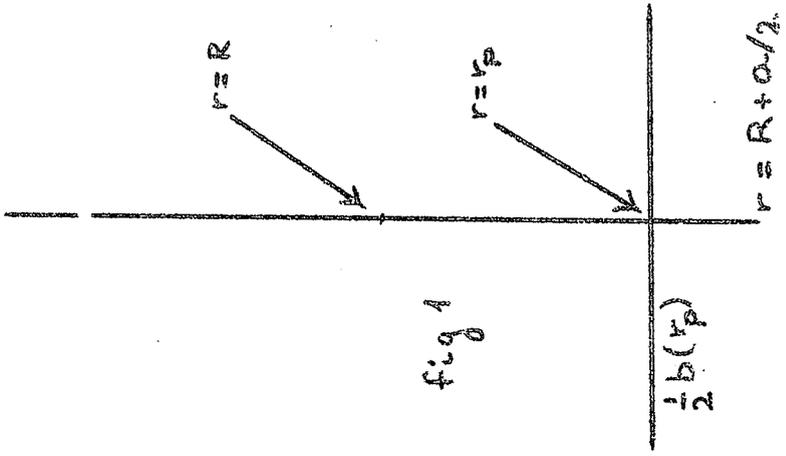


Fig 1

$\frac{1}{2}b(r_p)$

$r=R+a/2$

$r=R$

$r=r_p$

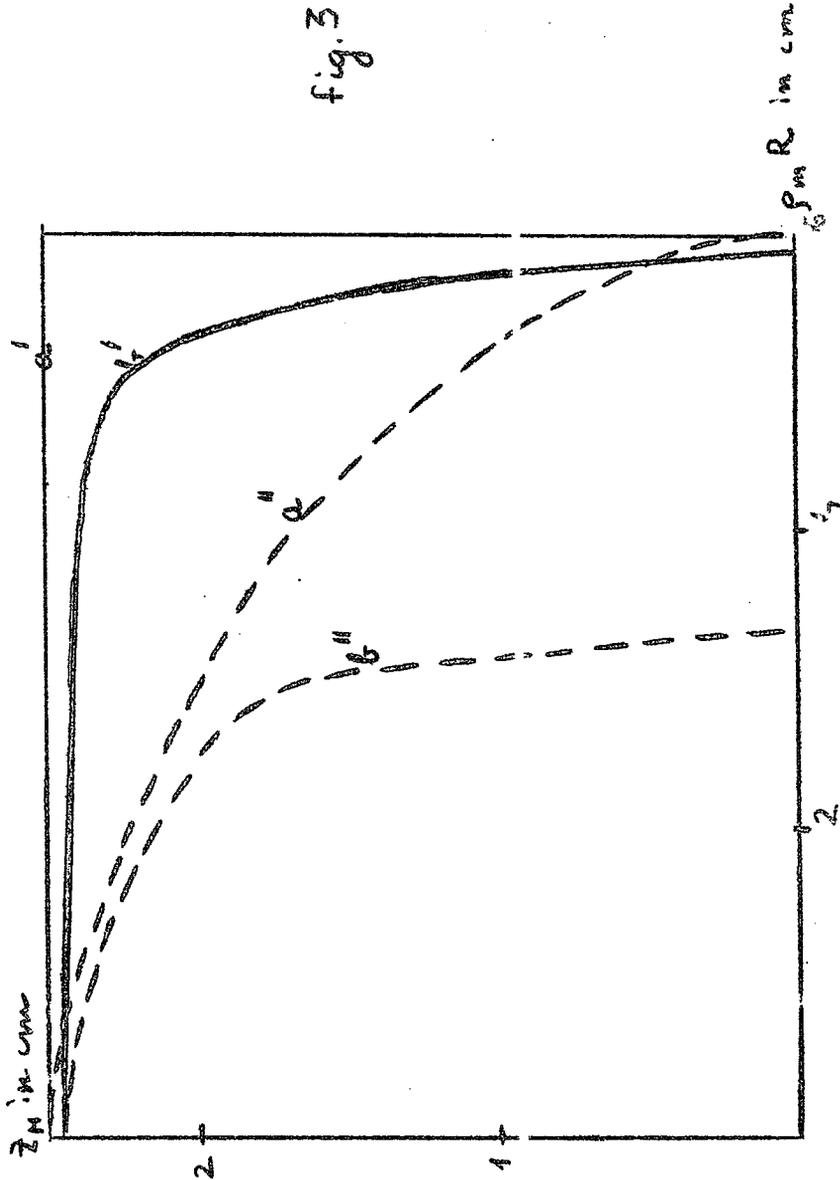


fig. 3