Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/50
18.9.1953.

P.G. Sona: PERDITE DI ELETTRONI PER SCATTERING NEL GAS RESIDUO.-

D-8

PERDITA DI ELETTRONI PER SCATTERING NEL GAS RESIDUO

1) Schematizzazione del problema.-

Considereremo separatamente le perdite per scattering multiplo e per scattering singolo, e calcoleremo i due effetti proiettando su un piano verticale.

Si abbia un fascetto di elettroni perfettamente collimato sull'orbita sincrona, all'iniezione; lo scattering multiplo eccita delle oscillazioni di betatrone perchè allontana gli elettroni dall'orbita e ne altera la direzione.

Se b è l'apertura verticale della ciambella, e λ la lunghezza d'onda delle oscillazioni, perchè l'elettrone non urti contro la parete occorre che l'inclinazione massima ϑ della traiettoria (rispetto all'orbita principale ed in un piano verticale) non superi l'angolo $\alpha = \frac{b\pi}{\lambda}$; la distribuzione dell'angolo ϑ dovuta allo scattering sarà gaussiana, con dispersione inizialmente crescente. Lo smorzamento delle oscillazioni tende a diminuire la dispersione in angolo, e si oppone quindi all'effetto dello scattering: il risultato è che il valore di ϑ^2 parte da 0, passa per un massimo, e poi torna a diminuire.

Calcoleremo le perdite dal numero di particelle che, nella distribuzione gaussiana con $\overline{\vartheta^2_{max}}$, hanno un angolo maggiore di α . Questo procedimento è approssimato, oltre che per altre considerazioni, perchè si ammette in un primo tempo che la presenza delle pareti <u>non</u> perturbi la distribuzione in angolo: in altre parole si considerano <u>non</u> perduti quegli elettroni che escono e poi rientrano nella ciambella a causa dello scattering (calcolato senza le pareti); però, se le perdite sono abbastanza piccole, quest'errore non è grande. Dato che le perdite sono sensibili solo nei primi giri, su può supporre che l'energia dell'elettrone varii linearmente col tempo.

Per lo scattering singolo, calcoleremo le perdite dall'orbita principale, considerando come perduti quegli elettroni che subiscono una deviazione maggiore dell'angolo $\alpha = \frac{b\pi}{\lambda}$ (sempre nel piano verticale).

2) Calcolo delle perdite per scattering multiplo.-

Come formula base prenderemo quella data da Rossi (vedi "High energy particles", 1952, pag.66 e seg.):

$$d\overline{\vartheta^2}_{scatt} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_s}{\beta c p}\right)^2 \frac{dx}{X_0}$$

dove:

E_s = 21 MeV

X_0 = 1 radiation lenght in gr.cm.$^{-2}$

x = spessore attraversato in gr.cm.$^{-2}$

βc = velocità dell'elettrone

p = impulso dell'elettrone

Nel nostro caso è $\beta c p \simeq E$ energia totale dell'elettrone. Se ρ è la densità del gas si ha poi dx = ρ cdt (t=tempo). Indicando con $\left(\frac{dE}{dt}\right)_0$ il valore di $\frac{dE}{dt}$ all'istante dell'iniezione, e considerando costante $\frac{dE}{dt}$, si ha:

$$d\overline{\vartheta^2}_{scatt} = \frac{C}{t^2}\,dt \qquad \text{con } C = \frac{E_s^2}{2X_0}\,\rho c \frac{1}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_0}$$

avendo scelto l'origine dei tempi in modo che sia $E_0 = t_0\left(\frac{dE}{dt}\right)_0$

(E_0 = energia totale d'iniezione; t_0 = istante di iniezione).

Per effetto dello smorzamento si ha una diminuzione di ϑ^2 :

$$d\overline{\vartheta^2}_{smorz} = -\overline{\vartheta^2}\,\frac{dt}{t}$$

Infatti se z è l'ampiezza dell'oscillazione, z è proporzionale a $\frac{1}{\sqrt{t}}$; perciò $\frac{dz}{z} = -\frac{1}{2}\frac{dt}{t}$. Ma ϑ è proporzionale a z, e quindi $\frac{d\vartheta^2}{\vartheta^2} = -\frac{dt}{t}$.

In totale si ottiene $\boxed{d\overline{\vartheta^2} = C\frac{dt}{t^2} - \overline{\vartheta^2}\frac{dt}{t}}$

Quest'equazione si risolve con la sostituzione $t = e^y$, $\overline{\vartheta^2} = u \cdot e^{-y}$

Con la condizione iniziale che per $t = t_0$ sia $\overline{\vartheta^2} = 0$ si ottiene:

$$\overline{\vartheta^2} = \frac{c}{t} \ln \frac{t}{t_0}$$

Questa funzione ha un massimo per $t = et_0 = \tau$ ($e = 2,718...$), ed il valore massimo è:

$$[+] \qquad \overline{\vartheta^2}_{max} = \frac{c}{e t_0} = \frac{1}{2e} \, \rho \, c \frac{E_s^2}{X_0} \frac{1}{E_0} \frac{1}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_0} = \vartheta_0^2$$

Dato che la distribuzione è gaussiana, la frazione P_m di particelle perdute per scattering multiplo dipende dal rapporto $\alpha/\vartheta_0 = K$; sarà precisamente:

$$P_m(K) = 2 \int_K^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

che è una funziona tabulata.

Dalla densità ρ si passa alla pressione p con la fommula:

$$\rho = M_0 \frac{p}{T} \cdot 1{,}604 \cdot 10^{-5}$$

(ρ in $gr.cm.^{-3}$, p in mm di Hg., T = temperatura assoluta in °K; M_0 = peso molecolare).

Dalla [+] si ricava quindi:

$$K = \frac{\alpha}{\vartheta_0} = \frac{\pi}{\vartheta_0} \frac{b}{\lambda} = \frac{b}{\lambda} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{2e} M_0 \frac{p}{T} c \frac{E_s^2}{X_0} \frac{1}{E_0} \frac{1}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_0} \cdot 1{,}604 \cdot 10^{-5}}}$$

$$\boxed{K = 5{,}03 \cdot 10^{-4} \frac{b}{\lambda} \sqrt{\frac{X_0}{M_0} \frac{T}{p} E_0 \left(\frac{dE}{dt}\right)_0}}$$

In questa formula E_0 e $\left(\frac{dE}{dt}\right)_0$ si misurano in M_eV.

Se il gas è aria, si ha $X_0 = 37{,}7 \; gr.cm.^{-2}$; $M_0 = 2.14{,}78 = 29{,}56$; $X_0/M_0 = 1{,}275$ (vedi Rossi - "High energy particles", pag.55).

Prendiamo T = 300°, E_0 = E MeV; dai dati di Pisa II si ricava: $\lambda' = 286{,}3$ cm ; $\left(\frac{dE}{dt}\right)_0 = 0{,}073 \cdot 10^6 \; \frac{MeV}{sec}$.

Allora:

$$\boxed{K = \frac{b}{\sqrt{p}} \, 1{,}313 \cdot 10^{-2}}$$

(b in cm, p in mm di Hg)

Dal valore di K si passa poi, mediante le tavole, al valore di $P_m(K)$.

Dai dati precedenti E_0 = 2 MeV, $\left(\frac{dE}{dt}\right)_0 = 0{,}073 \cdot 10^6 \; \frac{MeV}{sec}$, si ricava $\tau - t = 47{,}1 \; \mu sec$, cioè il valore massimo di ϑ^2 si raggiunge 47 μ sec dopo l'iniezione, quando l'energia dell'elettrone è circa 5,5 MeV.

3) Calcolo delle perdite per scattering singolo.-

Come formula base per lo scattering singolo prenderemo la seguente:

$$df = n x\, d\Omega \left(\frac{Ze^2}{2mc^2}\right)^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \operatorname{cosec}^4\frac{\vartheta}{2}\left[1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\frac{\vartheta}{2} + \frac{Z\pi\beta}{137}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\right] \qquad [++]$$

dove ϑ è l'angolo di scattering, n= numero di atomi per unità di volume, x = spessore attraversato in cm, $d\Omega$ = angolo solido, df = = rapporto fra il numero di elettroni deviati nel $d\Omega$ e il numero di elettroni incidenti (vedi Van der Graaf, Buechner e Feshbach, Phys. Rev. 69 (1946) - 457).

Integrando la [++] su tutta la sfera meno il cono di apertura 2α avente per asse la direzione degli elettroni incidenti, si vede che il contributo degli ultimi due termini nella parentesi quadra è trascurabile quando α è abbastanza piccolo. Per fare il calcolo proiettando su un piano verticale conviene allora servirsi solo del primo termine:

$$df = n x\, d\Omega \left(\frac{Ze^2}{2mc^2}\right)^2 \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \operatorname{cosec}^4\frac{\vartheta}{2}$$

Si deve integrare su tutta la sfera meno uno spicchio di apertura 2α

Si trova: $\int_\Sigma \cos^4\frac{\vartheta}{2}\, d\Omega = \frac{8(\pi-\alpha)}{\operatorname{sen}^2\alpha} + 8\operatorname{cotg}\alpha \simeq \frac{8\pi}{\alpha^2}$ per α piccolo

(si tiene conto che $\beta = 1$)

Se F è il rapporto tra il numero di particelle deviate di un angolo $>\alpha$ e il numero di particelle incidenti, si ottiene:

$F = 2\pi \frac{nx}{E^2\alpha^2} Z^2 e^4$ e per un percorso infinitesimo di dx:

$dF = 2\pi \frac{nZ^2e^4}{E^2\alpha^2} dx$ $\quad \left[dx = c\,dt = \frac{c}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_0} dE\right]$

Sia N(E) il numero di elettroni rimasti quando l'energia è E; N(E) soddisfa l'equazione differenziale:

$$dN = -N dF, \text{ cioè } \frac{dN}{N} = -\frac{K_1}{E^2} dE, \text{ avendo posto}$$

$$K_1 = 2\pi \frac{nZ^2e^4}{\alpha^2} \frac{c}{\left(\frac{dE}{dt}\right)_0}$$

$$N(E) = N(E_0)\cdot e^{-K_1\int_{E_0}^{E}\frac{1}{E^2}dE}$$

Per calcolare la perdita totale si può integrare sensa sensibile errore fra E_0 e $+\infty$, e così la frazione P_s di elettroni perduta per scattering singolo sarà:

$$P_s = [1 - e^{-S}] \qquad \text{con } S = \frac{K_1}{E_0} = \frac{2 z^2 e^4 n c \lambda^2}{\pi b^2 E_0 \left(\frac{dE}{dt}\right)_0}$$

Se $S \ll 1$, allora si può scrivere $P_s = S$

Facendo comparire la pressione p in mm di Hg (attraverso n), si trova:

$$\boxed{S = \frac{z^2 \lambda^2}{b^2 E_0 \left(\frac{dE}{dt}\right)_0} \frac{p}{T} \frac{M_0}{A} \, 3{,}845 \cdot 10^3}$$

(λ, b in cm ; T in °K; E_0 e $\left(\frac{dE}{dt}\right)_0$ in MeV; A = peso atomico)

Se il gas è aria, allora $M_0/A = 2$, Z = 7,37.

Con i dati precedenti E_0 = 2MeV, $\left(\frac{dE}{dt}\right)_0 = 0{,}073 \cdot 10^6 \frac{\text{MeV}}{\text{sec}}$, T = 300°,

λ = 286,3 cm si ottiene

$$\boxed{S = \frac{p}{b^2} \, 781{,}7}$$

Dal valore di S si passa al valore di P_s con la formula $P_s = 1 - e^{-S}$ già detta.

4) <u>Perdita complessiva (nel piano verticale)</u>.-

La perdita complessiva P sarà la somma di P_m e di P_s, se P_m e P_s sono abbstanza piccole;

$P = P_m + P_s$, dove:

$P_m = P_m(K)$ (vedi §2), $K = \frac{b}{\sqrt{p}} \, 1{,}315 \cdot 10^{-2}$

$P_s = 1 - e^{-S}$, $S = p/b^2 \cdot 781$

(queste formule valgono se il gas è aria, e con i dati già considerati).

Come si vede la frazione di elettroni perduta dipende dalla pressione e dall'apertura verticale solo attraverso il rapporto p/b^2, e quindi conviene rappresentare in un grafico le tre funzioni $P(p/b^2)$, $P_m(p/b^2)$, $P_s(p/b^2)$

Nella pagina seguente sono riportati alcuni valori di P_m e P_s in funzione di p/b^2 calcolati con i valori $E_0 = 2\,MeV$, $T = 300°K$, con i dati di Pisa II, e per aria. Nella fig.1 sono tracciate, nel piano (b,p) le linee a perdita P costante per gli stessi dati.

Valori di $P_s\left(\frac{p}{b^2}\right)$

$\frac{p}{b^2}$	P_s
1×10^{-5}	0.008
$1,5 \times 10^{-5}$	0.012
2×10^{-5}	0.016
3×10^{-5}	0.023
4×10^{-5}	0.031
5×10^{-5}	0.038
6×10^{-5}	0.046
7×10^{-5}	0.053
8×10^{-5}	0.061
9×10^{-5}	0.068
1×10^{-4}	0.075
$1,5 \times 10^{-4}$	0.11
2×10^{-4}	0.14
3×10^{-4}	0.21
4×10^{-4}	0.27
5×10^{-4}	0.32
6×10^{-4}	0.37
7×10^{-4}	0.42
8×10^{-4}	0.46
9×10^{-4}	0.50
1×10^{-3}	0.54

Valori di $P_m\left(\frac{p}{b^2}\right)$

$\frac{p}{b^2}$	P_m
1×10^{-5}	0.000
$1,5 \times 10^{-5}$	0.001
2×10^{-5}	0.003
3×10^{-5}	0.016
4×10^{-5}	0.044
5×10^{-5}	0.063
6×10^{-5}	0.089
7×10^{-5}	0.12
8×10^{-5}	0.14
9×10^{-5}	0.17
1×10^{-4}	0.20
$1,5 \times 10^{-4}$	0.29
2×10^{-4}	0.40
3×10^{-4}	
4×10^{-4}	
5×10^{-4}	
6×10^{-4}	
7×10^{-4}	
8×10^{-4}	
9×10^{-4}	
1×10^{-3}	0.68

p = pressione dell'aria residua in mm. di Hg

b = apertura verticale in cm.

P_s = perdite per scattering singolo.

P_m = perdite per scattering multiplo.

Valori di $P_m(K) = 2\int_K^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$; e di $P_s(S) = 1 - e^{-S}$

K	$P_m(K)$	
0.0	1.00000	
0.1	0.92034	
0.2	0.84148	
0.3	0.76418	
0.4	0.68916	
0.5	0.61708	7208
0.6	0.54850	
0.7	0.48392	6020
0.8	0.42372	5560
0.9	0.36812	
1.0	0.31732	5080
1.1	0.27134	4598
1.2	0.23014	
1.3	0.19360	3654
1.4	0.16152	3208
1.5	0.13362	2790
1.6	0.10960	2402
1.7	0.08914	2046
1.8	0.07186	
1.9	0.05744	1442
2.0	0.04550	
2.1	0.03572	
2.2	0.02780	636
2.3	0.02144	
2.4	0.01640	
2.5	0.01242	
2.6	0.00932	
2.7	0.00694	
2.8	0.00512	
2.9	0.00374	
3.0	0.00270	
3.1	0.00194	
3.2	0.00138	
3.3	0.00096	
3.4	0.00068	
3.5	0.00046	
3.6	0.00032	
3.7	0.00022	
3.8	0.00014	
3.9	0.00010	
4.0	0.00006	

S	$P_s(S)$
0.00	0.000
0.02	0.020
0.04	0.039
0.06	0.058
0.08	0.077
0.10	0.095
0.12	0.113
0.14	0.131
0.16	0.148
0.18	0.165
0.20	0.181
0.22	0.197
0.24	0.213
0.26	0.229
0.28	0.244
0.30	0.259
0.32	0.274
0.34	0.288
0.36	0.302
0.38	0.316
0.40	0.330
0.42	0.343
0.44	0.356
0.46	0.369
0.48	0.381
0.50	0.393
0.52	0.405
0.54	0.417
0.56	0.429
0.58	0.440
0.60	0.451
0.62	0.462
0.64	0.473
0.66	0.483
0.68	0.493
0.70	0.503

FIGURA 1