Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/49
18.9.1953.

C. Canarutto: MISURE DEL CAMPO MAGNETICO. DEFINIZIONE DELLE QUANTITA' DA MISURARE E DELLE PRECISIONI RICHIESTE. METODI DI MISURA.-

MISURE DEL CAMPO MAGNETICO

DEFINIZIONE DELLE QUANTITA' DA MISURARE E DELLE PRECISIONI RICHIESTE

Metodi di misura

Il parametro fondamentale che deve essere ricavato dalle misure condotte nel campo magnetico è <u>n</u> in corrispondenza di varii azimuth ed - in generale - di vari z.

Come è noto <u>n</u> è definito dalla:

$$B = B_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \qquad (1)$$

dalla quale si ricava:

$$n = -\frac{r}{B}\left(\frac{dB}{dr}\right) \qquad (2)$$

Si osserva che si ha:

$$B = B\left[r, \theta, z, t(r, \theta, z)\right] \qquad (3)$$

La (3) è evidente ove si pensi che B dipende evidentemente dalle coordinate spaziali del punto in cui si compie la misura (r, θ, z) e dall'istante, nel periodo, in cui viene fatta la misura. Per quanto riguarda la dipendenza di <u>t</u> dalle coordinate spaziali basta osservare che in generale (supponendo per es. per semplicità la B, in un punto, funzione sinusoidale del tempo) vi saranno degli sfasamenti tra i B di punti distinti.

Nel compiere la misura di <u>n</u> si è interessati a compiere la misura di quantità fisiche relative a punti giacenti tutti sullo stesso raggio. Per cui la (3), nel nostro caso, si semplifica nella:

$$B = B\left[r, t(r)\right] \qquad (4)$$

Tenendo presente la (4), la (2) diventa:

$$n = -\left[\frac{r}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_{\substack{t=t_0 \\ r=r_0}} + \frac{r}{B}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\substack{t=t_0 \\ r=r_0}} \frac{dt}{dr}\right] \qquad (5)$$

dove le quantità indicate hanno i seguenti significati:

$\left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)_{\substack{t=t_0 \\ r=r_0}}$ indica la derivata spaziale di B rispetto ad r calcolata all'istante t_0 in cui si vuole conoscere <u>n</u>.

$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{\substack{t=t_0 \\ r=r_0}}$ Indica la derivata parziale di B rispetto a t, calcolata in corrispondenza del punto nel cui intorno si vuole conoscere n (per es. in corrispondenza dell'orbita stabile).

$\frac{dt}{dr}$ indica un rapporto proporzionale secondo $\frac{1}{\omega}$ tra la variazione di fase di B, tra due punti posti sullo stesso raggio e distanti tra loro di dr e dr stesso.

Quando nel compiere la misura di n si sostituiscono alle derivate i rapporti incrementali tra quantità finite, la (5) - in generale - non è più esatta; purtuttavia essa viene ritenuta ancora valida per dare i valori di prima approssimazione di n medio tra due punti distanti tra loro di Δr e posti sullo stesso raggio.

Trascriviamo la (5) in termini finiti:

$$n = -\frac{r}{B_0}\left[\left(\frac{\Delta B}{\Delta r}\right)_{t=t_0} + \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{t=t_0}\frac{\Delta t}{\Delta r}\right] \qquad \text{(5 bis) (approssimata)}$$

Si nota che si scrive ancora $\frac{\partial B}{\partial t}$, in quanto questa è una quantità che può - di solito - essere determinata come un tutto unico.

Dalla (5 bis) appare che per determinare n medio, in corrispondenza dell'istante t_0, tra P_1 e P_2 devono misurarsi in generale le seguenti quantità:

r — distanza radiale dal centro, del punto medio tra P_1 e P_2

B — intensità media del campo magnetico nel tratto P_1 e P_2

$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{t=t_0}$ — media dei valori della derivata parziale di B rispetto a t nel tratto P_1P_2 all'istante $t=t_0$

Δr — Distanza P_1P_2

ΔB — Differenza $B(P_1) - B(P_2)$ all'istante $t = t_0$

Δt — Quantità proporzionale secondo $\frac{1}{\omega}$ alla differenza di fase dei valori $B(P_1)$ e $B(P_2)$ all'istante $t=t_0$

Osserviamo ancora che l'errore percentuale $\frac{\delta n}{n}$ dipende dagli errori percentuali compiuti nelle misure delle singole quantità, nel seguente modo:

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta B}{B} + \frac{\delta \Delta B}{\Delta B} + \frac{\delta \Delta r}{\Delta r} + \frac{\delta\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)}{\frac{\partial B}{\partial t}} + \frac{\delta \Delta t}{\Delta t} \qquad (6)$$

Osservando che si vuole una precisione nella misura di n dell'ordine del 5%, si ha che le misure delle singole quantità dovranno essere compiute con una precisione dell'ordine dell'1%.

Facciamo alcune considerazioni relative alla possibilità di ottenere le precisioni richieste nelle misure delle differenti grandezze.

r La precisione richiesta è facilmente ottenibile (è pensabile una precisione superiore all'1°/₀₀).

Δr Dell'ordine di grandezza di 1 cm. Deve venir misurato con la precisione di 1/10 mm. Detti P_0 e P_1 i due punti a distanza Δr si possono pensare due tipi di misure per determinare n. In un caso P_0 è fisso e coincide col punto di intersezione del raggio (lungo il quale si vuol conoscere n) con l'orbita stabile, e P_1 è un punto variabile lungo il raggio. Nell'altro caso è una quantità fissa - determinata una volta per tutte - mentre P_0 e P_1 si muovono collegati rigidamente tra loro lungo il raggio.

B_0 Nel calcolo del valor medio di n nel periodo il valore di B_0 può essere ricavato per esempio da una misura del valore efficace di $\frac{dB}{dt}$ (supposto B funzione sinusoidale del tempo). In tal caso si ha:

$$V = \omega \frac{B_{max}}{\sqrt{2}} NS$$

Ove V è la tensione misurata con un voltmetro, N ed S sono rispettivamente numero di spire e sezione di ciascuna spira della bobinetta.

Supposto per esempio: N = 2000 spire; $d = 4$ mm

$$S = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 16 = 12{,}56 \text{ mm}^2$$

si ha per $B_{max} = 1 \text{Wb/m}^2$

$$V = 2\pi \cdot 30 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2000 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-6} = 3{,}3 \text{V}$$

quantità misurabile con qualche accorgimento con la precisio

ne dell'1%.
Si osserva però che con tale metodo non si può scendere a valori inferiori di molto ai 1000 gauss.
Si può pensare di compiere una misura di B massimo mediando i valori in una zona più ampia ed in particolare usando una bobina ad arco di cerchio come in fig.1. Si possono ammettere i seguenti dati:

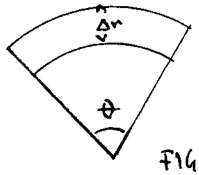

Fig.1

$\Delta r = 5$ mm; $\theta = 15° = 0,261$ radianti. In tal caso $S = 3,75 \cdot 0,261 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 4,9 \cdot 10^{-3}\ m^2$

Con 100 spire si ha: $NS = 0,49\ M^2$
Per cui:

$$V = 2\pi \cdot 30 \frac{B_{max}}{\sqrt{2}}\, 0,49 = 65,9\, B_{max}$$

Per cui supponendo di voler leggere al minimo 1V, il metodo permette di leggere valori di B_{max} superiori ai 150 gauss.
Usando un interruttore sincrono meccanico (come quello della Siemens) ed un flussometro si può pensare di misurare con questo metodo il B istantaneo nel periodo per valori superiori ai 150 gauss.
Per valori dell'ordine di 100 gauss e superiori si può pensare all'uso di un sistema a magnetron.
Per valori dell'ordine dei 20 ÷ 50 gauss si pensa all'impiego di un cannoncino elettronico tipo Kerst con modificazioni.

$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_{t=0}$ Questa quantità sembra più opportuno ricavarla direttamente dalla curva precedentemente ottenuta di B(t) in un intorno dell'istante t_0.
Un metodo alternativo col precedente - ma di precisione molto limitata (in genere inferiore al 5%) - è quello di disporre di un circuito costituito da una bobinetta posta nel punto in cui si vuol conoscere la derivata del flusso, i cui estremi sono portati alle placche verticali di un oscillografo. La tensione che si legge è per l'appunto la $\frac{\partial B}{\partial t} NS$ che appare sullo schermo direttamente con curva in funzione del tempo.

ΔB Sembra sufficiente determinare il ΔB come differenza B_1-B_0 Misurato B_0 con uno dei metodi scritti in precedenza determiniamo B_1 con un metodo a ponte, ciò perchè, come vedremo, almeno entro un certo campo di valori di ΔB, la valutazione di n diventa indipendente dall'errore compiuto nella misura di B_0. Quanto detto vale nel campo entro cui Δt è nullo - o comunque trascurabile. Infatti in tal caso otterremo all'equilibrio:

$$B_1 = B_0 \frac{R_1}{R_0}$$

per cui

$$\Delta B = B_1 - B_0 = B_0 \left(\frac{R_1}{R_0} - 1\right)$$

ed anche

$$n = -\frac{r}{\Delta r}\left(\frac{R_1}{R_0} - 1\right)$$

Useremo un sistema a ponte come quello in fig.2

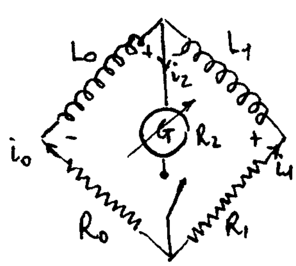

FIG. 2

L_0 ed L_1 sono le induttanze di due bobinette delle quali supponiamo L_0 posto in corrispondenza del punto di intersezione dell'orbita stabile e del raggio lungo il quale si vuole compiere la misura di n e l'altra posta in un punto P_1 variabile lungo lo stesso raggio.

R_0 ed R_1 sono resistenza variabili poste in serie a L_0 ed L_1 (comprendono anche le resistenze delle bobinette).

Con i simboli di fig.2 si ha:

$$\begin{cases} i_0 + i_1 = i_2 \\ -N_0 \dfrac{d\varphi_0}{dt} = -N_0 S_0 \dfrac{dB_0}{dt} = R_2 i_2 + R_0 i_0 \\ -N\left(-N_1 \dfrac{d\varphi_1}{dt}\right) = N_1 S_1 \dfrac{dB_1}{dt} = R_2 i_2 + R_1 i_1 \end{cases}$$

Sistema che risolto dà:

$$i_2 = \frac{R_0 N_1 S_1 \frac{dB_1}{dt} - R_1 N_0 S_0 \frac{dB_0}{dt}}{R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0} \qquad (7)$$

Essendo B_0 e B_1 valori molto prossimi l'uno all'altro si può pensare (almeno fino a quando l'effetto dello sfasamento fra di essi non diventi troppo sensibile) che sia valida per entrambi la relazione:

$$\frac{dB}{dt} = \omega B_{max} \operatorname{sen} \omega t$$

per cui all'equilibrio ($i_2 = 0$) si può scrivere con buona approssimazione (supposti $N_1 S_1 = N_0 S_0$)

$$B_1 = \frac{R_1}{R_0} B_0$$

Determiniamo la sensibilità del metodo. Anzichè misurare una corrente, leggeremo una tensione - dopo aver proceduto ad amplificare il segnale $V = R_2 i_2$ - su un oscillografo. Mediamente possiamo assumere che il minimo segnale distinguibile in un oscillografo (con amplificatore incorporato) DU MONT 274A (quale quello a disposizione) è di circa 10^{-2}V.

Si può pensare ad una amplificazione esterna dell'ordine di circa 10.000, per cui in totale il segnale percepibile è circa:

$$V = R_2 i_2 = 10^{-6} V$$

Ricordiamo che la (7) si trasforma nella:

$$V = \frac{R_0 N_1 S_1 \frac{dB_1}{dt} - R_1 N_0 S_0 \frac{dB_0}{dt}}{\frac{R_0 R_1}{R_2} + R_0 + R_1}$$

In questo calcolo si può assumere per semplicità:

$$N_0 S_0 = N_1 S_1 \ ; \ R_0 = R_1 \ ; \ R_2 = \infty$$

ed ancora

$$\frac{dB}{dt} = \omega B_{max} \operatorname{sen} \omega t$$

per cui

$$V = N_0 S_0 \, \omega \, (B_1 - B_0) \operatorname{sen} \omega t$$

Osserviamo che si vuole conoscere la differenza dei campi di due punti distanti di 1 cm tra loro (e giacenti sullo stesso raggio). Si vuole conoscere inoltre questa differenza con la precisione dell'1%. Ciò vuol dire che si vogliono percepire valori di $(B_1 - B_0) \operatorname{sen} \omega t$ pari a circa $0{,}16 \cdot 10^{-4} B \operatorname{sen} \omega t$

per cui si può scrivere:

$$10^{-6} V = N_0 S_0 \cdot 2\pi \cdot 30 \cdot 0{,}16 \cdot 10^{-4} B \operatorname{sen} \omega t = 30 \cdot 10^{-4} N_0 S_0 B \operatorname{sen} \omega t$$

$$\frac{1}{3} 10^{-3} = N_0 S_0 \, B \operatorname{sen} \omega t \qquad (8)$$

con $N_0 = 2000$ e $S_0 = 12{,}5 \, mm^2$ ($d = 4$ mm)

Si ha: $N_0 S_0 = 25 \cdot 10^{-3} \ m^2$ per cui il minimo B sen ωt in corrispondenza del quale si può fare una lettura utile per è dato da:

$$B \operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{75} \, Wb/m^2 \simeq 130 \text{ gauss}$$

E' un metodo comunque questo che dà praticamente solo il valor medio di B_1. Non può essere usato per dare il valore istantaneo nel periodo. Si osservi inoltre che già per valori di 150 gauss ed ancor più per quelli inferiori viene ad essere particolarmente sensibile l'effetto sulla misura di n dello sfasamento tra i valori di $B_0(t)$ e $B_1(t)$. Per questa ragione si deve pensare di misurare la differenza $\Delta B = B_1 - B_0$ misurando separatamente i due valori $B_1(t)$ e $B_0(t)$ allo stesso istante e poi facendo la differenza. Ciò si può fare, come precedentemente detto, con due tubicini di Kerst modificati oppure con due strumenti misuratori di campo magnetico ad effetto magnetron.

Δt Sfasamento tra B_1 e B_0 misurato in unità di tempo. La misura si può fare con due tubicini di Kerst posti nei due punti di cui si vuol conoscere lo sfasamento. Osserviamo che il tubicino in parola indica lo zero a meno di 0,5 gauss. Ciò significa che il tempo attraverso cui il campo passa per lo zero nel punto in questione è definito a meno di un δt dato dalle seguenti espressioni:

$$(9) \quad 0{,}5 = 10000 \operatorname{sen} \omega \delta t \simeq 10000 \cdot 2\pi \cdot 30 \delta t$$

$$(10) \quad 0{,}5 = 10000(1 - \cos \omega \delta t) = 10000 \cdot 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\omega \delta t}{2} \simeq \left(\frac{2\pi \cdot 30 \delta t}{2} \right)^2 \cdot 2 \cdot 10000$$

La (9) vale nel caso in cui la misura sia fatta in corrispondenza del punto della curva di B a derivata massima, l'altra invece in corrispondenza di un punto di massimo o di minimo. Dalla (9) si ricava:

$$\delta t = \frac{5}{10^5 \cdot 2\pi \cdot 30} \simeq \frac{1}{4} 10^{-6} \qquad \text{(9 bis)}$$

Dalla (10) invece:

$$\delta t = \sqrt{\frac{5 \cdot 4}{10^5 \cdot 2 \cdot 4\pi^2 \cdot 900}} = \frac{1}{2\pi \cdot 30} \cdot \frac{1}{10^2} \simeq \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$$

Da ciò si vede che nel secondo caso la precisione ricavabile è nettamente inferiore a quella del primo caso. Ne deriva che la misura dello sfasamento dovrà compiersi in corrispondenza del punto a derivata massima.
Nel caso di alimentazione mista (c.a. e c.c. con choke coil) per determinare lo sfasamento si dovrà alimentare il magnete con la sola componente alternata e compiere le misure in corrispondenza dello zero del campo magnetico. La misura così compiuta si può ritenere esatta e valevole anche con la alimentazione mista, in quanto si suppongono nulli gli effetti di saturazione per valori di B intorno a 0,5 Wb/m^2.
Se si suppongono spessori nella metallizzazione della donut di circa 50.10^{-3} mm si può ritenere (sulla base di calcoli compiuti dall'ing. Sacerdoti) che le differenze di tempo da doversi percepire sono dell'ordine di 5.10^{-5}sec.
Perciò la precisione che si ottiene in questa misura è dell'ordine di

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot 10^{-6}}{5\cdot 10^{-5}} = \frac{1}{2}\ \%$$

C. Canarutto

Ing. ~~Claudio~~ Canarutto

——— o ———