

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/34  
21.7.1953.

A. Turrin: UTILIZZAZIONE DEGLI ELETTRONI INIETTATI IN  
FUNZIONE DELLA APERTURA ANGOLARE DEL FASCETTO IMMESSO.-

Gruppo Teorico

Rapporto n°5

UTILIZZAZIONE DEGLI ELETTRONI INIETTATI IN FUNZIONE DELLA  
APERTURA ANGOLARE DEL FASCETTO IMMESSO(Risposta alla domanda n°1 del Gruppo operante all'Istituto  
Superiore di Sanità)A) La domanda n° 1.

E' la seguente: "Ferme restando le altre condizioni (fascetto monocromatico, dimensioni trasversali nulle) come dipende dall'apertura angolare del fascetto immesso la frazione di elettroni effettivamente utilizzata nel sincrotrone? In mancanza di informazioni più dettagliate è sufficiente indicare per il momento l'ordine di grandezza dell'apertura angolare che (supposte tutte le direzioni ugualmente rappresentate nel fascetto immesso) riduce a metà o ad una frazione nota gli elettroni effettivamente utilizzabili.

B) Formulazione dettagliata del problema.

- a) sono date le dimensioni della ciambella.
- b) i dettagli geometrici dell'iniettore (che più oltre preciseremo).
- c) l'apertura angolare del fascetto iniettato.
- d) si trovano - sotto opportune ipotesi che elencheremo in seguito - i valori:
  - spiralizzazione;
  - intervallo di tempo di iniezione;
  - pendenza dell'asse medio del fascio iniettato;
  - affondamento dell'iniettore nella gap che rendono massima la quantità di elettroni utilizzabili.

- e) si trova in definitiva la legge di variazione della quantità di elettroni utilizzabili in funzione dell'apertura angolare del fascio.

La geometria del race-track è quella dei dati Pisa II, la larghezza della gap è scelta essere 12 cm. La geometria dell'iniettore (dati Sanità I) è espressa nella fig.1, in cui si è posto  $\xi = 0,45$  a scopo puramente orientativo.

C) Le ipotesi adottate.

Oltre alle ipotesi semplificative della monocromaticità del fascio e dell'esistenza di un unico punto di emissione, si suppone:

- a) che gli angoli  $\alpha_{\max}$  (vedi fig.1) da prendersi in considerazione siano

$$\alpha_{\max} \approx 1^\circ = 0,01745 \text{ rad.}$$

in modo da poter scrivere, nei limiti di più di quattro cifre significative,

(1)

$$\alpha_{\max} = \sin \alpha_{\max} = \tan \alpha_{\max}$$

- b) che il flusso elettronico  $\Phi$  (numero di elettroni emessi per unità di tempo) sia costante al variare della semiapertura  $\alpha_{\max}$ , cioè si suppone che si possa distribuire (in modo uniforme) un dato flusso  $\Phi$  entro un angolo di semiapertura  $\alpha_{\max}$  variabile a priori entro certi limiti.
- c) In mancanza di qualunque dato orientativo in merito, e per non complicare in modo determinante il calcolo, si suppone che la distribuzione angolare degli elet-

troni iniettati sia, agli effetti delle oscillazioni radiali di betatrone qui studiate, isotropa entro l'angolo piano di semiapertura  $\alpha_{\max}$ .

D) Notazioni.

Valgono le notazioni usate nel rapporto n°3.

In più introdurremo la

$\bar{X}'_0$  = pendenza dell'asse mediano del fascio,

ed anche le quantità:

$$\begin{cases} \bar{y}_0 = k \bar{X}'_0 \\ y_{\max} = k x'_{0\max} \end{cases}$$

E) L'intensità di emissione elettronica.

Sarà, in tale ipotesi

$$I(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{y_{\max}}$$

F) Le condizioni di non urto.

Valgono le condizioni di non urto scritte nel rapporto n° 3 (condizioni 1, 2, 3) con la loro interpretazione cinematica nel piano  $(x_0, y_0)$  (figura 5 del rapporto n° 3).

G) Gli elettroni emessi dall'iniettore.

Saranno quelli rappresentati dal segmento di lunghezza  $2y_{\max}$  di figura 2 (che si riferisce al caso particolare per cui è  $\bar{y}_0 = 0$ ).



H) La quantità di elettroni che non hanno urtato al termine dell'iniezione.

Sarà individuata dall'integrale

$$(2) Q = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{Y_{max}} S \quad \text{dove } S = \int_{x_{0inf}}^{x_{0sup}} f(x_0) dx_0$$

in cui

$$\begin{cases} x_{0sup} = \bar{x}_{sup} + \frac{\delta}{2} \\ x_{0inf} = \bar{x}_{inf} + \frac{\delta}{2} \end{cases}$$

dove la  $f(x_0) (= f_+(x_0) + f_-(x_0))$   $\begin{pmatrix} f_+ > 0 \\ f_- > 0 \end{pmatrix}$

sarà la lunghezza ( $2Y_{0max}$ ) del segmento di cui alla figura 2. Esisteranno inoltre range di  $x_0$  per cui questo segmento verrà tagliato dalle condizioni 1, 2, 3 del rapporto n° 3, cosicchè in definitiva, oltre a queste limitazioni, varrà la

(3)

$$\bar{y}_0 - Y_{0max} < y_0 < \bar{y}_0 + Y_{0max}$$

$$\left( \begin{array}{l} Y_{0max} > 0 \\ \bar{y}_0 \text{ preso col suo segno} \end{array} \right)$$

Dunque a definire - nel piano  $(f_{\pm}, x_0)$  - le  $f_{\pm}(x_0)$  varranno le più restrittive delle  $f_{\pm}$  condizioni: (3), nonchè le 1a), 2) e 3a) del rapporto n° 3, che qui riscriviamo

rapporto n° 3.

$$\begin{cases} 1a) \begin{cases} f_k(x_0) = m_k x_0 + q_k \\ m_k = (1 - \Delta_{11}^{4k}) / \Delta_{12}^{4k} \\ q_k = (K_5 - \frac{\delta}{2}) / \Delta_{12}^{4k} \end{cases} \\ 2) \quad c_i = D - \bar{x}_{sup} \\ 3) \quad c_e = \frac{(D^* - \frac{\delta}{2}) + \frac{6}{\sqrt{1-\cos\theta}} \frac{e}{2\pi}}{1 - \cos\theta} \end{cases}$$

Per ogni  $y_{0 \max}$  si tratta di trovare il massimo della  $Q$  rispetto:  $\sigma$ ,  $\tau_{\sup}$ ,  $\tau_{\inf}$ ,  $\bar{y}_0$  e  $D^*$ .

I) La quantità di elettroni idealmente utilizzabili.

Si trova ponendo nella (2)  $y_{0 \max} \rightarrow 0$ .

Si trova allora

(4)

$$Q_{\lim} = \frac{2}{\sigma} (x_{0 \sup} - x_{0 \inf})$$

Di essa è da calcolare il massimo rispetto  $\sigma$ ,  $x_{0 \sup}$  e  $x_{0 \inf}$ , essendo per essa ovviamente

(5) a)  $\bar{y}_0 = 0$  ; b)  $D^* = \frac{e}{f}$

i valori di optimum nei parametri  $\bar{y}_0$  e  $D^*$ .

Nella (4)-qualunque sia  $\sigma$  e  $x_{0 \inf}$  - la  $x_{0 \sup}$  può essere resa massima pur di porre

$$D - \bar{x}_{\sup} = \bar{x}_{\sup} + \frac{e}{f}$$

Tenendo conto della (5b) e del fatto che è  $D + D^* = a = 12 \text{ cm}$  si trova

$$[x_{0 \sup}]_{\max} = \frac{a}{2}$$

Ci si riduce allo al calcolo del massimo della

(4a)  $[Q_{\lim}]_{\max \text{ rispetto } x_{0 \sup}} = \frac{2}{\sigma} \left( \frac{a}{2} - x_{0 \inf} \right)$   
rispetto  $x_{0 \inf}$  e  $\sigma$ .

In essa, per data  $\sigma$ , la  $x_{0 \inf}$  minima compatibile si trova ponendo  $\int_K (x_0) = 0$  nella (1a) del rapporto n° 3, cioè ponendo

$$m_K x_{0K} + q_K = 0$$

- 6 -

e cercando il valore  $\bar{K}$  che per data  $\bar{\sigma}$  rende massima la  $X_{o_K}$ , con la limitazione aggiuntiva

$$(6) \quad X_{o_K} < \frac{a}{2}.$$

E' naturale che  $\bar{K}$  corrispondente cambierà discontinuamente al variare continuo di  $\bar{\sigma}$ .

Come si vede dalla fig. 3), per  $\bar{\sigma} = 0,04$  cm la  $\bar{K}$  cercata vale 7, ma la condizione (6) non è soddisfatta ancora. Per  $\bar{\sigma} = 0,06$  cm è ancora  $\bar{K} = 7$ , ed è soddisfatta pure la (6).

Studiamo allora l'andamento della

$$(4b) \quad [Q_{lim}]_{\substack{(7) \\ \text{max rispetto} \\ X_{o_{sup}} \text{ e } X_{o_{inf}}}} \doteq \frac{2}{\bar{\sigma}} \left( \frac{a}{2} + \frac{Q_7}{m_7} \right)$$

in funzione della  $\bar{\sigma}$ , unica variabile rimastaci.

Esprimendo i simboli

$$(4c) \quad [Q_{lim}]_{\substack{(7) \\ \text{max rispetto } X_{o_{sup}} \text{ e } X_{o_{inf}}}} \doteq \frac{2}{\bar{\sigma}} \left( \frac{a}{2} + \frac{7\bar{\sigma} - \frac{Q}{\Delta_H}}{1 - \Delta_H} \right)$$

la (4c) è una funzione crescente con  $\bar{\sigma}$ . Infatti è, introdotti i valori numerici di  $\frac{Q}{\delta}$  e  $\Delta_H^{4.7}$ ,

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} \left\{ [Q_{lim}]_{\substack{(7) \\ \text{max rispetto } X_{o_{sup}} \text{ e } X_{o_{inf}}}} \right\} > 0.$$

Esisterà un certo valore  $\bar{\sigma}$  per cui (v. figg. 4 e 5) la  $\bar{K}$  passerà dal valore 7 al valore 3. Tale valore  $\bar{\sigma}$  di  $\bar{\sigma}$  si troverà per  $f_7 = f_3 = 0$ .

Studiamo allora l'andamento della

$$(4d) \quad [Q_{lim}]_{\substack{(3) \\ \text{max rispetto } X_{o_{sup}} \text{ e } X_{o_{inf}}}} \doteq \frac{2}{\bar{\sigma}} \left( \frac{a}{2} + \frac{Q_3}{m_3} \right)$$

in funzione della variabile  $\bar{\sigma}$ .

La (4d) è una funzione decrescente per  $\bar{\sigma}$  crescente.

Infatti

$$\frac{d}{d\bar{\sigma}} [Q_{\max}^{(3)}]_{x_{0\sup} \leq x_{0\inf}} < 0.$$

Si conclude allora che il massimo di  $[Q_{\max}^{(3)}]_{x_{0\sup} \leq x_{0\inf}}$  rispetto  $\bar{\sigma}$  si trova per quel valore  $\bar{\sigma}$  per cui è

$$\frac{q_3}{m_3} = \frac{q_7}{m_7}.$$

Risulta per  $\bar{\sigma}$

$$\bar{\sigma} = \frac{2(\Delta_{11}^{4.7} - \Delta_{11}^{4.3})}{7(1 - \Delta_{11}^{4.3}) - 3(1 - \Delta_{11}^{4.7})} = 0,06325 \text{ cm}$$

e per

$$[x_{0\inf}]_{\min} \quad [x_{0\inf}]_{\min} = 0,7266.$$

In definitiva, assunto numericamente

(2a)

$$Q \doteq \frac{10^{-2}}{1,7} \frac{1}{5} \frac{1}{f_{\max}} \int_{x_{0\inf}}^{x_{0\sup}} f(x_0) dx_0$$

E', per

$$\underline{f_{\max}} = 0; \quad [Q_{\lim}]_{\max} = 1,0$$

essendo i valori dei parametri che danno il massimo, i seguenti:

$$\bar{\sigma} = 0,06325 \text{ cm}; \quad \bar{y}_0 = 0; \quad D^* = \frac{2}{5};$$

$$x_{0\sup} = 6 \text{ cm}; \quad x_{0\inf} = 0,7266 \text{ cm}$$



J) La quantità di elettroni utilizzabile  $y_{e \max} > 0$ .

Riconsideriamo la (2a) e proponiamoci, per data  $y_{e \max}$ , di calcolarne il massimo rispetto  $\sigma$ ,  $\tau_{\sup}$ ,  $\tau_{\inf}$ ,  $\bar{y}_e$  e  $D^*$ . Il modo di procedere è il seguente:

Si sceglie un intervallo di variabilità della  $\sigma$ , entro il quale si presume venga a cadere il massimo della Q, e lo si divide convenientemente in parti uguali. Poichè le rette (1a) del rapporto n° 3 dipendono dalla sola  $\sigma$  si comincia a tracciare intanto queste rette, tenendo conto del criterio selettivo e) del rapporto n° 3. Si ottengono così (figg. 3, 4, 5, 6) per ogni particolare valore di  $\sigma$  le rette che limiteranno la S. A questi insiemi di rette si sovrapporranno poi le condizioni (2) e (3a) del rapporto n° 3. In ogni figura contrassegnata dal particolare valore  $\sigma$  studiato si tratteranno ora le curve (2) e (3a) di parametro  $D^*$ . Per studiare le variazioni della (2a) in funzione di  $D^*$ , su ogni figura determinata da  $\sigma$  si tratteranno le  $Q_e$  e  $Q_i$  per vari valori di  $D^*$ . Così si sarà ottenuto un insieme di figure in cui è contemplata la variazione di  $\sigma$  e di  $D^*$ .

Per trovare il massimo della (2a) basta procedere così: si sovrappone la parte che interessa della fig. 7 (cioè la striscia di larghezza  $2 y_{e \max}$  che si vuole considerare) a ciascuna queste aree (3, 4, 5, 6). Facendo scivolare lungo l'asse  $f$  la striscia  $2 y_{e \max}$  si trova facilmente per trasparenza, per data  $y_{e \max}$  e per data  $\sigma$ , quali sono i valori  $x_{o \sup}$ ,  $x_{o \inf}$ ,  $\bar{y}_e$  e  $D^*$  che rendono massima la S, nonchè si può calcolare graficamente il valore della S così trovata. La conoscenza della S e dei parametri che la determinano permette di calcolare facilmente la (2a): si riempie una tabella che dà la variazione della Q optimum in funzione di  $\sigma$ , e così si trova il massimo della Q in funzione di tutti questi parametri.



Con un po' di attenzione e di cura il calcolo può essere attendibile nell'ambito di due cifre significative.

I risultati sono stati i seguenti:

$$y_{o\max} = 0: \underline{Q=1,0} \text{ per } \bar{\sigma}=0,06325; \bar{y}_o=0; D^*=8; X_{o\sup}=6 \text{ cm};$$

$$(\alpha_{\max}=0^\circ) \quad X_{o\inf}=0,7266 \text{ cm}$$

$$y_{o\max}=0,5 \text{ cm: } \underline{Q=0,76} \text{ per } \bar{\sigma}=0,06; \bar{y}_o=0,5 \text{ cm}; D^* \geq 0,6 \text{ cm};$$

$$(\alpha_{\max}=5'30'' \quad (\bar{\alpha}_o=+5'30''))$$

$$\approx 0,16 \cdot 10^{-2} \text{ rad) } X_{o\sup}=5,9 \text{ cm}; X_{o\inf}=0,9 \text{ cm}; (S=4,0 \text{ cm}^2)$$

$$y_{o\max}=1,0 \text{ cm: } \underline{Q=0,59} \text{ per } \bar{\sigma}=0,08; \bar{y}_o=0,4 \text{ cm}; D^* \geq 0,7 \text{ cm};$$

$$(\alpha_{\max}=11' \quad (\bar{\alpha}_o=+5'30''))$$

$$\approx 0,32 \cdot 10^{-2} \text{ rad) } X_{o\sup}=5,9 \text{ cm}; X_{o\inf}=0,5 \text{ cm}; (S=8,0 \text{ cm}^2)$$

$$y_{o\max}=1,5 \text{ cm: } \underline{Q=0,42} \text{ per } \bar{\sigma}=0,10; \bar{y}_o=0,5 \text{ cm}; D^* \geq 0,8 \text{ cm};$$

$$(\alpha_{\max}=16'30'' \quad (\bar{\alpha}_o=+5'30''))$$

$$\approx 0,49 \cdot 10^{-2} \text{ rad) } X_{o\sup}=5,8 \text{ cm}; X_{o\inf}=0,4 \text{ cm}; (S=10,8 \text{ cm}^2)$$

Nella fig.8 è riportato il grafico della  $Q_{\max}$  in funzione di  $y_{o\max}$ .

Giova avvertire che l'andamento della  $Q$  e il suo dimezzamento in funzione di  $y_{o\max}$  dipendono in modo essenziale dal valore scelto per  $\bar{\sigma}$ .

(Dati Sanità 10)

Fig. 1

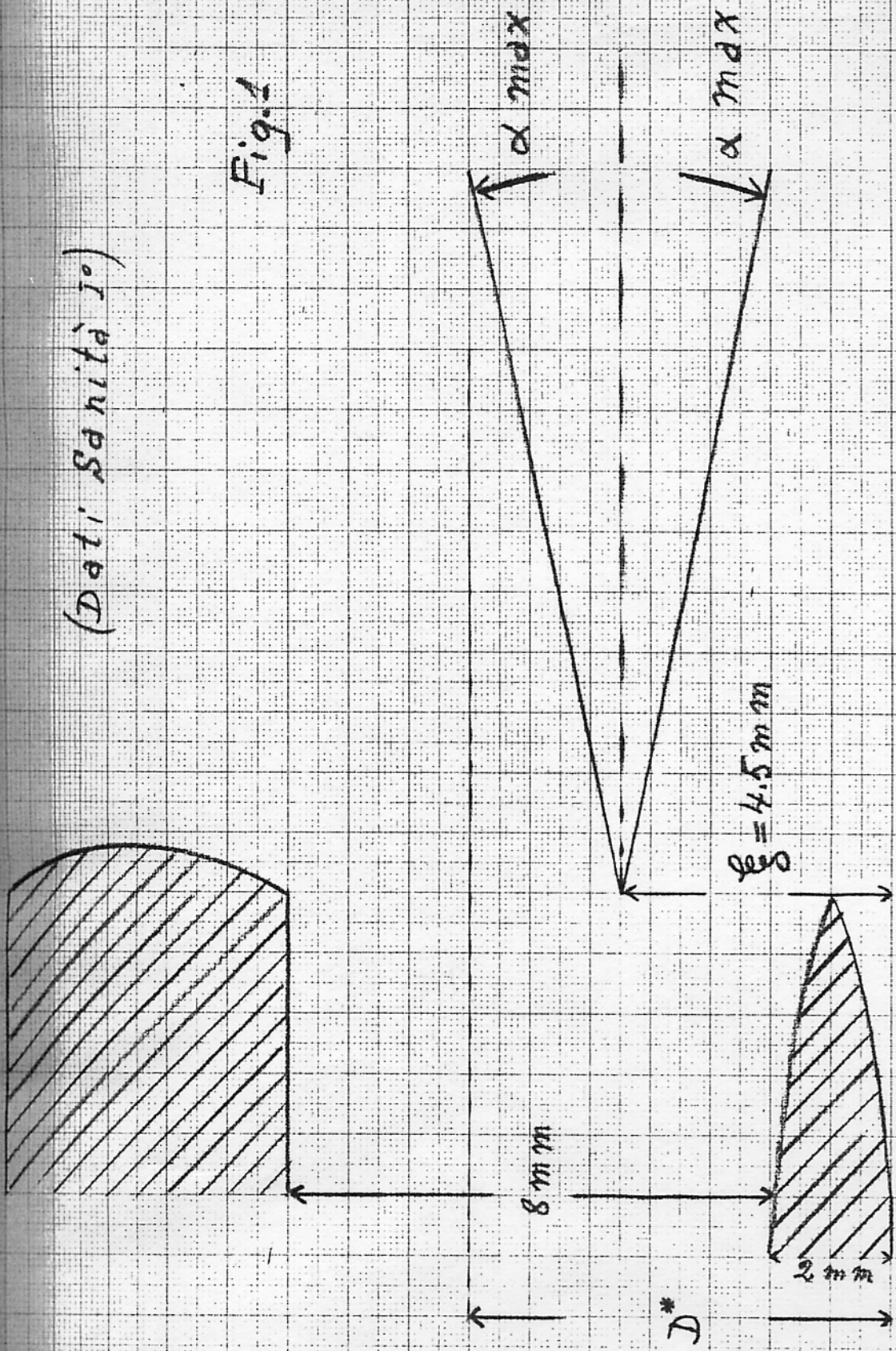


Fig 2

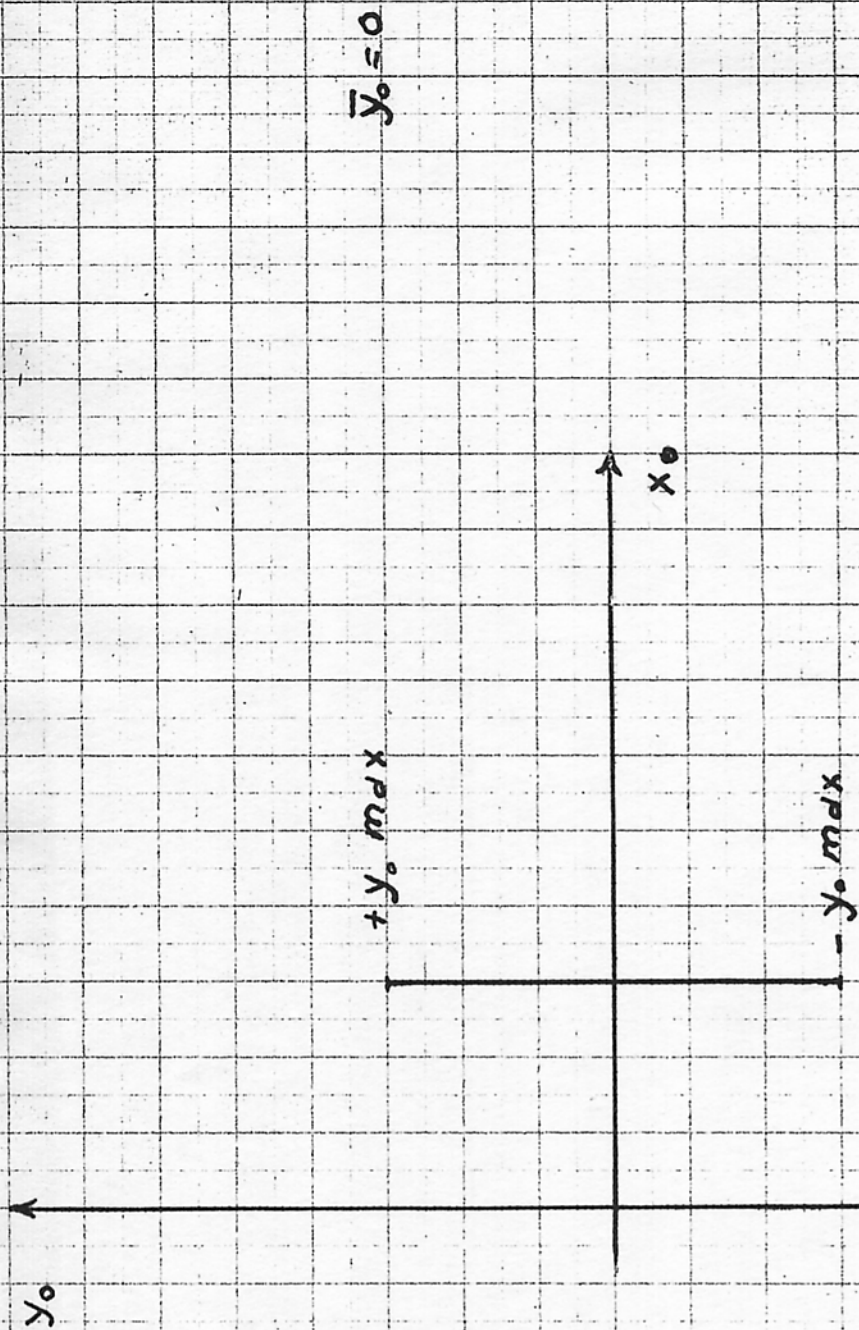
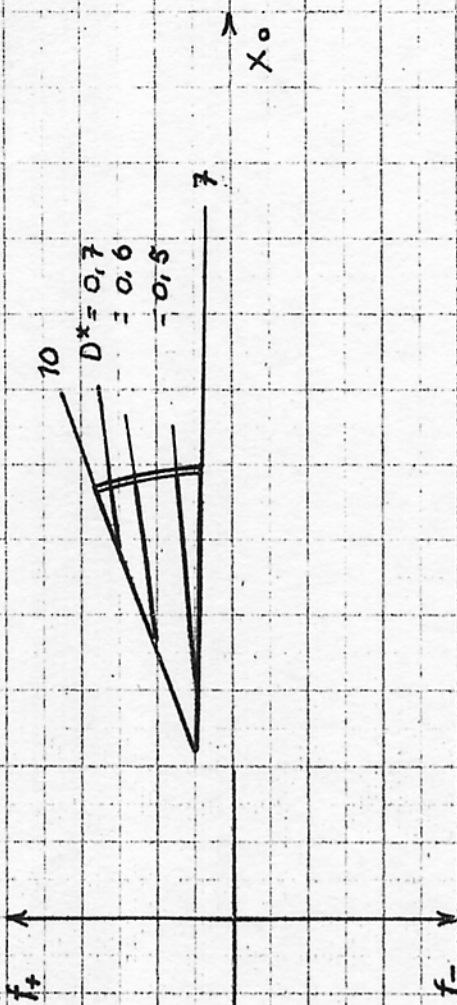




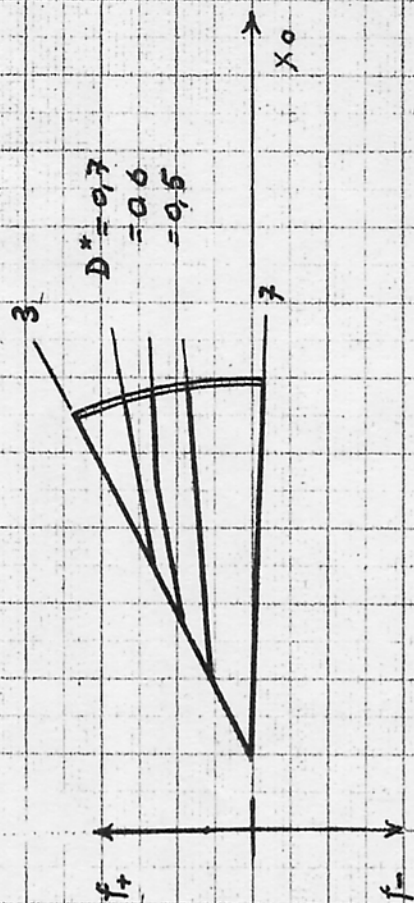
Fig 3



$$\delta = 0.04 \text{ cm}$$



Fig 4

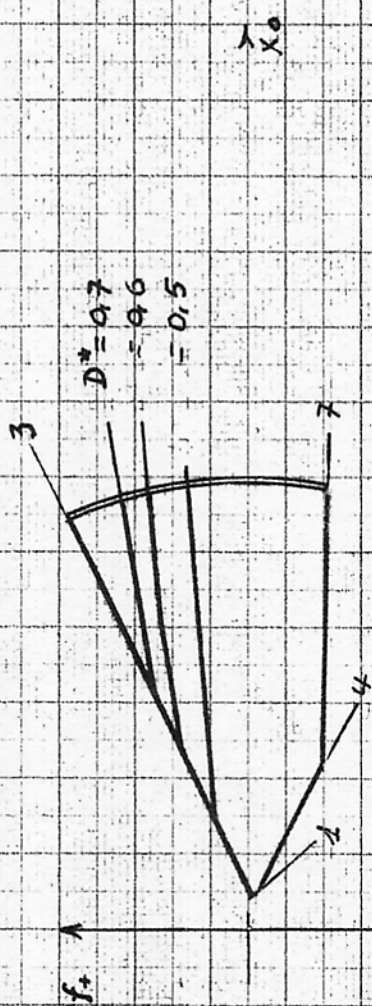


$$\sigma = 0.06 \text{ cm}$$

Fig 5

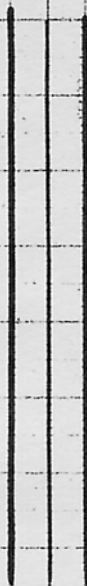


Fig 6



$$\sigma = 0,10 \text{ cm}$$

Fig 7



$$\gamma_0 \text{ max} = 0.5 \text{ cm}$$



$$\gamma_0 \text{ max} = 1.0 \text{ cm}$$



Fig 8

