

Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/27
7.7.1953.

F. Amman: RELAZIONE SULLA VASCA ELETTROLITICA.-

RELAZIONE SULLA VASCA ELETTROLITICA

Le equazioni relative al campo e.m. ed al campo di corrente che si ha nella vasca elettrolitica, all'esterno dei conduttori (campo laplaciano), sono :

Campo e. m.

- grad. M = \underline{H}

Campo di corrente

- grad V = \underline{K}

che si possono anche scrivere :

$$1) \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial M}{\partial x} = H_x = \frac{I}{\mu} B_x \\ - \frac{\partial M}{\partial y} = H_y = \frac{I}{\mu} B_y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial V}{\partial x} = K_x = \int s_x \\ - \frac{\partial V}{\partial y} = K_y = \int s_y \end{array} \right.$$

Si possono inoltre scrivere le equazioni relative al flusso e alla corrente I :

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{h'} \frac{\partial \phi}{\partial x} = - B_y \\ \frac{I}{h'} \frac{\partial \phi}{\partial y} = B_x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{h} \frac{\partial I}{\partial x} = - s'_y \\ \frac{I}{h} \frac{\partial I}{\partial y} = s_x \end{array} \right.$$

- dove h' è la dimensione normale al piano xy nel campo e.m.
- h " " " " " " " " " di corrente
- \underline{S} è il vettore densità di corrente
- M è la funzione potenziale del campo e.m.

Dai sistemi 1) e 2) si può ricavare questo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{\mu h'} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{\mu h'} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{g}{h} \frac{\partial I}{\partial y} \\ + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{g}{h} \frac{\partial I}{\partial x} \end{array} \right.$$

Uguagliando le derivate seconde miste si ottiene ancora:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu h' \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu h' \frac{\partial M}{\partial y} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{g} \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu h'} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu h'} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{g}{h} \frac{\partial I}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{g}{h} \frac{\partial I}{\partial y} \right) = 0$$

Da questo gruppo di equazioni, formalmente simili, si ricava che è possibile lo studio del campo e.m. mediante un campo di corrente, in due modi differenti: nel primo caso, in cui le due funzioni potenziale si corrispondono, si avrà l'analogia diretta; nel secondo caso, in cui a una funzione potenziale si fa corrispondere una funzione di flusso, si avrà l'analogia coniugata.

In base al gruppo di equazioni 4) potremo quindi porre le seguenti corrispondenze:

Analogia diretta:

$$\begin{array}{cccc} V & I & h & g \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ M & \phi & h' & I/\mu \end{array}$$

campo di corrente

campo e.m.

Analogia coniugata :

V	I	h	ρ	campo di corrente
\downarrow	\downarrow	\downarrow	\downarrow	
Φ	M	I/h'	μ	campo e.m.

quanto detto per il campo la placiano vale anche per i campi verticali: invece di una funzione potenziale M si avrà un potenziale Δ ; nell'analogia diretta non sarà più definibile una funzione potenziale V , per la rotazionalità del vettore \underline{K} ; nell'analogia inversa si avrà invece ancora la funzione potenziale V , e sarà invece diverso da zero il rotore del vettore $I\underline{e}$ (dove \underline{e} è un versore normale al piano $x y$; si comprende qui come la possibilità di ricorrere all'analogia coniugata sia limitato ai campi piani e ai campi di simmetria circolare, nei quali, data la distribuzione di tutte le grandezze d'ingombro in un piano passante per l'asse, è nota la distribuzione nello spazio).

Quando si debba tener conto di porzioni di campo non laplaciano, è più comode per la realizzazione ricorrere all'analogia coniugata; questa è stata la strada seguita.

Poichè, nell'analogia coniugata $\frac{d}{h}$ corrisponde ρ (resistività), al ferre (permeabilità praticamente infinita) corrisponderà, nel modello, materiale isolante (resistività infinita); ad una variazione lineare di h' col raggio (caso del settore di cerchio), corrisponderà nel modello una variazione iperbolica di h , poichè ad h' corrisponde I/h .

In questo studio ha un particolare interesse la determinazione del vettore induzione \underline{B} ; dalle 5) dato che alla funzione Φ nell'analogia coniugata corrisponde V , si ricava:

$$5) \left\{ \begin{array}{l} B_y \rightarrow -h \frac{\partial V}{\partial x} \\ B_x \rightarrow h \frac{\partial V}{\partial y} \end{array} \right. \quad \text{cioè } \underline{B} \rightarrow \text{grad. } V \cdot h \quad \text{ruotato di } 90^\circ$$

Si ha anche, detto r il raggio:

$$6) \quad r \sim h' \quad \text{e quindi} \quad r \sim 1/h$$

da cui

$$7) \quad \underline{B} \rightarrow \frac{\text{grad } V}{r} = \frac{K}{r} \quad \text{ruotato di } 90^\circ$$

Si può trovare il legame tra la funzione V (rilevata mediante la sonda) e il valore di B , lungo la mezzeria del traferro, poiché qui \underline{B} è sempre assiale e \underline{K} sempre radiale, per la 7):

$$8) \quad V = \int k dr \rightarrow \int B_r dx$$

$$\text{Se } B = B_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n, \quad \text{si ha:}$$

$$9) \quad V \rightarrow \int B_0 \frac{r_0^n}{r^{n-1}} dr = B_0 \frac{r^2}{2-n}$$

La funzione potenziale rilevata alla vasca non corrisponderà generalmente ad una variazione di B con esponente n costante, quindi è possibile solo un confronto tra la curva V rilevata, ed una serie di curve tracciate secondo la 9) per diversi valori di n .

REALIZZAZIONE DEL PRIMO MODELLO (modello A)

Quanto detto sopra giustificerebbe l'applicazione dell'analogia coniugata a campi a simmetria cilindrica solo quando lo spessore h dell'elettrolita è tanto piccolo da permettere la sostituzione della tangente all'arco di curva normale al fondo.

Nei limiti di questa approssimazione le pareti del modello sono piane, normali alla superficie libera.

Ogni settore ha un piano di simmetria e quindi, applicando il principio della riflessione, ci si è limitati a riprodurre metà settore; il fondo è sagomato secondo un arco di iperbole, ottenuto inclinando la vasca di un angolo uguale all'angolo della corda sottesa dall'arco, e depennando sul fondo uno strato di paraffina sagomato secondo l'arco di iperbole, strato che si annulla lungo i due lati $A B$ e $C D$ della vasca (fig.I).

Il modello, per un primo studio di orientamento, è stato costruito in scala $1 : 2$ e posto in una vasca con fondo di vetro e pareti di legno catramate, avente dimensioni in pianta di cm. 58×58 , alta 10 cm. La disposizione del modello è indicata in fig.I; con tale disposizione si immagina che vi sia un'equipotenziale del campo e.m. all'esterno del C, in corrispondenza del prolungamento delle spigole interne della gamba del magnete. Ciò non può portare ad errori sensibili nelle vicinanze del traferro, dato il piccolissimo valore del flusso in tale parte del campo.

In corrispondenza delle bobine del magnete, vengono introdotte nell'elettrolita degli elettrodi di rame (anch'essi dispo-

sti normalmente alla superficie libera) del diametro di 5 mm.; nel nostro modello sono 12 per bobina, in totale 24. Facendo l'ipotesi di densità di corrente uniforme nella bobina del magnete, nel modello elettrolitico si dovrebbe avere un'introduzione di corrente in modo continuo; essendo ciò praticamente impossibile, di ricorrere ad un numero limitato di elettrodi, che trasportano ciascuno la stessa corrente.

In fig. 2 è riportata una delle placche portaelettrodi: esse sono in bachelite; oltre ai 12 fori per gli elettrodi, vi sono 51 fori nei quali si può introdurre una sonda per la misura del potenziale. Dato che il sistema di alimentazione è discreto e non continuo, la corrispondenza tra queste misure di potenziale e il flusso nella bobina del magnete sarà solo approssimato; è possibile però raggiungere un'approssimazione assai buona, perchè, rispetto al valore del flusso, si avranno dei potenziali ^{errati} per eccesso (punti nelle mezzerie dei quadrati che racchiudono gli elettrodi) e dei potenziali errati per difetto (vertici di detti quadrati), per cui è possibile, mediante tracciamento grafico, ottenere dei valori medi assai prossimi ai valori effettivi della funzione flusso.

In fig. 3 vi è lo schema elettrico dell'alimentazione degli elettrodi e della misura. La vasca è alimentata in corrente alternata a 200 p/sec, fornita da un alternatore trascinato da un motore a corrente continua. Due ragioni hanno portato alla scelta della frequenza di 200 p/sec: secondo le esperienze dell'ing. Dadda essa riduce gli effetti di polarizzazione, inoltre si evitano tutti i disturbi della rete, che si avrebbero se si lavorasse a 50 p/sec.

Per semplicità, la regolazione delle resistenze in serie agli elettrodi viene effettuata in corrente continua, disponendo in serie a ciascuno, volta a volta, un amperometro a c.c., $100 \mu A$ in fondo scala. Viene effettuata una regolazione ciclica: dopo tre giri completi la corrente è praticamente uguale tutti gli elettrodi (scostamenti massimi rispetto al valore medio dell'ordine di $+ 0.5\%$).

Il rivelatore di zero è un elettrodinamometro collegato alla sonda attraverso un amplificatore; la sua bobina fissa è alimentata attraverso un variatore di fase, regolato in modo da rendere minima la tensione residua dovuta alla caduta di tensione capacitiva per la polarizzazione (praticamente il variatore di fase sarebbe inutile, perchè il minimo si ha quando la fase della tensione applicata alla bobina fissa coincide colla fase della tensione applicata alla sonda: ved. diagramma vettoriale delle tensioni in fig. 4), e ciò per sfruttare al massimo l'amplificatore senza arrivare alla saturazione. Questa è l'unica considerazione che fissa la scelta di una determinata fase della tensione di alimentazione della bobina fissa dell'elettrodinamometro; mentre infatti nell'analogia diretta tale tensione deve essere normale alla c. d. t. capacitiva per polarizzazione, dato che i potenziali sono riferiti ai potenziali degli elettrodi (punti A e B di fig. 4), nell'analogia inversa, essendo imposta la corrente e non la tensione, i potenziali di riferimento sono arbitrari, ed i fenomeni di polarizzazione non hanno, teoricamente, alcun peso nella misura. Praticamente, come già detto, conviene che le c. d. t. per polarizzazione siano piccole, per poter così amplificare molto la tensione tra sonda e cursore

del potenziometro senza saturare l'amplificatore.

Gli estremi del potenziometro, collegate in parallelo alla vasca mediante delle cassette di resistenze, vengono portati all'incirca ai potenziali massimo e minimo esistenti nella vasca (che corrispondono ai due punti di indifferenza delle due bobine): detti potenziali sono i potenziali di riferimento.

Il potenziometro è a tre decadi, per corrente alternata - Rilevati i potenziali nei 51 punti accessibili nello spazio corrispondente a ciascuna delle due bobine, mediante la costruzione grafica sopra accennata, si possono tracciare le linee di flusso che attraversano le bobine. Quelle fig. 5 e 6 sono riportati i campi rilevati rispettivamente nella bobina interna e nella bobina esterna (prove del 3 giugno 1953).

I potenziali (a cui corrispondono nell'analogia i valori della funzione flusso) sono riferiti ai potenziali massimo e minimo (punto di indifferenza) che hanno rispettivamente valore : 1.000 e 0 - Una prima analisi di queste due tracciati di campi permette di rilevare come la suddivisione prevista delle bobine sia la meno efficiente, agli effetti delle correnti parassite: infatti per ridurre queste bisogna rendere minime le dimensioni dei conduttori normali alle linee di flusso.

Bisogna quindi pensare a piattine col lato più lungo disposte radialmente (rispetto al complesso del magnete) e non assialmente - Calcolando la distribuzione della densità di corrente nelle bobine in base a questi rilievi, e riproducendo in modello tale distribuzione (invece della distribuzione uniforme adottata in prima appross-

simazione), ripetendo quindi il processo più volte si potrebbe giungere ad ottenere con grande approssimazione il campo realmente esistente nelle bobine del magnete.

Tale procedimento non è necessario nel nostro caso: infatti il fatto che la densità di corrente non sia uniforme non ha grande influenza sul campo nel traferro, d'altra parte si ha già un'approssimazione avendosi un sistema discreto invece che continuo di alimentazioni; inoltre, per procedere alla suddivisione dei conduttori nel modo migliore, interessa l'andamento del campo e non il suo valore rilievo esatto.

In fig. 7 vi è il rilievo del campo; posto uguale a 1000 il flusso totale, sono disegnate a tratto pieno le linee relative a differenze di 100 nella funzione flusso; le linee corrispondenti a valori intermedi sono tratteggiate. I punti segnati 0 e 1.000 sono i centri di indifferenza.

In questo modello, senza alcuna sagomatura dei poli, il flusso utile nel traferro è il 53% del flusso totale (coefficiente di maggiorazione, rapporto tra flusso totale e flusso utile, 1.88); spostando in basso le bobine fino a portarne il bordo inferiore sul proseguimento dell'espansione polare, si ottiene un flusso utile pari al 60% del flusso totale (coefficiente di maggiorazione 1.66).

In questi primi rilievi l'approssimazione è piuttosto scarsa; per quante riguarda i potenziali nelle bobine si può contare che gli scarti si mantengono inferiori a $\pm 0,5\%$; la costruzione grafica attraverso cui sono ottenute le figg. 5 e 6, permette di ridurli ulteriormente. Il rilievo del campo è invece affetto da errori maggiori, dovuti anche all'imprecisione del sistema meccanico: gli

scarti saranno dell'ordine del $\pm 1 \div 2$

E' stato anche fatto un rilievo dei potenziali lungo la mezzeria: in base ai risultati si sono tracciate le curve dell'induzione e dell'esponente w ; naturalmente, dato la forma dei poli, queste curve non interessano per lo scopo di questo lavoro, sono state tracciate nell'intento di sperimentare il metodo.

MODELLO DI WILSON (Modello W_I)

Sono stati fatti alcuni rilievi su un modello rappresentante in scala 1 : 1 il magnete di Wilson.

Le fig. 8 e 9 riportano l'andamento del campo rispettivamente nella bobina interna (la rappresentazione è limitata a metà bobina, dato che la mezzeria è piano di simmetria) e nella bobina esterna.

Nella fig. 10 vi è il rilievo del campo; anche qui, come nel modello A, viene posto uguale a 1.000 il flusso totale.

Con la rastrematura dei poli, il flusso utile diviene il 43% del flusso totale (coefficiente di maggiorazione 2.32); l'induzione massima nel ferro è 1.43 volte l'induzione media nel traferro. Ciò vuol dire che, supponendo di seguire il dimensionamento di Wilson, dovendosi avere nel traferro un'induzione media di 0.83 Wb/m^2 per un'energia di 1 B ev; l'induzione massima nel ferro sarà di 1.19 Wb/m^2 .

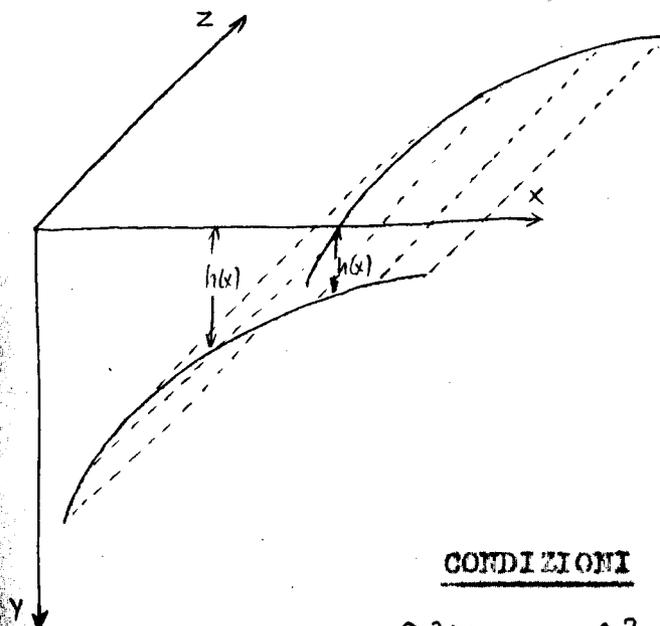
PROGRAMMA DEI PROSSIMI LAVORI

Si sta preparando una vasca più grande (dimensioni in pianta ca. m. 0,80 x 1,75, altezza 10 cm.) dalla quale sarà possibile studiare un modello di dimensioni maggiori.

Poiché il sistema meccanico porta-sonda non può assicurare una precisione sufficiente nella determinazione delle coordinate del punto di cui si vuol misurare il potenziale, e non permette il rilievo diretto del gradiente (a cui corrisponde l'induzione) è allo studio un sistema con sonde fisse per la misura del potenziale e del gradiente lungo il piano di simmetria radiale. Tale sistema permetterebbe inoltre di limitarsi alla riproduzione di metà modello (come è stato fatto in queste prime misure), ottenendo le stesse precisioni che si avrebbero con sonda mobile e modello completo.

(APPENDICE I)

Analoga coniugata - (da un colloquio col prof. Persico)



CONDIZIONI

$$1) \quad \Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$2) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e per } y = h(x)$$

La 2) corrisponde alle :

$$2 a) \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{per } y = 0$$

$$2 b) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{per } y = h(x)$$

$$2b) \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1+h^2}} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - h' \frac{\partial V}{\partial x} \right] = 0$$

per $y=h$
 $\left[h' = \frac{dh}{dx} \right]$

$$3) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

per $y = 0$

SOLUZIONE

Svolgiamo la funzione V in serie di potenze di y , in funzione dei valori che essa assume sul piano $x =$ (piano $y = 0$)

$$4) \quad v(x, y, z) = V_0(x, z) + y \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=0} + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \dots$$

per la 2a) $\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$ quindi

$$4a) \quad v(x, y, z) = V_0 + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{y=0} + \dots$$

Sostituendo la condizione 3) nella 1) si ottiene :

$$5) \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{1}{x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y=0}$$

Limitandoci al termine di II ordine nella 4a) e introducendo la 5) si ha :

$$4b) \quad v = v_0 - \frac{y^2}{2} \frac{1}{x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{y=0}$$

La condizione 2b) può essere scritta :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=h(x)} = h' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=h(x)}$$

Facendo le derivate della 4b) si ottiene :

$$2a) \quad -h \frac{1}{x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} = h' \left[\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} \right]$$

I ipotesi - Trascuriamo h^2

$$6) \frac{h'}{h} = - \frac{1}{x}$$

$$7) h = \frac{const}{x} \quad \text{iperbole}$$

II ipotesi - Teniamo conto di h^2

Introducendo la notazione $V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y=0}$ $V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{y=0}$

la 2a) può essere così scritta: $\frac{h'}{h} =$

$$8) \frac{h'}{h} = - \frac{1}{2} \frac{V_x}{V_x - \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{x} V_{xx} - \frac{1}{x^2} V_x \right)}$$

Nel secondo termine ad h^2 si può sostituire il risultato ottenuto in 5) approssimazione, $h = \frac{c}{x}$, ottenendo così integrando:

$$9) \ln h = - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \frac{c^2}{2x^4} \left(x \frac{V_{xx}}{V_x} - 1 \right)}$$

Ciò vuol dire che il profilo del fondo $h(x)$ dipende dalle derivate rispetto a x della V_0 , cioè dalla configurazione del campo ϕ_0 in superficie.

Osservazione - Si può notare che allo stesso risultato si giunge cercando l'espressione del profilo del fondo nell'analogia diretta:

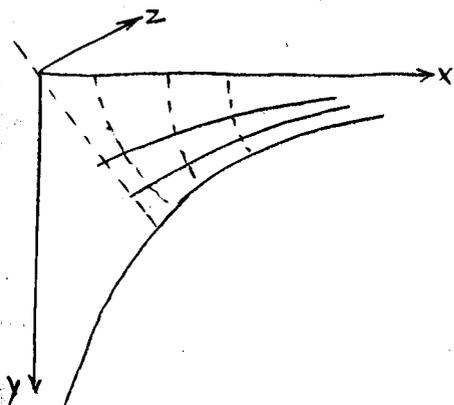
In questo caso cambia soltanto il segno della derivata prima nella condizione 3).

La 9) diviene

$$9') \ln h = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + X \frac{V_{xx}}{V_x}}$$

Non si potrebbe trarne la conclusione che anche in questo caso il profilo del fondo dipende dalla distribuzione di V in superficie, mentre è noto che nell'analogia diretta detto profilo è certamente rettilineo. Questo ragionamento infirma il procedimento susseguente.

(APPENDICE II)

Analoga coniugata (da un colloquio coll'Ing. Dadda).

Si cerca quale dev'essere il profilo del fondo, in modo che, essendo il campo laplaciano, alla superficie (piano $y = 0$) il Δ_2 assume la seguente forma .

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Supponiamo che il profilo del fondo sia un'iperbole equilatera avente come asintoti gli assi x e y ; le due famiglie di iperboli ortogonali come tracce delle superfici di flusso e delle superfici equipotenziali, costituiscono certamente il reticolo di un campo laplaciano. Siccome la soluzione del problema è unica, ciò vuol dire che sagomando il fondo secondo un'iperbole e gli elettrodi (equipotenziali) secondo iperboli normali, le linee del flusso equipotenziali sono delle iperboli normali tra loro, appartenenti alle due famiglie di cui si è detto sopra.

Resta ora da cercare l'espressione del Δ_2 sul piano $y = 0$

Introduciamo il sistema di coordinate curvilinee (iperboliche) :

$$u_2^2 = x y$$

$$u_1^2 = x^2 - y^2$$

$$u_3 = z$$

Con questa trasformazione per $y = 0$, $u_1 = x$.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{u_1^2 + \sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-u_1^2 + \sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$z = u_3$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = \frac{1}{2} u_2^2 \frac{u_1 + \sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}{(u_1^4 + 4u_2^4)}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 = \frac{1}{2} u_2^2 \frac{-u_1 + \sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}{(u_1^4 + 4u_2^4)}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2 = 0$$

$$h^2 = \frac{u_2^2}{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 = \frac{8}{u_1^4 + 4u_2^4} \frac{u_2^6}{u_1^2 + \sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 = \frac{8}{u_1^4 + 4u_2^4} \frac{u_2^6}{-u_1^2 + \sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 = 0$$

$$h_2^2 = \frac{4u_2^2}{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$h_3^2 = 1$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} = \frac{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}{2u_1 u_2}$$

$$\frac{h_2 h_3}{h_1} = 2 \frac{u_2}{u_1} ; \quad \frac{h_1 h_2}{3} = \frac{2u_1 u_2}{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}$$

$$\frac{h_1 h_3}{h_2} = \frac{u_1}{2u_2}$$

$$\Delta_2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \right) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial u_1} \right) = 2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} - 2 \frac{u_2}{u_1} \frac{\partial V}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial u_2} \right) = \frac{u_1}{2u_2} \frac{\partial^2 V}{\partial u_2^2} - \frac{u_1}{2u_2} \frac{\partial V}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial u_3} \right) = \frac{2u_1 u_2}{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}} \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2}$$

ma per ipotesi le $u_2 = \text{cost}$ sono superfici di flusso, quindi :

$$\frac{\partial V}{\partial u_2} = 0$$

$$\Delta_2 V = \frac{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}}{2u_1 u_2} \cancel{2u_2} \left[\frac{1}{u_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} - \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial V}{\partial u_1} + \frac{u_1}{\sqrt{u_1^4 + 4u_2^4}} \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} \right]$$

Sul piano $y = 0$ si ha $u_2 = 0$ e quindi :

$$\left[\Delta_2 V \right]_{u_2=0} = u_1 \left[\frac{1}{u_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} - \frac{1}{u_1^2} \frac{\partial V}{\partial u_1} + \frac{1}{u_1} \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} \right] = \frac{\partial^2 V}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u_3^2} - \frac{1}{u_1} \frac{\partial V}{\partial u_1}$$

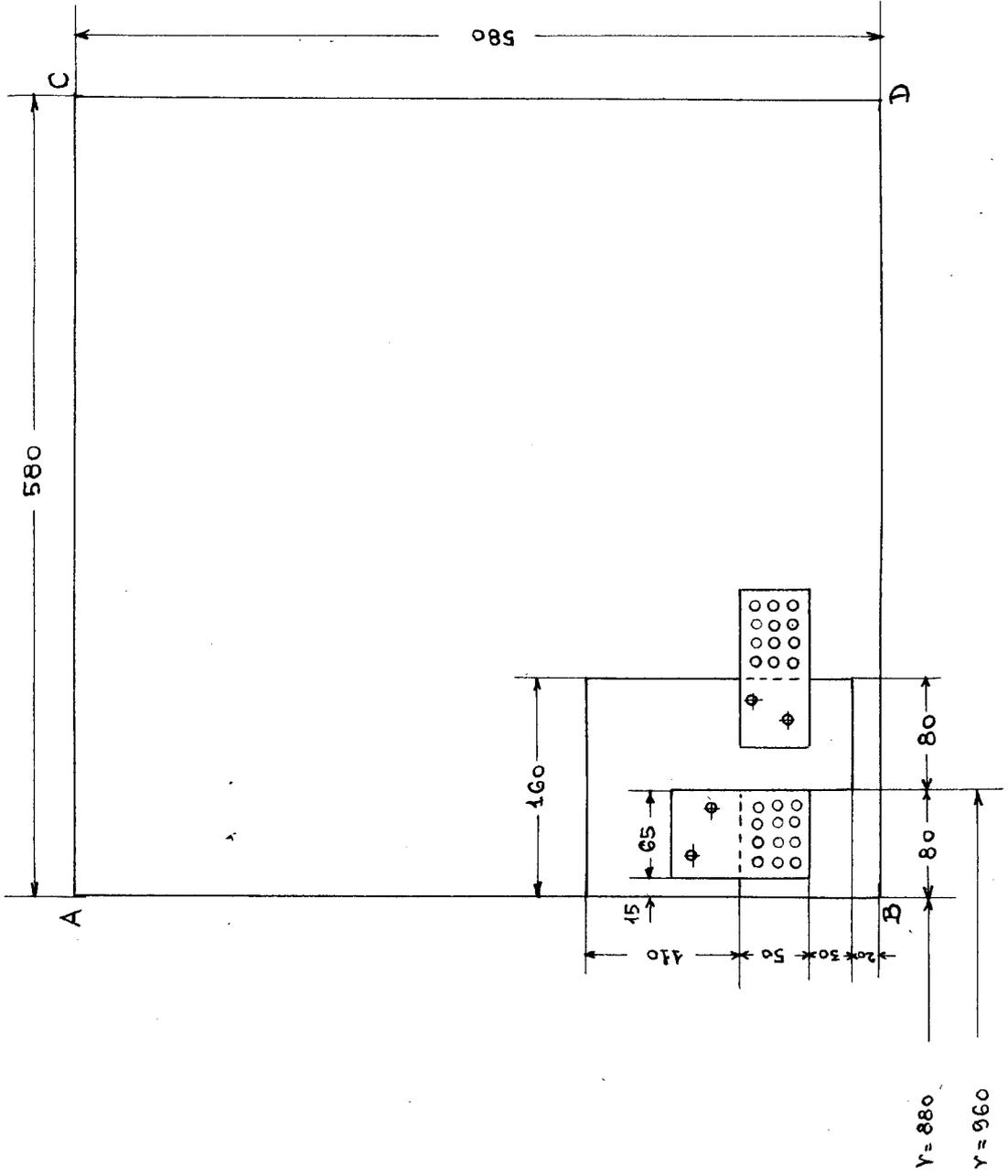
ma per $u_2 = 0$, $u_1 = x$, $u_3 = z$ e quindi :

$$\left[\Delta_2 V \right]_{u_2=0} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{1}{x} \frac{\partial V}{\partial x}$$

Da ciò si ricava che è rigorosamente possibile studiare un campo a simmetria cilindrica mediante l'analogia coniugata, sagomando il fondo della vasca e gli elettrodi secondo archi di iperboli ortogonali.

Milano, 7/7/1953

F. AIMAN.



Scale : 1cm = 50mm.

FIG. 1

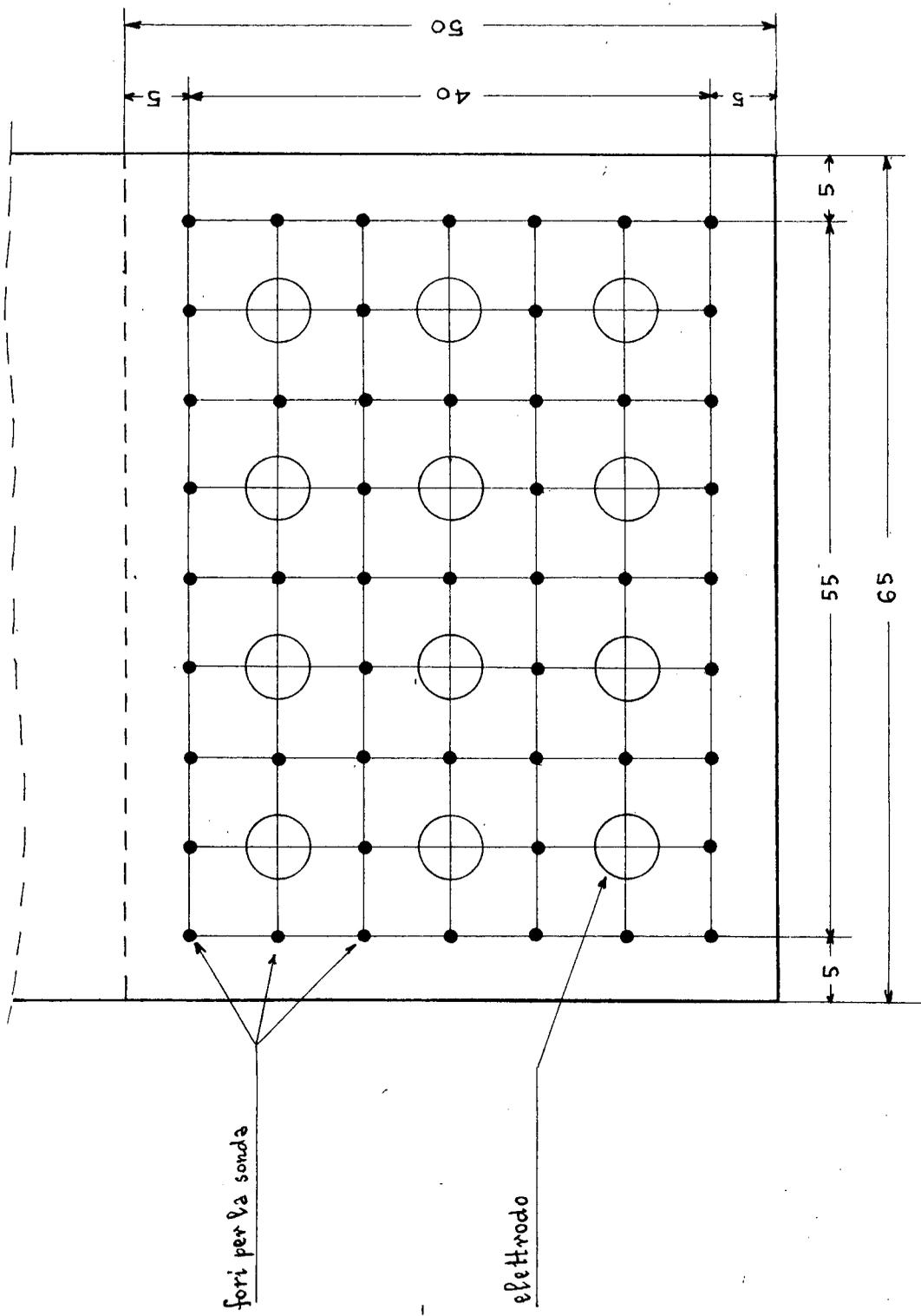


FIG. 2

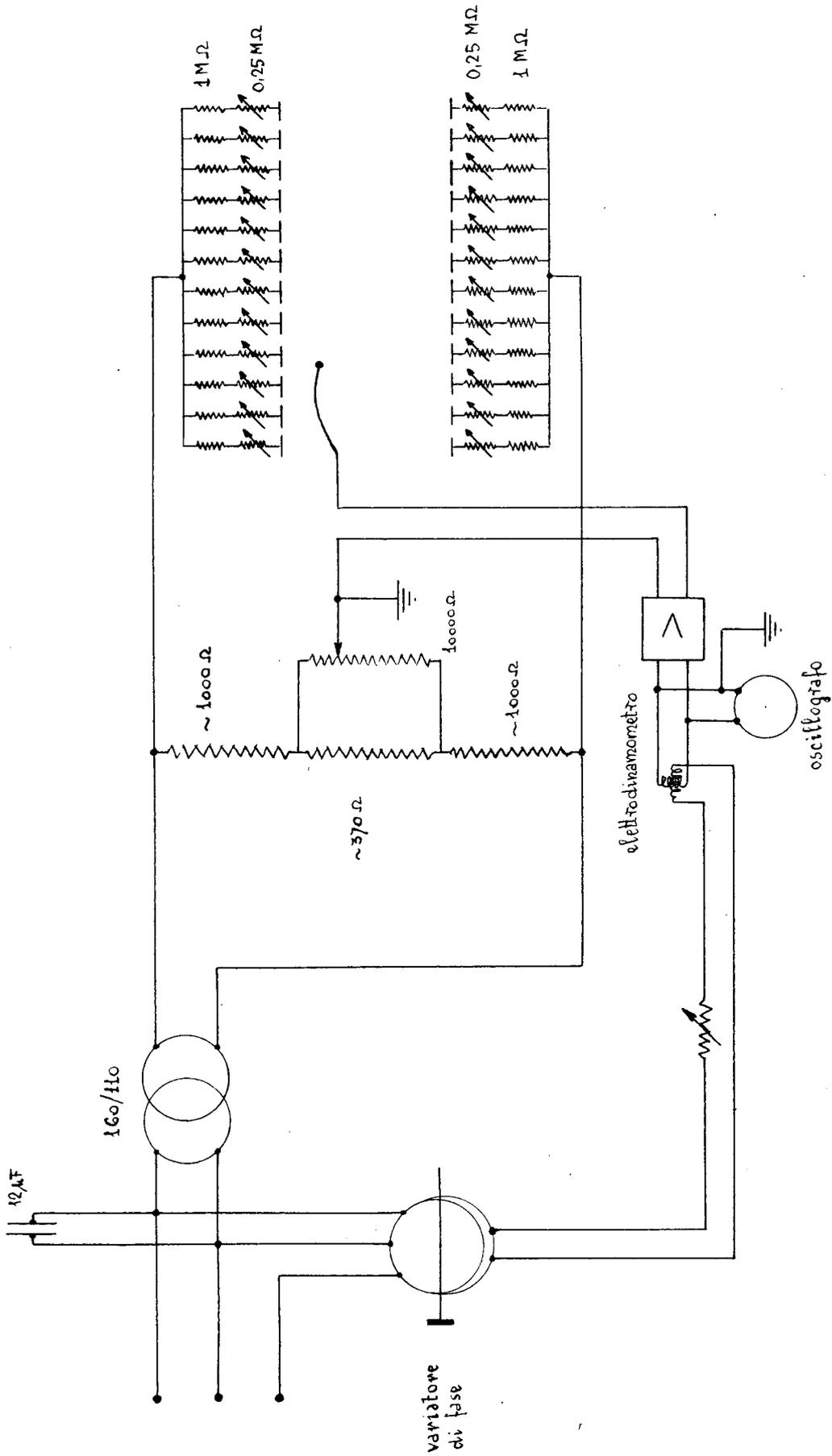
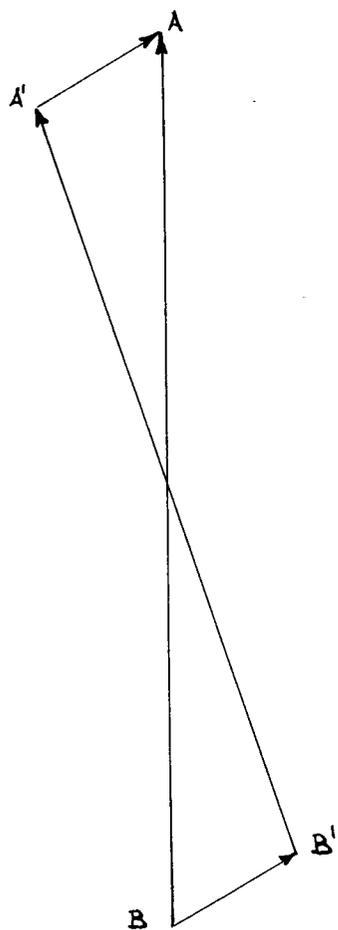


FIG. 3



AB tensione di capi del potenziometro

A'B' tensione applicata all'elettrolita

A'A e B'B c.d.t. per polarizzazione sugli elettrodi

FIG. 4

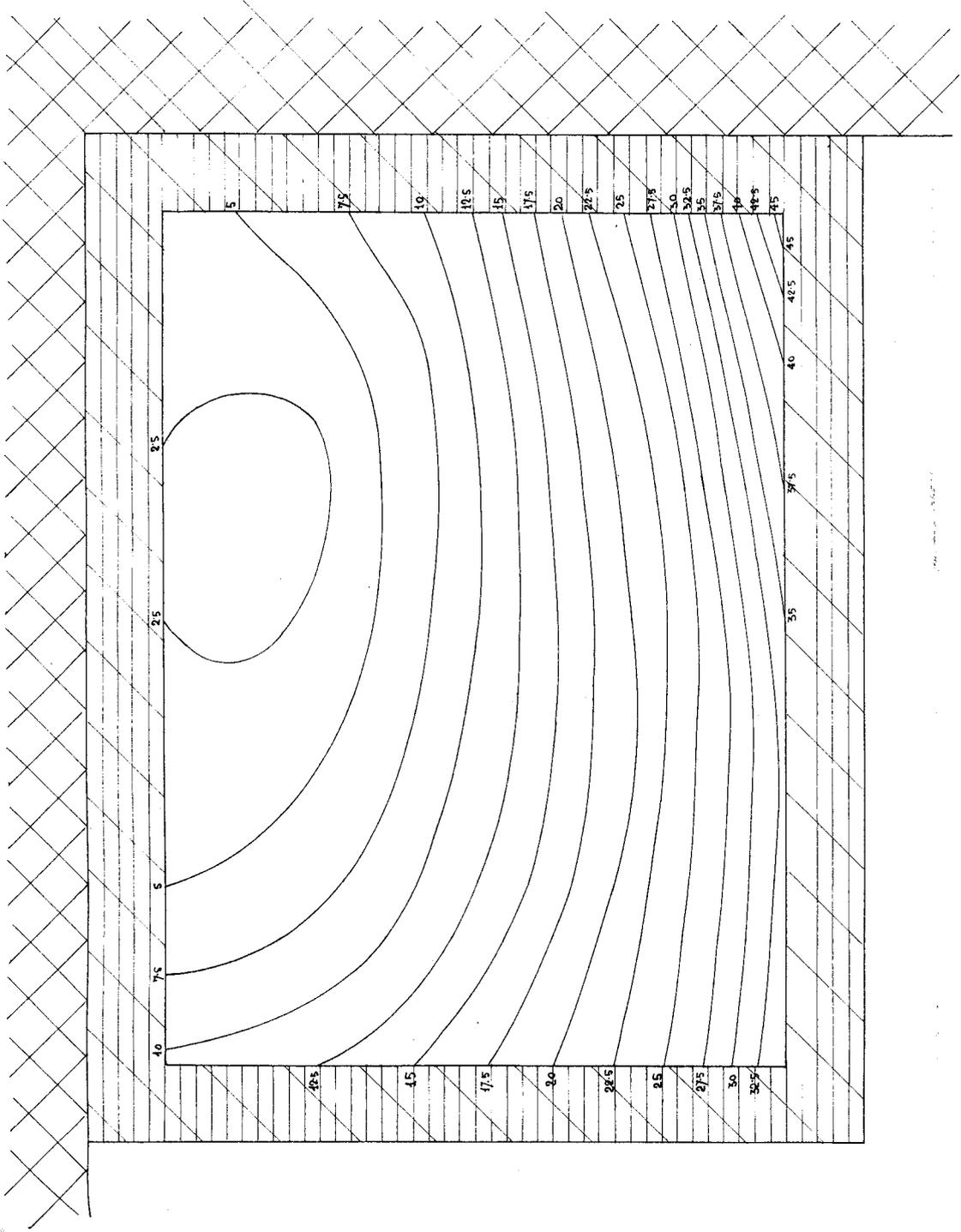


FIG. 5 Bobina interna - modello A

Scala: 1cm = 0,25cm.

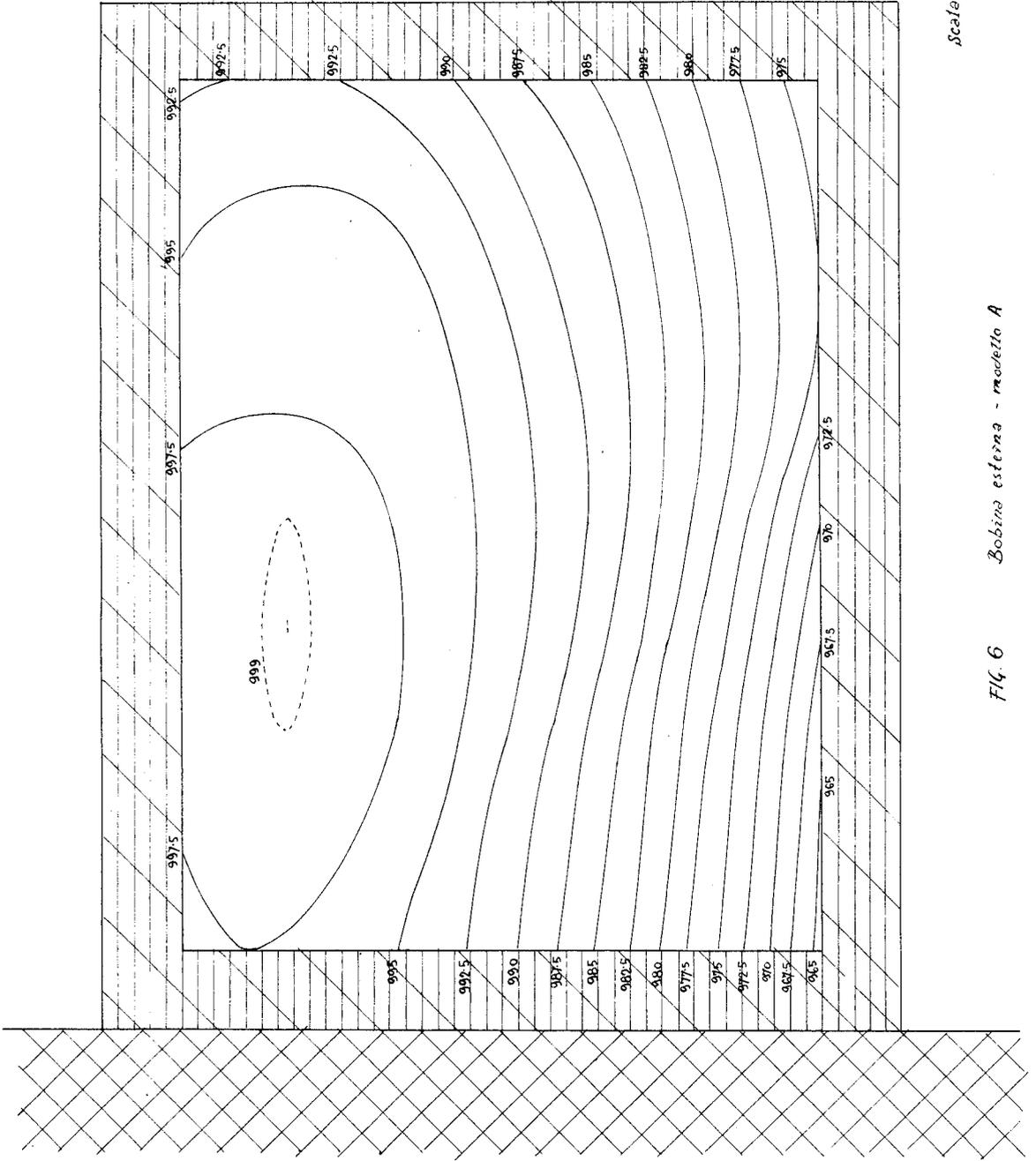
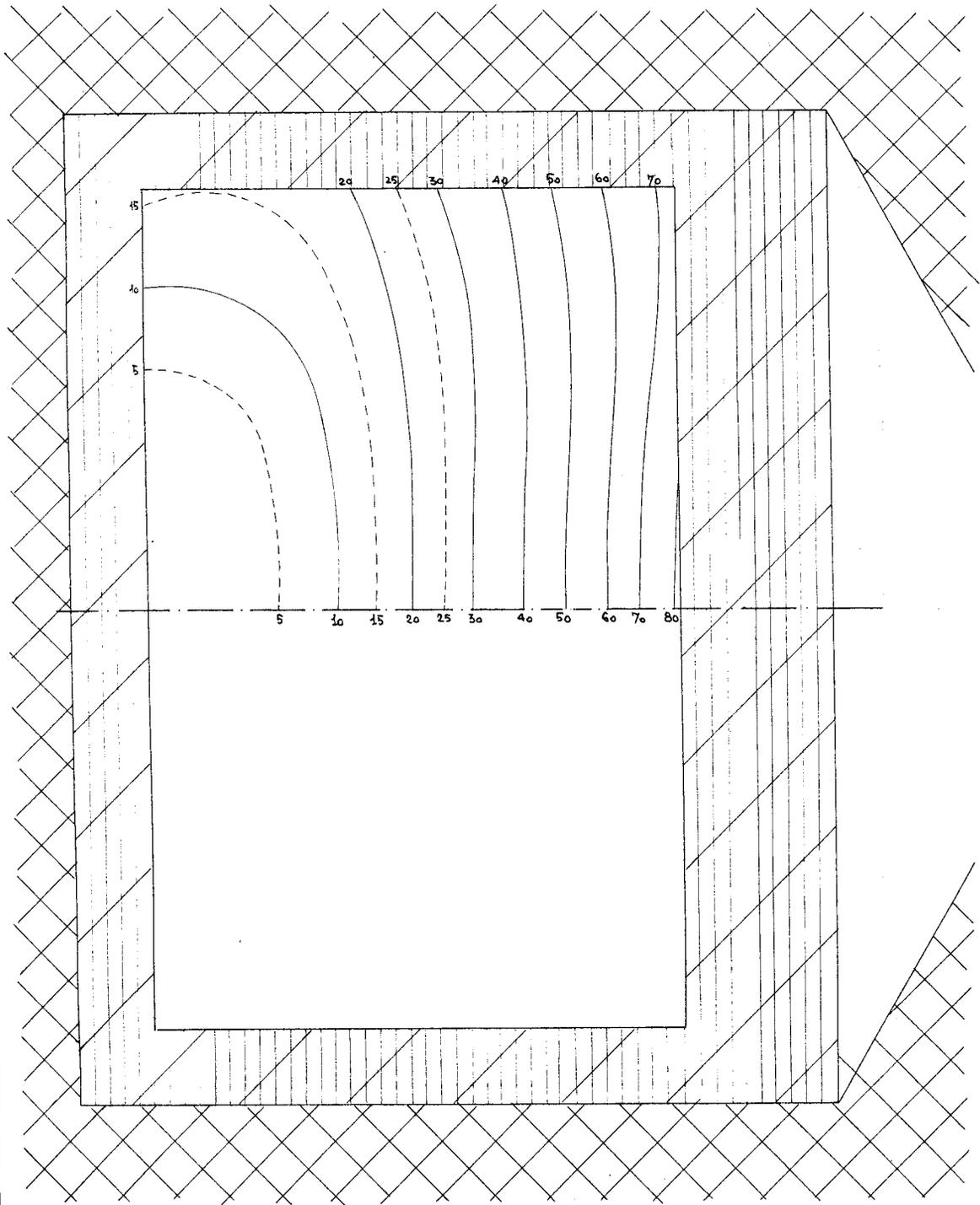


FIG. 6 Bobina esterna - modello A

Scala: 1 cm = 0.25 cm.



Scala: 1cm = 5mm.

FIG. 8 Bobina interna - Modello W₁

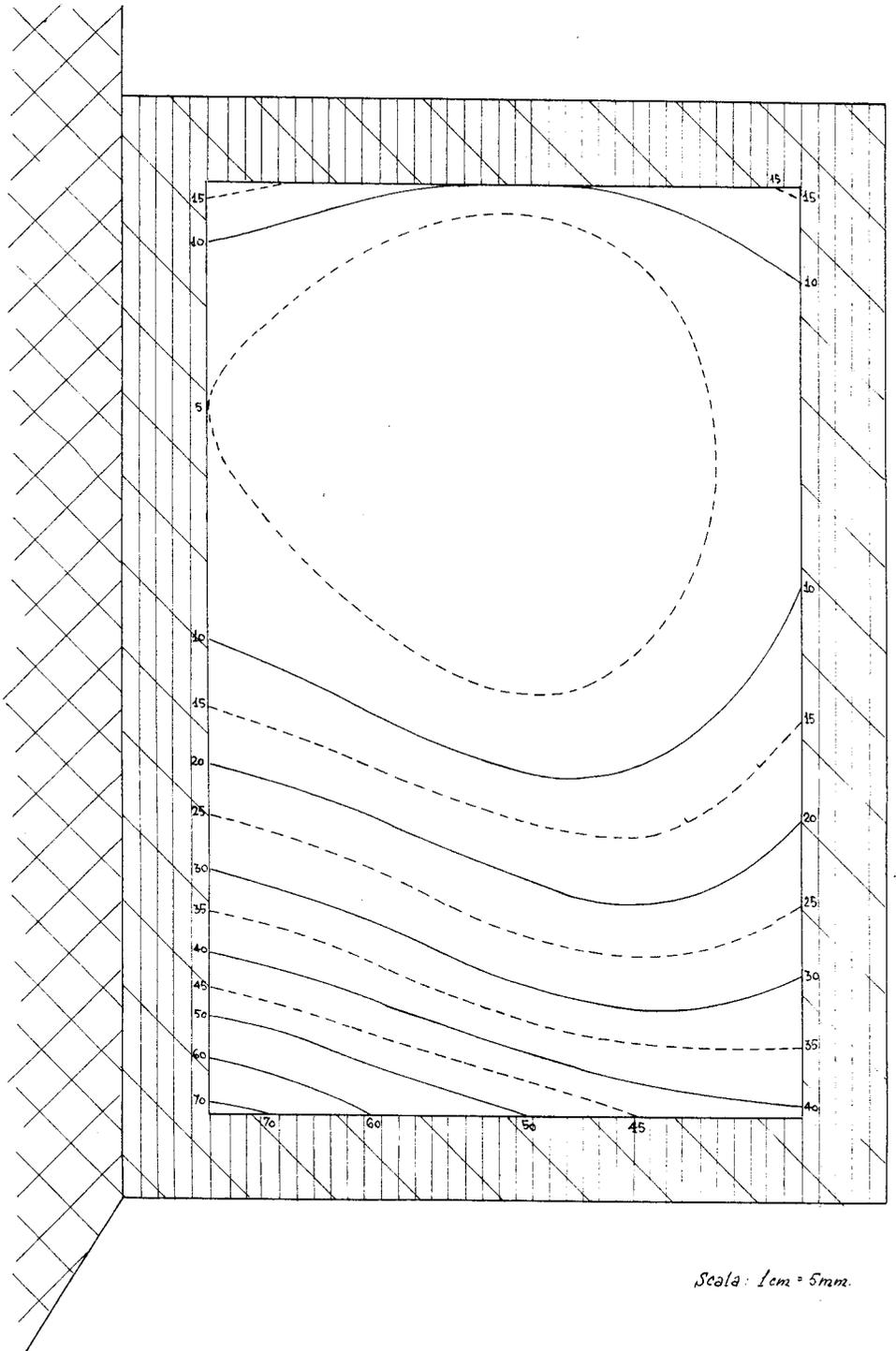


FIG. 9 Bobina esterna - modello W,

