Laboratori Nazionali di Frascati

LNF - 53/5
3.4.1953.

I.F. Quercia: NOTA SULLE CARATTERISTICHE DI MODULAZIONE DELLA RADIO FREQUENZA PER IL SINCROTRONE.-

R/1

RF 2001

NOTA SULLE CARATTERISTICHE DI MODULAZIONE DELLA RADIO FREQUENZA PER IL SINCROTRONE.

3 - Aprile - 1953

La presente nota si riferisce alle seguenti caratteristiche ipotetiche del sincrotrone:

Raggio orbita stabile $V = 200$ cm.
Energia all'iniezione $E_i = 1$ MeV
Lunghezza tratti rettilinei dell'orbita = 60 cm.
Lunghezza totale dell'orbita = 1.496 cm.
Frequenza del magnete f = 20 c/s
larghezza radiale utile della ciambella = 10 cm.
Raggio maggiore utile nelle ciambelle $R_2 = 205$ cm.
Raggio minore utile nelle ciambelle $R_1 = 195$ cm.

=============

1) Calcoliamo il valore del campo B al quale la velocita' v degli elettroni differisce di 10^{-3} dalla velocita' c della luce.
Poniamo quindi:

$$v^* = c\,(1 - 10^{-3}) \text{ quindi:}$$

$$\sqrt{1-v^{*2}/c^2} = 0.0447 \quad \text{per cui:}$$

$$E^*_{tot} = \frac{0.50}{4.47}\cdot 10^2 = 11.2 \text{ MeV} \longrightarrow E^*_{ci} = 10.7 \text{ MeV}$$

corrispondente momento:

$$p^*c = 11.2 \text{ MeV}$$

$$B^* = \frac{p^*c}{300\cdot V} = 186 \text{ Gauss sull'orbita stabile.}$$

Pertanto quando il campo raggiunge il valore B^* puo' essere inserita

-2-

La RF fissa. La frequenza di quest'ultima si calcola immediatamente:

$\nu_{\infty} = \frac{c}{\mathcal{L}} =$ 20.1 Mc/s

2) calcoliamo la frequenza della RF al momento in cui questa inizia l'accelerazione degli elettroni aventi E = 1 MeV..

$$E_{tot} = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$1 - v^2/c^2 = \left(\frac{m_o c^2}{E_{tot}}\right)^2 = \left(\frac{0.5}{1.5}\right)^2 \quad 0{,}111$$

$$v = 0{,}942 \times c$$

$$\nu = \frac{v}{\mathcal{L}} = 0{,}942 \frac{c}{\mathcal{L}} = 0{,}942\, \nu_{\infty} = 18.9 \text{ Mc/s}$$

$\cancel{0{,}89 \quad \frac{v^2}{c^2} = 0{,}889 \quad v = c\sqrt{0{,}98}}$

La variazione relativa di frequenza che deve subire l'oscillatore a RF modulato in frequenza sara':

$$\Delta\nu = \frac{\nu_{\infty} - \nu}{\nu_{\infty}} = 5{,}8 \%$$

3) Calcoliamo l'andamento della frequenza (t) in funzione del tempo. Come si vedra' in 4, il tempo durante il quale deve funzionare la RF modulata in frequenza è una piccola porzione del periodo in cui B passa da O al valore massimo. In questo intervallo potra' consi derarsi che B sia proporzionale a t e che pertanto valga:

$$\nu(t) \propto \nu(B)$$

Calcoliamo allora la funzione $\nu(B)$, si ha:

$$\nu(B) = \frac{v(B)}{\mathcal{L}} \qquad \nu(B) = c\left[1 - \frac{(m_o c^2)^2}{(6.10^4)^2 B^2 + (m_o c^2)^2}\right]^{1/2} = c\left[1 - \frac{1}{1.44\, B^2 \cdot 10^2 + 1}\right]$$

da cui $\nu(B) \cong \nu_{\infty}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{1.44 \times B^2 \times 10^{-2} + 1}\right)$

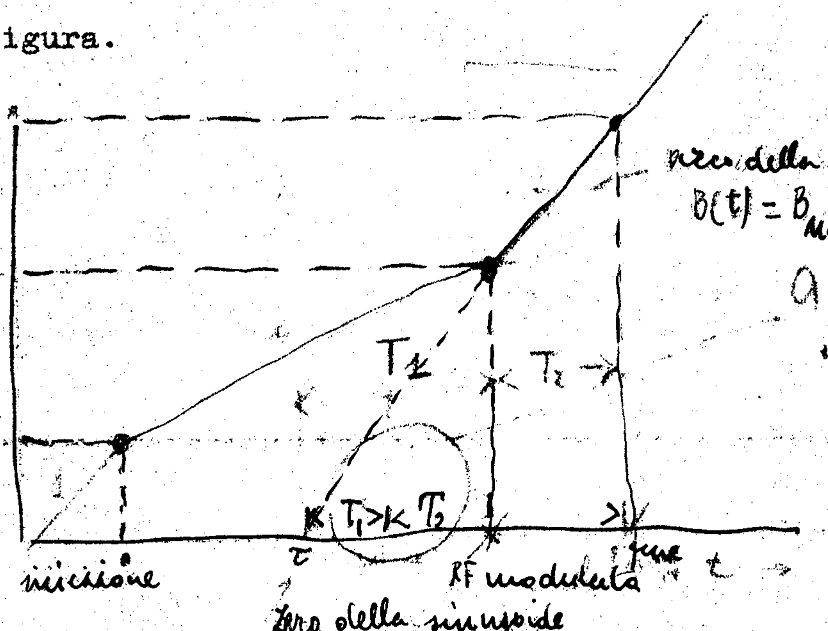
I valori di ν(B) calcolati con questa formula sono dati nella seguen te tabella assieme ai valori di $\Delta\nu(B) = \frac{\nu_{\infty} - \nu_B}{\nu_{\infty}} \times 100$; questi ultimi so no riportati nel diagramma allegato.

$$\cancel{\left(\frac{m_o}{m}\right)^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{eBr}{m_o c}\right)^2} \qquad \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 \qquad \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{eBr}{m_o c}\right)^2}}$$

$$\cancel{v = c\sqrt{1 - \frac{(m_o c)^2}{(er)^2 B^2 + (m_o c)^2}} = c\left[1 - \frac{(m_o c^2)^2}{(erc)^2 B^2 + (m_o c^2)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

23.6	30	40	50	60	70	80	100	120	150
0.9420	0.9640	0.9794	0.9865	0.9906	0.9936	0.9946	0.9965	0.9976	0.9985
5.80	3.60	2.06	1.35	096	0.64	0.54	0.35	0.24	0.15

) Calcoliamo il tempo durante il quale deve variare la frequenza della RF. Supponiamo che il primo tratto del ciclo utile di B sia fatto come nella figura.



Cioè da un primo tratto (1) di forma arbitraria fino alla iniezione. Di un secondo tratto (2) di forma da stabilirsi fino all'inizio dell'accelerazione degli elettroni. Di un terzo tratto (3) formato da un arco di sinusoide.

$$B\,(t) = B_{max} \sin\omega\,(t-\tau)$$

per ora è incognito.

Si vuole calcolare il periodo di tempo T_2 durante il quale deve funzionare la RF modulata in frequenza.

Facciamo le seguenti ipotesi:

Gli elettroni vengono iniettati nell'orbita piu' esterna consentita dalle dimensioni della ciambella, cioè in R_2 .

Il campo B cresce sino al valore B_1 per il quale le orbite degli elettroni dimengono tangenti al raggio interno della ciambella con legge da stabilire.

Quando il campo raggiunge il valore B_1 inizia l'accelerazione degli elettroni mediante la RF modulata in frequenza. Dal valore di B_1 in poi il campo cresce con legge sinusoidale.

Il campo varia con con esponente = 0.6.

Si calcola il valore del campo B^1_2 sull'orbita di iniezione (R_2)

$$B^1_2 = \frac{1.41 \times 10^6}{6.15 \times 10^4} = 22,9 \text{ Gauss}$$

$$B = \frac{\sqrt{(mc^2)^2 - (m_0c^2)^2}}{ecr} = \frac{\sqrt{(1,5)^2 - 0,25}}{300 \times r}$$

il campo corrispondente su r_0 è:

$$B_2\,(r_0) = 22,9 \left(\frac{205}{200}\right)^{0.6} = 23.2 \text{ Gauss}$$

Si calcola il valore del campo B^1_1 sull'orbita di tangenza interna (R_1)

$$B^1_1 = \frac{1.41 \cdot 10^6}{5.85 \cdot 10^4} = 24.1 \text{ Gauss}$$

ed il campo corrispondente su r_0:

$$B_1(r_0) = 24.1 \left(\frac{195}{200}\right)^{0.6} = 23.7 \text{ Gauss}$$

Si calcola l'intervallo T_1 (vedi fig.)

$$T_1 = \frac{B_1}{B_{max} \cdot 2\pi f} = \frac{23.7}{10^4 \times 6.28 \times 20} = 18.9\ \mu s$$

Si calcola l'intervallo

$$T_1 + T_2 \cong \frac{B^*}{10^4 \times 6.28 \times 20} = 148.3\ \mu s$$

Si ricava:

$$T_2 = 148.3 - 18.9 = 129.4\ \mu s$$

Nota: tale tempo puo', in realta', risultare piu' lungo di un fattore 3÷4 per effetti del rallentamento iniziale di B

5) Durante il suo funzionamento non è necessario modulare in ampiezza la RF modulata in frequenza.