



**LNF-04/10 (P)**  
**6 Maggio 2004**

**PROGETTO DI UNA SOSPENSIONE A BASSA FREQUENZA DI RISONANZA  
PER MASSE CILINDRICHE**

Lina Quintieri <sup>1</sup> Massimo Bassan<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *INFN Laboratori Nazionali di Frascati, CP 13, I-00044 Frascati, Italy*

<sup>2</sup> *Università di Roma Tor Vergata e INFN, Roma II, Italia,  
via della Vasca Navale 84, 00146 Roma, Italy*

**Abstract**

Lo studio di risonanze meccaniche di particolari strutture ha sempre rivestito una grande importanza negli esperimenti di ricerca di onde gravitazionali: basti pensare alla rilevanza del trasduttore risonante nelle antenne gravitazionali e a quella dei filtri meccanici per l'isolamento sismico di qualunque apparato di rivelazione, sia risonante che interferometrico. In questa nota descriveremo lo studio di un supporto, con geometria particolare, che può essere definita a "trave ripiegata", finalizzato a sorreggere masse cilindriche. Uno degli obiettivi del lavoro descritto in questa nota consiste nel valutare se questa struttura, già utilizzata in passato per risonatori di bassa frequenza, possa essere impiegata proficuamente per la realizzazione di uno stadio di sospensione meccanica. I filtri di attenuazione delle vibrazioni sono invariabilmente concepiti sul principio di funzionamento del filtro passa-basso, dove un risonatore meccanico fornisce 6 dB/ottava di attenuazione per frequenze superiori alla propria risonanza. È quindi ovvio cercare di produrre stadi di attenuazione con la più bassa frequenza di risonanza possibile. Poiché sospensioni di bassa frequenza per grandi masse richiedono risonatori di grandi dimensioni, è parso naturale affrontare inizialmente il problema con un modello in scala: per restare nel campo di una progettazione concreta, abbiamo quindi adottato come obiettivo la sospensione di un piccolo cilindro sostenuto per la circonferenza mediana. Applicazione pratica immediata di questo schema è la sospensione di piccoli specchi per i prototipi di interferometri criogenici, dove lo specchio deve essere isolato meccanicamente, ma termicamente ben ancorato al punto freddo dell'apparato.

## Contents

<b>1</b>	<b>La progettazione meccanica del risonatore a bassa frequenza</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Breve descrizione del supporto a travi ripiegate</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modello analitico: calcolo statico</b>	<b>5</b>
3.1	Calcolo della costante elastica equivalente . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Stima della frequenza del modo fondamentale: calcolo dinamico</b>	<b>9</b>
4.1	Metodo della linea elastica: . . . . .	9
4.2	Calcolo della frequenza fondamentale con il metodo di Rayleigh-Ritz . . .	12
4.2.1	Calcolo dell'energia cinetica . . . . .	13
4.2.2	Calcolo dell'energia potenziale di deformazione . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Confronto fra la soluzione “trave ripiegata” e “trave semplice”</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Modello semplificato preliminare con Ansys</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Dimensionamento del supporto a 3 lamelle</b>	<b>17</b>
7.1	Procedura di dimensionamento applicata al caso del prototipo di Al5056 .	17
7.1.1	Verifica a resistenza . . . . .	20
7.1.2	Verifica ad instabilità a carico di punta . . . . .	21
7.1.3	Scelta dello spessore delle lamelle . . . . .	23
7.2	Analisi dello stato di sollecitazione per il prototipo di Al5056 . . . . .	23
<b>8</b>	<b>Modello tridimensionale agli elementi finiti</b>	<b>25</b>
8.1	Analisi dei risultati . . . . .	28
8.1.1	Supporto in CuAl(6%) . . . . .	31
8.1.2	Supporto in Titanio . . . . .	32
<b>9</b>	<b>Studio dettagliato della configurazione scelta nel caso di Al5056</b>	<b>33</b>
9.1	Analisi statica . . . . .	33
9.2	Analisi di buckling lineare . . . . .	33
9.3	Analisi modale . . . . .	35
9.4	Analisi armonica . . . . .	36
<b>10</b>	<b>Estrapolazione dei risultati dal prototipo al supporto effettivo</b>	<b>38</b>
<b>11</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>40</b>

## **1 La progettazione meccanica del risonatore a bassa frequenza**

Con la presente nota si vuole descrivere come è stato sviluppato il progetto di un supporto meccanico per un'assegnata massa di forma cilindrica, rispondente alla specifica che la frequenza fondamentale dell'intero sistema supporto-massa stia intorno a 10 Hz e che il supporto possa essere impiegato come veicolo di raffreddamento della massa stessa fino a temperature criogeniche ( $\sim 4K$ ). Nel caso della sospensione di antenne cilindriche ultra-criogeniche per onde gravitazionali, oltre all'elevato isolamento meccanico è necessario fornire un cammino di basse impedenze termiche per raffreddare il risonatore. Questo requisito impone un forte contatto meccanico, per ridurre l'impedenza termica d'interfaccia. Nelle antenne gravitazionali, quali Nautilus ed Explorer per esempio, questa sospensione è stata realizzata con un cavo di rame itorno alla sezione baricentrale: soluzione questa non priva di rischi in quanto sono possibili movimenti relativi barra-cavo con conseguente introduzione di un'importante sorgente di rumore meccanico.

Un vincolo stringente per la progettazione è generalmente imposto dagli ingombri massimi permessi in relazione al sito di allocazione dell'intero apparato (criostato). Prendendo spunto dal disegno di un gradiometro realizzato a Stanford [2] si è presa in esame la soluzione della "trave ripiegata" che (come verrà mostrato più in dettaglio nella presente nota) meglio di altre consente di ottimizzare il rapporto lunghezza/spessore della parte a minor rigidità, nell'ottica di ottenere frequenze di risonanza più basse possibili. Nella prima fase del lavoro è stato sviluppato un modello analitico del supporto per effettuare l'analisi modale della struttura. I risultati del calcolo analitico sono stati confrontati con le misure effettuate per il gradiometro di Stanford, mostrando un ottimo accordo fra valori predetti e misurati. Il processo di dimensionamento è stato condotto di modo che i parametri critici (spessore e lunghezza delle parti più flessibili) permettessero di ottenere una frequenza di risonanza più bassa possibile compatibilmente con i criteri di resistenza strutturale e di instabilità a buckling. La verifica dello stato di tensione e deformazione atteso nonché il processo di ottimizzazione dei parametri per minimizzare la frequenza fondamentale sono stati condotti avvalendosi di un modello tridimensionale agli elementi finiti costruito con ANSYS. Alla fine del lavoro è stata individuata la soluzione in termini di scelta dei parametri geometrici e del materiale che meglio soddisfacesse le specifiche richieste.

## **2 Breve descrizione del supporto a travi ripiegate**

In figura 1 è riportata la vista assonometrica del supporto che è stato progettato a termine del lavoro descritto in questa nota. Si tratta di un supporto a 3 molle ripiegate disposte a

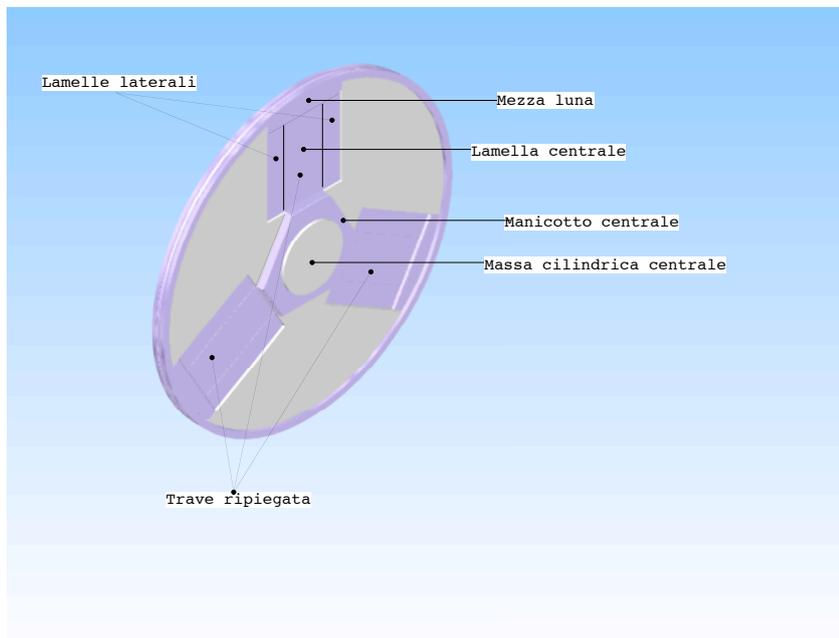


Figure 1: *Vista tridimensionale del supporto*

120°. La trave ripiegata è l'elemento chiave della struttura, poichè da questa dipendono le caratteristiche dinamiche del supporto stesso. Ciascuna trave ripiegata è costituita di 3 lamelle (indicate in figura come due laterali e una centrale) raccordate all'estremità libera da un elemento di spessore leggermente superiore rispetto a quello delle lamelle, che, vista la forma, verrà identificato come "mezza-luna". Le lamelle costituiscono la parte flessibile essendo più sottili del resto della struttura che, pertanto, verrà definita, in contrapposizione a quelle, come parte fissa del supporto.

Le lamelle laterali di ciascuna trave ripiegata sono incastrate alla parte fissa del supporto, mentre la lamella centrale è attaccata ad un manicotto (un esagono irregolare) che costituisce la sede della massa cilindrica da sorreggere. La separazione fra le tre lamelle e fra queste ed il supporto fisso è realizzata attraverso sottili tagli, ottenibili con tecniche di lavorazione speciali, ad esempio per elettroerosione. Analogamente, ogni "mezza-luna" è separata dalla parte fissa del supporto per mezzo di tagli circolari. L'esagono centrale è connesso alla struttura solo tramite le lamelle centrali di ciascuna trave ripiegata, mentre i tagli realizzati lungo i tre lati attigui a quelli in comune con le lamelle separano il manicotto stesso dalla struttura fissa.

### 3 Modello analitico: calcolo statico

Nella figura 2 sono riportate due viste (frontale ed assonometrica) dello schema semplificato di un supporto a due travi ripiegate, a cui si farà riferimento per ricavare la costante elastica equivalente (calcolo statico) e successivamente per ottenere l'espressione analitica delle frequenze del modo fondamentale in funzione dei parametri geometrici e delle proprietà elastiche del materiale (calcolo dinamico). Malgrado la schematizzazione analitica del problema richieda necessariamente l'assunzione di ipotesi semplificatrici, la conoscenza dei parametri fondamentali con cui si può esplicitare sia la costante elastica equivalente che le frequenze di risonanza è di fondamentale aiuto nella fase preliminare di dimensionamento della struttura.

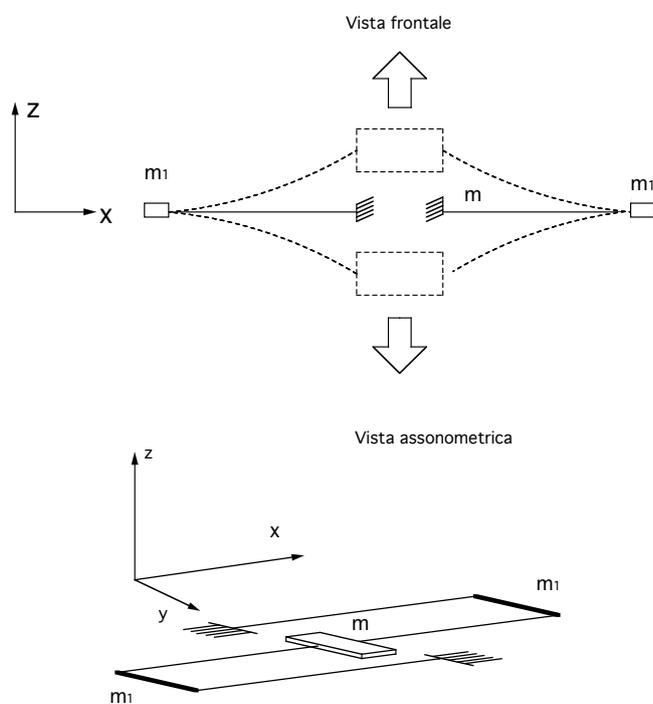


Figure 2: Schema semplificato di un supporto con 2 travi ripiegate in parallelo.

### 3.1 Calcolo della costante elastica equivalente

Il sistema a travi ripiegate mostrato nella figura 2 lavora essenzialmente a flessione nella direzione ortogonale al suo piano di giacenza, che per semplicità indicheremo d'ora in avanti come piano orizzontale. Per conoscere la massima deformazione nella direzione verticale si applica un carico unitario in corrispondenza della massa centrale nella direzione in esame. Il rapporto fra la deformazione e il carico ci fornirà una prima stima della costante elastica delle travi. Poichè il sistema è simmetrico sia per la geometria che per le condizioni di vincolo e di carico si può studiare solo metà struttura, come è mostrato in figura 3.

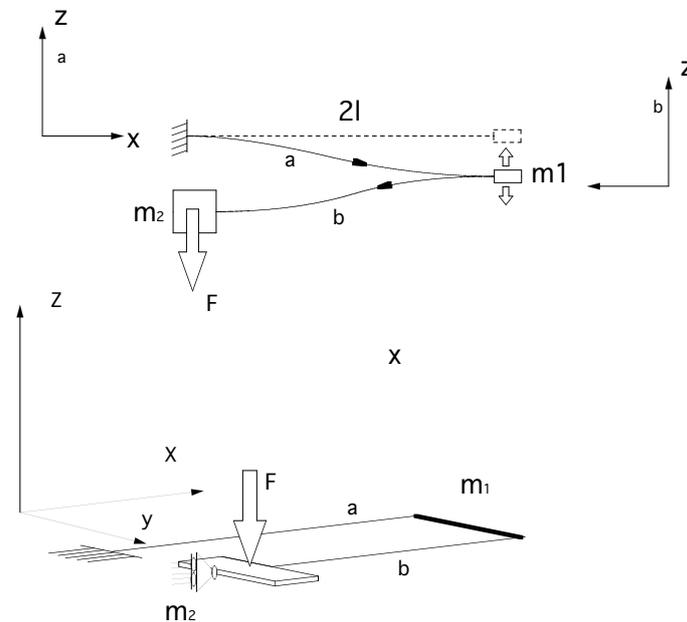


Figure 3: *Schema semplificato di mezza struttura.*

Non essendoci carichi distribuiti, l'equazione della linea elastica si riduce alla seguente espressione:

$$EJ\eta^{IV} = 0 \quad (1)$$

dove  $\eta$  indica la deformata in direzione perpendicolare,  $E$  è il modulo di Young e  $J$  è il momento d'inerzia della sezione trasversale della trave rispetto all'asse neutro (asse  $y$  nella

figura 3). Divideremo la soluzione dell'equazione della linea elastica, valutata per metà struttura, in due zone, 'a' e 'b' rispettivamente, introducendo due sistemi di riferimento locali (sistema 'a' e 'b' in figura 3). I due sistemi di riferimento introdotti equivalgono a fissare un unico verso di percorrenza della linea elastica della trave come riportato su ciascuno dei due tratti 'a' e 'b' nella stessa figura. Le condizioni al contorno per il tratto 'a' sono rispettivamente: lo spostamento e la rotazione impedita all'incastro, il taglio all'incastro pari alla reazione vincolare "F" e la condizione di rotazione impedita per la massa  $m_1$

$$\begin{aligned}\eta_a(0) &= 0 \\ \eta'_a(0) &= 0 \\ \eta''_a(0) &= \frac{-F}{EJ_a} \\ \eta'_a(2l) &= 0\end{aligned}$$

Le condizioni al contorno per il tratto 'b' sono rispettivamente: la rotazione impedita per la massa risonante centrale  $m_2$  (per vincoli di simmetria la massa  $m_2$  può solo traslare in direzione verticale), la condizione di flesso orizzontale in corrispondenza della massa  $m_1$ , la condizione di taglio per effetto della forza applicata su  $m_2$  ed infine la condizione di continuità della linea elastica fra il tratto 'a' e il tratto 'b' :

$$\begin{aligned}\eta'_b(0) &= 0 \\ \eta'_b(2l) &= 0 \\ \eta'''_b(0) &= \frac{F}{EJ_b} \\ \eta_b(2l) &= \eta_a(2l)\end{aligned}$$

La soluzione generale dell'equazione 1 è un polinomio di terzo grado in x:

$$\eta(x)_{a,b} = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (2)$$

Applicando le rispettive condizioni al contorno a ciascuno dei due tratti della trave si ottiene:

$$\eta_a(x) = \frac{F}{2EJ_a} \left( -\frac{x^3}{3} + lx^2 \right) \quad (3)$$

$$\eta_b(x) = \frac{F}{2EJ_b} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{l}{2}x^2 + \frac{4}{3}l^3 \right) \quad (4)$$

Si osservi che  $J_a = J_b = J$  essendo  $J_a = 2 \cdot \frac{1}{12}(wh^3)$  e  $J_b = \frac{1}{12}(2 \cdot wh^3)$ , dove w ed h sono rispettivamente la larghezza e lo spessore della sezione trasversale della trave, come illustrato in figura 4 .

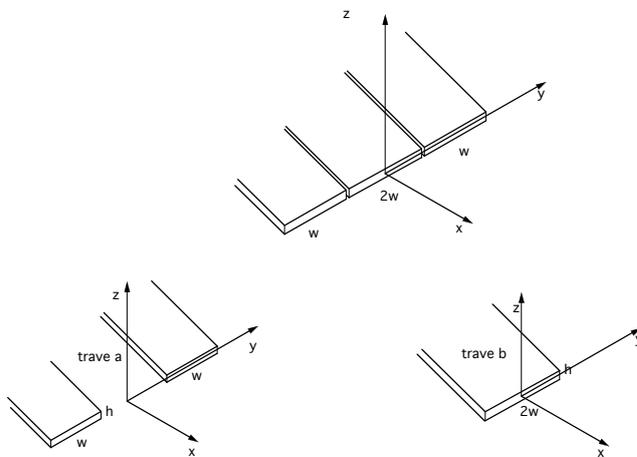


Figure 4: Sezioni trasversali dei tratti 'a' e 'b'.

È facile verificare che  $\eta_b(0) = 2 \cdot \eta_a(2l)$  e che la costante elastica equivalente di mezza struttura (ossia della singola trave ripiegata) risulta essere:

$$k_{eq}^{(1/2)} = \frac{F}{\eta_b(0)} = \frac{Ewh^3}{8l^3} \quad (5)$$

Poichè si tratta di due molle in parallelo, ciascuna di costante elastica  $k_{eq}^{(1/2)}$ , l'intera struttura di figura 2, risulta avere la seguente costante elastica :

$$k_{eq} = \frac{Ewh^3}{4l^3} \quad (6)$$

Il gradiometro in niobio costruito a Stanford e mostrato nella figura seguente è un supporto a 2 travi ripiegate con le seguenti dimensioni caratteristiche:  $w = 1 \cdot 10^{-3}m$ ,  $2l = 23.5 \cdot 10^{-3}m$ ,  $h = 0.71 \cdot 10^{-3}m$ . La costante elastica di questo supporto, stimata in base alla formula 6, risulta pari a 5791.5 N/m.

Uno studio semplificato del gradiometro mostrato in 5, realizzato con il codice agli elementi finiti Ansys, di cui si riporta in appendice A il file di input, ha permesso di stimare il valore della costante elastica di questa configurazione pari a 5813.9N/m, ritrovando a meno del 4% il risultato analitico.

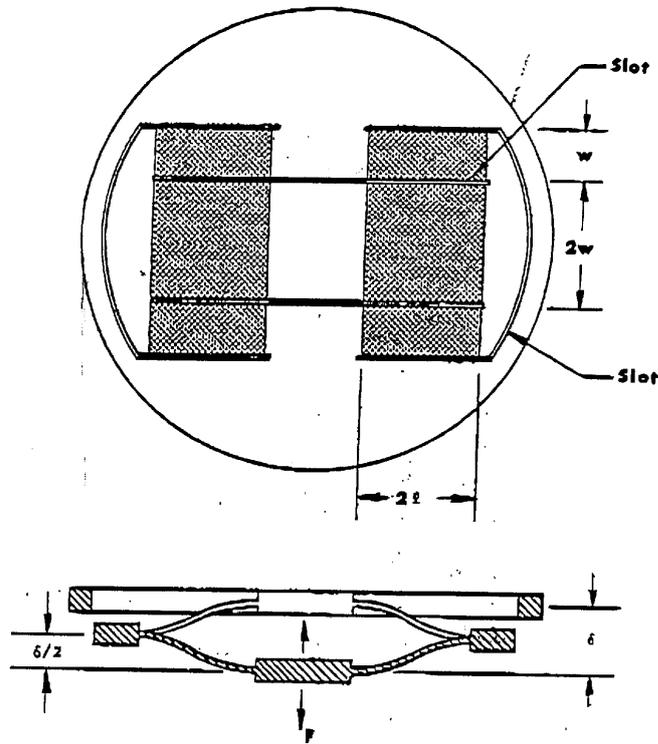


Figure 5: *Gradiometro di Stanford*

#### 4 Stima della frequenza del modo fondamentale: calcolo dinamico

##### 4.1 Metodo della linea elastica:

L'equazione della linea elastica della struttura in esame nel caso dinamico e per spostamenti  $\eta(x)$  in direzione verticale, corrispondenti al moto flessionale delle lamelle nel piano z-x, si può esplicitare con la seguente equazione differenziale alle derivate parziali:

$$EJ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + (\rho A) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

dove  $\rho$  indica la densità della trave ed A l'area della sezione trasversale.

Nel primo approccio di calcolo, si trascurerà la massa della trave (quindi l'energia cinetica delle lamelle flettenti che costituiscono la parte elastica della struttura) rispetto alle masse concentrate  $m_1$  ed  $m_2$  (e quindi al contributo cinetico di quest'ultime). In questo caso, dunque, le condizioni al contorno per il tratto 'a' nel caso dinamico sono le seguenti:

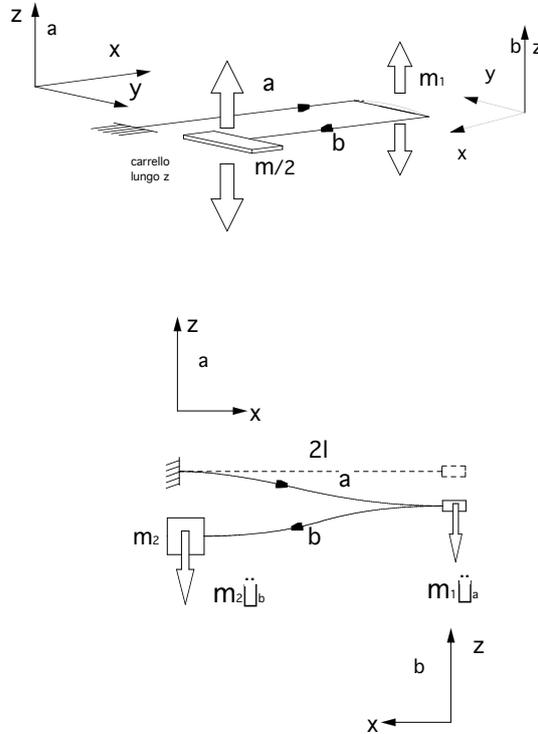


Figure 6: *Calcolo dinamico*

$$\begin{aligned}
 \eta_a(0) &= 0 \\
 \eta'_a(0) &= 0 \\
 \eta'_a(2l) &= 0 \\
 \eta'''_a(0) &= \frac{m_1 \ddot{\eta}_a(2l) + m_2 \ddot{\eta}_b(0)}{EJ}
 \end{aligned}$$

dove  $\ddot{\eta}$  indica la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo. L'ultima condizione ci dice che il taglio in  $x=0$  (sistema di riferimento solidale al tratto 'a') è uguale ed opposto alla somma delle forze di inerzia delle masse concentrate:

$$F_{in} = \frac{1}{EJ} [-m_1 \ddot{\eta}_a(2l) - m_2 \ddot{\eta}_b(0)]$$

Analogamente per il tratto ‘b’ si può scrivere, con riferimento al sistema solidale all’osservatore che percorre la trave nel verso indicato (sistema ‘b’):

$$\begin{aligned}\eta'_b(0) &= 0 \\ \eta'_b(2l) &= 0 \\ \eta_b(2l) &= \eta_a(2l) \\ \eta'''_b(0) &= \frac{m_2 \ddot{\eta}_a(0)}{EJ}\end{aligned}$$

Anche in questo caso l’ultima condizione deriva dal legame fra la derivata spaziale terza dello spostamento della linea elastica e la corrispondente caratteristica della sollecitazione (T). Il taglio per definizione è uguale ed opposto ai carichi esterni applicati, che in questo specifico caso coincidono con la forza d’inerzia della massa  $m_2$ . Rifacendoci alla notazione matriciale, le incognite di interesse, espresse in termini vettoriali, (si ricorda che si vogliono ottenere le frequenze dei modi propri di vibrare e le relative deformate) sono:

$$\begin{aligned}\eta &= \begin{bmatrix} \eta_a(2l) \\ \eta_b(0) \end{bmatrix} \\ \ddot{\eta} &= \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_a(2l) \\ \ddot{\eta}_b(0) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La soluzione dell’equazione 7 nelle ipotesi assunte è così esprimibile:

$$\eta(x)_{a,b} = a_{a,b}(t)x^3 + b_{a,b}(t)x^2 + c_{a,b}(t)x + d_{a,b}(t) \quad (8)$$

dove i coefficienti del polinomio di terzo grado in x sono funzioni dipendenti dal tempo. Sostituendo le condizioni al contorno per i rispettivi tratti ‘a’ e ‘b’ si arriva al seguente sistema (avendo sfruttato anche la condizione  $\eta_a(2l) = \eta_b(2l)$ ):

$$\begin{bmatrix} \eta_b(0) \\ \eta_b(2l) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \frac{m_2 l^3}{EJ} & -\frac{2}{3} \frac{m_1 l^3}{EJ} \\ -\frac{2}{3} \frac{m_2 l^3}{EJ} & -\frac{2}{3} \frac{m_1 l^3}{EJ} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_b(0) \\ \ddot{\eta}_b(2l) \end{bmatrix}$$

Le soluzioni del sistema a cui si è interessati, nel cercare i modi propri di vibrare della struttura, sono esprimibili, facendo ricorso al metodo di separazione delle variabili, nel seguente modo:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \cdot e^{i\lambda t} \quad (9)$$

dove  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  è la deformata spaziale del modo proprio, mentre la parte reale di  $e^{i\lambda t}$  fornisce la legge armonica dell’andamento temporale del modo (vedi definizione sul LOVE [3]). Sostituendo l’espressione di  $\eta$  nel sistema precedente si ottiene:

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \frac{m_2 l^3}{EJ} - \lambda^2 & -\frac{2}{3} \frac{m_1 l^3}{EJ} \\ -\frac{2}{3} \frac{m_2 l^3}{EJ} & -\frac{2}{3} \frac{m_1 l^3}{EJ} - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \eta_b(0) \\ \eta_b(2l) \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Affinchè il sistema non ammetta come unica soluzione quella banale del vettore nullo, deve essere verificata, con ovvio significato dei simboli, la condizione seguente:

$$\left\| \begin{array}{cc} -\frac{4}{3} \frac{m_2 l^3}{EJ} - \lambda^2 & -\frac{2}{3} \frac{m_1 l^3}{EJ} \\ -\frac{2}{3} \frac{m_2 l^3}{EJ} & -\frac{2}{3} \frac{m_1 l^3}{EJ} - \lambda^2 \end{array} \right\| = 0$$

Risolvendo rispetto a  $\lambda$  la condizione di determinante nullo si ricavano le seguenti due soluzioni reali:

$$\lambda_{1,2} = \left[ \frac{3EJ}{4m_1 m_2 l^3} \left( 2m_2 + m_1 \pm \sqrt{(4m_2^2 + m_1^2)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

La minore di queste frequenze corrisponde a quella del modo fondamentale. Questa relazione ci consente di comprendere quali sono i parametri geometrici e le caratteristiche del materiale su cui agire per modificare il valore della frequenza fondamentale. Nel caso di  $m_1 \ll m_2$  l'espressione si riduce a:

$$\lambda \simeq \left[ \frac{3EJ}{4m_2 l^3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

Per il gradiometro di Stanford ( $m_1 = 8.0 \cdot 10^{-3} kg$ ,  $m_2 = 0.2 kg$ ), usando la formula 11, si ottiene per la frequenza fondamentale il seguente valore:  $f_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot 378.4 \simeq 60 Hz$ . La frequenza misurata del primo modo proprio di vibrare è 59 Hz mostrando che il metodo analitico, benchè semplificato, risulta essere in ottimo accordo con i dati sperimentali.

## 4.2 Calcolo della frequenza fondamentale con il metodo di Rayleigh-Ritz

Il metodo energetico di Rayleigh-Ritz consente di calcolare agevolmente la frequenza del primo modo proprio di vibrare e il risultato è tanto più preciso quanto più esattamente la deformata del modo ipotizzata si avvicina alla deformata vera. Si fa l'ipotesi che il moto avvenga senza dissipazioni cosicchè risulti verificata in ogni periodo la conservazione dell'energia:

$$E_{tot} = E_c + U_p = const \quad (12)$$

dove  $E_{tot} = E_c$  quando la deformata è nulla ( $\eta = 0$ ) e  $E_{tot} = U_p$  quando la velocità si annulla ( $\dot{\eta} = 0$ , inversione del moto).

#### 4.2.1 Calcolo dell'energia cinetica

L'energia cinetica dell'intera struttura si compone del contributo dovuto alla trave continua e di quello dovuto alle masse concentrate.

- trave continua:  $E_c^{(t)} = \frac{1}{2} \rho A \int_0^{2l} (\dot{\eta})^2 dx$
- massa  $m_1$ :  $E_c^{(1)} = \frac{\lambda^2}{2} m_1 \eta_a^2(2l)$
- massa  $m_2$ :  $E_c^{(2)} = \frac{\lambda^2}{2} m_2 \eta_b^2(0)$

#### 4.2.2 Calcolo dell'energia potenziale di deformazione

Come già detto la deformata dei modi propri di vibrare è esprimibile come prodotto di una funzione delle sole coordinate spaziali e di una funzione armonica del tempo:

$$\eta(\underline{x}, t) = \eta(\underline{x}) \cdot e^{i\lambda t} \quad (13)$$

Avvalendosi della simmetria della deformata del modo fondamentale si prende in considerazione solo metà struttura che si suddivide a sua volta nei tratti a e b mostrati nella figura 6. La deformata spaziale  $\eta(x)$  per i due tratti è esprimibile con le equazioni seguenti:

- nel tratto "a":  $\eta_a(x) = \frac{F}{2EJ_a} \left( -\frac{1}{3}x^3 + lx^2 \right)$
- nel tratto "b":  $\eta_b(x) = \frac{F}{2EJ_b} \left( \frac{1}{6}x^3 - \frac{l}{2}x^2 + \frac{4}{3}l^3 \right)$

come già calcolato nelle equazioni 3 Se si trascurano le deformazioni dovute a taglio e a sforzo normale rispetto a quelle dovute al momento flettente, si può esprimere l'energia potenziale elastica nel seguente modo:

$$U_p = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \left[ \frac{M_a^2}{EJ_a} + \frac{M_b^2}{EJ_b} \right] dx \quad (14)$$

Ricordando che  $J_a = J_b$  e che il momento flettente e la derivata seconda spaziale sono legate dalla seguente relazione:

$$\eta''(x, t) = -\frac{M}{EJ} \quad (15)$$

l'energia potenziale si può esplicitare in funzione di  $\eta''$  nel seguente modo:

$$U_p = \frac{EJ}{2} \int_0^{2l} \left[ (\eta_a'')^2 + (\eta_b'')^2 \right] dx \quad (16)$$

Uguagliando l'energia potenziale a quella elastica si ottiene l'equazione da cui ricavare la frequenza caratteristica del primo modo proprio:

$$\frac{EJ}{2} \int_0^{2l} [(\eta_a'')^2 + (\eta_b'')^2] dx = \frac{\lambda^2}{2} \left[ \rho A \int_0^{2l} [\eta_a^2(x) + \eta_b^2(x)] dx + m_1 \eta_a^2(2l) + m_1 \eta_b^2(0) \right] \quad (17)$$

Questa equazione è stata risolta con *Mathematica* ed il file di input parametrico è riportato in Allegato G. Il valore della frequenza fondamentale ottenuta con questo metodo per il caso del gradiometro di Stanford è anch'esso in pieno accordo con i risultati sperimentali

## 5 Confronto fra la soluzione “trave ripiegata” e “trave semplice”

In figura 7 si riportano gli schemi di una trave semplice e di una trave ripiegata incastrate ad una sola un'estremità (trave a sbalzo). È noto che la frequenza del primo modo flessionale di una trave semplice a sbalzo di lunghezza  $l$  è esprimibile in funzione dei parametri caratteristici nel seguente modo:

$$\omega = 3.66 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} \quad (18)$$

dove  $\mu$  è la densità per unità di lunghezza della trave, che nel caso di sezione trasversale costante risulta essere  $\mu = \rho \cdot A$  (dove  $\rho$  è la densità del materiale e  $A$  è l'area della sezione trasversale).

Una trave ripiegata a sbalzo, avente lo stesso ingombro longitudinale e la stessa sezione trasversale del caso precedente, ha la frequenza del primo modo flessionale pari a:

$$\omega = 1.23 \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^4}} \quad (19)$$

Quest'ultima è stata valutata con l'equazione di Rayleigh-Ritz (eq. 17), assumendo che la deformata del modo fondamentale sia esprimibile con le equazioni 3 (equazione della deformata soddisfacente le condizioni al contorno).

Il confronto fra i due casi ci consente di affermare che la frequenza fondamentale nel caso di trave ripiegata è circa il 60% più bassa della frequenza della trave equivalente a sbalzo.

## 6 Modello semplificato preliminare con Ansys

Il buon accordo fra i risultati del calcolo analitico con quelli ottenuti con Ansys, nel caso della valutazione della costante elastica del gradiometro di Stanford, discusso nel

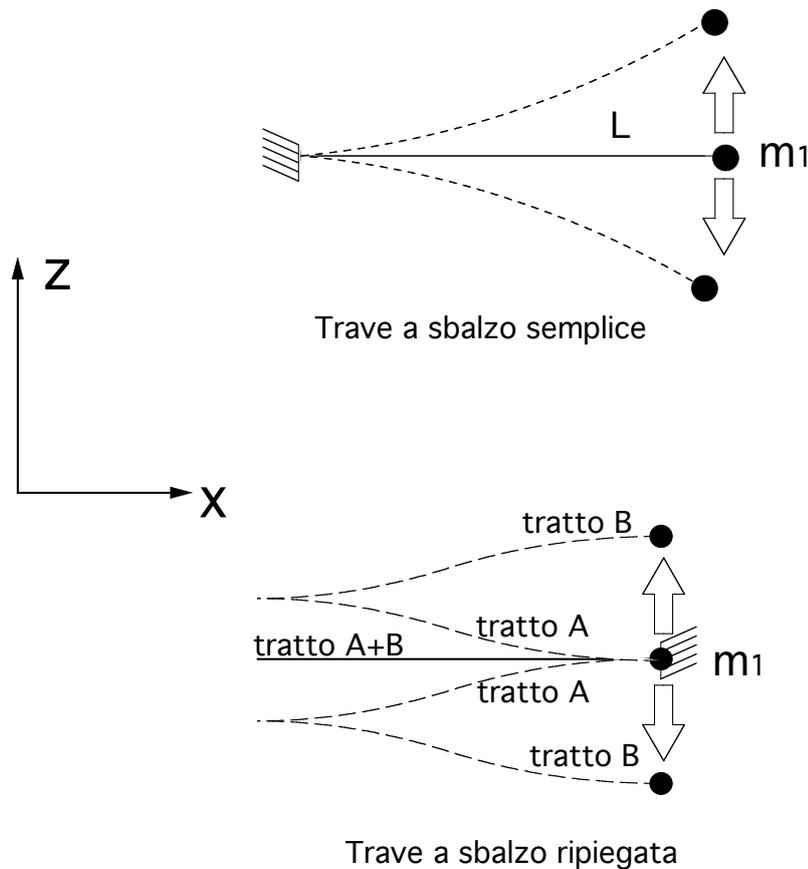


Figure 7: "Trave a sbalzo semplice" e "trave ripiegata"

paragrafo §3.1, rende fiduciosi che il modello agli elementi finiti sviluppato per le travi ripiegate risulti idoneo per descrivere il comportamento meccanico di quest'ultime.

Il supporto per masse cilindriche centrali che si vuole progettare consiste di tre travi ripiegate a  $120^\circ$  ( si veda il modello illustrato in fig 1) ed in figura 8 se ne riporta lo schema semplificato per Ansys, il cui file di input è allegato in appendice B.

Per dimensionare opportunamente il supporto è necessario conoscere le reazioni che nascono nei vincoli in dipendenza dei carichi applicati: nel caso in esame la struttura è soggetta alla sola forza peso ed è dimensionata per lavorare con le lamelle in posizione verticale. Si fa presente che la verifica a carichi applicati non giacenti nel piano suddetto, bensì aventi componente perpendicolare a quest'ultimo, è stata esaminata con il modello 3D agli elementi finiti realizzato con Ansys.

Il calcolo con Ansys consente di determinare agevolmente le reazioni vincolari all'incastro (in direzione e modulo) indotte dai carichi applicati, anche per strutture con elevato grado di iperstaticità<sup>1</sup>, quale è il caso di supporti con più di due travi ripiegate in parallelo.

È stato assunto per le lamelle un comportamento tipo trave, rappresentandole tramite la linea passante per i baricentri delle sezioni trasversali ed avendo cura di riportare correttamente i momenti di inerzia rispetto a quest'asse.

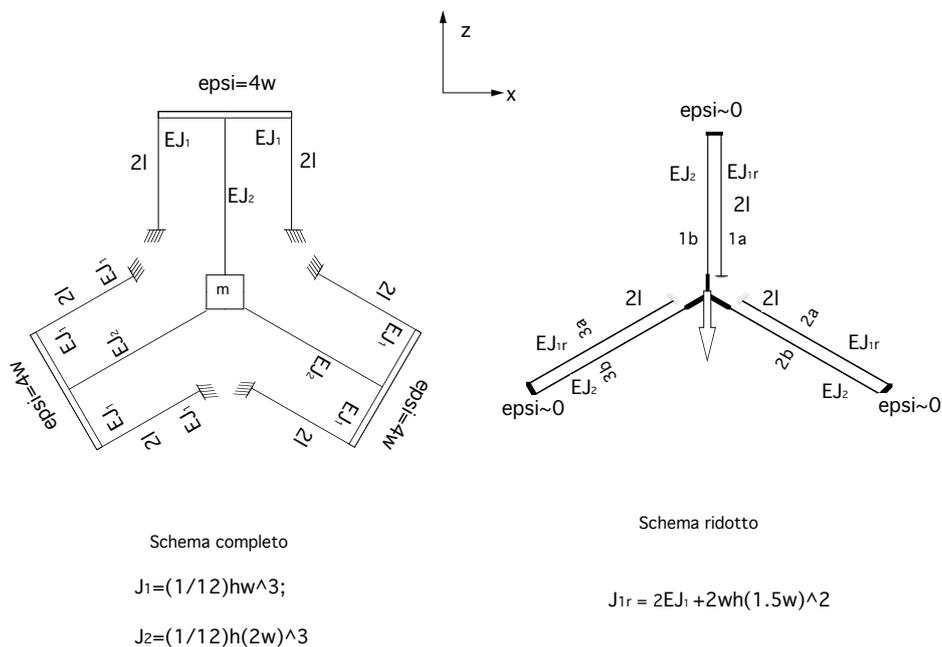


Figure 8: Modello semplificato per Ansys nel caso di un supporto a 3 travi ripiegate

Il modello del supporto è stato discretizzato con elementi di tipo *BEAM4*, aventi sei gradi di libertà ad ogni nodo (le 3 traslazioni e le 3 rotazioni attorno agli assi) e capacità di sollecitazione a trazione, compressione, torsione e flessione. I tratti ortogonali alle travi e la struttura rappresentante la massa centrale sono stati considerati rigidi rispetto a quella delle lamelle flettenti (in pratica, nel file di input, si è assegnato loro un modulo di

<sup>1</sup>Il grado di iperstaticità di una struttura è uguale al numero di reazioni vincolari sovrabbondanti rispetto a quello che annullerebbe i gradi di libertà della struttura stessa

elasticità 3 ordini di grandezza superiore rispetto a quello delle lamelle).

I risultati del calcolo con Ansys verranno confrontati con i valori delle reazioni vincolari ricavati col metodo analitico di Müller-Breslau, trattato più in dettaglio nel paragrafo 7.

## **7 Dimensionamento del supporto a 3 lamelle**

Nella fase di dimensionamento si individuano i limiti ammissibili di alcuni parametri geometrici della struttura. Per fare questo, si valutano i carichi agenti sulla struttura e con un approccio analitico si scrivono delle condizioni parametriche in base a criteri di resistenza meccanica e dalla loro verifica si deducono delle disuguaglianze che i parametri geometrici devono soddisfare.

Una parte importante di tale approccio consiste nella determinazione delle reazioni vincolari della struttura. Tali reazioni sono state calcolate, per via analitica, usando il metodo di Müller-Breslau costruendo un sistema di equazioni pari al numero di incognite iperstatiche. Sfruttando le condizioni di simmetria (sia rispetto ai vincoli che ai carichi) questo sistema risulta essere solo 4 volte iperstatico. Tale sistema di equazioni è stato risolto grazie all'ausilio del software "Mathematica", di cui il file di input è riportato in Allegato C. Le incognite iperstatiche scelte, con riferimento alla figura 9, sono le reazioni  $M_2$ ,  $V_3$  e  $H_3$ ,  $M_3$ , ossia il momento all'incastro per il tratto "2" e le tre reazioni vincolari all'incastro per il tratto "3". Nel file riportato in Allegato C si trova l'espressione delle reazioni vincolari (si veda la figura 9) in funzione del carico P, dei parametri geometrici  $L$  (lunghezza),  $w$  (larghezza),  $h$  (spessore) delle lamelle e in funzione del modulo di Young del materiale usato. Ovviamente, vista la complessità della soluzione, il file di mathematica risulterà di facile ed immediato utilizzo solo quando verranno fissati alcuni dei parametri succitati.

### **7.1 Procedura di dimensionamento applicata al caso del prototipo di Al5056**

I file di Mathematica e Ansys sopra citati e allegati alla presente nota servono, come più volte ribadito, per calcolare le forze di reazione agenti nei vincoli della struttura a seguito dei carichi applicati e, conseguentemente, sono fondamentali per il dimensionamento del supporto che si vuole realizzare, previa conoscenza dei seguenti parametri: il materiale (modulo di Young, Poisson, ecc), gli ingombri massimi del supporto (raggio interno,  $R_{in}$ , raggio esterno,  $R_{out}$ ), le dimensioni ed il peso della massa che si vuole sostenere. Di seguito verranno chiariti i passi da seguire nel processo di dimensionamento, applicando la procedura al caso specifico del prototipo rispondente alle seguenti specifiche:

Supporto:

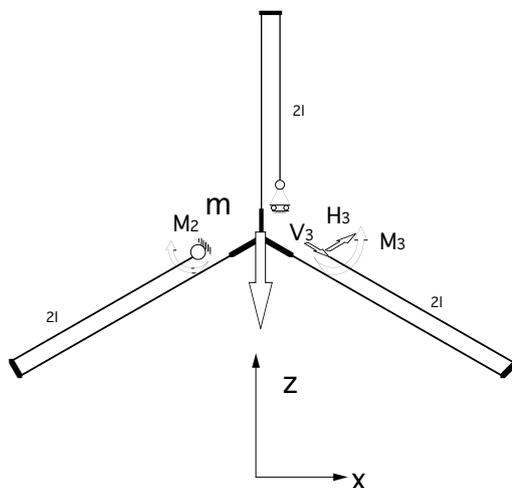


Figure 9: “Schema isostatico con incognite iperstatiche”

1. Materiale: lega di Alluminio (Al5056)

- Densità:  $\rho = 2640 \text{ kg/m}^3$
- Modulo di Young:  $E = 72 \text{ GPa}$
- Fattore di taglio:  $\Gamma = 25.9 \text{ GPa}$
- Coefficiente di Poisson:  $\nu = 0.33$
- Tensione di snervamento:  $\sigma_{sn} = 150 \text{ MPa}$

2.  $R_{in} = R_{cil} = 25.4 \text{ mm}$ ,

3.  $R_{out} = 125 \text{ mm}$

Massa centrale:

1. Materiale:  $\text{CaF}_2$

- Densità  $\rho = 3180 \text{ kg/m}^3$
- Modulo di Young  $E = 75.8 \text{ GPa}$
- Fattore di taglio  $\Gamma = 33.77 \text{ GPa}$
- Tensione ultima (comportamento fragile)  $\sigma_{ul} = 36.5 \text{ MPa}$

2. Altezza:  $T_{cil} = 70 \text{ mm}$

3.  $R_{cil} = 25.4 \text{ mm}$

La larghezza delle lamelle va scelta in relazione al diametro della massa cilindrica da supportare e in modo del tutto arbitrario, ma senza dubbio ragionevole, si decide di porre:

$$w = \frac{R_{cil}}{\sqrt{2}}$$

Ci si riserva comunque di studiare in una fase successiva, con il modello agli elementi finiti tridimensionale, casi con valori di  $w$  diversi, pur sempre scelti compatibilmente con lo spazio a disposizione e nel rispetto dei criteri di resistenza strutturale.

In via del tutto conservativa rispetto alle caratteristiche della sollecitazione indotte, si assume, solo in questa prima fase, che la lunghezza delle lamelle sia pari alla differenza dei due raggi:

$$l = R_{out} - R_{in}$$

Se si sostituiscono questi numeri nel file menzionato di Mathematica (vedi Appendice C) si ricavano i seguenti valori delle reazioni vincolari, per un carico baricentrale unitario ( $P=1 \text{ N}$ ):

$$\begin{aligned} \|V_1\| &= 0.54 \text{ [N]} \\ \|R_2\| &= 0.28 \text{ [N]} \\ \|R_3\| &= 0.29 \text{ [N]} \\ m_{z1} &= 0 \text{ [N} \cdot \text{m]} \\ m_{z2} &= 0.53 \cdot 10^{-2} \text{ [N} \cdot \text{m]} \\ m_{z3} &= -0.53 \cdot 10^{-2} \text{ [N} \cdot \text{m]} \end{aligned}$$

Da una rapida analisi si evince che la trave più sollecitata, per la configurazione scelta e per il tipo di carico applicato, è quella verticale esterna (1a nella figura 8), soggetta a compressione. Il calcolo con Ansys per lo stesso schema (quello ridotto mostrato in figura 8)

conferma le previsioni del calcolo teorico (i risultati ottenuti facendo girare il file riportato in appendice B variano meno del 3% rispetto ai risultati ottenuti con il metodo analitico). Assumendo di lavorare in campo elastico lineare le reazioni vincolari si possono assumere direttamente proporzionali al carico esterno “P” e quindi è possibile estrapolare i risultati ottenuti per un carico unitario al caso in cui agisca nel baricentro del supporto un carico generico P:

$$\begin{aligned} \|V_1\| &= 0.54 \cdot P \text{ [N]} \\ \|R_2\| &= 0.28 \cdot P \text{ [N]} \\ \|R_3\| &= 0.29 \cdot P \text{ [N]} \\ m_{z1} &= 0 \text{ [N} \cdot \text{m]} \\ m_{z2} &= 0.53 \cdot 10^{-2} \cdot P \text{ [N} \cdot \text{m]} \\ m_{z3} &= -0.53 \cdot 10^{-2} \cdot P \text{ [N} \cdot \text{m]} \end{aligned}$$

Una volta note, per la configurazione scelta, le reazioni vincolari in funzione del carico si può procedere alla determinazione dello spessore delle lamelle, che, mentre non influisce in modo alcuno<sup>2</sup> sul valore delle reazioni vincolari, è il parametro cruciale da ottimizzare per garantire una bassa frequenza del primo modo proprio di vibrare e nel contempo un’adeguata resistenza strutturale. In definitiva lo spessore h è il vero parametro su cui si può agire per realizzare un adeguato risonatore a bassa frequenza compatibilmente ai criteri di resistenza strutturale e ai limiti tecnologici di lavorazione, una volta fissati i raggi interno ed esterno del supporto.

### 7.1.1 Verifica a resistenza

Per caratterizzare lo stato di tensione nella schematizzazione tipo trave adottata per le lamelle si usa l’espressione della tensione equivalente “ $\sigma_{eq}$ ” di Von Mises<sup>3</sup>:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

dove  $\sigma$  indica la tensione normale e  $\tau$  la tensione di taglio. Nel caso della trave 1a, soggetta a sola compressione, la tensione equivalente si riduce a:

$$\sigma_{eq} = \frac{N_{1a}}{A_{1a}} = \frac{\|V_1\|}{w \cdot h}$$

<sup>2</sup>Nella schematizzazione adottata la struttura è piana con spessore trasversale trascurabile rispetto alle altre due dimensioni ed è soggetta a carichi nel piano.

<sup>3</sup>Anche con il codice agli elementi finiti Ansys lo stato di tensione equivalente sarà valutato in base al criterio di Von Mises

mentre la condizione di resistenza strutturale è espressa dalla seguente disequazione:

$$\sigma_{eq} \leq \frac{\sigma_{sn}}{\nu}$$

dove  $\sigma_{sn}$  è la tensione di snervamento del materiale e  $\nu$  è il coefficiente di sicurezza, che, tipicamente, per applicazioni di questo tipo, viene preso nel range [2.5 ÷ 3.0]. Dall'ultima condizione si ricava un limite inferiore per lo spessore  $h$

$$h \geq \frac{\|V_1\| \cdot \nu}{w \cdot \sigma_{sn}}$$

Le travi 2 e 3 sono invece soggette a sforzo normale di compressione, momento flettente e taglio (vedasi fig 13). Se si trascura il taglio la  $\sigma_{eq}$  si compone essenzialmente del contributo dovuto allo sforzo normale e di quello dovuto a momento flettente:

$$\sigma_{eq} = \frac{N}{A} + \frac{M}{R}$$

dove 'R' è modulo di rigidezza (vedi figura ??), che nel caso di sezione trasversale rettangolare risulta essere  $\frac{1}{6}w^3$ . La condizione da soddisfare risulta in questo caso:

$$\frac{N}{w \cdot h} + \frac{M}{\frac{1}{6}w^3} \leq \frac{\sigma_{sn}}{\nu}$$

Nel caso specifico del prototipo di Al5056 soggetto ad un carico baricentrale 'P', la tensione equivalente in corrispondenza della sezione maggiormente caricata è quella della trave 1a soggetta a sola compressione (si veda la figura 12), che risulta essere:

$$\sigma_{eq} = \frac{0.52 \cdot P}{2 \cdot w \cdot h} \simeq \frac{0.3 \cdot P}{w \cdot h}$$

Da qui la condizione sul parametro  $h$ :

$$h \geq \frac{3 \cdot 0.3P}{w \cdot \sigma_{sn}} \quad (20)$$

### 7.1.2 Verifica ad instabilità a carico di punta

Poichè si vogliono realizzare lamelle adeguatamente sottili (si tenga conto che il limite inferiore per lo spessore delle lamelle è anche fissato da necessità di avere un buon scambio termico per conduzione) e lunghe, al fine di garantire una bassa frequenza di risonanza, si ha a che fare con strutture snelle che devono essere verificate anche ad instabilità a carico di punta.

L'espressione del carico critico Euleriano per una trave di lunghezza  $l$  è:

$$F_c = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\alpha \cdot l)^2} \quad (21)$$

dove il coefficiente  $\alpha$  dipende dalle condizioni di vincolo. Nel caso in esame le lamelle sono libere di inflettersi in direzione ortogonale al loro piano di giacitura e sono vincolate nella direzione perpendicolare alla loro linea elastica (vedi lo schema di figura 10) in corrispondenza dell'estremità libera. Per questo tipo di vincolo  $\alpha = 0.5$ . Per le lamelle

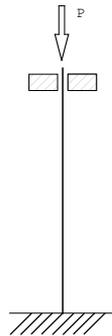


Figure 10: *Trave caricata di punta*

in esame il momento di inerzia minimo è  $J_{min} = \frac{1}{12}w \cdot h^3$ . Il carico che causerebbe il collasso per instabilità a carico di punta deve risultare “sufficientemente” superiore al carico effettivo agente sulla trave in esame. Il termine “sufficientemente” si traduce in linguaggio tecnico con l’introduzione di un opportuno coefficiente di sicurezza  $\gamma = 3$

$$\frac{\pi^2 E J_{min}}{(\mu \cdot L)^2} \geq \gamma(0.3P)$$

Ciò equivale a definire il seguente limite inferiore per h:

$$h \geq \left( \frac{144 \cdot 0.3P \cdot L^2}{w \cdot \pi^2 \cdot E} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (22)$$

Si vuole far osservare che la lunghezza L della trave nella formula 22 è equivalente alla lunghezza 2l riportata nelle schematizzazioni dei paragrafi precedenti.

### 7.1.3 Scelta dello spessore delle lamelle

Il parametro  $h$  verrà limitato inferiormente dalla condizione che risulterà più stringente fra la 20 e la 22, mentre il limite superiore sarà definito dall'obiettivo di soddisfare la specifica tecnica di avere il modo fondamentale di risonanza meccanica intorno a poche decine di Hz. La frequenza del modo proprio di vibrare per un supporto a tre lamelle la si deriva dall'espressione 11, ottenuta per il caso di due lamelle a  $180^\circ$  (si ricordi che nella formula 11 la lunghezza "l" che compare è la semilunghezza della trave  $L$ ).

Nel caso di tre lamelle a  $120^\circ$  la condizione che stabilisce il limite superiore per  $h$  è la seguente:

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{Ewh^3}{mL^3}} \leq f_0 \quad (23)$$

dove  $f_0$  è la frequenza voluta per il modo proprio fondamentale.

Fissati che siano il materiale e la larghezza delle lamelle, la frequenza del primo modo proprio diviene una funzione facilmente graficabile dello spessore e della lunghezza (parametri che restano ancora da definire):

$$f = \alpha \sqrt{\frac{h^3}{L^3}} \quad (24)$$

Di seguito è riportato il grafico della frequenza in funzione dello spessore per due lunghezze caratteristiche, ottenuto per il prototipo di A15056:  $L_{max}$  che coincide con il caso limite di ingombro massimo ( $R_{out} - R_s$ ) e  $L_{med}$  pari a  $\frac{3}{4} \cdot L_{max}$  ( $L_{max} \simeq 100\text{mm}$ ,  $L_{med} \simeq 75.0\text{ mm}$ ).

Dal grafico si vede che per scendere sotto i 10 Hz bisogna avere spessori inferiori a 0.5 mm. Scelto quindi  $h=0.5\text{ mm}$  si passa alla fase successiva di verifica a resistenza strutturale e ad instabilità.

## 7.2 Analisi dello stato di sollecitazione per il prototipo di A15056

Una volta individuati i valori dei parametri geometrici caratteristici, si passa alla fase successiva di analisi e verifica dello stato di sollecitazione della struttura. Di seguito si commentano i risultati dell'analisi statica del supporto di A15056 con massa cilindrica centrale di 200 gr, disposto con le lamelle in posizione verticale e soggetto all'azione della sola forza peso. I risultati del calcolo con Ansys riguardanti lo stato di tensione indotto nel caso  $L_{max} = 100\text{ mm}$  e  $h_{min} = 0.5\text{ mm}$  sono riportati nel grafico 12 sia per le travi centrali che per quelle esterne, mentre nel grafico 13 sono illustrate le caratteristiche della sollecitazione (momento flettente e sforzo normale). Come si può vedere, le lamelle più sollecitate risultano avere una tensione equivalente di gran lunga inferiore al carico

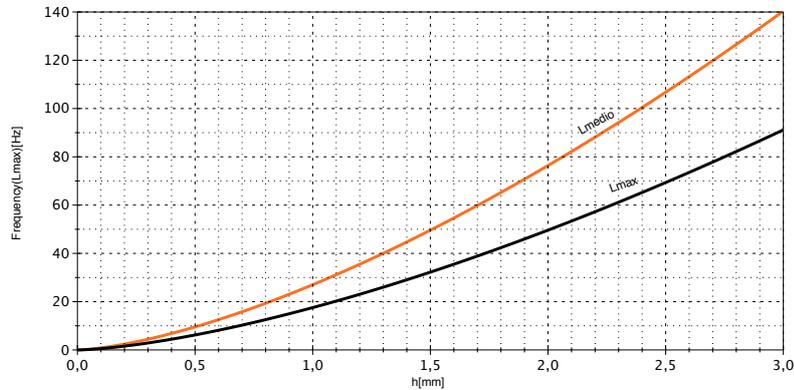


Figure 11: *Frequenza in funzione dello spessore*

ammissibile ( $\sigma_{sn}/3$ ) che nel caso dell'Al5056 vale 50 MPa, mostrando che la struttura lavora ampiamente al di sotto dello snervamento.

Lo stato di tensione stimato analiticamente per la stessa configurazione geometrica e di carichi è in accordo a meno del 4% ( $\sigma_{max} \simeq 58\text{KPa}$ ) con i valori forniti da Ansys.

La verifica ad instabilità per le lamelle esterne laterali soggette a compressione, ricorrendo all'equazione 21, fornisce il seguente valore per il carico critico Euleriano  $F_c = 3.33N$  che risulta essere circa 3 volte superiore all'effettivo carico di compressione agente sulle stesse. Uno spessore di 0.5 mm, quindi, ci consente di lavorare con un coefficiente di sicurezza di circa 3, che è un valore sufficiente per applicazioni strutturali di questo tipo. Si osservi che la lunghezza delle lamelle considerata è un limite superiore in relazione agli ingombri massimi consentiti e, a parità di carico, corrisponde ad uno spessore  $h$  delle lamelle massimo in relazione al criterio di instabilità (diminuendo  $L$  possiamo anche diminuire  $h$ ). Con Ansys è stato condotto un esame di buckling non lineare: i risultati di questa analisi sono riassunti nel grafico 14 dove si vede chiaramente che il collasso per carico di punta si verifica per valori superiori a 3 N. Al di sopra dei 3 N, infatti, la deformata della struttura aumenta indefinitamente. L'analisi di buckling non lineare prevede di attivare l'opzione di grandi deformazioni nella soluzione dello stato di tensione.

La procedura di dimensionamento appena mostrata ed applicata al caso del pro-

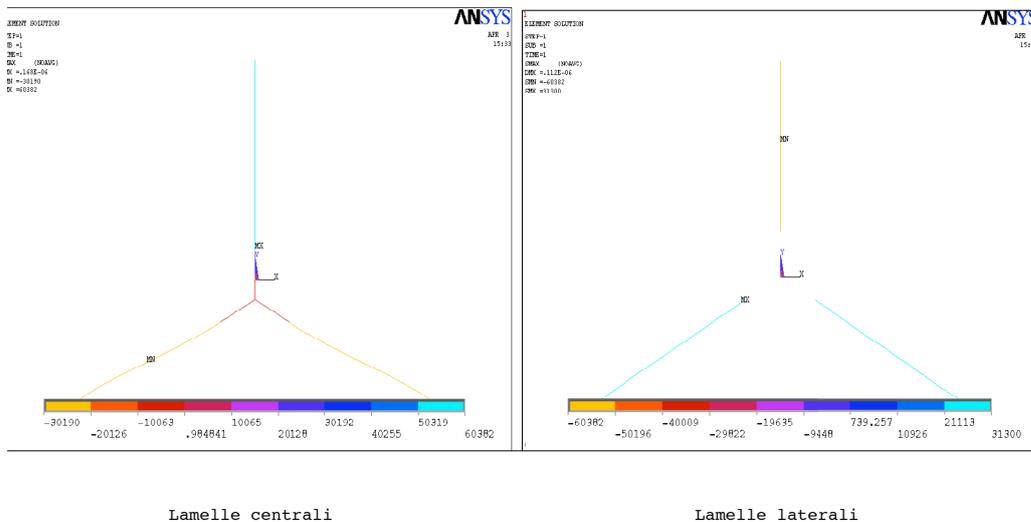


Figure 12: Stato di tensione equivalente secondo Von Mises per il caso  $L_{max}$  ed  $h_{min}$

totipo ha validità del tutto generale ed è stata illustrata per descrivere i metodi seguiti e per indicare i file parametrici per il calcolo con Ansys e Mathematica. Il confronto fra il calcolo analitico (Müller-Breslao) e quello numerico (Ansys) è servito per validare i modelli semplificati usati per la simulazione del supporto. Il modello tridimensionale, discusso nel paragrafo seguente, deve invece consentire l'ottimizzazione dei parametri geometrici della struttura e permettere di verificare che lo stato di tensione e deformazione atteso siano conformi a quelli previsti e dare conferma del valore predetto della frequenza di risonanza del modo fondamentale, qualora si descriva in dettaglio la geometria del supporto stesso.

## 8 Modello tridimensionale agli elementi finiti

Come mostrato nel paragrafo 7, nella fase di dimensionamento preliminare, sulla base di idonee schematizzazioni della struttura, si individua una terna di valori per i parametri geometrici critici (lunghezza, spessore e larghezza delle lamelle) che consente di rispondere alle specifiche tecniche e che guida la costruzione del modello tridimensionale agli elementi finiti. La simulazione agli elementi finiti deve, di fatto, consentire di sviluppare calcoli di ottimizzazione e di verificare lo stato di tensione e di deformazione atteso. Si tenga conto che, essendo la geometria scelta per il supporto (3 molle ripiegate a  $120^\circ$ ) piuttosto complessa, risulta di fondamentale importanza sviluppare un modello tridimen-

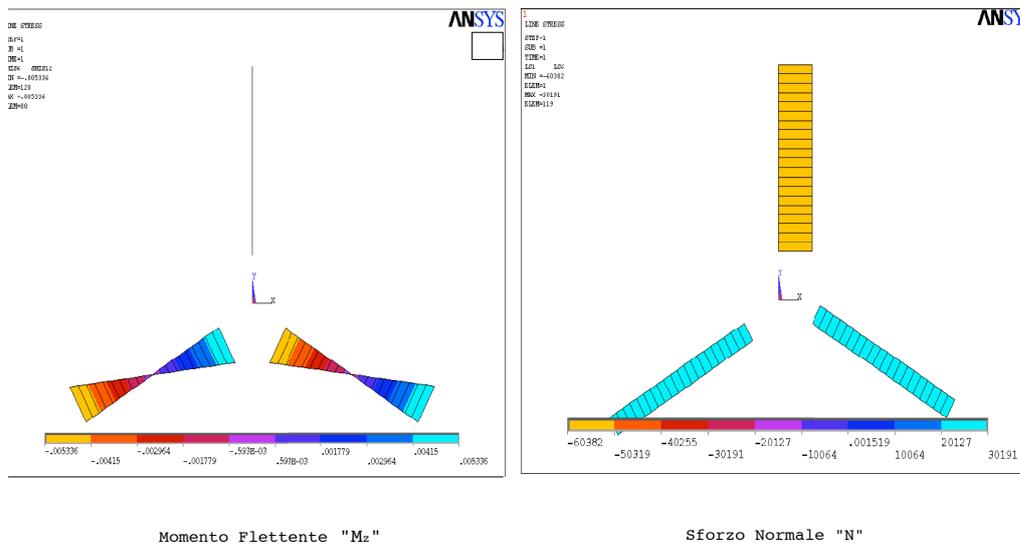


Figure 13: Caratteristiche della sollecitazione per  $L_{max}$  ed  $h_{min}$

sionale che sia il più possibile fedele alla geometria effettiva e ciò al fine di minimizzare le incertezze del calcolo derivanti dagli schemi, necessariamente semplificati, usati per il dimensionamento. Al fine di ottimizzare la scelta dei parametri rispetto all'obiettivo di minimizzare la frequenza fondamentale di risonanza, è stato costruito un modello parametrico (vedi Appendice E) grazie al quale si può agevolmente variare le dimensioni geometriche e le proprietà del materiale (sia del supporto che della massa centrale da sostenere). Il modello è stato costruito con elementi "shell43". Gli elementi scelti sono idonei per simulare strutture moderatamente spesse con comportamenti lineari. Tali elementi hanno sei gradi di libertà ad ogni nodo: traslazione e rotazioni attorno agli assi x,y,z.

La mesh, mostrata in figura 16, è di tipo strutturato ("mapped-mesh") soltanto per le lamelle mobili e per il manicotto centrale, mentre il supporto fisso laterale è discretizzato con minore accuratezza, non avendo quest'ultimo influenza alcuna nè sul calcolo dello stato di tensione e deformazione delle lamelle, nè sul calcolo modale e armonico. Una più accurata rifinitura della mesh (al fine di ottenere una maggiore uniformità della geometria degli elementini in cui risulta discretizzata l'area) dovrà essere presa in dovuta considerazione nel caso di calcolo di scambio termico, non trattato in questo lavoro.

Si è supposto di bloccare la massa centrale con un incastro forzato a freddo. Questo tipo di vincolo consente di trascurare il problema della modellizzazione del contatto di

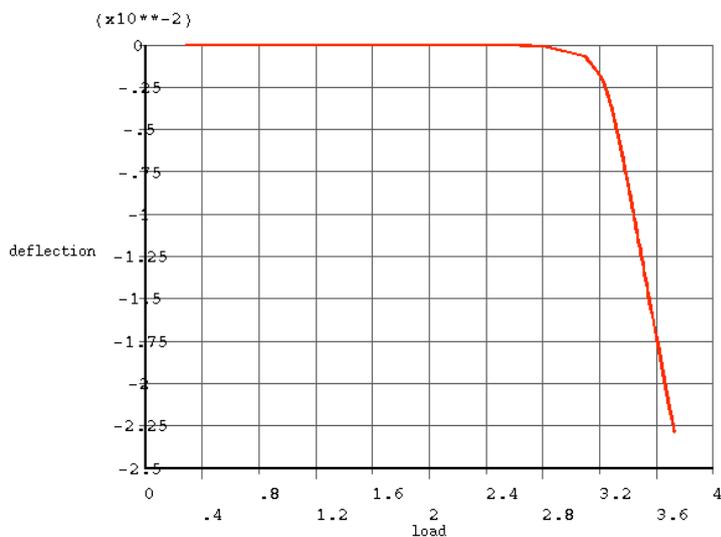


Figure 14: *Buckling non Lineare*

superfici, rimandando ad un secondo tempo la scelta della soluzione tecnica più adeguata dell'ancoraggio della massa centrale al supporto. Si ricorda, infatti, che il presente lavoro ha come obiettivo primario quello di dimostrare la fattibilità e la funzionalità del supporto a tre travi ripiegate, ossia che questa tipologia di supporto consente di raggiungere bassi valori della frequenza di risonanza del modo fondamentale dell'intera struttura supporto/massa centrale. La scelta del tipo di geometria a lamelle è stata dettata dalla necessità di avere una buona superficie di scambio termico, dovendo il supporto stesso assolvere al compito di raffreddare fino a temperature criogeniche la massa centrale. In questa ottica, per testare le specifiche puramente meccaniche (più precisamente dinamiche) del supporto, la costruzione del prototipo potrebbe essere realizzata inizialmente da un pezzo unico attraverso opportuni processi di lavorazione per realizzare le lamelle con la sagoma

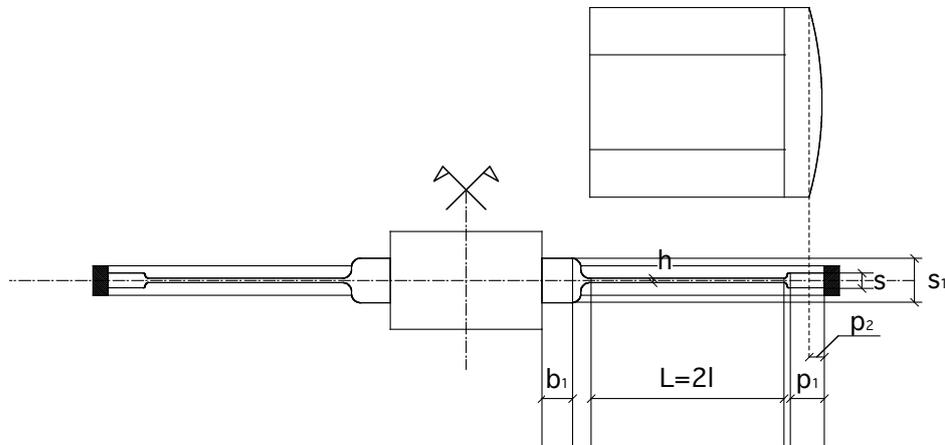


Figure 15: *Sezione longitudinale delle lamelle*

desiderata e del voluto spessore. Nella figura (15) che mostra la sezione longitudinale delle lamelle sono indicati i parametri geometrici dei quali si è studiata l'influenza sulla frequenza del primo modo proprio  $f_1$ .

### 8.1 Analisi dei risultati

I calcoli sono stati sviluppati per i diversi materiali di seguito elencati:

- Al5056
- CuAl 6%
- Ti

Dal calcolo di dimensionamento si individua, per un assegnato materiale e per una certa massa centrale, una configurazione di riferimento che consente di avere frequenze del modo fondamentale inferiori a 10 Hz. Nel caso di supporto in lega di lega d'alluminio

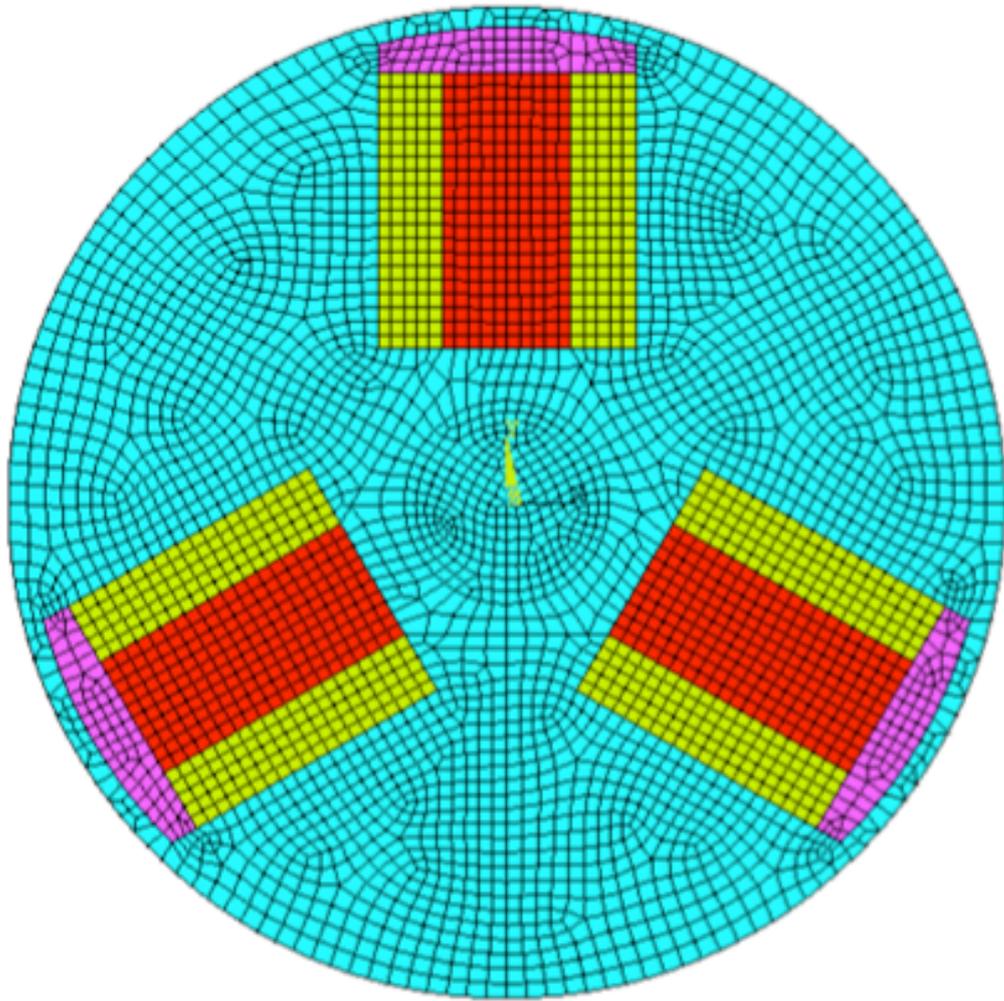


Figure 16: *Mesh per il calcolo agli elementi finiti con Ansys*

(Al5056) e massa centrale di circa 200 g si hanno i seguenti valori per i parametri critici:  $h = 0.5 \text{ mm}$ ,  $L = 75 \text{ mm}$ ,  $W = 18 \text{ mm}$ .

Poichè il supporto in oggetto è solo il prototipo in scala di un supporto per masse cilindriche di più grandi dimensioni, e volendo semplificare la realizzazione pratica del pezzo si è posto, in modo del tutto arbitrario, un limite inferiore allo spessore delle lamelle pari a 1.5 mm (con conseguente innalzamento, a parità degli altri parametri, della frequenza del primo modo proprio). È importante puntualizzare che questo è un limite puramente tecnico, legato semplicemente alla necessità di semplificare la lavorazione meccanica del pezzo. È altrettanto opportuno ribadire che la realizzazione del prototipo è essenzialmente finalizzata a dimostrare la funzionalità e fattibilità di un tal tipo di supporto, indipendentemente dal valore minimo di frequenza raggiungibile. Di seguito verrà mostrato come può essere dedotta la variazione della frequenza di vibrazione, scalando, a parità di materiale, le dimensioni geometriche nel piano delle lamelle e fissando il limite inferiore dello spessore sulla base di considerazioni di resistenza meccanica e di stabilità a buckling. Nelle tabelle (1) e (2), si riportano i risultati di alcuni calcoli per l'Al5056,

w [mm]	h [mm]	$b_1$ [mm]	$p_2$ [mm]	$s_1$ [mm]	$s_2$ [mm]	$f_1$ [Hz]	$\Delta f$ [Hz]
18	1.5	10	9	15	10	59	18
18	1.5	13	7	15	10	59	26
18	1.5	13	7	15	5	59	46
16	1.5	13	7	15	5	57	50
16	1.0	13	7	15	5	32	31

Table 1: Risultati del calcolo modale per Al5056,  $L=69 \text{ mm}$

analizzando i quali si evince che:

- Diminuendo  $b_1$ , a parità degli altri parametri, aumenta la frequenza  $f_1$  e diminuisce la distanza fra il primo ed il secondo modo proprio di vibrare.
- Al diminuire dello spessore h delle lamelle è vero che la frequenza del modo fondamentale si sposta verso il basso ma si avvicinano anche tutte le frequenze superiori. In termini percentuali si può affermare che tanto si guadagna sul valore della frequenza fondamentale, altrettanto si perde in larghezza di banda (distanza fra la prima frequenza e la seconda).
- Diminuendo lo spessore s delle mezzelune (e quindi la massa  $m_L$ ), a parità degli altri parametri, si distanziano le frequenze  $f_1$  e  $f_2$  e la  $f_1$  rimane sostanzialmente invariata

w[mm]	h [mm]	b <sub>1</sub> [mm]	p <sub>2</sub> [mm]	s <sub>1</sub> [mm]	s <sub>2</sub> [mm]	f <sub>1</sub> [Hz]	Δf [Hz]
18	1.5	13	7	15	10	64	22
18	1.5	13	7	15	5	63	45
16	1.5	13	7	15	5	62	48
16	1.0	13	7	15	5	35	64

Table 2: Risultati del calcolo modale per Al5056, L=65 mm

L[mm]	w[mm]	h [mm]	b <sub>1</sub> [mm]	p <sub>2</sub> [mm]	s <sub>1</sub> [mm]	s <sub>2</sub> [mm]
69	16	1.5	13	7	15	5

Table 3: Soluzione scelta nel caso di Al5056

La soluzione scelta per il caso dell'Al5056 è riportata in tabella 3.

Questa configurazione consente di ottenere la frequenza del primo modo proprio intorno ai 57 Hz e una larghezza di banda di 50 Hz. Il calcolo analitico, sulla base della formula 24<sup>4</sup>, fornisce un valore atteso della frequenza di risonanza di 56 Hz, mostrando il pieno accordo con il valore fornito dal calcolo modale agli elementi finiti.

### 8.1.1 Supporto in CuAl(6%)

Un altro materiale tipicamente usato per realizzare risonatori meccanici a basse temperature è la lega CuAl. Le caratteristiche del CuAl (6%) sono riassunte di seguito:

- $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$
- $E = 169 \text{ GPa}$
- $\nu = 0.34$
- $\sigma_{ul} = 469 \text{ MPa}$

I risultati di alcuni dei calcoli fatti per il caso CuAl(6%) e L=65 mm sono riportati nella tabella 4. Nella tabella 5 invece, si riportano i risultati di alcune configurazioni ottimizzate per L=67 mm e L=69 mm rispettivamente (con  $s_1 = 15, s_2 = 5$ ). Come si può osservare, a parità degli altri parametri, diminuendo la larghezza “w” delle lamelle tende a diminuire la frequenza del modo fondamentale ed ad aumentare la larghezza di banda.

<sup>4</sup>Nel caso dell'Al5056  $f_1 = 1754.3 \sqrt{\frac{h^3}{L^3}}$

w[mm]	h [mm]	b <sub>1</sub> [mm]	p <sub>2</sub> [mm]	f <sub>1</sub> [Hz]	Δf [Hz]
18	1.5	13	9	70	27
18	1.0	13	9	49	17
16	1.5	17	7	65	40
16	1.0	17	7	36.7	24.6

Table 4: Risultati del calcolo modale per: CuAl, L=65 mm, s<sub>1</sub> = 15mm, s<sub>2</sub> = 5mm

L[mm]	w[mm]	h [mm]	b <sub>1</sub> [mm]	f <sub>1</sub> [Hz]	Δf [Hz]
67	14	1.5	17	60.5	41.5
67	14	1.0	17	34	25
69	16	1.5	13	64	33
69	16	1.0	13	36.2	20.7

Table 5: Risultati del calcolo modale per: CuAl, s<sub>1</sub> = 15mm, s<sub>2</sub> = 5mm, p<sub>2</sub> = 7mm

### 8.1.2 Supporto in Titanio

Le caratteristiche del Titanio sono riassunte di seguito:

- $\rho = 4500 \text{ kg/m}^3$
- $E = 115 \text{ GPa}$
- $\nu = 0.34$
- $\sigma_{sn} = 140 \text{ MPa}$

I risultati di alcuni calcoli sono riassunti nella tabella 6

L[mm]	w[mm]	h [mm]	b <sub>1</sub> [mm]	p <sub>2</sub> [mm]	f <sub>1</sub> [Hz]	Δf [Hz]
65	16	1.5	17	7	65	49
65	16	1.0	17	7		
67	16	1.0	17	7	34	25
69	16	1.5	16	7	63	47
70	18	1.0	10	9	37	19

Table 6: Risultati del calcolo modale per: Ti, s<sub>1</sub> = 15mm, s<sub>2</sub> = 5mm

## 9 Studio dettagliato della configurazione scelta nel caso di Al5056

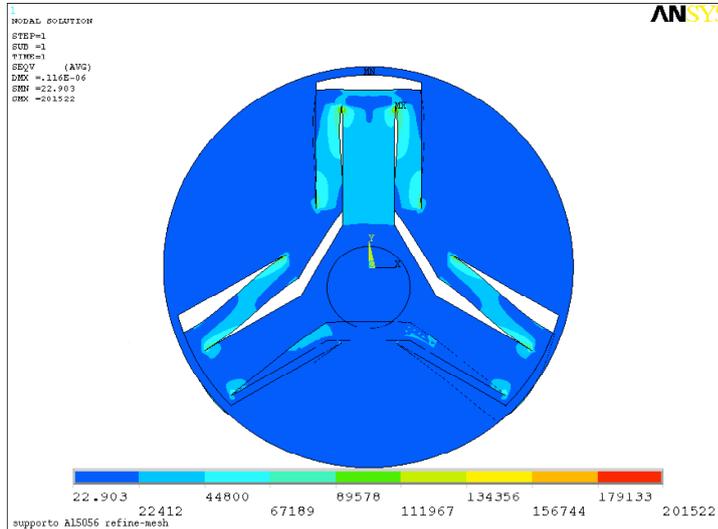
La configurazione scelta nel caso che il supporto venga realizzato in lega di alluminio è quella riassunta in tabella [3]. Il disegno tecnico esecutivo è riportato in Allegato E. Di seguito vengono commentati più in dettaglio i risultati dei calcoli di analisi statica e dinamica della struttura scelta.

### 9.1 Analisi statica

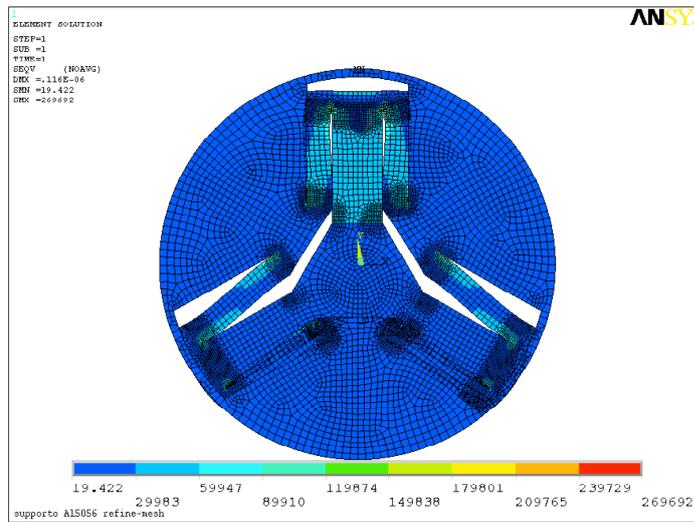
Nei grafici seguenti è mostrata la tensione equivalente di Von Mises, nel caso del supporto di alluminio ( $m_{supp} \simeq 600gr$ ) per una massa cilindrica centrale di 200 gr, soggetto all'azione della sola forza peso. La soluzione nei nodi e quella negli elementi mostrano un buon accordo (con una variazione inferiore al 15%, dimostrando la bontà della mesh). Il confronto fra lo stato di tensione nodale e quello mediato negli elementi è riportato nella figura 17. Come si può vedere da detta figura la mesh è stata infittita (processo di "refining mesh") nelle zone degli intagli, in corrispondenza delle quali sono principalmente concentrati i gradienti di tensione. La tensione equivalente massima, indotta nel supporto dai carichi applicati, non supera il valore di 0.23 MPa. Ciò vuol dire che il supporto lavora ben al di sotto della tensione ammissibile (50 MPa). Si ricorda che lo spessore scelto è sovradimensionato rispetto alle condizioni di carico. Va precisato che queste osservazioni valgono per il supporto disposto con il piano delle lamelle in posizione verticale (lamelle parallele alla direzione della gravità); se invece si dovesse disporre la struttura in posizione orizzontale, lo stato di sollecitazione conseguente risulterebbe considerevolmente più gravoso: ad esempio, nel caso di  $h=0.5$  mm, la struttura arriverebbe a lavorare con una  $\sigma_{eq}$  massima superiore al 50% di quella ammissibile ( $\sigma_{eq}^{max} \simeq 25MPa$ ), mentre, in posizione verticale, le lamelle sarebbero soggette ad una sollecitazione massima non superiore a 2.5 MPa. La struttura è stata verificata anche per il caso di massa centrale non perfettamente centrata rispetto al piano baricentrale del supporto, considerando un'eccentricità pari a  $\frac{1}{4} \cdot T_s$ , dove  $T_s$  indica l'altezza del cilindro da sostenere. Anche in questo caso lo stato di tensione indotto (con  $\sigma_{max} \simeq 1MPa$ ) è ben lontano dalla tensione massima ammissibile. L'effetto di tale eccentricità sul valore delle frequenze di vibrazione è trascurabile. Nella figura 18 sono riportati rispettivamente la tensione equivalente e lo spostamento totale

### 9.2 Analisi di buckling lineare

Con il modello agli elementi finiti si è verificata la configurazione scelta rispetto all'instabilità a carico di punta. Come risulta chiaro dall'analisi statica, le lamelle verticali esterne sono



Soluzione Nodale



Soluzione negli elementi

Figure 17: Confronto fra la soluzione nei nodi e negli elementi

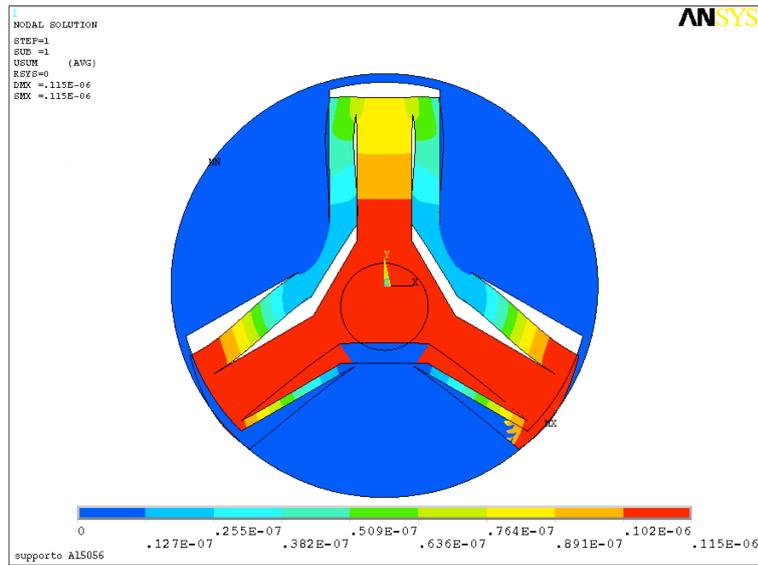


Figure 18: *Spostamento USUM*

soggette a compressione ed essendo strutture sottili e lunghe (con un rapporto  $h/L \gg 30$ ) possono dar luogo a collasso per instabilità a carico di punta. Si è quindi fatto un calcolo per individuare il valore del carico critico, ossia del valore minimo del carico di compressione che può provocare, in presenza di piccole perturbazioni, il collasso della struttura per ingobbamento. Il file di input usato per il calcolo è riportato in appendice F. Il risultato del calcolo fornisce il seguente valore per il carico critico Euleriano:

$$P_{cr} = 350N$$

Considerando l'ordine di grandezza delle masse da sorreggere (nel caso del prototipo si tratta di masse non superiori a 500 gr) si può affermare che, fissato il valore dello spessore a 1.5 mm, si lavora abbondantemente in sicurezza. È bene comunque far presente che il valore del carico di punta si riduce del 64 % se si passa da 1.5 mm a 1 mm (mentre la  $\sigma_{eq}$  varia solo del 22%), a dimostrazione di quanto sia importante questa verifica qualora si volesse spingere a limite il valore dello spessore  $h$  delle lamelle per rendere minima la frequenza di risonanza.

### 9.3 Analisi modale

L'analisi modale di una struttura consente di calcolare le frequenze naturali e le deformate caratteristiche dei modi di una struttura elastica. L'algoritmo risolutivo adottato

per l'estrazione delle frequenze è quello di Block-Lanczos. Quest'ultimo è infatti il più robusto metodo di estrazione di autovalori che consente di risolvere modelli anche complessi (beam, shell, solid meshes, ecc). Il calcolo modale è stato condotto sia in assenza di carichi che tenendo conto dello stato di tensione indotto dalla forza peso, attivando, in questo secondo caso, la procedura "prestressed modal analysis". Si tenga presente, infatti, che lo stato di tensione di una struttura sotto carichi costanti (statici) può condizionare le sue frequenze naturali. In particolar modo questo effetto può essere rilevante per strutture particolarmente sottili in una o due dimensioni<sup>5</sup>, come nel nostro caso (lamelle).

Nella tabella seguente si riportano i valori delle frequenze dei primi 5 modi propri di vibrare per la struttura scarica e in presenza di stress, mentre nella figura 19 è illustrata la deformata caratteristica del modo fondamentale. Poichè i carichi applicati non inducono elevati stati di tensione nelle lamelle non c'è alcuna differenza significativa ed apprezzabile fra i due casi menzionati. Ha quindi senso fare il confronto fra il valore della prima frequenza naturale stimata con Ansys e il valore calcolato analiticamente.

<i>N</i> <sup>o</sup> <b>modo</b>	<b>f[Hz]</b>
primo	57
secondo	107.2
terzo	107.2
quarto	148.4
quinto	242.6

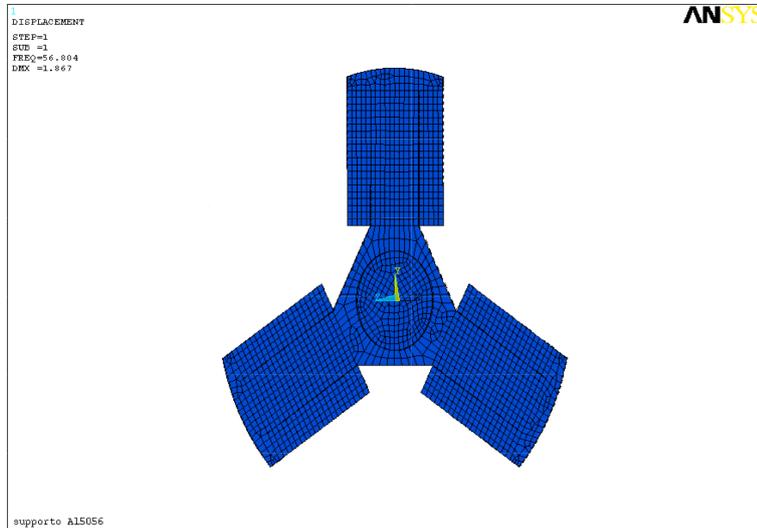
Table 7: *Frequenze naturali per la configurazione scelta per Al5056*

#### 9.4 Analisi armonica

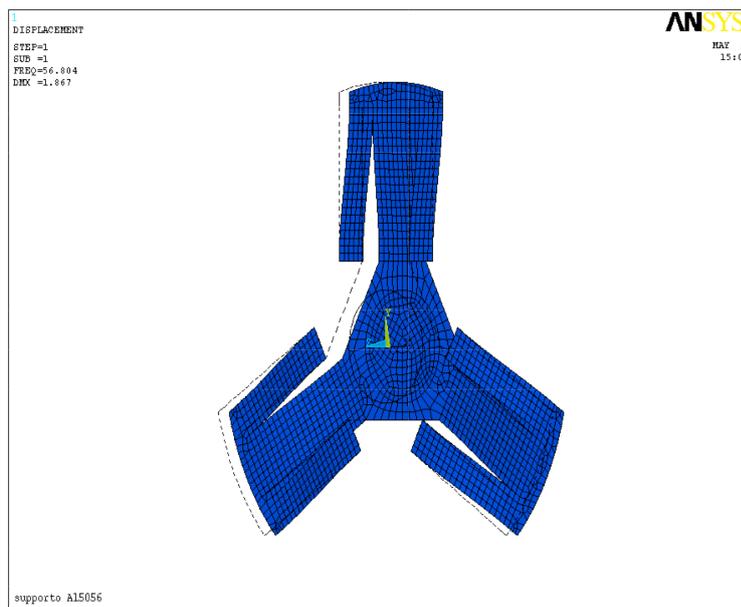
Nel calcolo di analisi armonica si è voluto analizzare la risposta della struttura qualora assoggettata ad un carico baricentrale diretto lungo l'asse del supporto, come mostrato in figura 20. Il carico applicato è la somma di carichi sinusoidali di intensità pari a 100 N e frequenza variabile da 0 a 200 Hz, aventi tutti la stessa fase. Il risultato dell'analisi armonica è mostrato nella figura 21 e da conferma dei risultati ottenuti con l'analisi modale.

---

<sup>5</sup>Si consideri ad esempio una corda di chitarra che deve essere accordata. All'aumentare del carico assiale, aumenta anche la frequenza trasversale di risonanza. Questo è un tipico esempio di effetto di rigidità per effetto dello stato di tensione



**Configurazione indeformata**



**Configurazione deformata**

Figure 19: *Deformata del primo modo proprio di vibrare*

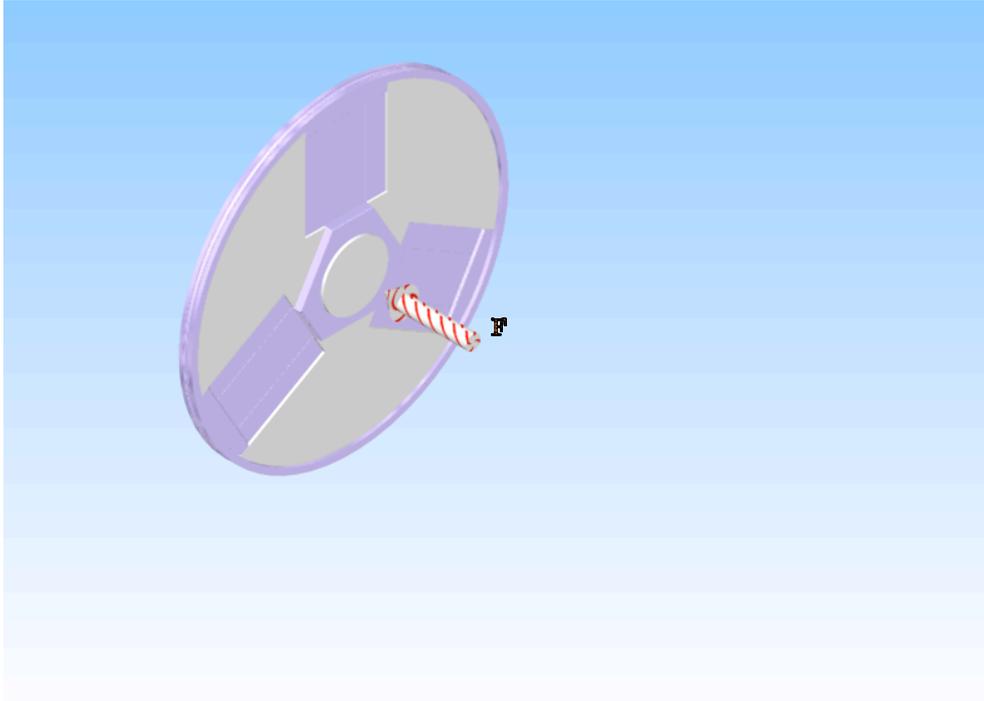


Figure 20: *Condizione di carico pulsante per l'analisi armonica*

## 10 Estrapolazione dei risultati dal prototipo al supporto effettivo

In questo paragrafo ci si propone di ricavare la frequenza fondamentale di risonanza di un supporto a tre travi ripiegate a  $120^\circ$  con una massa cilindrica di assegnato raggio  $R_v$  e determinata massa  $m_v$ , conoscendo la frequenza di risonanza di un prototipo, realizzato con lo stesso materiale, per una massa cilindrica di raggio  $R_p$  e di massa  $m_p$ .

A tal fine si indichi con  $S$  il rapporto fra il raggio della massa cilindrica del prototipo e quello della massa cilindrica effettiva da sostenere:

$$S = \frac{R_v}{R_p}$$

Le dimensioni nel piano di giacenza delle lamelle si ricavano da quelle del prototipo moltiplicando per il fattore di scala:

$$L_v = SL_p$$

$$w_v = S \cdot w_p$$

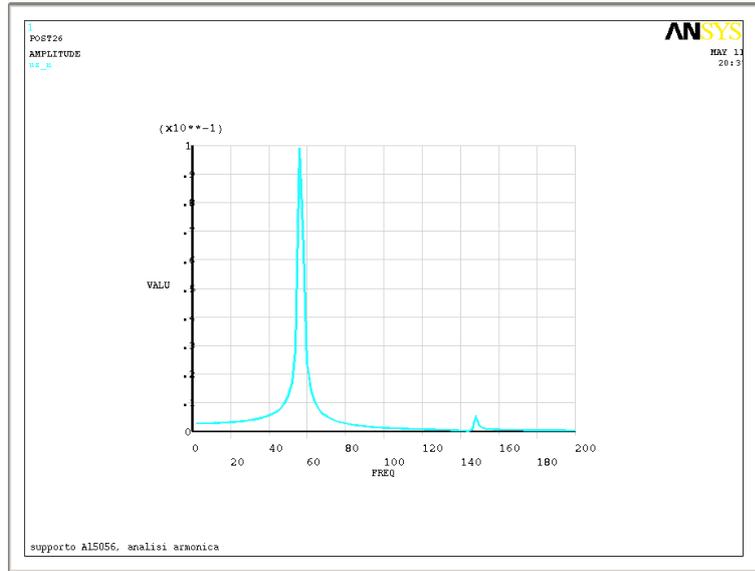


Figure 21: Risultato del calcolo di analisi armonica

La determinazione dello spessore trasversale delle lamelle deve, invece, dedursi da criteri di resistenza strutturale. Come è apparso dall'analisi statica sul prototipo, riportata nei paragrafi precedenti, la condizione più stringente sullo spessore è imposta dal criterio di resistenza ad instabilità a carico di punta. Si assumerà quindi questo criterio come riferimento per ottenere la relazione fra  $h_v$  e  $h_p$

$$h_v \geq \sqrt[3]{\frac{\beta m_v L_v^2}{w_v}}$$

dove  $\beta \propto \frac{1}{\pi^2 E}$ . Elaborando opportunamente l'ultima equazione:

$$h_v = \sqrt[3]{\frac{\beta m_v S^2 L_p^2 m_p}{S \cdot w_p m_p}} = \sqrt[3]{\frac{m_v}{m_p}} S \cdot h_p$$

Per esprimere, infine, la frequenza del primo modo proprio dell'intera struttura supporto-massa cilindrica si fa riferimento all'equazione seguente:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 E w_v h_v^3}{2 m_v L_v^3}}$$

Sostituendo i valori dei parametri geometrici critici  $L_v, w_v, h_v$  in funzione di quelli del prototipo, si giunge alla seguente relazione fra la frequenza del progetto effettivo rispetto

a quella del prototipo:

$$f_v = \left[ \sqrt{\frac{1}{S}} \right] f_p \quad (25)$$

È stato fatto il calcolo nel caso di una massa cilindrica di 20 Kg, con un diametro di 0.355 m. Il fattore di scala  $S$  in questo caso vale circa 7. In base alle formule precedenti, se il supporto fosse realizzato in Al5056, dovrebbe essere costruito con alette di spessore pari a circa 5 mm. Bisogna sottolineare che  $f_p$  è la frequenza di risonanza corrispondente allo spessore minimo delle lamelle conformemente ai criteri di instabilità e di resistenza strutturale, che nel caso del prototipo di Al5056 dimensionato è  $\frac{1}{3}h_{p,s}$ , dove  $h_{p,s}$  indica il valore sovradimensionato scelto per il prototipo. Lo spessore che coerentemente ai criteri di sicurezza strutturale e di instabilità consentirebbe, infatti, di raggiungere il valore minimo della frequenza di risonanza è  $h_p = 0.5 \text{ mm}$ , mentre si è scelto uno spessore effettivo 3 volte maggiore. La frequenza di risonanza del primo modo calcolata per questa configurazione, secondo la formula 25, vale  $f_v = \left[ \sqrt{\frac{1}{S} \frac{1}{27}} \right] f_{p,s} \simeq 4 \text{ Hz}$ . Il calcolo con Ansys, sempre per lo stesso caso, fornisce il valore di 3 Hz per la frequenza del modo fondamentale, in buon accordo con le previsioni teoriche.

## 11 Conclusioni

In questo lavoro è stato presentato lo studio di un supporto per masse cilindriche, avente la frequenza fondamentale di risonanza inferiore a 10 Hz. È stata descritta in dettaglio la procedura di dimensionamento per ottenere la più bassa frequenza di risonanza possibile conformemente ai criteri di resistenza strutturale e di instabilità a carico critico. Tale procedura si è avvalsa sia di metodi analitici che di metodi agli elementi finiti ed il confronto fra i risultati ottenuti dai due metodi ha consentito una sorta di validazione delle schematizzazioni del supporto. Infine è stato costruito un modello 3D agli elementi finiti per verificare lo stato di tensione e deformazione atteso, nonché per sviluppare l'analisi modale e armonica. Sono stati analizzati diversi tipi di materiale da usare per la realizzazione del supporto e in questo rapporto sono stati riportati i risultati per i seguenti 3 materiali: Al5056, CuAl, Ti. Dei tre materiali elencati quello con modulo di Young più basso è l'Al5056 che consente, a parità di dimensioni del supporto e a parità di massa centrale, di ottenere frequenze fondamentali di risonanza più basse e più distanti dalla seconda armonica. In relazione a quanto detto è stato fornito il disegno esecutivo di un prototipo in Al5056, che ha un ingombro radiale massimo di 125 mm e deve sorreggere una massa di 200 gr circa. Tale prototipo deve dimostrare la fattibilità e funzionalità di questa particolare tipologia di supporto a "travi ripiegate", sia al fine di intraprendere un progetto definitivo per grosse masse cilindriche (da decine di Kg fino a qualche ton-

nellata), che per realizzare una nuova generazione di trasduttori risonanti per rivelatori gravitazionali. In appendice D si riporta il disegno tecnico esecutivo di tale prototipo

### **References**

- [1] P.Rapagnani: Nuovo Cimento C, 5, 385 (1982)
- [2] TESI STANFORD-Comunicazione interna
- [3] A.E.LOVE, A Treatise on the mathematical Theory of Elasticity, New York Dover Publication

## Allegato A

```
/TITLE,cost_elastica equivalente del risonatore di Stanford
/PREP7
antype,static
*SET,w,0.01
*SET,l,0.0235
*SET,h,0.00071
*SET,rho,8570.
*SET,delta,0.004
*SET,pi,4.*atan(1.)
*SET,j1z,1/12*(w*h**3)
*SET,j1y,1/12*(h*w**3)
*SET,j2z,1/12*(2*w*h**3)
*SET,j2y,1/12*(h*8*w**3)
*SET,a1,w*h
*SET,a2,2*w*h
*SET,force,50.
/COM,-----
/COM, modello-geometria
/COM,-----
/view,1,1,2,3
k,1,0.,0.,0.
k,2,-2*w,0.,-delta*0.5
k,3,-2*w,0.,-2*1-delta*0.5
k,4,0.,0.,-2*1-delta*0.5
k,5,2*w,0.,-2*1-delta*0.5
k,6,2*w,0.,-delta*0.5
k,7,2*w,0.,+delta*0.5
k,8,2*w,0.,+2*1+delta*0.5
k,9,0.,0.,+2*1+delta*0.5
k,10,-2*w,0.,+2*1+delta*0.5
k,11,-2*w,0.,+delta*0.5
k,12,0.,0.,-delta*0.5
k,13,0.,0.,+delta*0.5
/pnum,kp,1
kplot
1,2,3
1,3,4
1,4,5
1,5,6
1,7,8
1,8,9
1,9,10
1,10,11
1,4,12
1,9,13
/COM,-----
/COM, materiali-tipi di elementi
/COM,-----
et,1,beam4
mp,dens,1,rho
mp,ex,1,1.05E+11
mp,nuxy,1,0.4
mp,ex,2,1.E+15
mp,nuxy,2,0.3
r,1,a1,j1z,j1y,w,h,
r,2,a2,j2z,j2y,2w,h
/COM,-----
/COM, meshiatura della struttura
/COM,-----
lsel,s,line,,1,4,3
lsel,a,line,,5,8,3
lesize,all,,10
type,1
mat,1
real,1
lmesh,all
allsel
lsel,s,line,,9,10
lesize,all,,10
type,1
mat,1
real,2
lmesh,all
allsel
lsel,s,line,,2,3,1
lsel,a,line,,6,7,1
lesize,all,,5
type,1
mat,2
real,1
lmesh,all
allsel
nkpt,,1
*get,last,node,0,num,max
allsel
```

```

ksel,s,kp,,12
nslk,s
*get,n12,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,13
nslk,s
*get,n13,node,0,num,max
allsel
type,1
mat,2
real,1
e,n12,last
e,last,n13
allsel
nummerg,all
/COM,-----
/COM,condizioni di vincolo
/COM,-----
ksel,s,kp,,2,6,4
ksel,a,kp,,7,11,4
nslk,s
d,all,all
esel,s,mat,,2
nsle,s
d,all,rotx,0,,,rotz
d,all,ux,0,
allsel
finish
/COM,-----
/COM,soluzione modale
/COM,-----
/solu
antype,modal
modopt,lanb,10
solve
finish
/COM,-----

```

## Allegato B

```
/TITLE,Calcolo delle reazioni vincolari e dello stao di sollecitazione(w,0.018,1,0.100,h=0.0005 m)
/PREP7
antype,static
*SET,w,0.018
*SET,l,0.100
*SET,h,0.0005
*SET,rho,2700.
*SET,pi,4.*atan(1.)
*SET,R,w/sqrt(2)
*set,j1z,2*((h*(w)**3)/12)+(w*h*(1.5*w)**2)
*SET,j1y,2*(w*(h**3))/12
*set,j2z,(h*(2*w)**3)/12
*SET,j2y,(2*w*(h**3))/12
*SET,a1,w*h
*SET,a2,2*w*h
*SET,force,2.
*SET,Rs,sqrt(2)*w/2
/com,*SET,epsi,1.5*w
*SET,epsi,0*w
/COM,-----
/COM, modello-geometria
/COM,-----
/view,1,0,0,1
/pnum,kp,1
csys,1,1
k,1,0.,0.,0.
k,2,Rs,90.,0.,
k,3,Rs,210.,0.,
k,4,Rs,330.,0.
csys,0
k,5,epsi,Rs,0.,
k,6,epsi,l+Rs,0.,
k,7,0.,l+Rs,0.
k,8,-epsi,l+Rs,0.,
k,9,-epsi,Rs,0,
ksel,s,kp,,1,4,1
ksel,inve
csys,1,1
kgen,3,all,,0.,120.,0
allsel
csys,0
1,1,2
1,1,3
1,1,4
1,5,6
/com,1,6,7
/com,1,7,8
1,9,8
1,2,7
1,19,18
/com,1,18,17
/com,1,17,16
1,15,16
1,4,17
1,14,13
/com,1,13,12
/com,1,12,11
1,10,11
1,3,12
/COM,-----
/COM, materiali-tipi di elementi
/COM,-----
et,1,beam4
mp,dens,1,rho
mp,ex,1,7.2E+10
mp,nuxy,1,0.33
mp,dens,2,rho
mp,ex,2,1.E+16
/com,mp,ex,2,1.05E+11
mp,nuxy,2,0.3
r,1,a1,j1z,j1y,h,,w
r,2,a2,j2z,j2y,h,,2*w
lsel,s,line,,4,5,1
lsel,a,line,,7,8,1
lsel,a,line,,10,11
lesize,all,,20
type,1
mat,1
real,1
lmesh,all
allsel
lsel,s,line,,6,12,3
lesize,all,,20
type,1
mat,1
```

```

real,2
lmesh,all
allsel
lsel,s,line,,1,3,1
lesize,all,,5
type,1
mat,2
real,2
lmesh,all
allsel
/com,-----
/com, vincoli e carichi
/com,-----
ksel,s,kp,,7
nslk,s
*get,nn1,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,6
nslk,s
*get,nn2,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,8
nslk,s
*get,nn3,node,0,num,max
allsel
nset,s,node,,nn1
nset,a,node,,nn2
nset,a,node,,nn3
cerig,nn1,all,all,
allsel
ksel,s,kp,,12
nslk,s
*get,nn1,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,11
nslk,s
*get,nn2,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,13
nslk,s
*get,nn3,node,0,num,max
allsel
nset,s,node,,nn1
nset,a,node,,nn2
nset,a,node,,nn3
cerig,nn1,all,all,
allsel

ksel,s,kp,,17
nslk,s
*get,nn1,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,16
nslk,s
*get,nn2,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,18
nslk,s
*get,nn3,node,0,num,max
allsel
nset,s,node,,nn1
nset,a,node,,nn2
nset,a,node,,nn3
cerig,nn1,all,all,
allsel

ksel,s,kp,,1
nslk,s
*get,nn1,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,2
nslk,s
*get,nn2,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,3
nslk,s
*get,nn3,node,0,num,max
allsel
ksel,s,kp,,4
nslk,s
*get,nn4,node,0,num,max
allsel
nset,s,node,,nn1
nset,a,node,,nn2
nset,a,node,,nn3
nset,a,node,,nn4
cerig,nn1,all,all,
allsel

```

```

ksel,s,kp,,5,9,4
ksel,a,kp,,10,14,4
ksel,a,kp,,15,19,4
nslk,s
d,all,all
allsel
ksel,s,kp,,1
nslk,s
*get,node,node,0,num,max
f,node,fy,-Force
allsel
/solu
outpr,basic,1
outpr,nload,1
solve
finish
/post1
force,static
ksel,s,kp,,5,
nslk,s
fsum
*get,y_1,fsum,,item,fy
*get,x_1,fsum,,item,fx
*get,z_1,fsum,,item,fz
*get,mx_1,fsum,,item,mx
*get,my_1,fsum,,item,my
*get,mz_1,fsum,,item,mz
*set,r_1,sqrt((y_1)**2+(x_1)**2+(z_1)**2)
allsel
ksel,s,kp,,9,
nslk,s
fsum
*get,y_2,fsum,,item,fy
*get,x_2,fsum,,item,fx
*get,z_2,fsum,,item,fz
*get,mx_2,fsum,,item,mx
*get,my_2,fsum,,item,my
*get,mz_2,fsum,,item,mz
*set,r_2,sqrt((y_2)**2+(x_2)**2+(z_2)**2)
allsel
ksel,s,kp,,10,
nslk,s
fsum
*get,y_3,fsum,,item,fy
*get,x_3,fsum,,item,fx
*get,z_3,fsum,,item,fz
*get,mx_3,fsum,,item,mx
*get,my_3,fsum,,item,my
*get,mz_3,fsum,,item,mz
*set,r_3,sqrt((y_3)**2+(x_3)**2+(z_3)**2)
/com, tangente dell'angolo di r3 rispetto all'orizzontale
*set,ang3,(atan((y_3/x_3)))/(pi/180.)
allsel
ksel,s,kp,,14,
nslk,s
fsum
*get,y_4,fsum,,item,fy
*get,x_4,fsum,,item,fx
*get,z_4,fsum,,item,fz
*get,mx_4,fsum,,item,mx
*get,my_4,fsum,,item,my
*get,mz_4,fsum,,item,mz
*set,r_4,sqrt((y_4)**2+(x_4)**2+(z_4)**2)
/com, tangente dell'angolo di r4 rispetto all'orizzontale
*set,ang4,(atan((y_4/x_4)))/(pi/180.)
allsel
ksel,s,kp,,15,
nslk,s
fsum
*get,y_5,fsum,,item,fy
*get,x_5,fsum,,item,fx
*get,z_5,fsum,,item,fz
*get,mx_5,fsum,,item,mx
*get,my_5,fsum,,item,my
*get,mz_5,fsum,,item,mz
*set,r_5,sqrt((y_5)**2+(x_5)**2+(z_5)**2)
/com, tangente dell'angolo di r5 rispetto all'orizzontale
*set,ang5,(atan((y_5/x_5)))/(pi/180.)
allsel
ksel,s,kp,,19,
nslk,s
fsum
*get,y_6,fsum,,item,fy
*get,x_6,fsum,,item,fx
*get,z_6,fsum,,item,fz
*get,mx_6,fsum,,item,mx
*get,my_6,fsum,,item,my
*get,mz_6,fsum,,item,mz

```

```
*set,r_6,sqrt((y_6)**2+(x_6)**2+(z_6)**2)
/com, tangente dell'angolo di r6 rispetto all'orizzontale
*set,ang6,(atan((y_6/x_6)))/(pi/180.)
allsel
/abc,forc
/com,/post1
/com,set,1,1
/com,esel,s,real,,2
/com,nsle,s
/com,etable,smax,nmisc,1
/com,pletab,smax
/com,nset,all
/com,fini
```

## Allegato C

```

nn={{-P,-1/(r Sin[alpha]),2 Cos[alpha],-2 Sin[alpha],1/(r Sin[alpha])},{P,1/(
  r Sin[alpha]),-2 Cos[alpha],2 Sin[alpha],-1/(r Sin[alpha])},{0,-
  Cos[alpha]/(r Sin[alpha]),-1,0,Cos[alpha]/(r \
Sin[alpha])},{0,Cos[alpha]/(r Sin[alpha]),1,0,-Cos[alpha]/(r \
Sin[alpha])},{0,0,-1,0,0},{0,0,1,0,0}}

nprodotti:=Array[nnn,{6,15}]
For[k=1,k 6, indice:= 1;For[i=1, i5, For[j=i,j5,nnn[k,
  indice]=nn[k,i]*nn[k,j];indice++;j++;i++;k++]]

nprodotti

nintegrata=nprodotti*1/young/A

nintegratasommacolonne:=Array[nsomm,{15}]
For[i=1,i15, sommatoria=0;
  For[k=1,k6,sommatoria=
  sommatoria+nintegrata[[k,i];k++];nsomm[i]=sommatoria;i++]

nintegratasommacolonne

mm = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, x/r + 1, 0,
  x, -x /r}, {0, (2 l - x) /r + 1, 0,
  2 l - x, - (2 l - x) /r}, {0, 0, 0, -x, -1}, {0, 0,
  0, - (2 l - x), -1}}

mprodotti:=Array[mmm, {6,15}]
For[k=1,k6,indice:=1;For[i=1,i5,For[j=i,j5,mmm[k,indice]=mm[[k,i]]*mm[[
  k,j]];indice++;j++;i++;k++]]

mprodotti

mintegrata=(1/young/JJ) mprodotti

For[k=1,k3, For[
  j=1,j15,mintegrata[[2*k-1,j]]=mintegrata[[2*k-1,j]]*(JJ/JJJ);j++;k++]

For[k=1,k3, For[
  j=1,j15,mintegrata[[
  2*k-1,j]]=Integrate[mintegrata[[2*k-1,j]], {x,0,1}];j++;k++]

For[k=1,k3, For[
  j=1,j15,mintegrata[[2*k,
  j]]=Integrate[mintegrata[[2*k,j]], {x,1,2 *1}];j++;k++]

nintegratasommacolonne:=Array[msomm,{15}]
For[i=1,i15,sommatoria=0;For[
  k=1,k6,sommatoria=sommatoria+mintegrata[[k,i];k++];msomm[
  i]=sommatoria;i++]

nintegratasommacolonne

carrsollsommm:=nintegratasommacolonne+nintegratasommacolonne

carrsollsommm

matricesistema:={{carrsollsommm[[
  6]],carrsollsommm[[7]],carrsollsommm[[8]],
  carrsollsommm[[9]],{carrsollsommm[[7]],carrsollsommm[[10]],carrsollsommm[[
  11]],carrsollsommm[[12]]},{
  carrsollsommm[[8]],carrsollsommm[[11]],carrsollsommm[[
  13]],carrsollsommm[[14]],{carrsollsommm[[9]],carrsollsommm[[12]],
  carrsollsommm[[14]],carrsollsommm[[15]]}}

matricesistema

sistema=Dot[matricesistema,{x1,x2,x3,x4}]

alpha:=60./180.*Pi

alpha

1.0472

sol:=Solve[sistema=={-
  carrsollsommm[[2]],-carrsollsommm[[3]],-carrsollsommm[[4]],-

```

```

carrsollsomm[[5]],{x1,x2,x3,x4}

sol1

sol2 :=
ReplaceAll[
sol, {A \[Rule] 2 w h, JJ \[Rule]
1/12 h (2 w)^3, JJJ \[Rule] 2/12 h (w)^3+2*w*h*(1.5*w)^2, r \[Rule] \
Sqrt[2] w}]

sol2

sol3 :=
ReplaceAll[
sol2, {young \[Rule] 105 10^9, P \[Rule] 1,
l \[Rule] 0.0235, w \[Rule] 0.01,
h \[Rule] 0.00071}]

sol3

{{x1\[Rule]0.00354674,x2\[Rule]0.152403,x3\[Rule]-0.304548,
x4\[Rule]0.0039215}}

xx1:= x1 /.sol3;xx2:= x2 /.sol3;xx3:= x3 /.sol3;xx4:= x4 /.sol3

v1:= 1 + ((xx1^2)/(Sqrt[2]*0.01*Sqrt[3]))+xx2*(-1)+xx3*Sqrt[3]+((xx4^2)/(Sqrt[2]*0.01*Sqrt[3]))
v1
{0.289506}
v2:=xx1*(1/(Sqrt[2]*0.01*Sqrt[3]))+xx2*(1)+xx4*(-1/(Sqrt[2]*0.01*Sqrt[3]))
v2
{0.137103}
h2:=xx1*(1/(0.01*Sqrt[2]))+xx3*(1)+xx4*(-1/(0.01*Sqrt[2]))
h2
{-0.331047}
r2=Sqrt[(h2^2)+(v2^2)]
{0.358315}
r3=Sqrt[(xx2^2)+(xx3^2)]
{0.340552}

```

## Allegato D

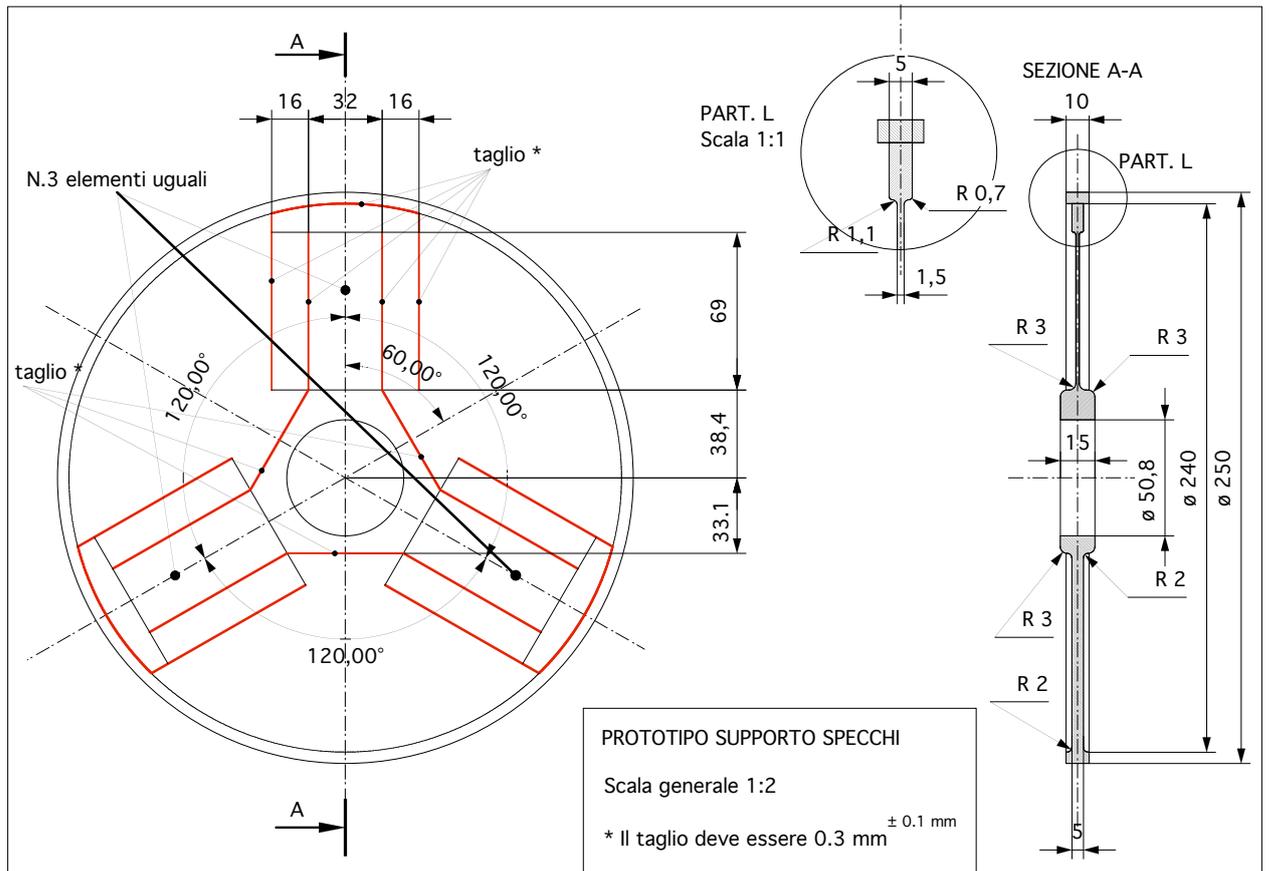


Figure 22: *Disegno esecutivo del prototipo*

## Allegato E

```
/TITLE,supporto A15056
/PREP7
/pnum,area,1
/pnum,line,1
/pnum,kp,1
*SET,GR,9.80665      ! gravity [m/s^2]
*SET,pi,4.*atan(1.)
/com,-----
/com,parametri geometrici da impostare
/com,-----
*SET,l,0.069*0.5
*SET,h,0.0015
*SET,w,0.016
*SET,b1,0.013
*set,b2,0.005
*SET,p2,0.007
*SET,s1,0.015
*SET,s,0.005
*SET,t,0.005
*SET,Ri,0.0254
*SET,Ts,0.025
/com,-----
/com,-----
/com,parametri geometrici derivati
/com,-----
*SET,Ro,sqrt((Ri+b1+2*l+p2)**2+(2*w)**2)+b2
*SET,p1,Ro-b2-(Ri+b1+2*l)
/com,-----
/com,proprieta' dei materiali da assegnare
/com,-----
/com,supporto
*SET,rhon,2700.
*SET,youn,0.72E+11
*SET,poin,.33
/com,specchi
*SET,rhs,3180.
*SET,yous,7.6E+10
*SET,pois,.26
/com,-----
/com, massa specchi
/com,-----
/com,*SET,ms,0.16
*SET,ms,pi*(Ri*Ri)*rhs*Ts
/com,-----
/com, massa delle mezze lune
/com,-----
*SET,c,(4*w)**2
*SET,arg,1-(c/(2*(Ro-b2)**2))
*SET,alpha,ACOS(arg)
*SET,Aml1,(0.5*alpha*(Ro-b2)**2)-0.5*4*w*sqrt((Ro-b2)**2-4*(w)**2)
*SET,Aml2,4*w*p2
*SET,Aml,Aml1+Aml2
*SET,Mml,Aml*s*rhon
/COM,-----
/COM, modello-geometria
/COM,-----
/view,1,0,0,1
csys,1,1
k,1,0.,0.,0.
k,2,Ro,30,0.
k,3,Ro,90.,0
k,4,Ro-b2,90.,0
k,104,Ro-b2,90.,0
k,6,Ro-b2-p1,90.,0
k,106,Ro-b2-p1,90.,0
csys,0
k,5,2*w,Ro-b2-(p1-p2),0.
k,105,2*w,Ro-b2-(p1-p2),0.
k,7,2*w,(Ro-b2-p1),0
k,107,2*w,(Ro-b2-p1),0
k,8,0.,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,108,0.,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,9,2*w,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,109,2*w,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,12,w,Ro-b2-p1,0.
k,112,w,Ro-b2-p1,0.
k,13,w,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,113,w,Ro-b2-p1-2*1,0.
csys,1,1
k,10,Ri,90,0.
k,110,Ri,90,0.
k,11,Ri,30,0.
k,111,Ri,30,0.
*SET,tbeta,w/(Ro-b2-p1-2*1)
*SET,beta,atan(tbeta)
```

```

*SET,gamma,60*pi/180-beta
*SET,raux,sqrt(w**2+(Ro-b2-p1-2*1)**2)
*SET,rpri,raux*cos(gamma)
csys,1,1
k,14,rpri,30,0
k,114,rpri,30,0
/com,k,14,sqrt(3)/2*sqrt(w**2+(Ro-b2-p1-2*1)**2),30,0
/com,k,114,sqrt(3)/2*sqrt(w**2+(Ro-b2-p1-2*1)**2),30,0
/com,k,111,Ri,30,0
csys,1,1
l,1,11
l,11,14
l,14,2
l,2,3
l,3,4
l,4,6
l,6,8
l,8,10
l,10,1
l,10,11
l,4,5
csys,0
l,5,7
l,6,12
l,12,7
l,7,9
l,8,13
l,13,9
l,12,13
l,13,14
csys,1,1
l,1,111
l,111,114
l,114,2
l,2,3
l,3,104
l,104,106
l,106,108
l,108,110
l,110,1
l,110,111
l,104,105
csys,0
l,105,107
l,106,112
l,112,107
l,107,109
l,108,113
l,113,109
l,112,113
l,113,114
allsel
/COM,-----
/COM, mapped-mesh
/COM,-----
lsel,s,line,,16,17,1
lsel,a,line,,13,14,1
lesize,all,,5
allsel
lsel,s,line,,34,35
lsel,a,line,,31,32
lesize,all,,5
allsel
lsel,s,line,,19
lsel,a,line,,37
lesize,all,,5,
allsel
lsel,s,line,,12
lsel,a,line,,30
/com,lesize,all,,2
lesize,all,,4,
allsel
lsel,s,line,,36
lsel,a,line,,33
lsel,a,line,,18
lsel,a,line,,15
lesize,all,,20
lsel,a,line,,11
lsel,a,line,,29
/com,lesize,all,,8
lesize,all,,10
allsel
lsel,s,line,,28
lsel,a,line,,10
/com,lesize,all,,7
lesize,all,,8
allsel
lsel,s,line,,1

```

```

lsel,a,line,,20
lesize,all,,8.
lsel,all
lsel,s,line,,5
/com,lesize,all,,2
lesize,all,,2
allsel
lsel,s,line,,4
lesize,all,,26,
allsel
lsel,s,line,,3
lsel,a,line,,22
lesize,all,,25
allsel
lsel,s,line,,2
lsel,a,line,,21
/com,lesize,all,,2
lesize,all,,2
allsel
lsel,all
lsymm,x,all
allsel
lsel,s,loc,x,0
ldele,all
allsel
lsel,s,line,,41
lsel,a,line,,4
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,11
lsel,a,line,,48
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,29
lsel,a,line,,66
ksll,s
nummrg,kp
allsel
1,3,4
lesize,5,,2
allsel
lsel,all
lsymm,x,all
allsel
lsel,s,loc,x,0
ldele,all
allsel
lsel,s,line,,41
lsel,a,line,,4
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,11
lsel,a,line,,48
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,29
lsel,a,line,,66
ksll,s
nummrg,kp
allsel
1,3,4
lesize,5,,2
allsel
/com,area,fissa
al,-40,41,5,48,49,52,54,56
al,5,4,3,19,17,15,12,11
/com,parti mobili
lsel,s,line,,68
lsel,a,line,,31
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,71
lsel,a,line,,34
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,73,68,31,36,34,71
al,67,66,29,30,32,31,68,69
lsel,s,line,,69
lsel,a,line,,55
ksll,s
nummrg,kp
allsel

```

```

lsel,s,line,,70
lsel,a,line,,54
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,70,69,55,54
allsel
lsel,s,line,,33
lsel,a,line,,17
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,32
lsel,a,line,,18
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,18,32,17,33
ldele,59
ldele,22
allsel
lplot
lsel,s,line,,57,
lsel,a,line,,20
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,28
lsel,a,line,,65
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,-58,74,71,28,65,34,37,21
al,-57,65,28,20,
allsel
lsla,s
lsel,inve
ldele,all
allsel
csys,1,1
agen,3,all,,120,0,,0,0
allsel
lsel,s,line,,25
lsel,a,line,,40
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,3
lsel,a,line,,79
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,1
lsel,a,line,,92
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,58
lsel,a,line,,72
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,110
lsel,a,line,,21
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,62
lsel,a,line,,113
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,57
lsel,a,line,,78
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,20
lsel,a,line,,116
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,77
lsel,a,line,,117
ksll,s
nummrg,kp
allsel
/CDM,-----

```

```

/COM, elemento
/COM,-----
et,1,shell43,
/COM,-----
/COM, materiali-tipi di elementi
/COM,-----
/com,parte sottile (lamelle )
mp,dens,1,rhon
mp,ex,1,youn
mp,nuxy,1,poin
r,1,h,
allsel
/com,esagono + attorno agli specchi spesso(esagono)
mp,dens,2,rhon
mp,ex,2,youn
mp,nuxy,2,poin
/com,spessore medio esagono attorno specchi
r,4,s1
/com,spessore costante contorno fisso
r,5,t
/com,spessore medio mezze lune
r,2,s
/com,specchi
mp,dens,3,rhs
mp,ex,3,yous
mp,nuxy,3,pois
r,3,ms/(rhs*pi*Ri**2)
allsel
/com,-----
/com,meshiatura parte spessa -contorno fisso
/com,-----
type,1
real,5
mat,1
asel,s,area,,1,2,1
asel,a,area,,17,18,1
asel,a,area,,9,10
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,meshiatura mezze lune
/com,-----
type,1
real,2
mat,1
asel,s,area,,4
asel,a,area,,20
asel,a,area,,12
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,meshiatura parte spessa -esagono attorno specchi
/com,-----
type,1
mat,1
real,4
asel,s,area,,7,
asel,a,area,,15,
asel,a,area,,23,
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,meshiatura parte sottile
/com,-----
type,1
real,1
mat,1
asel,s,area,,3
asel,a,area,,5,6
asel,a,area,,11
asel,a,area,,13,14
asel,a,area,,19,
asel,a,area,,21,22
amesh,all
allsel
/com,-----
/com, meshiatura massa centrale-specchi
/com,-----
type,1
real,3
mat,3
asel,s,area,,8
asel,a,area,,16
asel,a,area,,24
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,generazione tagli

```

```

/com,-----
ksel,s,kp,,24,25
ksel,a,kp,,4
ksel,a,kp,,5,7,2
ksel,a,kp,,28
ksel,a,kp,,13
ksel,a,kp,,122,124
ksel,a,kp,,126,127
ksel,a,kp,,120
ksel,a,kp,,129
ksel,a,kp,,38
ksel,a,kp,,86,88
ksel,a,kp,,90,91
ksel,a,kp,,93
ksel,a,kp,,17
ksel,a,kp,,14
ksel,a,kp,,15
ksel,a,kp,,35,36
ksel,a,kp,,31
ksel,a,kp,,105,107,2
ksel,a,kp,,138,139
ksel,a,kp,,140,142
ksel,a,kp,,102,103
ksel,a,kp,,108
ksel,a,kp,,104
ksel,a,kp,,106
ksel,a,kp,,114
ksel,a,kp,,110
ksel,a,kp,,30
nslk,s
lsel,s,line,,52
lsel,a,line,,49
lsel,a,line,,48
lsel,a,line,,11
lsel,a,line,,12
lsel,a,line,,15
lsel,a,line,,19
lsel,a,line,,80
lsel,a,line,,82,84,1
lsel,a,line,,87,89,1
lsel,a,line,,91
lsel,a,line,,2
lsel,a,line,,7,9,1
lsel,a,line,,14
lsel,a,line,,16
lsel,a,line,,22
lsel,a,line,,24
lsel,a,line,,56
lsel,a,line,,70
lsel,a,line,,66,67
lsel,a,line,,29,30
lsel,a,line,,33
lsel,a,line,,37
lsel,a,line,,115
lsel,a,line,,106
lsel,a,line,,100
lsel,a,line,,105
lsel,a,line,,104
lsel,a,line,,109
lsel,a,line,,114
lsel,a,line,,76
lsel,a,line,,53
lsel,a,line,,44
lsel,a,line,,51
lsel,a,line,,50
lsel,a,line,,47
lsel,a,line,,74,75
lsel,a,line,,73
lsel,a,line,,36
lsel,a,line,,94
lsel,a,line,,97
lsel,a,line,,27
lsel,a,line,,39
lsel,a,line,,55
lsel,a,line,,18
lsel,a,line,,107
lsel,a,line,,108
lsel,a,line,,59
lsel,a,line,,60
nsl1,a
nsl1,inve
nummrg,node
allsel
allsel
asel,s,area,,3
asel,a,area,,19
asel,a,area,,11
esla,s

```

```

/color,elem,red,all
allsel
asel,s,area,,4,
asel,a,area,,20
asel,a,area,,12
esla,s
/color,elem,mage,all
allsel
asel,s,area,,13,14
asel,a,area,,5,6
asel,a,area,,21,22
esla,s
/color,elem,ygre,all
allsel
epplot
/COM,-----
/COM,condizioni di vincolo
/COM,-----
lsel,s,line,,4
lsel,a,line,,86
lsel,a,line,,93
lsel,a,line,,13
lsel,a,line,,26
lsel,a,line,,41
nsls,s
ksll,s
nslk,a
d,all,all
/com,csys,0
allsel
ACEL,,GR,
finish
/com,-----
/com,calcolo statico
/com,-----
/solu
antype,static
pstress,on
/com,ACEL,,GR,
/com,fk,1,mx,0.02
solve
fini
/com,-----
/com, analisi modale
/com,-----
/solu
antype,modal
pstress,on
acel,,GR
outres,all,all
modopt,lanb,100
solve
/com,fini
/com,-----
/com,/post1
/com,etable, strs, s, eqv
/com,esort, strs
/com,fini

```

## Allegato F

```

/TITLE,linear buckling Al5056
/PREP7
/pnum,area,1
/pnum,line,1
/pnum,kp,1
*SET,GR,9.80665      ! gravity [m/s^2]
*SET,pi,4.*atan(1.)
/com,-----
/com,parametri geometrici da impostare
/com,-----
*SET,l,0.069*0.5
*SET,h,0.0010
*SET,w,0.016
*SET,b1,0.013
*set,b2,0.005
*SET,p2,0.007
*SET,s1,0.015
*SET,s,0.005
*SET,t,0.005
*SET,Ri,0.0254
/com,-----
/com,-----
/com,parametri geometrici derivati
/com,-----
*SET,Ro,sqrt((Ri+b1+2*1+p2)**2+(2*w)**2)+b2
*SET,p1,Ro-b2-(Ri+b1+2*1)
/com,-----
/com, massa specchi
/com,-----
*SET,ms,0.16
/com,-----
/com,proprieta' dei materiali da assegnare
/com,-----
/com, supporto
*SET,rhon,2700.
*SET,youn,0.72E+11
*SET,poin,.33
/com,specchi
*SET,rhs,3180.
*SET,yous,7.6E+10
*SET,pois,.26
/com,-----
/com, massa delle mezze lune
/com,-----
*SET,c,(4*w)**2
*SET,arg,1-(c/(2*(Ro-b2)**2))
*SET,alpha,ACOS(arg)
*SET,Aml1,(0.5*alpha*(Ro-b2)**2)-0.5*4*w*sqrt((Ro-b2)**2-4*(w)**2)
*SET,Aml2,4*w*p2
*SET,Aml,Aml1+Aml2
*SET,Mml,Aml*s*rhon
/COM,-----
/COM, modello-geometria
/COM,-----
/view,1,0,0,1
csys,1,1
k,1,0.,0.,0.
k,2,Ro,30,0.
k,3,Ro,90.,0
k,4,Ro-b2,90.,0
k,104,Ro-b2,90.,0
k,6,Ro-b2-p1,90.,0
k,106,Ro-b2-p1,90.,0
csys,0
k,5,2*w,Ro-b2-(p1-p2),0.
k,105,2*w,Ro-b2-(p1-p2),0.
k,7,2*w,(Ro-b2-p1),0
k,107,2*w,(Ro-b2-p1),0
k,8,0.,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,108,0.,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,9,2*w,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,109,2*w,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,12,w,Ro-b2-p1,0.
k,112,w,Ro-b2-p1,0.
k,13,w,Ro-b2-p1-2*1,0.
k,113,w,Ro-b2-p1-2*1,0.
csys,1,1
k,10,Ri,90,0.
k,110,Ri,90,0.
k,11,Ri,30,0.
k,111,Ri,30,0.
*SET,tbeta,w/(Ro-b2-p1-2*1)
*SET,beta,atan(tbeta)
*SET,gamma,60*pi/180-beta
*SET,raux,sqrt(w**2+(Ro-b2-p1-2*1)**2)

```

```

*SET,rpri,raux*cos(gamma)
csys,1,1
k,14,rpri,30,0
k,114,rpri,30,0
/com,k,14,sqrt(3)/2*sqrt(w**2+(Ro-b2-p1-2*1)**2),30,0
/com,k,114,sqrt(3)/2*sqrt(w**2+(Ro-b2-p1-2*1)**2),30,0
/com,k,111,Ri,30,0
csys,1,1
1,1,11
1,11,14
1,14,2
1,2,3
1,3,4
1,4,6
1,6,8
1,8,10
1,10,1
1,10,11
1,4,5
csys,0
1,5,7
1,6,12
1,12,7
1,7,9
1,8,13
1,13,9
1,12,13
1,13,14
csys,1,1
1,1,111
1,111,114
1,114,2
1,2,3
1,3,104
1,104,106
1,106,108
1,108,110
1,110,1
1,110,111
1,104,105
csys,0
1,105,107
1,106,112
1,112,107
1,107,109
1,108,113
1,113,109
1,112,113
1,113,114
allsel
/CDM,-----
/CDM, mapped-mesh
/CDM,-----
lsel,s,line,,16,17,1
lsel,a,line,,13,14,1
lesize,all,,5
allsel
lsel,s,line,,34,35
lsel,a,line,,31,32
lesize,all,,5
allsel
lsel,s,line,,19
lsel,a,line,,37
lesize,all,,5
allsel
lsel,s,line,,12
lsel,a,line,,30
/com,lesize,all,,2
lesize,all,,4
allsel
lsel,s,line,,36
lsel,a,line,,33
lsel,a,line,,18
lsel,a,line,,15
lesize,all,,20
lsel,a,line,,11
lsel,a,line,,29
/com,lesize,all,,8
lesize,all,,10
allsel
lsel,s,line,,28
lsel,a,line,,10
/com,lesize,all,,7
lesize,all,,8
allsel
lsel,s,line,,1
lsel,a,line,,20
lesize,all,,8

```

```

lssel,all
lssel,s,line,,5
/com,lesize,all,,,2
lesize,all,,,2
allsel
lssel,s,line,,4
lesize,all,,,26,
allsel
lssel,s,line,,3
lssel,a,line,,22
lesize,all,,,25
allsel
lssel,s,line,,2
lssel,a,line,,21
/com,lesize,all,,,2
lesize,all,,,2
allsel
lssel,all
lsymm,x,all
allsel
lssel,s,loc,x,0
ldele,all
allsel
lssel,s,line,,41
lssel,a,line,,4
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lssel,s,line,,11
lssel,a,line,,48
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lssel,s,line,,29
lssel,a,line,,66
ksll,s
nummrg,kp
allsel
1,3,4
lesize,5,,,2
allsel
lssel,all
lsymm,x,all
allsel
lssel,s,loc,x,0
ldele,all
allsel
lssel,s,line,,41
lssel,a,line,,4
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lssel,s,line,,11
lssel,a,line,,48
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lssel,s,line,,29
lssel,a,line,,66
ksll,s
nummrg,kp
allsel
1,3,4
lesize,5,,,2
allsel
/com,area,fissa
al,-40,41,5,48,49,52,54,56
al,5,4,3,19,17,15,12,11
/com,parti mobili
lssel,s,line,,68
lssel,a,line,,31
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lssel,s,line,,71
lssel,a,line,,34
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,73,68,31,36,34,71
al,67,66,29,30,32,31,68,69
lssel,s,line,,69
lssel,a,line,,55
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lssel,s,line,,70
lssel,a,line,,54

```

```

ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,70,69,55,54
allsel
lsel,s,line,,33
lsel,a,line,,17
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,32
lsel,a,line,,18
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,18,32,17,33
ldele,59
ldele,22
allsel
lplot
lsel,s,line,,57,
lsel,a,line,,20
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,28
lsel,a,line,,65
ksll,s
nummrg,kp
allsel
al,-58,74,71,28,65,34,37,21
al,-57,65,28,20,
allsel
lsla,s
lsel,inve
ldele,all
allsel
csys,1,1
agen,3,all,,,120,0,,0,0
allsel
lsel,s,line,,25
lsel,a,line,,40
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,3
lsel,a,line,,79
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,1
lsel,a,line,,92
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,58
lsel,a,line,,72
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,110
lsel,a,line,,21
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,62
lsel,a,line,,113
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,57
lsel,a,line,,78
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,20
lsel,a,line,,116
ksll,s
nummrg,kp
allsel
lsel,s,line,,77
lsel,a,line,,117
ksll,s
nummrg,kp
allsel
/COM,-----
/COM,   elemento
/COM,-----

```

```

et,1,shell43,
/COM,-----
/COM, materiali-tipi di elementi
/COM,-----
/com,parte sottile (lamelle )
mp,dens,1,rhon
mp,ex,1,youn
mp,nuxy,1,poin
r,1,h,
allsel
/com,esagono + attorno agli specchi spesso(esagono)
mp,dens,2,rhon
mp,ex,2,youn
mp,nuxy,2,poin
/com,spessore medio esagono attorno specchi
r,4,s1
/com,spessore costante contorno fisso
r,5,t
/com,spessore medio mezze lune
r,2,s
/com,specchi
mp,dens,3,rhs
mp,ex,3,yous
mp,nuxy,3,pois
r,3,ms/(rhs*pi*Ri**2)
allsel
/com,-----
/com,meshiatura parte spessa -contorno fisso
/com,-----
type,1
real,5
mat,1
asel,s,area,,1,2,1
asel,a,area,,17,18,1
asel,a,area,,9,10
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,meshiatura mezze lune
/com,-----
type,1
real,2
mat,1
asel,s,area,,4
asel,a,area,,20
asel,a,area,,12
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,meshiatura parte spessa -esagono attorno specchi
/com,-----
type,1
mat,1
real,4
asel,s,area,,7,
asel,a,area,,15,
asel,a,area,,23,
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,meshiatura parte sottile
/com,-----
type,1
real,1
mat,1
asel,s,area,,3
asel,a,area,,5,6
asel,a,area,,11
asel,a,area,,13,14
asel,a,area,,19,
asel,a,area,,21,22
amesh,all
allsel
/com,-----
/com, meshiatura massa centrale-specchi
/com,-----
type,1
real,3
mat,3
asel,s,area,,8
asel,a,area,,16
asel,a,area,,24
amesh,all
allsel
/com,-----
/com,generazione tagli
/com,-----
ksel,s,kp,,24,25

```

```

ksel,a,kp,,4
ksel,a,kp,,5,7,2
ksel,a,kp,,28
ksel,a,kp,,13
ksel,a,kp,,122,124
ksel,a,kp,,126,127
ksel,a,kp,,120
ksel,a,kp,,129
ksel,a,kp,,38
ksel,a,kp,,86,88
ksel,a,kp,,90,91
ksel,a,kp,,93
ksel,a,kp,,17
ksel,a,kp,,14
ksel,a,kp,,15
ksel,a,kp,,35,36
ksel,a,kp,,31
ksel,a,kp,,105,107,2
ksel,a,kp,,138,139
ksel,a,kp,,140,142
ksel,a,kp,,102,103
ksel,a,kp,,108
ksel,a,kp,,104
ksel,a,kp,,106
ksel,a,kp,,114
ksel,a,kp,,110
ksel,a,kp,,30
nslk,s
lsel,s,line,,52
lsel,a,line,,49
lsel,a,line,,48
lsel,a,line,,11
lsel,a,line,,12
lsel,a,line,,15
lsel,a,line,,19
lsel,a,line,,80
lsel,a,line,,82,84,1
lsel,a,line,,87,89,1
lsel,a,line,,91
lsel,a,line,,2
lsel,a,line,,7,9,1
lsel,a,line,,14
lsel,a,line,,16
lsel,a,line,,22
lsel,a,line,,24
lsel,a,line,,56
lsel,a,line,,70
lsel,a,line,,66,67
lsel,a,line,,29,30
lsel,a,line,,33
lsel,a,line,,37
lsel,a,line,,115
lsel,a,line,,106
lsel,a,line,,100
lsel,a,line,,105
lsel,a,line,,104
lsel,a,line,,109
lsel,a,line,,114
lsel,a,line,,76
lsel,a,line,,53
lsel,a,line,,44
lsel,a,line,,51
lsel,a,line,,50
lsel,a,line,,47
lsel,a,line,,74,75
lsel,a,line,,73
lsel,a,line,,36
lsel,a,line,,94
lsel,a,line,,97
lsel,a,line,,27
lsel,a,line,,39
lsel,a,line,,55
lsel,a,line,,18
lsel,a,line,,107
lsel,a,line,,108
lsel,a,line,,59
lsel,a,line,,60
nsl1,a
nsl,inve
nummrg,node
allsel
allsel
asel,s,area,,3
asel,a,area,,19
asel,a,area,,11
es1a,s
/color,elem,red,all
allsel

```

```

asel,s,area,,4,
asel,a,area,,20
asel,a,area,,12
esla,s
/color,elem,mage,all
allsel
asel,s,area,,13,14
asel,a,area,,5,6
asel,a,area,,21,22
esla,s
/color,elem,ygre,all
allsel
eplot
finish
/solu
antype,static
pstress,on
eqslv,sparse
/COM,-----
/COM,condizioni di vincolo
/COM,-----
/com,lsel,s,line,,4
/com,lsel,a,line,,86
/com,lsel,a,line,,93
/com,lsel,a,line,,13
/com,lsel,a,line,,26
/com,lsel,a,line,,41
/com,nsl1,s
/com,ksll,s
/com,nslk,a
csys,1,1
nrel,s,loc,x,Ro
nrel,r,loc,y,180,360
ksln,s
nslk,s
d,all,all
allsel
csys,0
/com,ACEL,,GR
/com,ksel,s,kp,,1
fk,31,fy,-1
solve
finish
/solu,
antype,buckle
bucopt,lanb,4
solve
finish
/solu
expand,on
mexpand,4,,yes
solve
finish
/com,-----
/com,calcolo statico
/com,-----
/com,/solu
/com,antype,static
/com,pstress,on
/com,solve
/com,fini
/com,-----
/com, analisi modale
/com,-----
/solu
/com,antype,modal
/com,pstress,on
/com,acel,,GR
/com,outres,all,all
/com,modopt,lanb,100
/com,solve
/com,fini
/com,-----
/com,/post1
/com,etable, strs,s,eqv
/com,esort, strs
/com,fini

```

## Allegato G

```
l=(23.5*10^-3)
You=105.*10^9
J=5.96*10^-13
rho=8570.
y1=0.5((-1/3) x^3 +(1 /2 ) x^2)
y2=((1/6 )x^3-(1/4)*1 x^2+(1/6)*1^3)
m1=8*10^-3
m2=25.*10^-3
A=1.42*10^-5
py1=D[y1,x]
sy1=D[py1,x]
py2=D[y2,x]
sy2=D[py2,x]
i1=Integrate[sy1^2,{x,0,1}]
i2=Integrate[sy2^2,{x,0,1}]
y1l=y1/.x -> 211
y20=y2/.x -> 0.
i3=Integrate[(y1)^2,{x,0,1}]
i4=Integrate[(y2)^2,{x,0,1}]
Solve[(You*J)*(i1+i2)\[Equal]-(z^2)*(rho*A*( i3+i4)+m1* (
  y1l)^2+m2*( y20)^2),z]
```