

LNF - 65/6  
26 Febbraio 1965.

**F. Knoke : FOTOPRODUZIONE DI  $K^+$  DA NUCLEO COMPLESSO.**

**(Nota interna n. : 272)**

Nota interna: n. 272  
26 Febbraio 1965

## F. Knoke: FOTOPRODUZIONE DI $K^+$ DA NUCLEO COMPLESSO

### INTRODUZIONE

In vista di possibili esperimenti sulla fotoproduzione di  $K^+$  da nucleo da farsi col fascio di fotoni di bremsstrahlung prodotti nel sincrotrone di Frascati, sembra interessante calcolare la distribuzione spettrale di  $K^+$  nel laboratorio in funzione dell'angolo di emissione e dell'energia dei fotoni incidenti. Il problema è stato già affrontato da alcuni autori<sup>(1)</sup> ma solo in maniera qualitativa (elemento di matrice di fotoproduzione fenomenologico; distribuzione dei momenti di nucleoni nel nucleo del tipo di Fermi o Gauss; nessuna correzione degli effetti di interazione secondaria del  $K^+$ ). In questo lavoro noi calcoliamo, invece, l'elemento di matrice di fotoproduzione nell'ipotesi di impulse-approximation, mentre, per quanto riguarda la correzione alla sezione d'urto differenziale di fotoproduzione dovuta agli effetti di interazione  $K^\pm$  nucleo, viene discusso l'effetto del potenziale ottico, con cui si rappresenta l'interazione  $K^\pm$  nucleo, sulla densità di distribuzione di momenti dei nucleoni nel nucleo.

### 1) - CINEMATICA DEL PROCESSO $\gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda$

Consideriamo il processo "libero"

$$(1-1) \quad \gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda$$

Siano  $K$  = 4 - impulso del  $\gamma$   
 $q$  = 4 - impulso del  $K^+$   
 $p_1$  = 4 - impulso del protone  
 $p_2$  = 4 - impulso dell'iperone.

Nella metrica da noi usata è:

$$(a, b) = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad \gamma_K^2 = -1 \quad (K = 1, 2, 3); \quad \gamma_0^2 = 1$$

$$\gamma_K^+ = -\gamma_K; \quad \gamma_0^+ = \gamma_0; \quad \gamma_K^+ = \gamma_0 \gamma_K \gamma_0$$

2.

Nell'ipotesi di "impulse approximation"<sup>(2)</sup> l'elemento di matrice per il processo  $\gamma + X_A^Z \rightarrow K^+ + \Lambda + X_{A-1}^{Z-1}$  si scrive:

$$(1.2) \quad \langle \phi_g, \psi_f | T | \phi_g, \psi_i \rangle = \langle \phi_g, \psi_f | \sum_{i=1}^Z T_i | \phi_g, \psi_i \rangle$$

dove:  $T_i$  è l'operatore di fotoproduzione che agisce sull'iesimo protone;  $\phi_g$  e  $\phi_g$  sono le funzioni d'onda del  $\gamma$  e del mesone;  $\psi_i$  e  $\psi_f$  sono le funzioni d'onda di Slater degli  $Z+N$  fermioni iniziali e  $(Z-1) + N+1$  fermioni finali

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(1) & \dots & \psi_{n_1}(Z) \\ \psi_{n_2}(1) & \dots & \\ \vdots & & \\ \psi_{n_Z}(1) & \dots & \psi_{n_Z}(Z) \end{vmatrix}$$

$$(1.3) \quad \psi_f = \frac{1}{\sqrt{Z!}} \sum_{j=1}^Z a_j \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(1) & \dots & \psi_{n_1}(Z) \\ \vdots & & \\ \psi_{n_{j-1}}(1) & \dots & \psi_{n_{j-1}}(Z) \\ \psi_{p_2}(1) & \dots & \psi_{p_2}(Z) \\ \vdots & & \\ \psi_{n_{j+1}}(1) & \dots & \psi_{n_{j+1}}(Z) \\ \vdots & & \\ \psi_{n_Z}(1) & \dots & \psi_{n_Z}(Z) \end{vmatrix}$$

$\psi_{n_i}^{(1)}$  è la funzione d'onda dei protoni all'interno del nucleo nello stato  $n_i$ ;  $\psi_{p_2}$  è la funzione d'onda dell'iperone uscente;  $a_j$  è legato alla probabilità che il protone che interviene nel processo si trovi nello stato  $j$ . Nelle (1-3) abbiamo tralasciato di scrivere le funzioni d'onda relative ai neutroni, che, per la ortonormalità delle  $\psi_{n_i}$ , non intervengono nel calcolo della (1-2).

Sviluppando la (1-2) si ottengono termini di 2 tipi:

$$i) \quad a_1 \langle \phi_g, \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{p_2}(1) & \dots & \psi_{p_2}(Z) \\ \vdots & & \\ \psi_{n_2}(1) & \dots & \psi_{n_2}(Z) \end{vmatrix} | T_i | \phi_g, \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(1) & \dots & \psi_{n_1}(Z) \\ \vdots & & \\ \psi_{n_2}(1) & \dots & \psi_{n_2}(Z) \end{vmatrix} \rangle =$$

$$= a_1 \langle \phi_g, \psi_{p_2}(1) | T_i | \phi_g, \psi_{n_1}(1) \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & a_1 \langle \phi_q, \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{p_2}(1) & \dots & \psi_{p_2}(2) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n_2}(1) & \dots & \psi_{n_2}(2) \end{vmatrix} | T_2 | \phi_j, \frac{1}{\sqrt{Z!}} \begin{vmatrix} \psi_{n_1}(1) & \dots & \psi_{n_1}(2) \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{n_2}(1) & \dots & \psi_{n_2}(2) \end{vmatrix} \rangle = \\
 & = a_1 \langle \phi_q, \psi_{n_2}(2) | T_2 | \phi_j, \psi_{n_2}(2) \rangle \cdot \langle \psi_{p_2}(1) | \psi_{n_1}(1) \rangle = 0
 \end{aligned}$$

In definitiva

$$\langle \phi_q, \psi_p | T | \phi_j, \psi_i \rangle = \langle q, p_2 | T | k, \psi_p \rangle$$

dove  $\psi_p = \sum_{i=1}^Z a_i \psi_{n_i}$

Nell'ipotesi di "impulse approximation" il fotone interagisce con uno solo dei protoni all'interno del nucleo che passerà da uno stato iniziale legato  $|\psi_p\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$  (dove con i si indicano i livelli occupati dai protoni) ad uno stato finale libero  $|p_2\rangle$ .

L'elemento di matrice di fotoproduzione sarà:

$$\begin{aligned}
 \langle q, p_2 | T | k, \psi_p \rangle &= \sum_{i=1}^Z a_i \langle q, p_2 | T | k, \psi_i \rangle = \\
 (1.2') \quad &= \sum_{i=1}^Z a_i \langle p_1 | \psi_i \rangle \langle q, p_2 | T | k, p_1 \rangle
 \end{aligned}$$

avendo fatto uso della completezza degli stati di protone libero  $|p_1\rangle; \langle p_1|$ ,  $\langle p_1 | \psi_i \rangle$  è l'ampiezza di probabilità che il protone nello stato  $|\psi_i\rangle$  abbia impulso  $p_1$  mentre  $\langle q p_2 | T | p_1, k \rangle$  è l'elemento di matrice di fotoproduzione tra stati liberi.

Dalla ortonormalità delle  $|\psi_i\rangle$  si ha:

$$\begin{aligned}
 |\langle q p_2 | T | k \psi_p \rangle|^2 &= \sum_{i=1}^Z \sum_{i'=1}^Z a_i \langle p_1 | \psi_i \rangle \langle q p_2 | T | p_1, k \rangle \langle p_1, k | T^\dagger | q p_2 \rangle \cdot \\
 (1.4) \quad &\cdot a_{i'} \langle \psi_{i'} | p_1 \rangle = \sum_{i=1}^Z |a_i|^2 \langle p_1 | \psi_i \rangle^2 |\langle q p_2 | T | p_1, k \rangle|^2 = Z \rho(p_1) |\langle q p_2 | T | p_1, k \rangle|^2
 \end{aligned}$$

dove:

$$(1.5) \quad \rho(p_1) = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^Z |a_i|^2 \langle p_1 | \psi_i \rangle^2$$

è la densità "normalizzata"<sup>(3)</sup> dei momenti dei protoni all'interno del nucleo.

La sezione d'urto differenziale di fotoproduzione da nucleo complesso di  $K^+$  di impulso  $q$  emessi nella direzione  $-\Omega_q$  rispetto alla direzione dei fotoni incidenti<sup>(4)</sup> è:

$$(1.6) \quad \frac{d^2\sigma}{d\Omega_q d q_0} = q Z \int \rho(p_1) \frac{1}{q} \frac{d^2\sigma(p_1)}{d\Omega_q d q_0} d \vec{p}_1$$



4.

dove:

$$(1.7) \quad \frac{1}{q} \frac{d^2 \sigma(p_1)}{d\Omega_q d\varphi_0} = \frac{(2\pi)^{-2}}{(p_1, k)} \int \frac{d\vec{p}_2}{p_{20}} \delta^4(p_1 + k - p_2 - q) |\langle q p_2 | \tau | p_1, k \rangle|^2$$

è la sezione d'urto differenziale del processo (1-1) nel caso che il protone sia nello stato libero  $|p_1\rangle$ .

Nell'ipotesi usuale che il nucleone bersaglio sia non relativistico<sup>(5)</sup> la (1-6) diventa<sup>(6)</sup>:

$$(1.8) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\Omega_q d\varphi_0} = \frac{(2\pi)^{-2}}{M_p k} Z q \int S(p_1) d\vec{p}_1 \int \delta(\vec{p}_1 + \vec{k} - \vec{p}_2 - \vec{q}) \delta(M_p - E + k - p_{20} - q_0) |\langle p_2 q | \tau | p_1, k \rangle|^2 \frac{d\vec{p}_2}{p_{20}}.$$

## 2) - ELEMENTO DI MATRICE DI FOTOPRODUZIONE

Il calcolo dell'elemento di matrice "libero"  $M_{if}$  è fatto nelle seguenti ipotesi<sup>(8, 9, 10, 11)</sup>:

- 1) i nucleoni e gli iperoni sono spinori, con momento magnetico anormale trattabile secondo il metodo di Pauli;
  - 2) il  $K^+$  è pseudoscalare e ha spin nullo;
  - 3) il vertice  $K^+ p \Lambda$  è del tipo di Yukawa:  $H_I = G_\Lambda \bar{\psi}_\Lambda \gamma_5 \psi_p \varphi_{K^+}$ ;
  - 4) si considerano solo i termini di Born: diagrammi a), b), c), d) ed e)<sup>(12)</sup>;
- si ha:

$$M_{if} = M_{if}^{(a)} + M_{if}^{(b)} + M_{if}^{(c)} + M_{if}^{(d)} + M_{if}^{(e)}$$

da cui:

$$(2.1) \quad M_{if} = -ie G_\Lambda \frac{(M_p M_\Lambda)^{1/2}}{(p_{10} p_{20} \cdot 2k_0 2q_0)} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \left[ \frac{\not{k} \cdot \not{p} + 2(p_1, E)}{2(p_1, k)} - \frac{(q, E)}{(q, k)} + \right. \\ \left. + \frac{\mu_p}{m_p} \frac{(m_p \not{k} \cdot \not{p} - (p_1, E) \not{k} + (p_1, k) \not{p})}{2(p_1, k)} - \frac{\mu_\Lambda}{m_\Lambda} \frac{(p_2, k) \not{p} - (p_2, E) \cdot \not{k}}{2(p_2, k)} \right] u(p_1)$$

con  $\hat{\epsilon} = a_\mu \gamma^\mu$ ;  $\epsilon$  = vettore di polarizzazione del fotone.

$\mu_p$  è il momento magnetico anomalo del protone ( $\mu_p \simeq 1,8$ ).

$\mu_\Lambda$  è il momento magnetico del  $\Lambda$  :

$$(2.2) \quad \mu_\Lambda = \mu'_\Lambda + \frac{G_\Sigma}{G_\Lambda} \mu_\epsilon \quad (\text{la 2.2 è valida nell'ipotesi } M_\Sigma = M_\Lambda).$$

$\mu'_\Lambda$  è il momento magnetico anomalo del  $\Lambda$  (diagramma d)); da misure sperimentali  $\mu'_\Lambda = 1,4 \pm 0,5$  (13, 14); secondo la "SU<sub>3</sub>-invariance"  $\mu'_\Lambda = 1/2 \mu_n$  (15) ( $\mu_n$  è il momento magnetico anomalo del neutrone);  $\mu_\epsilon$  è il momento di transizione ( $\Sigma^0, \Lambda$ ) (diagramma e)); da misure sperimentali si ha evidenza per un valore  $\mu_t \simeq 1,2$  (8, 16); secondo la SU<sub>3</sub>-invariance:  $\mu_\epsilon = \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_n$ .

Nell'ipotesi di simmetria globale Hatsukade<sup>(17)</sup> trova:

$$\mu_t = 0,64 \frac{1}{2} (\mu_p - \mu_n) \simeq -\frac{1}{2} \mu_n; \quad G_\Sigma = G_\Lambda$$

Dalla (2.2) segue:

$$(2.2') \quad \mu_\Lambda \simeq \frac{1}{2} \mu_n - \frac{1}{2} \mu_n = 0$$

Lo stesso risultato si ottiene come conseguenza della "SU<sub>3</sub>-invariance". Infatti<sup>(18)</sup>:

$$G_\Lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3} G_{\pi NN} (1+2\alpha_p); \quad G_\Sigma = G_{\pi NN} (1-2\alpha_p); \quad \alpha_p = 1/4$$

da cui:

$$\frac{G_\Sigma}{G_\Lambda} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e dalla (2.2)}$$

$$(2.2'') \quad \mu_\Lambda = \frac{1}{2} \mu_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \mu_n = 0$$

Quindi in ragione delle (2.2') e (2.2''), ottenute con procedimenti completamente diversi, si può trascurare il contributo dei diagrammi d) ed e).

Prendendo il modulo quadrato di (2.1), sommando su tutti gli stati di spin finali e mediando su quelli iniziali, mediando sulle possibili polarizzazioni dei  $\gamma$  incidenti si ha, dopo alcuni calcoli:

$$(2.3) \quad \sum_{S_i, S_f, \epsilon} |M_{if}|^2 = \frac{e^2 G_\Lambda^2}{16 (p_{10} p_{20} k_0 q_0)} \left\{ 1 - \frac{q_0 - q \cos \vartheta_q}{M_p} - \frac{[M_K^2 - (M_\Lambda - M_p)^2]}{2} \frac{q^2 \sin^2 \vartheta_q}{k^2 (q_0 - q \cos \vartheta_q)^2} - \right. \\ \left. - \mu_p \left( \frac{M_\Lambda}{M_p} - 1 \right) - \mu_p \frac{(q_0 - q \cos \vartheta_q)}{M_p} - \frac{\mu_p^2}{2 M_p^2} \left[ \frac{M_K^2 - (M_\Lambda - M_p)^2}{2} - k (q_0 - q \cos \vartheta_q) \right] \right\}$$

essendo:

$$(2.4) \quad | \langle q p_2 | T | p_1 k \rangle |^2 = T(q, \vartheta_q, k) = (p_{20} q_0 p_{10} k_0) \left[ \sum_{S_i, S_f, \epsilon} |M_{if}|^2 \right].$$

6.

### 3) - DENSITA' DEI MOMENTI DEI PROTONI NEL NUCLEO.

Le forme più usate per la densità dei momenti interni (valide per elementi non leggeri) sono:

$$(3.1) \quad \rho_F(p_1) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{p_F^3} & p_1 \leq p_F \\ 0 & p_1 > p_F \end{cases} \quad \text{distribuzione di Fermi (19)}$$

$$(3.2) \quad \rho_G(p_1) = \frac{a^{-3/2}}{\pi^{3/2}} e^{-a p_1^2} \quad \text{distribuzione di Gauss. (19)}$$

Dalla (1.8) eliminando le  $\delta$  e osservando che  $T(q, \theta_q, k)$  è indipendente da  $p_1$  si ha:

$$(3.3) \quad \frac{d^2 \sigma}{d\Omega_q d\Omega_0} = \frac{(2\pi)^{-1} q}{M_p K} \frac{T(q, \theta_q, k)}{a} \int_{p_{1\min}}^{p_{1\max}} \rho(p_1) p_1 dp_1$$

sostituendo a  $\rho(p_1)$  le (3.1) e (3.2) si ha:

$$(3.4) \quad \frac{d^2 \sigma_F}{d\Omega_q d\Omega_0} = \frac{3q Z T(q, \theta_q, k)}{(4\pi)^2 M_p K p_F^3 a} [p_{1\max}^2 - p_{1\min}^2]$$

$$(3.5) \quad \frac{d^2 \sigma_G}{d\Omega_q d\Omega_0} = \frac{q Z T(q, \theta_q, k)}{(2\pi)^2 M_p K a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} [e^{-a p_{1\min}^2} - e^{-a p_{1\max}^2}]$$

essendo

$$a = |\vec{k} - \vec{q}|$$

$$b = (M_p - \xi + k - q_0 + M_A)^{1/2} (M_p - \xi + k - q_0 - M_A)^{1/2}$$

$$p_{1\min} = |b - a|$$

$$p_{1\max} = \text{Max} \{ p_F, b + a \}$$

$$" = b + a$$

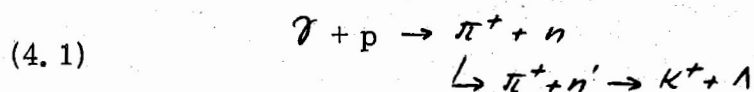
per la distribuzione alla Fermi

per la distribuzione di Gauss.

### 4) - INTERAZIONI SECONDARIE

I più importanti effetti di distorsione nella fotoproduzione di  $K^+$  da nucleo sono dovuti:

1) (20, 21, 22) alla produzione di  $K^+$  via  $\pi^+$  attraverso il processo



2) all'interazione del  $K^+$  uscente con il nucleo <sup>(23, 24, 25, 26, 27)</sup>.

Si può facilmente calcolare il contributo della sezione d'urto differenziale dovuto al processo 1): sia  $N_{K^+}$  il numero di  $K^+$  emessi con impulso  $q$  e con angolo  $\theta_q$  per unità di tempo;  $n$  il numero di nuclei per  $\text{cm}^3$  del bersaglio;  $s$  lo spessore del bersaglio;  $N_\gamma$  il numero di fotoni di energia  $k$  che attraversano il bersaglio per unità di tempo. Vale la relazione

$$(4.2) \quad N_{K^+} = n S N_\gamma \frac{d^2 \sigma}{d\Omega_q dq_0} + n^2 s^2 N_\gamma \int d\Omega_{\pi^+} d\Omega_{\pi^+} \frac{d^2 \sigma_{\pi^+}}{dq_0 d\Omega_{\pi^+}} \frac{d^2 \sigma_{K^+\pi^+}}{d\Omega_q dq_0}$$

dove  $\frac{d^2 \sigma_{\pi^+}}{dq_0 d\Omega_{\pi^+}}$  è la sezione d'urto differenziale di fotoproduzione di  $\pi^+$  di impulso  $q_{\pi^+}$  all'angolo  $\theta_{\pi^+}$  da nucleo;  $\frac{d^2 \sigma_{K^+\pi^+}}{d\Omega_q dq_0}$  è la sezione d'urto differenziale del processo  $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + \Lambda$ .

Il 1° termine del 2° membro della (4.2) è proporzionale a  $Z$  mentre il 2° a  $Z \times N \sim Z^2$ .

Baumel, Berley e Collins<sup>(20, 21, 22)</sup>, studiando sperimentalmente l'andamento della sezione d'urto col numero atomico del nucleo bersaglio avevano trovato che questa variava con  $Z^2$ , soprattutto per nuclei pesanti e lo spiegarono con l'ipotesi che nel r.h.s. della (4.2) il 2° termine predominasse sul primo. Tuttavia noi abbiamo, calcolato tale termine, anche se con una stima grossolana, e abbiamo trovato che è sempre inferiore all'1% della sezione d'urto totale, anche per gli elementi pesanti.

Le interazioni che il  $K^+$  subisce all'interno del nucleo sono di due tipi: coulombiano e nucleare.

L'interazione coulombiana dipende dalla carica del mesone e dal numero atomico del nucleo. Il fattore di distorsione coulombiano della sezione d'urto vale<sup>(6)</sup>:

$$(4.3) \quad C(q) = \frac{Z e^2 M_K / q}{e^{2\pi Z e^2 M_K / q} - 1}$$

Nel range di momenti dei  $K^+$  tra 200 e 500 MeV/c tale fattore è  $\sim 1$ .

Le correzioni alla sezione d'urto dovute alla interazione nucleare delle particelle iniziali e finali del processo (1.1) possono essere valutate introducendo nell'elemento di matrice (1.2) un effetto di distorsione delle funzioni d'onda delle particelle iniziali e finali dovuto ad un potenziale ottico<sup>(23)</sup>.

Tali funzioni d'onda non sono più onde piane ma possono scriversi come prodotto di un'onda piana per un fattore di distorsione legato al potenziale ottico.

$$(4.4) \quad \psi_{\vec{p}}(\vec{r}, t) = D(\vec{r}, \vec{p}) e^{i(\vec{p}\vec{r} - p_0 t)}$$

Il fattore di distorsione  $D(\vec{r}, \vec{p})$  si può scrivere come:

$$(4.5) \quad D(\vec{r}, \vec{p}) = d(\vec{r}, \vec{p}) e^{i\delta(\vec{r}, \vec{p})}$$

dove  $d(\vec{r}, \vec{p})$  è una funzione reale legata alla parte immaginaria (distorsione in ampiezza) e  $\delta(\vec{r}, \vec{p})$  alla parte reale del potenziale ottico (distorsione in fase).

Per quanto riguarda l'interazione  $K^\pm$  nucleo ( $K^+ + N \rightarrow K^+ + N$ ,  $K^+ + n \rightarrow K^0 + p$ ) (trascuriamo le interazioni dovute alle altre particelle interessate:  $\gamma$  + nucleo,  $p$  + nucleo,  $\Lambda$  + nucleo), la distorsione della funzione d'onda porta a una localizzazione del mesone all'interno del nucleo, e quindi, per il principio di indeterminazione ad un ulteriore slargamento della distribuzione in impulsi dello stesso (oltre a quello causato dalla distribuzione interna degli impulsi dei protoni nel nucleo).

Di conseguenza la distribuzione degli impulsi dei protoni nel nucleo, quale si ottiene dalla distribuzione spettrale e angolare dei  $K^+$  uscenti, risente di tale distorsione.

Torniamo, infatti, alla (1.2), che dà l'elemento di matrice di fotoproduzione di  $K^+$  da nucleo se si suppone il nucleo trasparente (ossia le funzioni d'onda del  $\gamma$ , del  $\Lambda$  e del  $K^+$  si considerano onde piane). In generale un elemento di matrice di fotoproduzione, che tenga conto anche degli effetti di interazione delle particelle iniziali e finali con il nucleo si scrive:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} & \langle \psi_k(\vec{r}_1, t) \psi_\Lambda(\vec{r}_2, t) | T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | \psi_\gamma(\vec{r}_1, t) \psi_p(\vec{r}_2, t) \rangle = \\ & = \int e^{-i(\vec{p}_2 + \vec{q} - \vec{k}) \cdot \vec{r}_2} D_K^*(\vec{r}_2, \vec{q}) D_\Lambda^*(\vec{r}_2, \vec{p}_2) D_\gamma(\vec{r}_2, \vec{k}) \psi_p(\vec{r}_2) \cdot \\ & \cdot 2\pi \delta(\vec{p}_1 + \vec{q}_0 - M_p - \vec{E} - \vec{k}) d\vec{r}_2 \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della (4.4) e dell'ipotesi che le  $D(\vec{r})$  siano funzioni "smooth", di  $r$  per cui  $D(\vec{r}_1) \sim D(\vec{r}_2)$ .

E' facile verificare che  $\int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  e  $\langle p_1 q | T | p_1 k \rangle$  coincidono.

L'effetto delle interazioni nucleari delle particelle che partecipano alla reazione di fotoproduzione sull'elemento di matrice del processo stesso è, quindi, una distorsione della funzione d'onda del protone bersaglio:

$$(4.7) \quad \phi_p(\vec{p}_1, \vec{k}, \vec{q}; \vec{r}) = D_K^*(\vec{r}; \vec{q}) \times D_\Lambda^*(\vec{r}, \vec{p}_2) \times D_\gamma(\vec{r}; \vec{k}) \times \psi_p(\vec{r})$$

se le particelle non interagiscono con il nucleo

$$(4.8) \quad D_K^*(\vec{r}, \vec{q}) = D_\Lambda^*(\vec{r}, \vec{p}_2) = D_\gamma(\vec{r}, \vec{k}) = 1$$

$$(4.9) \quad \phi_p(\vec{r}) = \psi_p(\vec{r})$$

e si ottiene la (1.2).

Noi considereremo solo l'effetto di distorsione dovuto alla interazione del  $K^+$  con il nucleo; trascureremo perciò le interazioni con il nucleo

del fotone incidente e dell'iperone uscente. Nel nostro caso quindi avremo:

$$(4.10) \quad D_{\lambda}^{\times}(\vec{r}, \vec{p}_2) = D_{\lambda}(\vec{r}, \vec{K}) = 1$$

$$(4.11) \quad D_K^*(\vec{r}, \vec{q}) = e^{-i \frac{q_0}{q} \int_{Z_0}^{\infty} V_K(\vec{r}) dz}$$

$Z$  è la direzione del mesone, mentre  $V_K(\vec{r})$  è il potenziale con cui secondo il modello ottico si rappresenta l'interazione  $K^+$  - nucleo.

Nello spazio degli impulsi la (4.7) diventa:

$$(4.12) \quad \tilde{\phi}_p(\vec{p}_1, q) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{r} \phi_p(\vec{r}, q) e^{-i \vec{p}_1 \cdot \vec{r}} = \langle p_1 | D_K^* \psi_p \rangle$$

Noi faremo l'ipotesi che  $D_K^*(\vec{r}; q)$  sia una funzione simmetrica rispetto alla direzione del mesone uscente (il che è praticamente lecito in tutti i casi). Di conseguenza  $\tilde{\phi}_p(\vec{p}_1, q)$  dipenderà solo dalla grandezza degli impulsi del protone bersaglio e del  $K^+$  e dalla relativa orientazione, ossia:

$$(4.13) \quad \tilde{\phi}_p(\vec{p}_1, q) = \tilde{\phi}(p_1, q, \cos \theta_{p1q})^{(22)}$$

In perfetta analogia con quello che è stato fatto nel § 1, definiamo la nuova "densità distorta" dei momenti interni del protone nel nucleo come:

$$(4.14) \quad \rho_D(p_1, \omega, \vartheta_{p1q}, q) = \frac{1}{2} |\tilde{\phi}(p_1, \omega, \vartheta_{p1q}, q)|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 |a_i|^2 |\langle p_1 | D_K^* \psi_i \rangle|^2$$

Dalla (4.12) si ottiene

$$(4.15) \quad \tilde{\phi}_p(\vec{r}, q) = \int d\vec{p}_1 \tilde{\phi}_p(\vec{p}_1, q) e^{i \vec{p}_1 \cdot \vec{r}}$$

Sostituendo la (4.15) nella (4.6) e prendendo il modulo quadro di quest'ultima si ottiene:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} & |\langle \psi_k(\vec{r}_1, t) \psi_{\lambda}(\vec{r}_2, t) | T(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | \psi_{\lambda}(\vec{r}_1, t) \psi_p(\vec{r}_2, t) \rangle|^2 = \\ & = (2\pi)^{-1} \delta(0) Z \int d\vec{p}_1 \delta^3(\vec{p}_2 + \vec{q} - \vec{p}_1 - \vec{k}) \delta(p_{20} + q_0 - M + E - K) \rho_D(p_1, \omega, \vartheta_{p1q}, q) T(q, \vartheta_q, k). \end{aligned}$$

## 5) - SEZIONE D'URTO E DENSITA' "DISTORTA" DEI MOMENTI DEI PROTONI ALL'INTERNO DEL NUCLEO.

La sezione d'urto differenziale di fotoproduzione di  $K^+$  da nucleo, corretta dagli effetti di distorsione coulombiana e nucleare è data da:

$$(5.1) \quad \frac{d^2 \sigma^c}{d\Omega_q d q_0} = q C(q) \int d\vec{p}_1 Z \rho_D(p_1, \omega, \vartheta_{p1q}, q) \frac{1}{q} \frac{d^2 \sigma(p_1)}{d\Omega_q d q_0}$$

Nel range di impulsi del mesone che noi considereremo si può prendere con sufficiente approssimazione:  $C(q) = 1$ . Sostituendo nella (5.1) la (1.7) ed eli-

10.

minando le  $\delta$  si ha:

$$(5.2) \quad \frac{d^2 \sigma^c}{d\Omega_q d\Omega_0} = \frac{(2\pi)^{-1} q z}{M_p k a} T(q, \vartheta_q, k) \int_{b-a}^{b+a} \rho_D(p_1, \cos \vartheta_{p_1 q}^*, q) p_1 dp_1$$

dove  $\cos \vartheta_{p_1 q}^*$  è il valore di  $\cos \vartheta_{p_1 q}$  corrispondente al valore

$$(5.3) \quad \cos \vartheta_{p_1 q}^* = \frac{(M + k - \varepsilon - q_0)^2 - p_1^2 - a^2 - M_A^2}{2 p_1 q} \quad \text{di } \cos \vartheta_{p_1 q}$$

Ne segue che per quanto interessa la sezione d'urto differenziale  $\rho_D$  è funzione di  $p_1$  e  $q$ . Viceversa, da misure sperimentali della sezione d'urto (5.2) si riesce a conoscere la  $\rho_D$  solo sulla superficie (5.3) dello spazio delle fasi ove essa è definita. Infatti nel caso  $b/a \ll 1$ , ossia

$$\frac{[(M + k - \varepsilon - q_0)^2 - M_A^2]^{1/2}}{|\vec{k} - \vec{q}|} \ll 1$$

la (5.2) diventa (applicando il teorema della media):

$$(5.4) \quad \frac{d^2 \sigma^c}{d\Omega_q d\Omega_0} \simeq \frac{q z}{2\pi M_p k} \left[ \rho_D(p_1, \cos \vartheta_{p_1 q}^*, q) \right]_{p_1=a} 2b T(q, \vartheta_q, k)$$

da qui:

$$(5.5) \quad \left[ \rho_D(p_1, \cos \vartheta_{p_1 q}^*, q) \right]_{p_1=a} = \frac{\pi}{q} \frac{d^2 \sigma^c}{d\Omega_q d\Omega_0} \frac{M_p k}{z b} \frac{1}{T(q, \vartheta_q, k)}$$

L'equazione (5.5) indica chiaramente che la densità dei momenti dei nucleoni all'interno del nucleo quale si ottiene dallo studio del processo di fotoproduzione di  $K^+$  da nucleo, non dipende solo dall'impulso dei nucleoni ma anche dall'impulso e dalla direzione di emissione del  $K^+$ . Perciò sostituendo nel 2° membro della (5.5) la sezione d'urto differenziale sperimentale dei  $K^+$  emessi, possiamo ottenere una stima dell'errore compiuto usando densità di distribuzione di tipo fermiano o gaussiano (funzioni solo dallo impulso del nucleone).

## 6) - RISULTATI

Facendo uso della (4.14) e (5.2) abbiamo calcolato numericamente la sezione d'urto differenziale di fotoproduzione dei  $K^+$  emessi da  $0^\circ$  a  $35^\circ$  dalla direzione del fascio  $\gamma$  incidente con impulso compreso tra 200 e 600 MeV/c per fotoni incidenti monoenergetici da 950 MeV nel caso che il potenziale del mesone sia una buca:

$$V_k(\vec{r}) = \begin{cases} -(V + iW) & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

dove  $R = r_0 A^{1/3} = 1.0 \times 10^{-13} A^{1/3}$  cm è il raggio del nucleo

$V = 15$  MeV è la parte reale e  $W = 7$  MeV è la parte immaginaria del potenziale ottico e la funzione d'onda del protone sia costante all'interno del nucleo e nulla fuori

$$\psi_p(\vec{r}) = \begin{cases} r^{1/2} \left[ \frac{3}{4\pi} \frac{1}{R^3} \right]^{1/2} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

I dati relativi alla parte reale del potenziale ottico sono stati dedotti dall'analisi dello scattering elastico  $K^+$ -nucleo; quelli relativi alla parte immaginaria dall'analisi dello scattering anelastico  $K^+$ -nucleo; mentre il raggio del nucleo è stato dedotto dall'analisi dello scattering  $e^-$ -nucleo<sup>(29,30)</sup>. I calcoli sono stati eseguiti usando come bersaglio targhette di carbonio ( $C^{12}$ ).

Nelle Figg. 1, 2 e 3 sono riportate rispettivamente le distribuzioni, normalizzate<sup>(29)</sup>, spettrale e angolare, dei  $K^+$  emessi nei due casi in cui si usa:

- un elemento di matrice di fotoproduzione isotropo e indipendente dall'energia, come nell'articolo di Block ( $M^2 = \text{cost}$ );
- l'elemento di matrice di fotoproduzione (2. 4) ( $M^2 = \text{var}$ ),

In ciascuna figura, poi, sono tracciate le curve per le possibili distribuzioni dei momenti interni dei nucleoni: (3. 1) (F); (3. 2) (G) e (4. 14) (O).

Dal confronto tra la distribuzione spettrale calcolata nell'ipotesi di "impulse approximation" e corretta dagli effetti della interazione  $K^+$  - nucleo e quella statistica, in cui si usa un elemento di matrice fenomenologico ( $M^2 = \text{cost}$ ) e una densità di distribuzione dei momenti dei nucleoni di tipo fermiano o gaussiano (Figg. 1, 2), si deduce che:

- il massimo della  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega_g d\Omega_0}$  si trova a valori di impulso diversi nei due modelli. Tale spostamento è più accentuato verso i piccoli angoli;
- la forma della curva è molto più allargata nel nostro modello; allargamento più accentuato a grandi angoli; ad esempio il rapporto  $R_s = \frac{\sigma_{400} - \sigma_{550}}{\sigma_{400}}$  per  $\theta = 30^\circ$  vale:

$$R_s = \begin{cases} 0,85 & \text{nel modello statistico} \\ 0,53 & \text{nel nostro modello.} \end{cases}$$

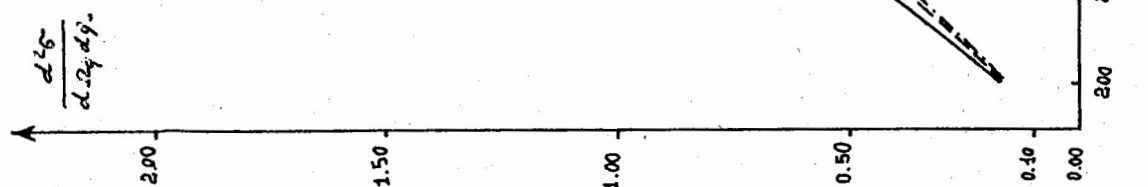
Si deduce così che una misura di  $K^+$  emessi a  $30^\circ$  dalla direzione del fascio  $\gamma$  incidente, con impulsi compresi fra 300 e 600 MeV/c può decidere con abbondante precisione della validità del nostro modello rispetto a quelli statistici finora usati.

Passando all'esame della distribuzione angolare (Fig. 3) si nota che l'anisotropia tra i  $K^+$  emessi a grandi angoli e quelli emessi a piccoli angoli è notevolmente diversa nei due modelli, ad esempio per  $K^+$  da 300 MeV/c il rapporto  $R_a = \frac{\sigma(15^\circ) - \sigma(30^\circ)}{\sigma(15^\circ)}$  vale:

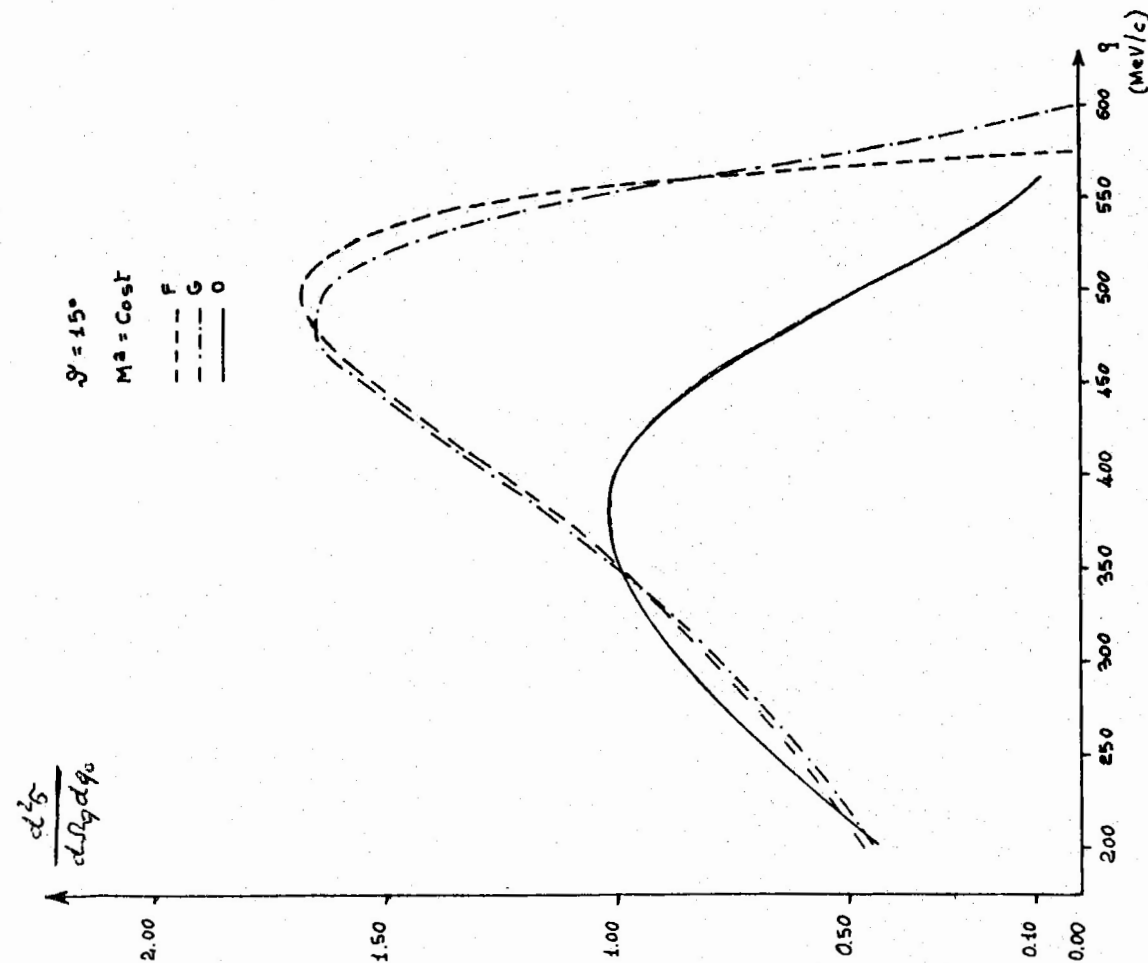


$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$  F  
 $\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$  G  
 $\text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$  O

$M^2 = \text{Var.}$   
 $\theta = 15^\circ$



b)



a)

FIG. 1

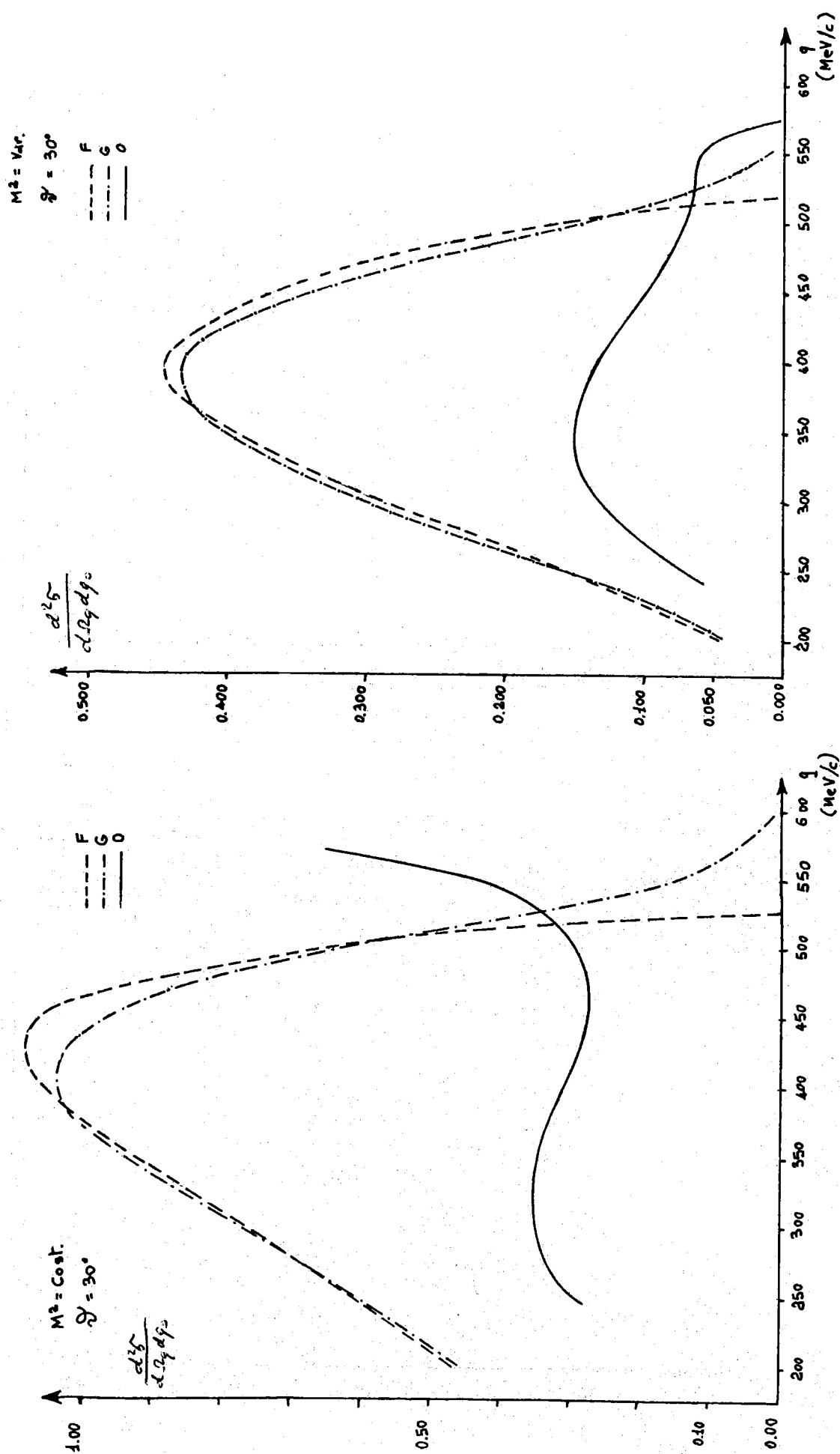


FIG. 2

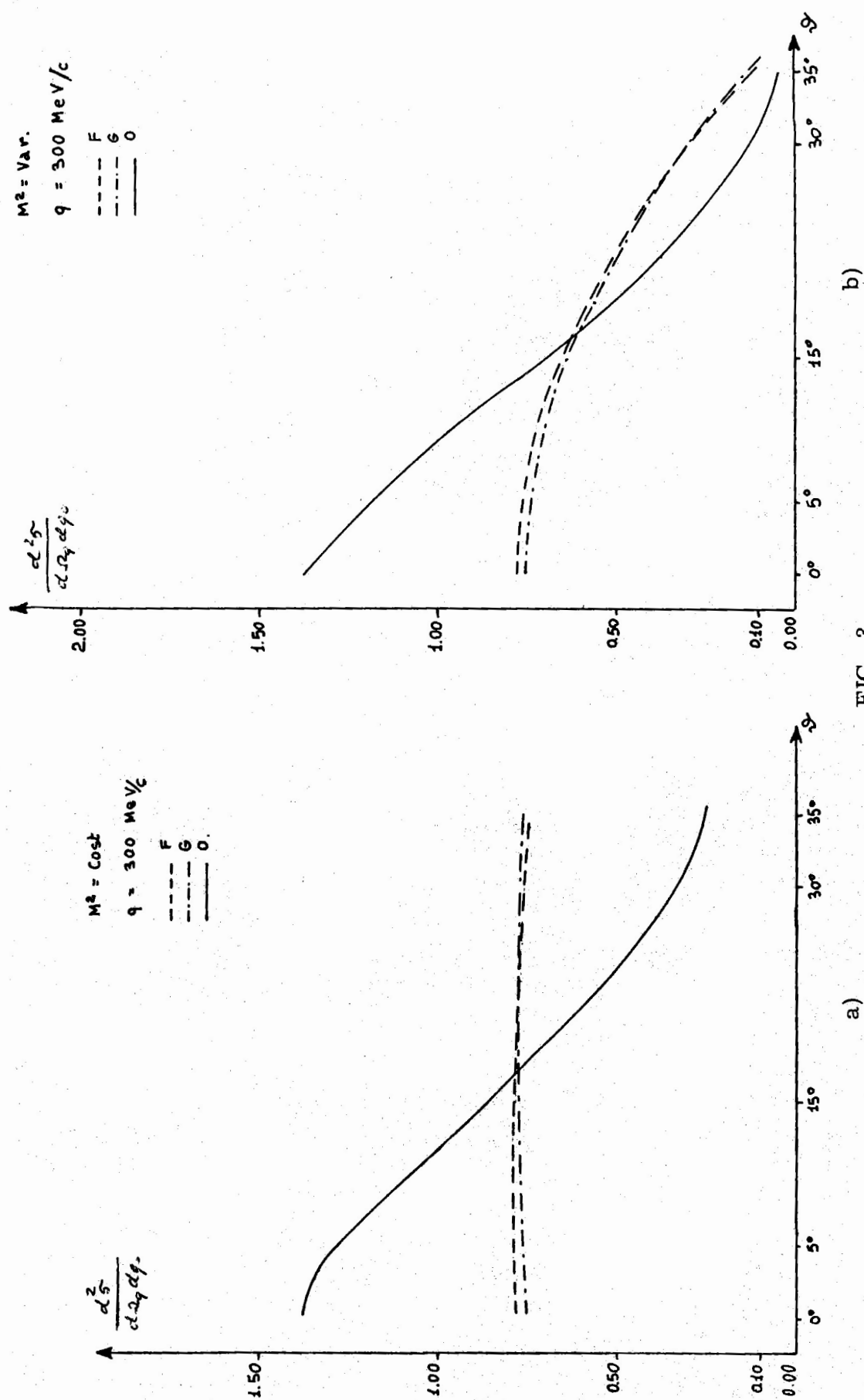


FIG. 3

$$R_a = \begin{cases} \sim 0 & \text{nel modello statistico} \\ 0,58 & \text{nel nostro modello} \end{cases}$$

Sempre dall'esame della Fig. 3 si vede che una misura di  $K^+$  e- messi ad angoli relativamente piccoli ( $5^\circ - 6^\circ$ ) sarebbe molto utile ai fini di un ulteriore conferma del nostro modello.

Un particolare ringraziamento ai Prff. R. Gatto e M. Grilli per l'interesse da Loro mostrato per questo lavoro e al Sig. F. Bocci per l'aiuto offerto nei calcoli numerici.

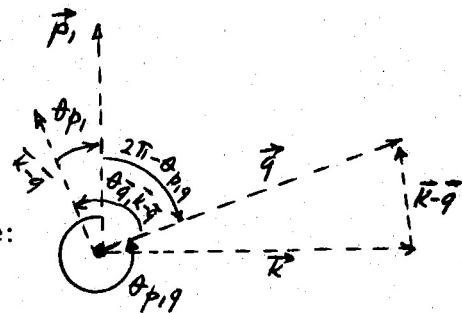
### BIBLIOGRAFIA E NOTE

- (1) - Block and Harth, Phys. Rev. 100, 324 (1955).
- (2) - Chew and Goldberger, Phys. Rev. 84, 778 (1952).
- (3) - Lax and Feshbach, Phys. Rev. 81, 189 (1951).
- (4) - Tutte le grandezze fisiche sono calcolate nel sistema del laboratorio.
- (5) - Tale ipotesi non sarebbe valida quando si integra la (1.6) per grandi valori di  $p_1$ . Ma occorre tener presente che per tali valori la densità  $\rho(p_1)$  di protoni che hanno tale impulso è così bassa che l'errore che si commette nel considerarli non relativistici è molto piccolo.
- (6) - Marshak and Meson, Physics pagg. 89-90; pagg. 83-84; pag. 97.
- (7) -  $M_p - \epsilon$  è l'energia media di un protone legato entro il nucleo.  $\epsilon$  è l'energia di legame del protone ( $\sim 8$  MeV).
- (8) - Capps, Phys. Rev. 114, 920 (1959).
- (9) - Morawsik, Phys. Rev. Letters 2, 352 (1959).
- (10) - Kawaguchi and Morawsik, Phys. Rev. 107, 563 (1957).
- (11) - Fujii and Marshak, Phys. Rev. 107, 570 (1957).
- (12) - Kaplon, Phys. Rev. 83, 712 (1951).
- (13) - Anderson, Phys. Rev. Letters 13, 167 (1964).
- (14) - Cool et al., Phys. Rev. 127, 2223 (1962).
- (15) - Macfarlane and Sudarshan, Rep. NYO 10277, Rochester - New York.
- (16) - Dreitlein and Lee, Phys. Rev. 124, 1274 (1961).
- (17) - Hatsukade, Phys. Rev. 132, 1301 (1963).
- (18) - De-Swart, Rev. Mod. Phys. 35, 916 (1963).
- (19) -  $P_F = 200$  MeV/c è l'impulso di Fermi corrispondente all'energia cinetica di cutoff  $T_F = 22$  MeV,  $\alpha = 4.15 \times 10^{-5}$  MeV/c<sup>-2</sup> è scelto in modo che l'energia cinetica del nucleone dentro il nucleo sia  $T = 19,3$  MeV<sup>(6)</sup>.
- (20) - Bamuel, Phys. Rev. 108, 1322 (1957).
- (21) - Berley and Collins, Phys. Rev. 112, 614 (1958).
- (22) - Fowler, Phys. Rev. 106, 829 (1957).
- (23) - Benioff, Phys. Rev. 128, 740 (1962).
- (24) - Squires, Nuclear Phys. 6, 504 (1958).
- (25) - Baker and McCarthy, Phys. Rev. 120, 254 (1961).
- (26) - McCarthy, Phys. Rev. 122, 578 (1961).
- (27) - McClelland, Phys. Rev. 123, 1423 (1961).
- (28) - Il significato dei simboli usati per indicare gli angoli tra le varie dire

zioni sono riportati nella figura a lato

Sempre dalla figura è facile verificare che:

$$\theta_{p,q} = \theta_{p_1} + \theta_{q, \bar{k}-\bar{q}} + 2\pi.$$



- (29) - Melkanoff et al., Phys. Rev. Letters 5, 108. (1960).
- (30) - Sechi and Zorn, Phys. Rev. 120, 1898 (1961).
- (31) - La costante di normalizzazione è stata scelta nei vari casi in modo che per  $\theta = 15^\circ$  e  $q = 350 \text{ MeV/c}$  sia:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega_q d\Omega_o} = 1 \text{ mb/sterad.}$$