

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Sezione di Bari

INFN/TC-83/12
17 Maggio 1983

G. Aloisio, M. Mallamo e G. Milillo:
UNA NUOVA CLASSE DI FILTRI DIGITALI FIR

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Sezione di Bari

INFN/TC-83/12
17 Maggio 1983

UNA NUOVA CLASSE DI FILTRI DIGITALI FIR

G. Aloisio

Dipartimento di Elettrotecnica ed Elettronica dell'Università di Bari, e INFN - Sezione di Bari

M. Mallamo

Software Sistemi S. p. A. , Bari

G. Milillo

Dipartimento di Elettrotecnica ed Elettronica dell'Università di Bari

1. - INTRODUZIONE

Lo sviluppo tecnologico - avvento dei semiconduttori, integrazione a larga scala, riduzione dei costi, ecc. - ha reso conveniente l'uso di sistemi per il trattamento numerico dei segnali, che, in molte applicazioni hanno sostituito i sistemi analogici.

Nell'ambito dell'elaborazione numerica le tecniche di filtraggio numerico dei segnali rivestono un ruolo fondamentale. In particolare, i filtri FIR (Finite Impulse Response) hanno avuto uno sviluppo considerevole, a partire dalla fine degli anni '60, con l'introduzione di algoritmi per l'analisi spettrale di segnali che hanno ridotto notevolmente i tempi di calcolo (FFT - Fast Fourier Transform).

L'uso dei FIR è legato anche alla possibilità di ottenere filtri a fase esattamente lineare, requisito essenziale in molte applicazioni come l'elaborazione di immagini, segnali radar, ecc.

2. - SINTESI DI FILTRI FIR MEDIANTE FUNZIONI DI CLASSE D (DARBOUX)

L'attività svolta nel nostro gruppo, in collaborazione con il gruppo teorico dello Istituto di Fisica dell'Università di Bari, nel campo del filtraggio digitale, ha portato alla definizione di una nuova classe di filtri digitali^(1, 2).

In questo lavoro si presenta la sintesi di filtri FIR a fase lineare, mediante funzioni di classe D (Darboux)^(3,4), della forma:

$$H(z) = g(z) \prod_{j=\emptyset}^M (1 - z^{-1} z_j^*)^{\alpha_j} + h(z) \quad (1)$$

con

$$h(z) = 0; \quad \alpha_j \text{ interi (positivi o negativi);} \quad g(z) \text{ polinomio.} \quad (2)$$

La (1) è la rappresentazione più generale della funzione di trasferimento di filtri numerici, sia IIR (Infinite Impulse Response) (quando almeno uno degli α_j è negativo), che FIR (quando tutti gli α_j sono positivi).

La funzione di trasferimento di un FIR a fase lineare con risposta all'impulso reale è direttamente ottenibile dalla (1), imponendo che il polinomio $g(z)$ sia a coefficienti simmetrici (o antisimmetrici) e che per ogni z_j^* si considerino la reciproca e le complesse coniugate. In queste ipotesi la (1) assume la forma:

$$H(z) = \sum_{n=\emptyset}^N a_n z^{-n} \prod_{j=\emptyset}^M \left[(1 - z^{-1} z_j^*) (1 - z^{-1} \bar{z}_j^*) (1 - z^{-1} / z_j^*) (1 - z^{-1} / \bar{z}_j^*) \right]^{\alpha_j} = \quad (4)$$

$$= \sum_{n=\emptyset}^N a_n z^{-n} \prod_{j=\emptyset}^M \left[(1 - 2(r_j^2 + 1)/r_j^2 \cos \theta_j^* z^{-1} + (r_j^2 + 1/r_j^2 + 4 \cos^2 \theta_j^*) z^{-2} + \right. \\ \left. - 2(r_j^2 + 1)/r_j^2 \cos \theta_j^* z^{-3} + z^{-4} \right]^{\alpha_j} \quad (4')$$

con

$$z_j^* = r_j e^{i\theta_j^*} \quad \text{e} \quad a_n = a_{N-n} \quad (a_n = -a_{N-n}).$$

2. 1. - Forme di implementazione e risposta all'impulso

La (4') è direttamente implementabile. Per implementazioni in cui sono necessari i coefficienti della risposta all'impulso, tali coefficienti si ricavano effettuando gli sviluppi binomiali dei termini della (4) del tipo:

$$(1 - z^{-1} z_j^*)^{\alpha_j}$$

calcolando i prodotti complessivi ed ottenendo un polinomio in z^{-1} del tipo:

$$H(z) = \sum_{n=0}^K h(n) z^{-n}, \quad k = N + \sum_{j=0}^M 4\alpha_j. \quad (5)$$

2.2. - Risposta in frequenza

La (4'), calcolata sulla circonferenza unitaria, diventa:

$$H(e^{i\theta}) = P(e^{i\theta}) \prod_{j=0}^M \left[2 \cos 2\theta - 4(r_j^2 + 1)/r_j^2 \cos \theta_j^* \cos \theta + (r_j^2 + 1/r_j^2 + 4 \cos^2 \theta_j^*) \right]^{a_j} e^{-i \left[L\pi/2 + \theta(N/2 + 2 \sum_{j=0}^M \alpha_j) \right]} \quad (6)$$

con

$$z_j^* = r_j e^{i\theta_j^*}$$

e

$$P(e^{i\theta}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N/2} a(n) \cos(\omega n) & \text{per } N \text{ pari ; } L = 0 \\ \sum_{n=1}^{N+1/2} b(n) \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] & \text{per } N \text{ dispari ; } L = 0 \\ \sum_{n=1}^{N/2} c(n) \sin(\omega n) & \text{per } N \text{ pari ; } L = 1 \\ \sum_{n=1}^{N+1/2} d(n) \sin \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] & \text{per } N \text{ dispari ; } L = 1 . \end{cases}$$

3. - DETERMINAZIONE DEI PARAMETRI

I risultati del presente lavoro sono stati ottenuti considerando un caso particolare della (6) in cui:

$$r_j = 1 ; \quad P(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N/2} a(n) \cos(\omega n) . \quad (7)$$

Con queste posizioni la (6), trascurando il termine di fase, diventa:

$$H(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{N/2} a(n) \cos(\omega n) \prod_{j=0}^M (\cos \theta - \cos \theta_j^*)^{2a_j} 2^{2a_j} . \quad (8)$$

La risposta all'impulso può essere determinata conoscendo i parametri $(\alpha_j, \theta_j^*, a(n), M, N)$ ottenibili dalla (8) seguendo un approccio analitico che richiede la risoluzione di sistemi di equazioni non lineari.

Nel presente lavoro sono stati individuati (con l'aiuto del calcolatore) dei criteri per la determinazione dei parametri suddetti che consentono di meglio riprodurre

la risposta in frequenza voluta. Tali criteri sono riassunti in Tabella I e rappresentati graficamente nelle Figg. 1, 2 e 3.

TABELLA I

a) z_j^* in banda oscura	
1. Avvicinando θ_j^* al valore di taglio:	<ul style="list-style-type: none"> - si migliora la zona di transizione - si diminuisce eventualmente l'attenuazione in qualche zona della banda oscura - si aumentano le ampiezze dei "ripple" in banda passante
2. Al crescere degli α_j :	<ul style="list-style-type: none"> - si migliora la zona di transizione - si migliora la banda oscura - si peggiorano i "ripple" in banda passante
b) Punti di matching in banda passante assegnati tramite il polinomio $P(e^{i\theta})$ come:	
$P(e^{i\theta_k}) = \frac{ H(e^{i\theta_k}) }{\left \prod_{j=0}^M (\cos \theta_k - \cos \theta_j^*)^{2\alpha_j} \right }$	$\theta_k =$ angoli di matching in banda passante $k = 0, \dots, N/2$
3. Aumentando il n. di punti di matching:	<ul style="list-style-type: none"> - si diminuiscono le ampiezze dei "ripple" in banda passante - si deteriora leggermente la zona di transizione

La Fig. 1 (con riferimento alla (8): $N/2 = 16$ (17 punti di matching), $M = 0$, $\alpha = 40$) mostra l'effetto delle variazioni di z^* , tenendo fissi α e il numero di punti di matching in banda passante.

La Fig. 2 (con riferimento alla (8): $N/2 = 16$ (17 punti di matching), $M = 0$, $\theta^* = \pi$) mostra l'effetto delle variazioni del parametro α , tenendo fissi z^* ed il numero di punti di matching in banda passante.

La Fig. 3 (con riferimento alla (8): $M = 0$, $\alpha = 50$, $\theta^* = \pi$) mostra l'effetto della variazione del numero di punti di matching, tenendo fissi z^* e α .

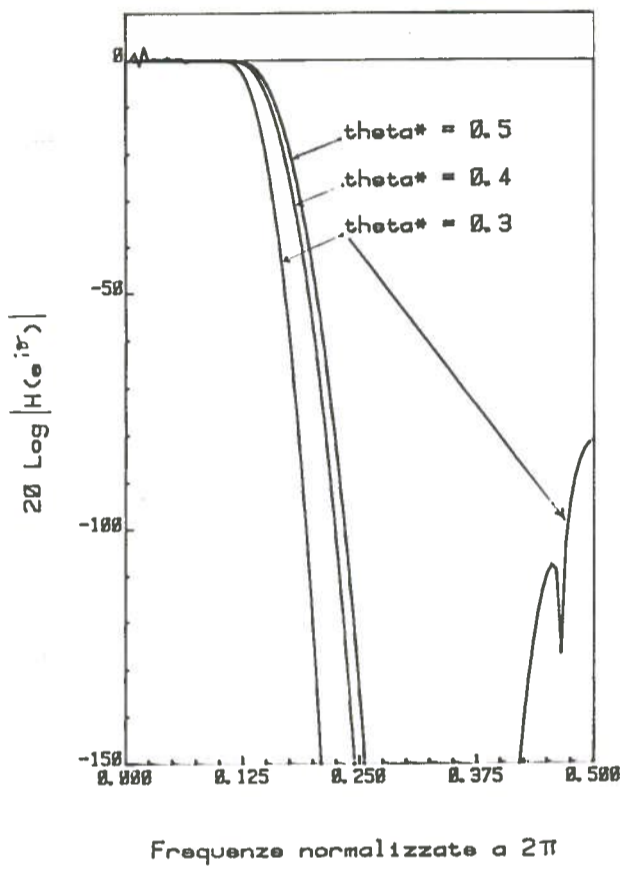


FIG. 1

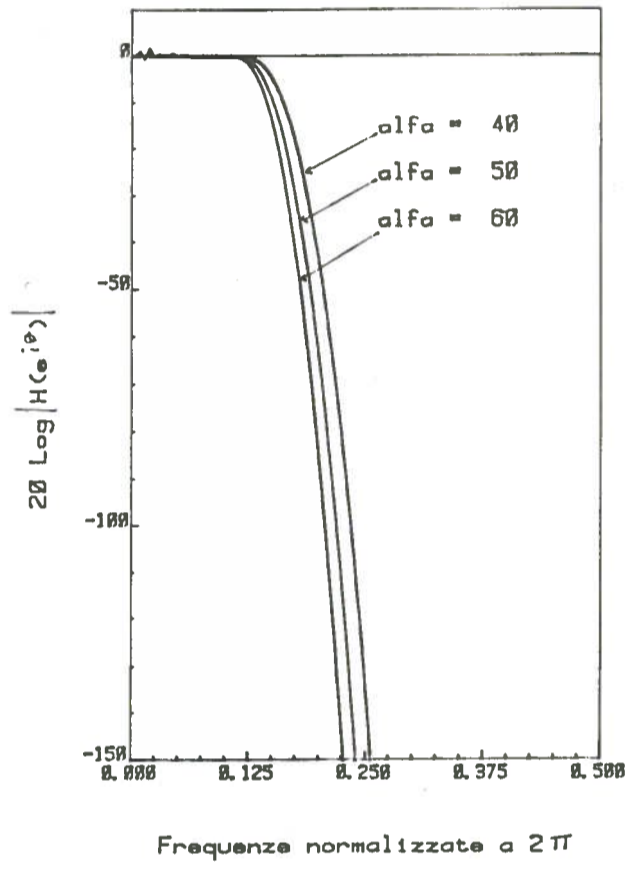
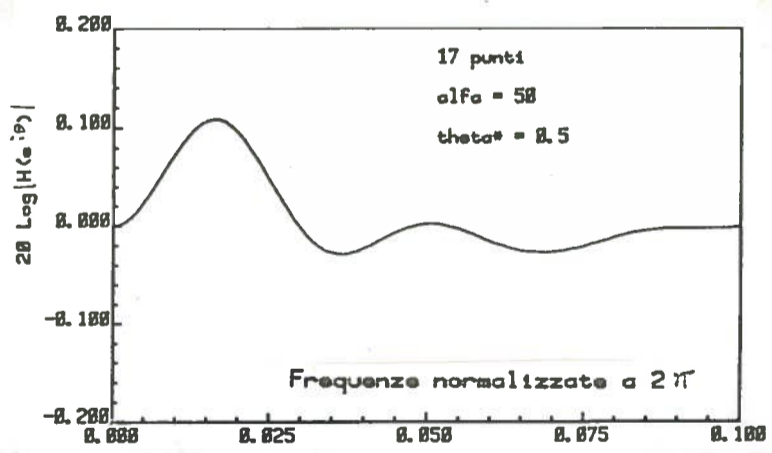


FIG. 2

(a)



(b)

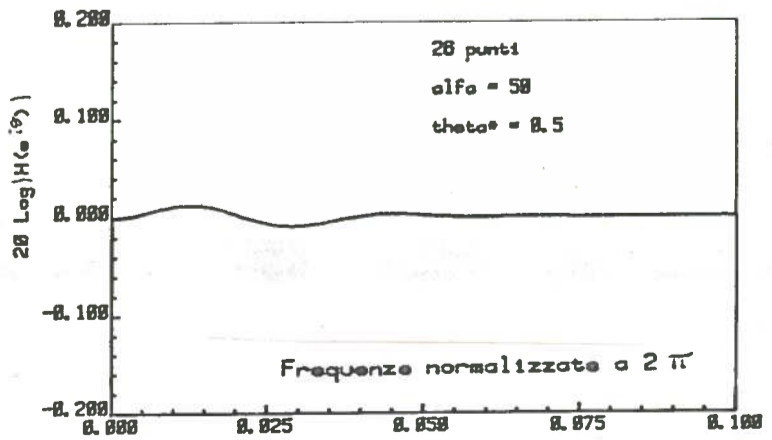


FIG. 3

4. - RIDUZIONE DELL'ORDINE DEL FILTRO CON L'USO DI FINESTRE

La convoluzione della risposta in frequenza (8) con la trasformata di Fourier di una finestra rettangolare del tipo:

$$w(n) = \begin{cases} 1 & L \leq n \leq k-L \\ 0 & n < L \quad \text{e} \quad n > k-L \end{cases} \quad (9)$$

in cui

$$k = N + \sum_{j=0}^M 4\alpha_j, \quad 0 \leq L \leq k$$

presenta le seguenti caratteristiche:

- Al variare della larghezza della finestra, restano invariate la banda passante e la pendenza della banda di transizione.
- L'attenuazione in banda oscura diminuisce al diminuire della larghezza della finestra.

Tali effetti sono mostrati nelle Figg. 4 e 5.

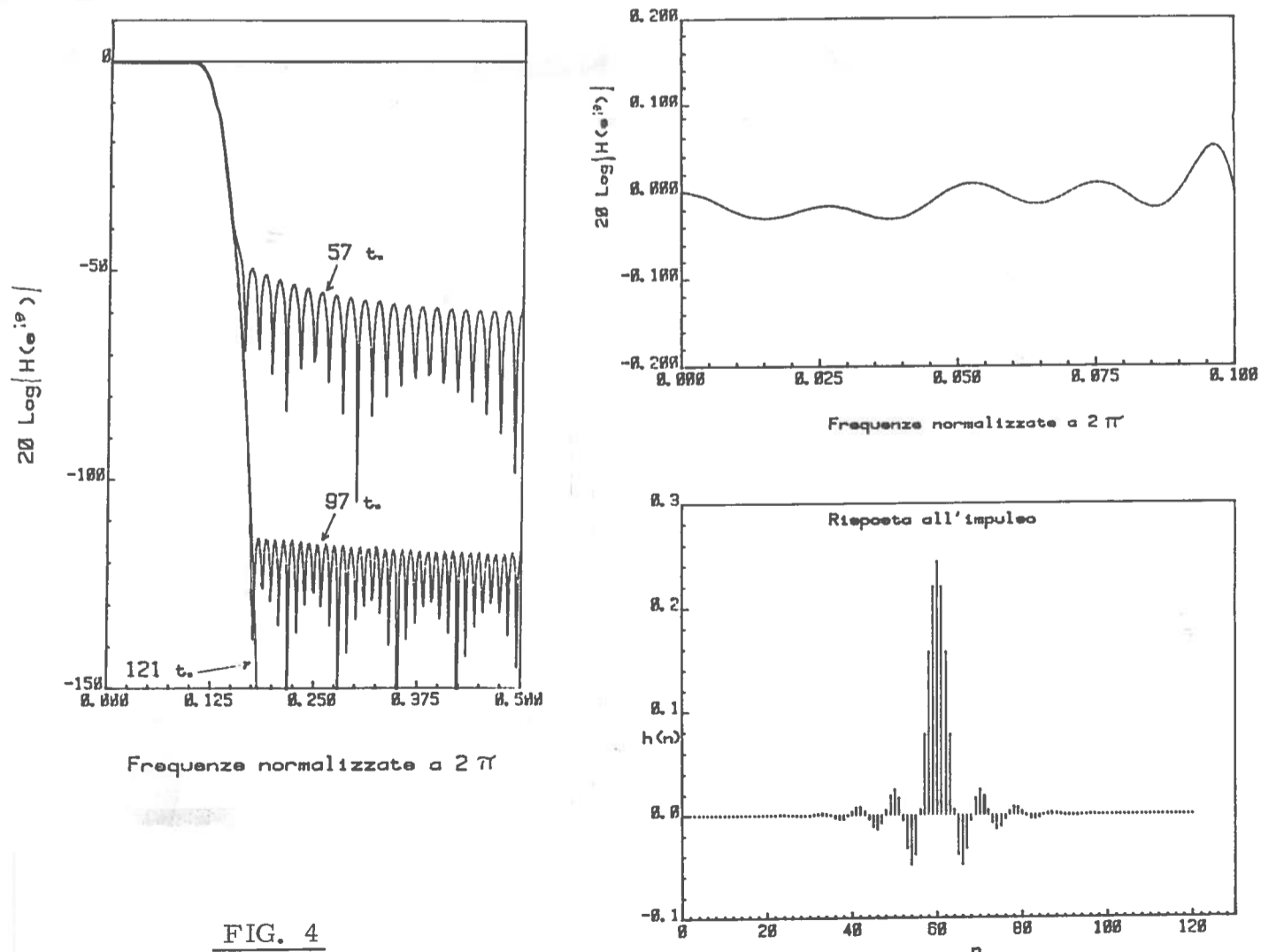


FIG. 4

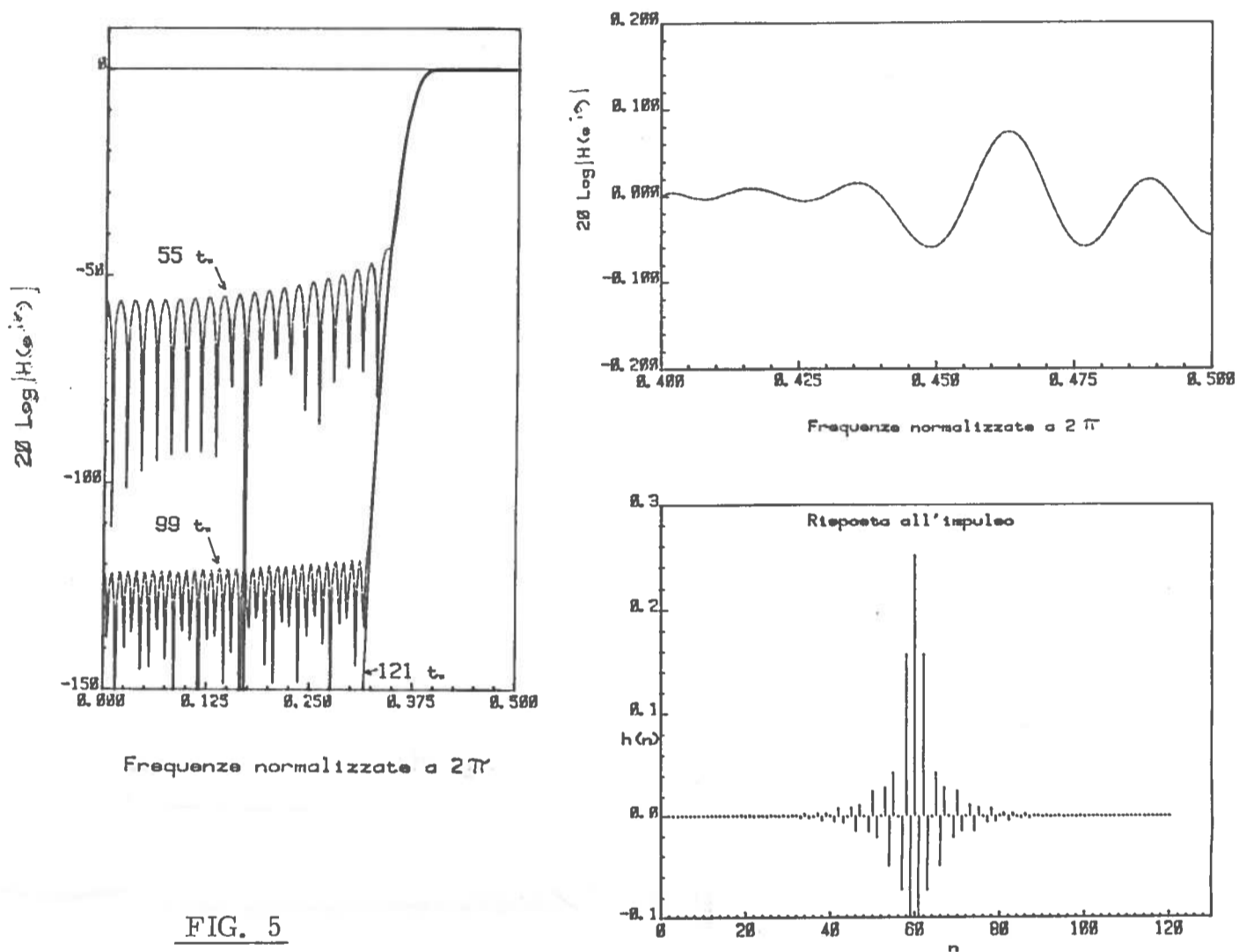


FIG. 5

La Fig. 4 è relativa ad un passa-basso con $\alpha_1 = 10$, $\theta_1^* = 0.4\pi$, $\alpha_2 = 30$, $\theta_2^* = 0.8\pi$, 21 punti di matching. Sono state usate tre finestre con $L = 12$, $L = 32$, $L = 0$.

La Fig. 5 è relativa ad un passa-alto con $\alpha_1 = 10$, $\theta_1^* = 0.6\pi$, $\alpha_2 = 30$, $\theta_2^* = 0.2\pi$, 21 punti di matching. Sono state usate tre finestre con $L = 11$, $L = 33$, $L = 0$.

Nelle Figg. 4 e 5, $t = k - 2L$ (ordine del filtro).

5. - CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stata discussa una nuova tecnica di approssimazione per filtri FIR a fase lineare.

I risultati ottenuti non sono riscontrabili in letteratura, sebbene siano state lasciate relativamente a parte questioni riguardanti il confronto con le tecniche ad oggi note.

Non sono stati affrontati i problemi dell'ottimizzazione della procedura e l'approccio analitico per la determinazione dei parametri, che sono tuttora oggetto di studio.

BIBLIOGRAFIA

- (1) - G. Milillo, Una nuova classe di filtri digitali FIR, Tesi di laurea, Dipartimento di Fisica dell'Università di Bari (1983).
- (2) - D. Marino and P. A. Massaro, High Performances Linear-Phase Digital Filters, Congresso INFN, Padova, 23-25 Marzo 1983.
- (3) - P. A. Massaro, Darboux Approximation for the Nonrelativistic Binding Energies of Isoelectronic Ions, Lett. Nuovo Cimento 35, n. 17 (1982).
- (4) - P. A. Massaro, Darboux Functions and Perturbative Theory for the Ground-State Energy of Two-Electron Atoms, J. Phys. B: Atom. Molec., 10, n. 3 (1977).