



**ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE**

**Sezione di Genova**

---

**INFN/TC-99/21**

**14 Ottobre 1999**

**THE DETECTION OF GRAVITATIONAL WAVES BY COUPLED  
MICROWAVE CAVITIES: THEORETICAL ASPECTS**

Ph. Bernard<sup>1</sup>, G. Gemme<sup>2</sup>, R. Parodi<sup>2</sup>, E. Picasso<sup>3</sup>

*<sup>1</sup>CERN, CH-1211, Geneva 23, Switzerland*

*<sup>2</sup>INFN-Sezione di Genova, via Dodecaneso 33, I-16146 Genova, Italy*

*<sup>3</sup>Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, I-56126, Pisa, Italy*

**Abstract**

The basic physical principles underlying the operation of a gravitational waves detector based on two coupled microwave cavities are discussed. The general properties of the interaction of a g.w. and an electromechanical detector are reviewed and the properties of invariance of the four-momentum transfer in different reference frames are considered. Finally the interaction process is analyzed either in the detector proper reference frame or in the rest frame of the detector walls, pointing out the connection of the two descriptions and getting a full picture of the process.

PACS.: 04.80.Nn

*Published by SIS-Pubblicazioni  
Laboratori Nazionali di Frascati*

## 1 INTRODUZIONE

Un'analisi generale dell'interazione fra un sistema fisico ed un'onda gravitazionale permette di suddividere i diversi tipi di rivelatori in due classi fondamentali:

Rivelatori meccanici: in essi l'accoppiamento con l'onda gravitazionale avviene mediante il campo delle deformazioni elastiche (un esempio è costituito dai rivelatori alla Weber);

Rivelatori elettromeccanici: si tratta di sistemi nei quali è presente sia un campo elettromagnetico che un campo di deformazioni elastiche. Questi campi si influenzano a vicenda ed entrambi interagiscono con l'onda gravitazionale (a questa classe appartengono i rivelatori interferometrici).

A differenza di quanto accade per i rivelatori appartenenti alla prima classe, un'onda gravitazionale è in grado di indurre transizioni fra i diversi livelli energetici di un sistema elettromeccanico. Analizzando da un punto di vista generale l'interazione fra un'onda gravitazionale ed un sistema fisico si determineranno le leggi che regolano tale interazione, mettendo in evidenza le peculiarità dei diversi tipi di rivelatore. Sulla base delle conclusioni raggiunte si discuterà la fattibilità di un rivelatore elettromeccanico basato su due cavità risonanti superconduttrici accoppiate.

## 2 POTENZA TRASFERITA AD UN RIVELATORE

Per poter rivelare un'onda gravitazionale è necessario disporre di un sistema fisico capace di accoppiarsi con essa, cioè capace di assorbire una parte della sua energia (e più in generale del suo quadrimpulso): questo sistema costituisce l'elemento sensibile del rivelatore.

Nel caso di un rivelatore di onde elettromagnetiche, l'elemento sensibile, cioè l'antenna, è descritto mediante la sua densità di quadricorrente  $J^\mu$ <sup>1</sup>

$$J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) \quad (1)$$

dove  $\rho$  è la densità di carica e  $\mathbf{J}$  la densità di corrente.

Infatti il quadrimpulso  $dP_\mu$  assorbito nel tempo  $dt$  si esprime mediante la forza di Lorentz

$$\frac{dP_\mu}{dt} = \frac{1}{c} \int_V F_{\mu\nu} J^\nu d^3x \quad (2)$$

dove  $V$  è il volume dell'antenna ed  $F_{\mu\nu}$  il tensore del campo elettromagnetico associato all'onda.

Ricaviamo l'analogo dell'equazione (2) per un'antenna gravitazionale: a tal fine ricordiamo la relazione che esprime la conservazione dell'energia e dell'impulso di un sistema in presenza di gravità

---

<sup>1</sup> La segnatura della metrica è (+, -, -, -); gli indici greci vanno da 0 a 4, gli indici latini da 1 a 3 (ove non diversamente specificato); è implicita la somma sugli indici ripetuti.

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (3)$$

ed utilizziamo l'espressione seguente per la derivata covariante di un tensore simmetrico [1]

$$T^{\mu}{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\nu}} T^{\rho\sigma} \quad (4)$$

Si ha

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu})}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\nu}} T^{\rho\sigma} \sqrt{-g} \quad (5)$$

Il quadrimpulso del sistema è [1]

$$P_{\mu} = \frac{1}{c} \int_V T_{\mu}^0 \sqrt{-g} d^3x \quad (6)$$

dove  $V$  è il volume tridimensionale del sistema.

Per valutare la variazione  $\delta P_{\mu}$  del quadrimpulso al trascorrere del tempo, consideriamo l'elemento  $dS_{\mu}$  di ipersuperficie che racchiude la regione di spazio-tempo attraversata dal sistema. Se il sistema è delimitato da pareti, con  $V$  si intende un volume che contenga queste pareti in modo che  $T_{\mu\nu}$  sia nullo su bordo di  $V$  [2]. Allora

$$\delta P_{\mu} = \frac{1}{c} \int T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g} dS_{\nu} \quad (7)$$

Applicando il teorema di Gauss si può trasformare l'integrale di 4-superficie in un integrale di 4-volume e, grazie alla (5) si ha

$$\delta P_{\mu} = \frac{1}{c} \int \frac{\partial(T_{\mu}^{\nu} \sqrt{-g})}{\partial x^{\nu}} d^4x = \frac{1}{2c} \int \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} T^{\rho\sigma} \sqrt{-g} d^4x \quad (8)$$

La variazione  $\delta P_{\mu}$  è funzione, tramite gli estremi di integrazione, della coordinata  $x_0$ ; la sua derivata è

$$\frac{d(\delta P_{\mu})}{dx^0} = \frac{1}{2c} \int_V \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} T^{\rho\sigma} \sqrt{-g} d^3x \quad (9)$$

Dalla componente temporale dell'equazione precedente si ottiene (ponendo  $\delta U = c\delta P_0$ )

$$\delta\dot{U} = \frac{1}{2} \int_V \dot{g}_{\rho\sigma} T^{\rho\sigma} \sqrt{-g} d^3x \quad (10)$$

Le equazioni (5) e (10) sono rispettivamente la forma differenziale ed integrale di un teorema di Poynting generalizzato valido per qualunque sistema in interazione con il campo gravitazionale.

Osserviamo come dall'equazione (8) risulti che il quadrimpulso trasferito non è in generale una quantità invariante per trasformazioni delle coordinate. Al secondo membro della (8) compaiono infatti le derivate prime del tensore metrico, mentre è noto che gli unici tensori invarianti costruiti a partire dalla metrica sono quelli che contengono le sue derivate seconde, cioè il tensore di Riemann e le sue contrazioni.

### 3 CONDIZIONI DI INVARIANZA PER IL QUADRIMPULSO TRASFERITO

Le trasformazioni di coordinate sono uno strumento indispensabile nello studio delle proprietà dei rivelatori di radiazione gravitazionale: scegliendo opportunamente il sistema di riferimento è possibile, ad esempio, descrivere gli effetti della gravità su un sistema elettromeccanico trascurando il contributo delle pareti, o, alternativamente, quello del campo elettromagnetico.

Tuttavia nel paragrafo precedente si è mostrato come il quadrimpulso trasferito non sia in generale una quantità invariante per trasformazioni del sistema di coordinate. Questa conclusione implica l'impossibilità di confrontare i risultati dell'analisi di un rivelatore fatta in un determinato sistema di coordinate, con i risultati delle misure fatte in un sistema diverso. Nondimeno è possibile trovare una classe di trasformazioni di coordinate rispetto alle quali il quadrimpulso trasferito sia invariante. Restringendo l'insieme dei cambiamenti di riferimento a questa classe sarà lecito effettuare i calcoli nel sistema più conveniente e confrontare i risultati con le misure effettuate nel sistema del laboratorio.

Consideriamo una generica trasformazione invertibile di coordinate:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'^{\mu} = x'^{\mu}(x) \\ \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \neq 0 \end{array} \right. \quad (11)$$

Senza alcuna perdita di generalità la (11) si può scrivere

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad (12)$$

dove le  $\varepsilon^{\mu}$  sono generiche funzioni non necessariamente infinitesime.

Sia  $\delta P'_{\mu}$  il quadrimpulso trasferito nel nuovo riferimento

$$\delta P'_{\mu} = \frac{1}{2c} \int \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \right)' T'^{\rho\sigma} \sqrt{-g'} d^4x' \quad (13)$$

Valgono allora le seguenti condizioni sufficienti per l'eguaglianza di  $\delta P_\mu$  e  $\delta P'_\mu$

- a)  $T^{\mu\nu}$  è nullo al di fuori del volume del rivelatore;
- b)  $T^{\mu\nu}$  è non-singolare entro il volume del rivelatore;
- c) Le derivate  $\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}$  relative alla trasformazione invertibile (12) sono nulle entro il volume del rivelatore agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  in cui ha inizio ed ha termine la misura del quadrimpulso  $\delta P_\mu$  assorbito nel sistema di riferimento di partenza.

Per la dimostrazione del precedente asserto si rinvia a [3]. Vale la pena però di commentare brevemente le ipotesi di cui sopra, ed in particolare l'ipotesi (c). Il suo significato è che agli istanti  $t_1$  e  $t_2$  entro i quali si considera il trasferimento di quadrimpulso, i due sistemi di riferimento devono coincidere (a meno di una traslazione) e la loro velocità relativa deve essere nulla.

Il teorema è particolarmente utile nel caso di un rivelatore sul quale incida radiazione gravitazionale costituita da un pacchetto d'onda di durata finita: purché si considerino sistemi di riferimento che coincidano prima dell'arrivo del pacchetto e dopo che esso ha interagito con il rivelatore, il quadrimpulso trasferito risulta invariante, anche per trasformazioni non infinitesime delle coordinate.

Nel caso di radiazione gravitazionale monocromatica è utile avere informazioni riguardo all'invarianza della quadriforza media assorbita  $\langle \dot{P}_\mu \rangle$  (in particolare della potenza media); valgono le seguenti condizioni sufficienti per l'eguaglianza di  $\langle \dot{P}_\mu \rangle$  e  $\langle \dot{P}'_\mu \rangle$ :

- a)  $T^{\mu\nu}$  è nullo fuori del volume del rivelatore;
- b) in assenza di onda gravitazionale, cioè quando il sistema è isolato,  $T^{\mu\nu}$  è a variazione limitata entro il volume del rivelatore, cioè  $\exists k \in \mathfrak{R}$ , con  $k > 0$ , tale che  $|T^{\mu\nu}| < k$  entro  $V$ ;
- c) le derivate  $\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}$  relative ad una trasformazione infinitesima del tipo (12) sono a variazione limitata entro il volume del rivelatore;
- d)  $g_{\mu\nu}$  è a variazione limitata entro il volume del rivelatore;
- e)  $\dot{P}_\mu = O(h^n) \exists$  con  $n \geq 1$
- f)  $\varepsilon^\mu = O(h)$

Il significato di questo teorema si può riassumere dicendo che, purché tutte le ipotesi siano verificate, una trasformazione infinitesima delle coordinate introduce termini aggiuntivi di ordine superiore alla quadriforza media assorbita dal rivelatore e che quindi, all'ordine più basso in  $h$ , si ha invarianza di questa quadriforza media [3].

Un esempio di trasformazione infinitesima che soddisfi alle ipotesi di questo teorema sarà dato nel seguito, dove si discuterà il legame fra il sistema TT di un'onda gravitazionale monocromatica ed il sistema proprio del baricentro del rivelatore [4]: in quel caso le  $\varepsilon^\mu$  sono periodiche e quindi le derivate  $\frac{\partial \varepsilon^\mu}{\partial x^\nu}$  sono sicuramente a variazione limitata.

#### 4 PROPRIETA' GENERALI DEI RIVELATORI

Il sistema di riferimento più naturale al quale riferire i risultati delle misure effettuate con un rivelatore di onde gravitazionali è il sistema proprio del baricentro del rivelatore [4]. D'altra parte la descrizione fisica della perturbazione gravitazionale è spesso più conveniente nel sistema TT (transverse-traceless) [4]. Cerchiamo dunque la forma esplicita per una trasformazione di coordinate che ci permetta di passare da un sistema all'altro, mantenendo invariante il quadrimpulso (o la quadriforza media) trasferito durante l'interazione.

Poniamo, per un'onda gravitazionale che si propaghi in direzione dell'asse  $x^3$  nel sistema TT

$$g_{\mu\nu}^{TT} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{TT} \quad (14)$$

con

$$h_{\mu\nu}^{TT} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

E' facile verificare che la seguente trasformazione ad un parametro  $\lambda$ <sup>2</sup>

$$\begin{cases} x^0(\lambda) = (x^0)^{TT} + \frac{1}{2c} \lambda \dot{a}_{ij} x^i x^j \\ x^i(\lambda) = (x^i)^{TT} - \lambda a_j^i x^j \\ x^3(\lambda) = (x^3)^{TT} + \frac{1}{2c} \lambda \dot{a}_{ij} x^i x^j \end{cases} \quad (16)$$

soddisfa per  $\lambda = 1/2$  alle condizioni richieste<sup>3</sup> [5]. A questa trasformazione infatti corrisponde la metrica  $g_{\mu\nu}(\lambda) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\lambda)$ , con

$$h_{\mu\nu}(\lambda) = (2\lambda - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{c^2} \ddot{a}_{ij} x^i x^j \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

E si ha  $g_{\mu\nu}(\lambda = 1/2) = \eta_{\mu\nu}$  nel baricentro del sistema ( $x^u = 0$ ).

<sup>2</sup> Gli indici  $i, j$  corrono, nel caso di un'onda che si propaghi in direzione dell'asse  $x^3$ , da 1 a 2.

<sup>3</sup> Si è posto  $a^\alpha_\beta = \eta^{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}$

Studiamo l'assorbimento di energia gravitazionale nel sistema TT ( $\lambda = 0$ ). L'equazione che esprimeva il teorema di Poynting generalizzato diviene, tenendo conto che nel sistema TT si ha  $(\sqrt{-g})^{TT} = 1 + O(h^2)$

$$\delta\dot{U} = \frac{1}{2} \int_V \dot{a}_{ij} T^{ij} d^3x \quad (18)$$

Per tutti i casi di interesse fisico si ha che la lunghezza d'onda tipica della radiazione gravitazionale  $\lambda_g$ , è molto maggiore della dimensione lineare del rivelatore  $L$ ; allora  $\dot{a}_{ij}$  è praticamente costante sul volume  $V$  e la (18) diviene

$$\delta\dot{U} = \frac{1}{2} \dot{a}_{ij} \int_V T^{ij} d^3x \quad (19)$$

ossia, nell'unità di volume ( ponendo  $\delta W = d(\delta U)/dV$  ),

$$\delta\dot{W} = \frac{1}{2} \dot{a}_{11} (T^{11} - T^{22}) + \dot{a}_{12} T^{12} \quad (20)$$

Per un sistema elettromagnetico il tensore energia-impulso ha la forma

$$T_{em}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -F^{\mu\rho} F_{\rho}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \quad (21)$$

Per un sistema meccanico si può scrivere, per la parte spaziale del tensore energia-impulso

$$T_m^{ij} = \rho c^2 u^i u^j - \sigma^{ij} = \rho c^2 u^i u^j - 2\alpha \xi^{ij} - \beta \delta^{ij} Tr(\xi) \quad (22)$$

dove la seconda uguaglianza vale per mezzi elastici isotropi e si è posto  $\xi^i = x^i - X^i$  (campo delle deformazioni elastiche),  $u^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^0}$ , e  $\xi^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right)$ .  $\alpha$  e  $\beta$  sono i coefficienti di Lamé [3].

In generale al trasferimento di energia con la radiazione gravitazionale contribuisce il tensore energia-impulso totale del sistema. Da questo punto di vista le antenne gravitazionali si possono dividere in due classi:

- a) antenne meccaniche risonanti: in questo caso l'accoppiamento con l'onda avviene mediante il campo  $\xi$  delle deformazioni elastiche. Poiché il tensore  $T_m$  si può considerare lineare in  $\xi$ , esso ha lo stesso spettro di frequenze del sistema. Un'onda gravitazionale

perciò non è in grado di accoppiare tra loro livelli vibrazionali distinti, ma può unicamente pompare energia in un livello che abbia la sua stessa frequenza;

- b) antenne elettromeccaniche: in questo caso l'accoppiamento con l'onda gravitazionale avviene mediante entrambi i campi, i quali inoltre si influenzano a vicenda. Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento è possibile annullare l'uno o l'altro dei due contributi alla potenza assorbita, semplificando l'analisi del processo di interazione. Il principale vantaggio che si ha nell'uso di antenne elettromeccaniche consiste nel fatto che l'onda gravitazionale è in grado di accoppiare tra loro due diversi livelli del sistema; poiché il tensore  $T_{em}$  è quadratico nei campi, esso contiene componenti armoniche di frequenza data dalla somma e dalla differenza delle frequenze dei due livelli. Ne segue che se la frequenza  $\Omega$  dell'onda è pari alla differenza  $\Omega = \omega_2 - \omega_1$ , si può avere trasferimento di energia da un livello all'altro.

Con una scelta opportuna del sistema di coordinate è possibile descrivere gli effetti della gravità su un sistema elettromeccanico trascurando il contributo delle pareti, o, alternativamente quello del campo elettromagnetico, semplificando in tal modo l'analisi del sistema. Nel sistema TT precedentemente discusso tale semplificazione non è possibile, in quanto, in tale sistema, occorre in generale tenere conto di entrambi i contributi (21) e (22). Il contributo meccanico all'interazione può essere trascurato in un sistema di coordinate nel quale le pareti del rivelatore, inizialmente a riposo, rimangono ferme anche in presenza dell'onda gravitazionale. E' stato dimostrato [5] che questa condizione è soddisfatta, a meno di termini di  $O(h\Omega^2 L^2)$ , per

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2} \left( \omega_m^2 + j \frac{\Omega \omega_m}{Q_m} \right)}{\omega_m^2 - \Omega^2 + j \frac{\Omega \omega_m}{Q_m}} \quad (23)$$

In tale sistema la (10) diventa

$$\begin{aligned} \delta \dot{W} &= \frac{\Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2 + j \frac{\Omega \omega_m}{Q_m}} \left[ \dot{a}_{11} (T_{em}^{11} - T_{em}^{22}) + 2\dot{a}_{12} T_{em}^{12} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\Omega^2}{\omega_m^2 - \Omega^2 + j \frac{\Omega \omega_m}{Q_m}} \left[ \dot{a}_{11} (H_x^2 - H_y^2 + E_x^2 - E_y^2) + 2\dot{a}_{12} (H_x H_y + E_x E_y) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

L'espressione precedente dipende quadraticamente dalle ampiezze del campo elettromagnetico. Se prendiamo in considerazione il caso in cui il rivelatore sia costituito da una coppia di risuonatori identici accoppiati, possiamo supporre che il campo nel rivelatore sia la sovrapposizione lineare dei campi dei due modi di risonanza del sistema accoppiato. In

questo caso la (24) conterrà termini di frequenza pari alla somma ed alla differenza delle frequenze dei due livelli. Se la frequenza dell'onda gravitazionale è pari, ad esempio, alla differenza delle frequenze dei due livelli, sarà possibile avere trasferimento di energia da un livello all'altro, ed utilizzare questo fenomeno per la rivelazione dell'onda gravitazionale.

Nel paragrafo seguente esaminiamo più in dettaglio il meccanismo di interazione dell'onda con il campo elettromagnetico di due risuonatori accoppiati e vedremo come tale interazione potrebbe essere utilizzata per la rivelazione di onde gravitazionali di alta frequenza in una specifica configurazione sperimentale.

## 5 CONFIGURAZIONE SPERIMENTALE

L'apparato sperimentale che prendiamo in considerazione è quello inizialmente proposto da Bernard, Pegoraro, Picasso e Radicati [5] e successivamente sviluppato e realizzato da Reece, Reiner e Melissinos [6]. Un analogo rivelatore è stato considerato dagli autori in un precedente rapporto [7].

In sintesi, il rivelatore consiste in un risuonatore elettromagnetico con due modi di risonanza le cui frequenze  $\omega_s$  ed  $\omega_a$  sono entrambe molto maggiori della frequenza caratteristica  $\Omega$  dell'onda gravitazionale e soddisfano la condizione di risonanza  $\omega_s - \omega_a = \Omega$ . Nello schema proposto in [5, 6, 7] i due livelli sono ottenuti accoppiando due risuonatori elettromagnetici identici;  $\omega_s$  è la frequenza del modo di risonanza simmetrico rispetto ai campi nei due risuonatori, mentre  $\omega_a$  è la frequenza del modo antisimmetrico. Si suppone che inizialmente sia eccitato il modo simmetrico alla frequenza  $\omega_s$  mediante una sorgente esterna; se i campi nei due risuonatori soddisfano a certe proprietà di simmetria (discusse nel seguito) l'onda gravitazionale induce la transizione di energia elettromagnetica fra i due livelli, eccitando il modo antisimmetrico e generando quindi la comparsa di energia alla frequenza  $\omega_a$ . La potenza nel modo antisimmetrico è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'onda gravitazionale. Per ricavarne l'espressione esplicita è opportuno analizzare il processo di interazione dell'onda con il rivelatore in due sistemi di riferimento:

- a) Il sistema proprio del baricentro del rivelatore, nel quale il contributo dominante è dato dall'interazione dell'onda con la struttura meccanica del rivelatore;
- b) Il sistema nel quale le pareti del rivelatore sono a riposo, dove l'interazione è interamente descritta dall'accoppiamento diretto dell'onda con il campo elettromagnetico nel rivelatore.

### 5.1 Interazione nel sistema di riferimento localmente inerziale

Il sistema di riferimento più naturale al quale riferire i risultati delle misure effettuate con un rivelatore di onde gravitazionali è il sistema proprio del baricentro del rivelatore; è immediato verificare che tale sistema è definito dalla metrica (17) per  $\lambda = 1/2$ .

In tale sistema è possibile trascurare l'effetto dell'accoppiamento diretto dell'onda gravitazionale con il campo elettromagnetico contenuto nel rivelatore, mentre l'effetto dominante è dato dall'interazione dell'onda con la struttura meccanica del rivelatore. La trattazione di tale interazione è quella standard sviluppata per l'analisi dei rivelatori meccanici alla Weber [4].

L'espressione della deformazione del rivelatore nel dominio della frequenza ed in vicinanza di un modo di risonanza della struttura meccanica è data dall'espressione:

$$\xi(\Omega) = \frac{L}{2} \frac{h(\Omega)\Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_m^2) - j\frac{\Omega\omega_m}{Q_m}} f(\vartheta, \phi) \quad (25)$$

dove  $\omega_m$  e  $Q_m$  rappresentano rispettivamente la frequenza ed il fattore di merito di un modo di risonanza meccanico della struttura del rivelatore e  $f(\vartheta, \phi)$  è la funzione angolare caratteristica [8].

Se consideriamo una configurazione sperimentale nella quale il rivelatore è costituito da due risonatori elettromagnetici accoppiati, nei quali sia inizialmente eccitato da una sorgente esterna il modo di risonanza simmetrico (v. FIG. 1) [7], ci domandiamo quale sia l'entità della potenza elettromagnetica trasferita al modo antisimmetrico in presenza della deformazione (24).

Sulla base di principi del tutto generali possiamo scrivere:

$$P_2 = \omega_2 U_1 Q_{em} \left| \frac{\xi(\Omega)}{L} \right|^2 |C|^2 \quad (26)$$

dove  $C$  è un coefficiente di accoppiamento che tiene conto della simmetria dei campi elettromagnetici nel rivelatore. Dalla (24) si ha

$$P_2 = \frac{1}{4} \omega_2 U_1 Q_{em} |C|^2 f^2(\vartheta, \phi) \frac{h^2(\Omega)\Omega^4}{(\Omega^2 - \omega_m^2)^2 + \frac{\Omega^2 \omega_m^2}{Q_m^2}} \quad (27)$$

Il calcolo esplicito della (26) richiede la conoscenza del coefficiente  $C$ ; nel paragrafo seguente il calcolo di  $C$  è effettuato mettendosi nel sistema di riferimento nel quale le pareti del rivelatore sono a riposo e l'interazione dell'onda con il rivelatore è interamente descritta dall'accoppiamento diretto con il campo elettromagnetico.

La (26) permette di valutare la sezione d'urto di interazione; si ha per definizione

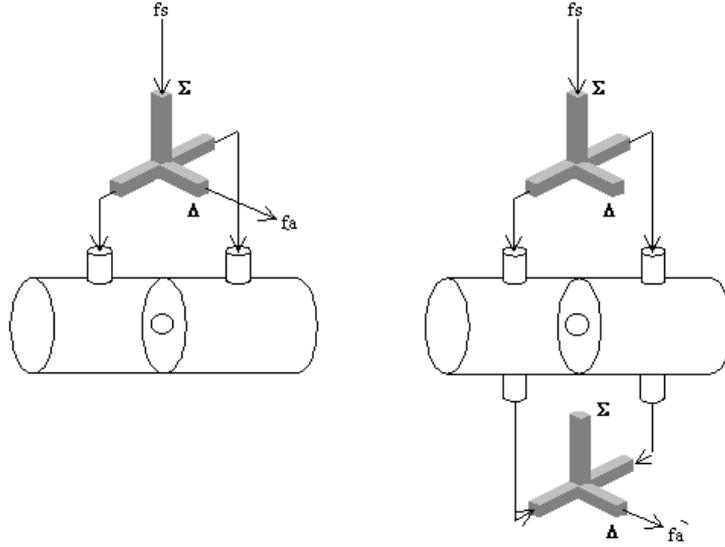
$$\sigma(\Omega) = \frac{P_2}{\Phi_{GW}(\Omega)} = \frac{P_2}{\frac{1}{32\pi} \frac{c^3}{G} (h(\Omega)\Omega)^2} \quad (28)$$

da cui si ottiene

$$\sigma(\Omega) = 8\pi \frac{G}{c^3} |C|^2 f^2(\vartheta, \phi) \frac{\omega_2 U_1 Q_{em} \Omega^2}{(\Omega^2 - \omega_m^2)^2 + \frac{\Omega^2 \omega_m^2}{Q_m^2}} \quad (29)$$

Si ha per  $\Omega = \omega_m$

$$\sigma(\Omega = \omega_m) = 8\pi \frac{G}{c^3} |C|^2 f^2(\vartheta, \phi) \frac{\omega_2 U_1 Q_{em} Q_m^2}{\Omega^2} \quad (30)$$



**FIG. 1:** Rappresentazione schematica dell'apparato sperimentale in due possibili configurazioni. Per una discussione dettagliata vedi [7].

## 5.2 Interazione nel sistema di riferimento di riposo delle pareti del rivelatore

Per esaminare da vicino il meccanismo del trasferimento di energia tra due livelli di un oscillatore elettromagnetico indotto da un'onda gravitazionale studiamo il problema utilizzando la teoria classica dell'elettromagnetismo. Ciò è possibile in quanto nel sistema di riferimento nel quale le pareti del rivelatore sono a riposo l'interazione dell'onda gravitazionale con l'apparato è descritto dall'accoppiamento diretto dell'onda con il campo elettromagnetico nel rivelatore. In tale sistema di riferimento possiamo utilizzare per la soluzione del problema le tecniche standard dell'elettromagnetismo.

In particolare cerchiamo la soluzione delle equazioni di Maxwell in un volume di spazio vuoto racchiuso da pareti perfettamente conduttrici. E' noto che la soluzione generale del problema è esprimibile come somma su un numero infinito di modi normali di oscillazione del sistema; supponiamo, per semplicità, di essere interessati alla soluzione del problema in una regione di frequenza nella quale è rilevante il contributo di due soli modi normali.

Cerchiamo dunque una soluzione per i campi elettrico e magnetico in termini di una combinazione lineare dei due modi del sistema.

Come primo passo osserviamo che sulla base di principi del tutto generali dell'analisi vettoriale, ciascun campo vettoriale può essere espresso come somma di due campi, uno dei quali è solenoidale, o a divergenza nulla, e l'altro irrotazionale, ossia a rotore nullo [9]. Siano  $\{\mathbf{E}^{(i)}\}$  ed  $\{\mathbf{H}^{(i)}\}$  ( $i = 1, 2$ ) due insiemi di funzioni solenoidali ortonormali indipendenti dal tempo, in termini delle quali espandere rispettivamente la parte solenoidale di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{D}$  e di  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{B}$ . Le funzioni  $\{\mathbf{E}^{(i)}\}$  ed  $\{\mathbf{H}^{(i)}\}$ , essendo a divergenza nulla, sono esprimibili come rotori di certe altre funzioni vettoriali; postuliamo che esse soddisfino alle relazioni  $\omega_i \mathbf{E}^{(i)} = \nabla \wedge \mathbf{H}^{(i)}$  e  $\omega_i \mathbf{H}^{(i)} = \nabla \wedge \mathbf{E}^{(i)}$ .

Sulla base della prima coppia delle equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0\end{aligned}\tag{31}$$

possiamo scrivere  $\mathbf{D} = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\mathbf{E}^{(1)} + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(2)})\mathbf{E}^{(2)}$  e  $\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(1)})\mathbf{H}^{(1)} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(2)})\mathbf{H}^{(2)}$  <sup>4</sup>.

I campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  conterranno in generale sia la parte solenoidale che la parte irrotazionale; avremo dunque

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\mathbf{E}^{(1)} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})\mathbf{E}^{(2)} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{(1)})\mathbf{F}^{(1)} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{(2)})\mathbf{F}^{(2)}\tag{32a}$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})\mathbf{H}^{(1)} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})\mathbf{H}^{(2)} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^{(1)})\mathbf{G}^{(1)} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^{(2)})\mathbf{G}^{(2)}\tag{32b}$$

dove abbiamo indicato con  $\{\mathbf{F}^{(i)}\}$  e  $\{\mathbf{G}^{(i)}\}$  due insiemi di campi vettoriali irrotazionali ortonormali indipendenti dal tempo.

Dalla seconda coppia delle equazioni di Maxwell abbiamo:

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{E} &= (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\nabla \wedge \mathbf{E}^{(1)} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})\nabla \wedge \mathbf{E}^{(2)} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\omega_1 \mathbf{H}^{(1)} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})\omega_2 \mathbf{H}^{(2)} = \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(1)})\mathbf{H}^{(1)} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(2)})\mathbf{H}^{(2)}] = -\frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(1)})}{\partial t} \mathbf{H}^{(1)} - \frac{\partial (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(2)})}{\partial t} \mathbf{H}^{(2)}\end{aligned}\tag{33}$$

e

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{H} &= (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})\nabla \wedge \mathbf{H}^{(1)} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})\nabla \wedge \mathbf{H}^{(2)} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})\omega_1 \mathbf{E}^{(1)} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})\omega_2 \mathbf{E}^{(2)} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\mathbf{E}^{(1)} + (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(2)})\mathbf{E}^{(2)}] = \frac{\partial (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(1)})}{\partial t} \mathbf{E}^{(1)} + \frac{\partial (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(2)})}{\partial t} \mathbf{E}^{(2)}\end{aligned}\tag{34}$$

da cui otteniamo, uguagliando i coefficienti di  $\mathbf{E}^{(1)}$ ,  $\mathbf{E}^{(2)}$ ,  $\mathbf{H}^{(1)}$ ,  $\mathbf{H}^{(2)}$ :

---

<sup>4</sup> Qui e nel seguito per compattezza di notazione si indica con  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  il prodotto scalare tra campi vettoriali definito come  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) := \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV$  esteso al volume  $V$  della cavità.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})\omega_1 &= -\frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(1)})}{\partial t} \\
 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})\omega_2 &= -\frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(2)})}{\partial t} \\
 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})\omega_1 &= \frac{\partial(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(1)})}{\partial t} \\
 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})\omega_2 &= \frac{\partial(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(2)})}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{35}$$

Il legame tra i campi  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{H}$  e le loro induzioni  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  è dato dalle relazioni lineari  $D_i = \epsilon_{ij}E_j$  e  $B_i = \mu_{ij}H_j$ . E' stato dimostrato [5] che in presenza di una perturbazione gravitazionale descritta dalla metrica (17) si ha  $\epsilon_{ij} = \mu_{ij} = -(\eta_{ij} + (1-2\lambda)a_{ij}) + O(h\Omega^2 L^2)$ , dove  $\Omega$  è la frequenza caratteristica dell'onda e  $L$  la dimensione lineare tipica della cavità risonante<sup>5</sup>. Supponiamo, per semplicità, che l'onda gravitazionale sia polarizzata in modo da avere  $a_{12} = a_{21} = 0$  e poniamo  $a_{11} = -a_{22} := h(t)$ ; si ha dunque

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \mathbf{E} - (1-2\lambda)h(t)[E_x, -E_y, 0] = \\
 &= \mathbf{E} - (1-2\lambda)h(t)[(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})E_x^{(1)} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})E_x^{(2)}, -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})E_y^{(1)} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})E_y^{(2)}, 0] \\
 \mathbf{B} &= \mathbf{H} - (1-2\lambda)h(t)[H_x, -H_y, 0] = \\
 &= \mathbf{H} - (1-2\lambda)h(t)[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})H_x^{(1)} + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})H_x^{(2)}, -(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})H_y^{(1)} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})H_y^{(2)}, 0]
 \end{aligned} \tag{36}$$

I prodotti scalari che compaiono a secondo membro della (36) hanno quindi la forma seguente<sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(1)} &= \\
 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)} - (1-2\lambda)h(t)[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})(H_x^{(1)2} - H_y^{(1)2})_V + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})(H_x^{(1)}H_x^{(2)} - H_y^{(1)}H_y^{(2)})_V] \\
 \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^{(2)} &= \\
 &= \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)} - (1-2\lambda)h(t)[(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)})(H_x^{(1)}H_x^{(2)} - H_y^{(1)}H_y^{(2)})_V + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)})(H_x^{(2)2} - H_y^{(2)2})_V] \\
 \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(1)} &= \\
 &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)} - (1-2\lambda)h(t)[(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})(E_x^{(1)2} - E_y^{(1)2})_V + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})(E_x^{(1)}E_x^{(2)} - E_y^{(1)}E_y^{(2)})_V] \\
 \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^{(2)} &= \\
 &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)} - (1-2\lambda)h(t)[(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)})(E_x^{(1)}E_x^{(2)} - E_y^{(1)}E_y^{(2)})_V + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)})(E_x^{(2)2} - E_y^{(2)2})_V]
 \end{aligned} \tag{37}$$

<sup>5</sup> Per compattezza notazionale non scriviamo nel seguito l'espressione esplicita del coefficiente  $\lambda$  appropriato per la nostra scelta del sistema di riferimento. Ricordiamo che tale espressione è scritta nel paragrafo 4 eq. (23).

<sup>6</sup> Il pedice  $V$  ricorda che le espressioni tra parentesi vanno integrate sul volume della cavità.

Le (37) diventano infine:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_1)}{\partial t} + \omega_1(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_1) = (1-2\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h(t) \left[ (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)}) \left( H_x^{(1)2} - H_y^{(1)2} \right)_V + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)}) \left( H_x^{(1)} H_x^{(2)} - H_y^{(1)} H_y^{(2)} \right)_V \right] \right\} \\
 & \frac{\partial(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_2)}{\partial t} + \omega_2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_2) = (1-2\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h(t) \left[ (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(1)}) \left( H_x^{(1)} H_x^{(2)} - H_y^{(1)} H_y^{(2)} \right)_V + (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^{(2)}) \left( H_x^{(2)2} - H_y^{(2)2} \right)_V \right] \right\} \\
 & \frac{\partial(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_1)}{\partial t} - \omega_1(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_1) = (1-2\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h(t) \left[ (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)}) \left( E_x^{(1)2} - E_y^{(1)2} \right)_V + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)}) \left( E_x^{(1)} E_x^{(2)} - E_y^{(1)} E_y^{(2)} \right)_V \right] \right\} \\
 & \frac{\partial(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_2)}{\partial t} - \omega_2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_2) = (1-2\lambda) \frac{\partial}{\partial t} \left\{ h(t) \left[ (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(1)}) \left( E_x^{(1)} E_x^{(2)} - E_y^{(1)} E_y^{(2)} \right)_V + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^{(2)}) \left( E_x^{(2)2} - E_y^{(2)2} \right)_V \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Il sistema di equazioni (38) può essere scritto in modo da rendere più evidente l'accoppiamento fra i modi naturali del sistema determinato dall'onda gravitazionale. Poniamo  $m_1(t) = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_1) + j(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_1)$ ,  $m_2(t) = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_2) + j(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_2)$  ed  $m_1^*(t)$  e  $m_2^*(t)$  i rispettivi complessi coniugati [10]. Moltiplicando la terza e la quarta delle (38) per  $j$  e sommando e sottraendo rispettivamente alla prima ed alla terza delle (38) si ottiene un sistema della forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{dm_1(t)}{dt} - j\omega_1 m_1(t) = c_{11} \frac{d}{dt}(h(t)m_1(t)) + c_{12} \frac{d}{dt}(h(t)m_2(t)) + c_{13} \frac{d}{dt}(h(t)m_1^*(t)) + c_{14} \frac{d}{dt}(h(t)m_2^*(t)) \\
 & \frac{dm_2(t)}{dt} - j\omega_2 m_2(t) = c_{21} \frac{d}{dt}(h(t)m_1(t)) + c_{22} \frac{d}{dt}(h(t)m_2(t)) + c_{23} \frac{d}{dt}(h(t)m_1^*(t)) + c_{24} \frac{d}{dt}(h(t)m_2^*(t)) \\
 & \frac{\partial m_1^*(t)}{\partial t} + j\omega_1 m_1^*(t) = c_{31} \frac{d}{dt}(h(t)m_1(t)) + c_{32} \frac{d}{dt}(h(t)m_2(t)) + c_{33} \frac{d}{dt}(h(t)m_1^*(t)) + c_{34} \frac{d}{dt}(h(t)m_2^*(t)) \\
 & \frac{\partial m_2^*(t)}{\partial t} + j\omega_2 m_2^*(t) = c_{41} \frac{d}{dt}(h(t)m_1(t)) + c_{42} \frac{d}{dt}(h(t)m_2(t)) + c_{43} \frac{d}{dt}(h(t)m_1^*(t)) + c_{44} \frac{d}{dt}(h(t)m_2^*(t))
 \end{aligned} \tag{39}$$

con

$$\begin{aligned}
 c_{11} = c_{33} &= \frac{(1-2\lambda)}{2} \int_V \left( H_x^{(1)2} - H_y^{(1)2} + E_x^{(1)2} - E_y^{(1)2} \right) dV \\
 c_{12} = c_{21} = c_{34} = c_{43} &= \frac{(1-2\lambda)}{2} \int_V \left( H_x^{(1)} H_x^{(2)} - H_y^{(1)} H_y^{(2)} + E_x^{(1)} E_x^{(2)} - E_y^{(1)} E_y^{(2)} \right) dV \\
 c_{13} = c_{31} &= \frac{(1-2\lambda)}{2} \int_V \left( H_x^{(1)2} - H_y^{(1)2} - E_x^{(1)2} + E_y^{(1)2} \right) dV \\
 c_{14} = c_{41} = c_{23} = c_{32} &= \frac{(1-2\lambda)}{2} \int_V \left( H_x^{(1)} H_x^{(2)} - H_y^{(1)} H_y^{(2)} - E_x^{(1)} E_x^{(2)} + E_y^{(1)} E_y^{(2)} \right) dV \\
 c_{22} = c_{44} &= \frac{(1-2\lambda)}{2} \int_V \left( H_x^{(2)2} - H_y^{(2)2} + E_x^{(2)2} - E_y^{(2)2} \right) dV \\
 c_{24} = c_{42} &= \frac{(1-2\lambda)}{2} \int_V \left( H_x^{(2)2} - H_y^{(2)2} - E_x^{(2)2} + E_y^{(2)2} \right) dV
 \end{aligned} \tag{40}$$

E' evidente l'analogia tra le espressioni nella (40) e la relazione (24) che descrive lo scambio di energia tra un rivelatore ed un'onda gravitazionale; in effetti sostituendo nella (24) le espressioni (32a,b) dei campi elettromagnetici ed utilizzando le ipotesi discusse nel presente paragrafo si riottiene l'espressione esplicita (40) per i coefficienti di accoppiamento.

## 6 AMPLIFICAZIONE PARAMETRICA E RIVELAZIONE DI ONDE GRAVITAZIONALI

Applichiamo i risultati precedenti alla situazione sperimentale descritta nel paragrafo 5<sup>7</sup>: supponiamo che  $\omega_1 \approx \omega_2$ , e che la frequenza caratteristica dell'onda gravitazionale sia  $\Omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_{1,2}$ . L'ampiezza dell'onda gravitazionale sarà allora una funzione lentamente variabile rispetto alle ampiezze dei modi; inoltre  $|h(t)| \ll 1$  e quindi le ampiezze dei modi saranno debolmente perturbate dall'onda. Si può così porre a secondo membro delle (39)  $\frac{d}{dt}(h(t)m_i(t)) \approx h(t)\frac{dm_i}{dt} \approx \pm j\omega_i h(t)m_i(t)$ .

La teoria generale dei modi accoppiati [10] mostra che nel caso considerato ( $\Omega = \omega_1 - \omega_2$ ) è rilevante l'accoppiamento tra i modi  $m_1$  ed  $m_2$  e tra  $m_1^*$  ed  $m_2^*$ . Considerando la prima coppia delle equazioni (39) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= j\omega_1 m_1(t) + j\omega_2 c_{12} h(t) m_2(t) \\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= j\omega_2 m_2(t) + j\omega_1 c_{21} h(t) m_1(t) \end{aligned} \quad (41)$$

Per un'onda gravitazionale piana del tipo  $h(t) = \frac{1}{2} h(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})$  si ha infine:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} &= j\omega_1 m_1(t) + \frac{1}{2} j\omega_2 c_{12} h e^{j\Omega t} m_2(t) \\ \frac{dm_2(t)}{dt} &= j\omega_2 m_2(t) + \frac{1}{2} j\omega_1 c_{21} h e^{-j\Omega t} m_1(t) \end{aligned} \quad (42)$$

Cerchiamo le soluzioni stazionarie del sistema (42) nel caso in cui sia inizialmente eccitato il modo  $m_1$  da una sorgente esterna. A tal fine occorre tenere conto nelle (42) delle dissipazioni elettromagnetiche presenti nel sistema a radiofrequenza e della sorgente alla frequenza  $\omega_1$ . Chiamando  $P_1(t)$  la potenza a radiofrequenza fornita dal generatore esterno alla frequenza  $\omega_1$ ,  $Z_1$  l'impedenza caratteristica della guida d'onda, e  $Q_{iL}$  e  $Q_{ie}$  rispettivamente i

---

<sup>7</sup> In questo paragrafo il modo 1 corrisponde per convenzione al modo simmetrico citato nel paragrafo 5 ed il modo 2 al modo antisimmetrico.

fattori di merito caricato ed esterno del modo  $i$ -esimo<sup>8</sup>, si trova che le (42) vengono modificate come segue [9, 10]:

$$\begin{aligned} \frac{dm_1(t)}{dt} + \frac{\omega_1}{2Q_{1L}} m_1(t) &= j\omega_1 m_1(t) + \frac{1}{2} j\omega_2 c_{12} h e^{j\Omega t} m_2(t) + \frac{\omega_1}{Q_{1e}} \sqrt{2Z_1 P_1(t)} \\ \frac{dm_2(t)}{dt} + \frac{\omega_2}{2Q_{2L}} m_2(t) &= j\omega_2 m_2(t) + \frac{1}{2} j\omega_1 c_{21} h e^{-j\Omega t} m_1(t) \end{aligned} \quad (43)$$

Cerchiamo le soluzioni della forma  $m(t) = M(t)e^{j\omega t}$ ; sostituendo nelle (43) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1(t)}{dt} + \frac{\omega_1}{2Q_{1L}} M_1(t) &= \frac{1}{2} j\omega_2 c_{12} h M_2(t) + \frac{\omega_1}{Q_{1e}} \sqrt{\frac{2P_1}{Y_1}} \\ \frac{dM_2(t)}{dt} + \frac{\omega_2}{2Q_{2L}} M_2(t) &= \frac{1}{2} j\omega_1 c_{21} h M_1(t) \end{aligned} \quad (44)$$

Le soluzioni stazionarie si ottengono ponendo uguali a zero le derivate nelle (44); si ottiene un sistema di equazioni algebriche per le grandezze  $M_1$  ed  $M_2$  indipendenti dal tempo. La grandezza fisica interessante per le applicazioni è l'energia che è possibile estrarre nell'unità di tempo dal modo 2; si ottiene:

$$P_2 = 4h^2 |c_{21}|^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_2} \frac{Q_{2L}^2}{Q_{2e}} U_1 \quad (45)$$

Ponendo  $\omega_1 \approx \omega_2$  e  $Q_{2L} \approx Q_{2e}/2 \approx Q_{em}/2$  (accoppiamento critico) si ottiene:

$$P_2 = h^2 |c_{21}|^2 \omega_2 Q_{em} U_1 \quad (46)$$

Sostituendo infine l'espressione esplicita del coefficiente  $\lambda$  che seleziona il sistema di riposo (cfr. eq. 23) delle pareti del rivelatore otteniamo:

$$P_2 = \frac{1}{4} \omega_2 U_1 Q_{em} |C|^2 \frac{h^2 (\Omega) \Omega^4}{(\Omega^2 - \omega_m^2)^2 + \frac{\Omega^2 \omega_m^2}{Q_m^2}} \quad (47)$$

che coincide con la (27) avendo definito

---

<sup>8</sup> Ricordiamo che tra i fattori di merito vale la relazione  $\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_{em}} + \frac{1}{Q_e}$ , con  $Q_{em}$  fattore di merito intrinseco della cavità risonante.

$$C = \int_V \left( H_x^{(1)} H_x^{(2)} - H_y^{(1)} H_y^{(2)} + E_x^{(1)} E_x^{(2)} - E_y^{(1)} E_y^{(2)} \right) dV \quad (48)$$

L'equazione (48) è l'espressione esplicita del coefficiente di accoppiamento. Essa mostra che in effetti l'onda gravitazionale accoppia i due modi del sistema purché il coefficiente  $C$  sia diverso da zero. Naturalmente per ottenere un rivelatore efficiente sarà necessario selezionare la configurazione di campo tale da rendere massimo il valore di  $C$ . Per la rivelazione di un'onda gravitazionale, la configurazione che rende massima la sezione d'urto è quella nella quale le due cavità accoppiate sono disposte ad angolo retto<sup>9</sup>, come discusso in [5]. Nel caso dell'esperimento proposto dagli autori in un precedente rapporto [7], nel quale il rivelatore è eccitato mediante un cristallo piezo-elettrico fissato ad una parete, la configurazione ottimale non sarà necessariamente la medesima; simulazioni numeriche hanno mostrato che anche per la più semplice (da un punto di vista realizzativo) configurazione di figura (1), si ottiene un effetto di conversione parametrica misurabile.

## 7 CONCLUSIONI

I principi fisici che sono alla base dell'interazione di un'onda gravitazionale con un rivelatore elettromeccanico sono stati discussi ed i risultati ottenuti sono stati applicati all'analisi di un rivelatore costituito da due cavità risonanti superconduttrici accoppiate.

Sulla base di quanto esposto nel presente rapporto è in corso un'attività sperimentale volta alla realizzazione di un rivelatore prototipo le cui principali caratteristiche sono state descritte in un rapporto precedente [7].

Una discussione più dettagliata del lavoro in corso e delle problematiche sperimentali ad esso legate è attualmente in preparazione.

## 8 RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano ringraziare il prof. L.A. Radicati per l'interesse manifestato per il loro lavoro ed il dott. F. Ruggiero dalla cui Tesi di Laurea il presente rapporto ha tratto vari elementi di riflessione e sviluppo.

---

<sup>9</sup> La ragione di ciò risiede in ultima analisi nella natura quadrupolare della radiazione gravitazionale.

## 9 REFERENCES

- (1) L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Teoria dei Campi*, (Editori Riuniti, Roma, 1981).
- (2) S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- (3) F. Ruggiero, *Alcuni problemi relativi alla rivelazione delle onde gravitazionali*, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Pisa, (A.A. 1979-1980).
- (4) C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *Gravitation*, (W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).
- (5) F. Pegoraro, E. Picasso and L.A. Radicati, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **11**, (10), 1949, (1978); Ph. Bernard, F. Pegoraro, E. Picasso and L.A. Radicati, *Phys. Lett.*, **68A**, 165, (1978).
- (6) C.E. Reece, P.J. Reiner and A.C. Melissinos, *Phys. Lett.*, **104A**, 341, (1984); C.E. Reece, P.J. Reiner and A.C. Melissinos, *Nucl. Instr. Meth.*, **A245**, 299, (1986).
- (7) Ph. Bernard, G. Gemme, R. Parodi and E. Picasso, INFN/TC-98/17, 1998.
- (8) K.S. Thorne, *Gravitational Radiation*, in *300 Years of Gravitation*, (Ed. by S.W. Hawking and W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- (9) J.C. Slater, *Microwave Electronics*, (D. Van Nostrand, New York, 1950).
- (10) W.H. Louisell, *Coupled Mode and Parametric Electronics*, (John Wiley and Sons, New York, 1965).