ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Laboratori Nazionali di Frascati

INFN-DIV-15-02/LNF
28th April 2015

Sulla Pedagogia/Didattica della Matematica

Camillo Lo Surdo
INFN-Laboratori Nazionali di Frascati Via E. Fermi 40, Frascati, Italy

Pubblicato da SIDS–Pubblicazioni
Laboratori Nazionali di Frascati

SULLA PEDAGOGIA/DIDATTICA [1] DELLA MATEMATICA

Siamo certi che il corrente insegnamento della matematica, nei confronti di un giovane allievo di media attitudine e a partire dai suoi undici anni di età circa, sia il più adatto a favorirne la maturazione in senso appunto matematico? E più tardi, quando dell'allievo comincerà a delinearsi la personalità intellettuale, fino ai suoi diciotto anni circa? E più tardi ancora, quando l'allievo sarà possibilmente passato ad un istituto di istruzione superiore che abbia la matematica tra le sue materie d'insegnamento, ad esempio ad un politecnico? E infine: siamo certi che gli attuali mezzi di comunicazione di massa forniscano all'adulto ormai descolarizzato, ma ancora curioso e disponibile all'apprendimento, informazioni idonee a farsi un'idea almeno approssimativa della complessità e della ricchezza dell'universo matematico contemporaneo? Le brevi riflessioni che seguono tentano di analizzare questi problemi, dando risposta alle domande (presuntivamente retoriche) che abbiamo formulato.

Nell'insegnamento della matematica, la scuola di base (quella che nelle società scolarizzate si frequenta fino all'età di circa diciotto anni) è solita porre l'accento sulla esecuzione di "protocolli di azioni mentali" (momento "facile" della relativa azione didattica), riservando un'attenzione decisamente minore a quanto vi è di *concettualmente* importante o irrinunciabile dietro di essi (momento "difficile" della stessa). Questo suggerisce l'esperienza, mediata sugli indirizzi specifici dei singoli corsi di studi, di quanti quella scuola di base hanno frequentato.

Ricordiamo che un protocollo di azioni è un insieme di regole ad ogni passo del quale è completamente definito, e ragionevolmente semplice, cosa si debba fare al passo successivo. Ma nell'attività matematica propriamente detta, pur essendo sempre prescritto un insieme di regole da osservare ad ogni passo di una sua generica procedura, è assai raro che si sappia immediatamente cosa fare al passo successivo: tipicamente, bisogna procedere per induzioni e tentativi, confidando nella buona qualità del proprio intuito e nella buona fortuna. [2] In questo senso, si può dire che l'attività matematica è in realtà radicalmente *diversa* dalla esecuzione di protocolli – cioè diversa da quanto la scuola di base mediamente insegna agli allievi non particolarmente dotati di immaginazione astratta. Poiché gli allievi dotati sono una piccola frazione del totale, va così che buona parte della cosiddetta "società acculturata" (cioè di quanti hanno frequentato *almeno* la scuola di base) confonde l'attività matematica con l'esecuzione di protocolli (matematici); e da questo equivoco, non pochi individui matematicamente mediocri – ma non per questo scarsamente qualificati in più ampio senso – di quella società traggono sensazione di noia o fastidio, quando non di permanente rigetto. Questo è largamente spiegabile: infatti, ciò che avviene allora nella scuola di base, nel rapporto con la matematica, è un po' come se l'arte della pittura venisse presentata come la capacità di verniciare una parete (vedi anche la nota ([14])). Stanti le sue ricadute sulla struttura del sapere complessivo della società acculturata, in tale risultato si deve ravvisare un segno di inadeguatezza tra i più seri, anche se all'occorrenza rimediabile con interventi appropriati, della corrente pedagogia della matematica. (Aggiungiamo che per sua fortuna il discente matematicamente dotato comprende subito che l'esecuzione di protocolli è una premessa necessaria a qualcosa di più interessante cui rivolgerà presto la sua attenzione, e quindi la apprende trovandola sopportabile o addirittura a suo modo divertente: proprio come succede a certi soggetti di scarsa attitudine matematica ma zelanti quel tanto che basta.)

Il problema si aggrava se la cultura dominante non incoraggia (o addirittura frena) l'interesse per le scienze esatte, il cui studio approfondito comporta sempre un robusto ricorso alla matematica. È questo in particolare il caso della nostra cultura nazionale, fondata prevalentemente

[1] Alla luce dell'etimo, il divario tra "pedagogia" e "didattica" dovrebbe essere nell'età media dei discenti, che è bassa nel primo caso e generica nel secondo.

[2] Un esempio tipico è quello della *dimostrazione* della validità di un asserto matematico dato. Se una tale dimostrazione esiste, e quindi l'asserto è realmente valido, non è detto che la dimostrazione sia unica; e tanto meno si sa come costruirla (o come costruirne una).

sullo studio della storia di brevissimo ($\approx$ 2 secoli) o breve ($\approx$ 20 secoli) periodo [3] e sulla coltivazione dell'abilità retorica; vedi il riferimento a questi valori nell'opera di B. Croce (1866-1952), che di essi fu nume tutelare, nel nostro paese, per oltre mezzo secolo. [4] La conclusione alla quale si è spinti da un tale orientamento mentale centrifugo rispetto alla matematica, e che abitualmente si definisce "umanistico", è paradossale, nel senso che le radici della matematica sono comunque *nell'uomo e nell'uomo soltanto*. Quest'ultima è una verità quasi banale, che non confligge sostanzialmente nemmeno con il pensiero dei matematici cosiddetti "idealisti" o "platonisti" [5] .

A differenza da quanto di solito si pensa, la matematica è una disciplina precipuamente *dinamica*, cioè caratterizzata dalla costante aspirazione a darsi regole innovative. D'altra parte essa è anche una disciplina *cumulativa*, perché custodisce il patrimonio di regole valide accumulato, tesaurizzandolo. Per questi suoi caratteri (tra gli altri) la matematica può essere assimilata ad un'arte creativa (cioè distinta da quella che in inglese si dice una "performing art", o arte dello spettacolo): una vecchia tesi ripresa con forza dal matematico A. Weil [6] (1906-1998) non molto tempo addietro. La matematica acquista allora una valenza ideologica, perché soltanto un chiaro modello o progetto ($\equiv$ 'ιδε'α) e la determinazione a realizzarlo, *come è sempre vero per un'arte creativa*, possono guidare verso l'invenzione di regole innovative che non verranno mai negate ma soltanto (al più) superate. Ovviamente la componente "in progresso" della matematica (come di qualunque altro sapere dinamico) cambia di continuo, e da questo nasce il problema dell'aggiornamento della sua didattica, almeno nei confronti della frazione della comunità discente a tale aggiornamento interessata. È lecito dubitare che codesta natura della matematica come *disciplina in evoluzione* sia percepita con sufficiente chiarezza dalla società acculturata; come appunto si suggeriva all'inizio del paragrafo.

I progressi della matematica sono dovuti ad una piccolissima frazione di quanti la studiano perché fa parte del loro corso di studi. Alcuni individui particolarmente dotati di quella frazione sono poi destinati ad avere un posto nella storia della disciplina. Tipicamente, questi matematici creativi lavorano in solitudine, come conferma il fatto che raramente i loro prodotti compiuti portano più di una firma. [7] È anche naturale che i contenuti della matematica di frontiera entrino a far parte del sapere generale con molto ritardo rispetto alla loro invenzione/scoperta; o come è assai più probabile, *che non vi entrino affatto*. Insomma la matematica di frontiera tocca una frazione infima della società acculturata ad essa contemporanea, e tanto meno la penetra. Non vi è politica

---

[3] Se si usa lo stesso metro, e si conviene di aggiungere un fattore 10 ad ogni passo della successione "brevissimo, breve, medio, lungo, lunghissimo", la storia (umana) "di lungo periodo" risulta abbracciare un tempo tipico di circa 2000 secoli, e quindi confinare con l'antropologia piuttosto che essere storia in senso stretto. Di passaggio, ricordiamo che contare in progressione geometrica è quasi sempre più sensato del contare in progressione aritmetica.

[4] Basti riferirsi all'asserto crociano "Il conoscere storico è l'unico dotato di validità teoretica", enunciato dal filosofo quando il calendario era già addentro al nuovo secolo, per farsi un'idea di quanto lontano dalla realtà fosse il suo pensiero. Come è noto, Croce promosse una vera e propria campagna, con spirito di crociata, contro le scienze positive in generale. Secondo un giudizio ormai largamente condiviso, a tali orientamenti di B. Croce la cultura italiana deve non poca della sua complessiva debolezza.

[5] Quelli secondo i quali gli enti matematici sono provvisti di una esistenza autonoma indipendente dal soggetto che li *scopre*. Evidentemente l'orientamento mentale opposto è quello dei matematici "realisti", che vedono gli enti matematici come oggetti astratti laboriosamente *inventati* dall'uomo.

[6] Vale la pena di dare qui qualche notizia su A. Weil, non solo in quanto figura di primo piano della matematica e della cultura europea dello scorso secolo, ma anche perché tra i padri fondatori del gruppo Bourbaki di cui si dirà diffusamente più avanti. Ebreo franco-tedesco formatosi alla Scuola Normale Superiore di Parigi, all'Università di Roma e a quella di Gottinga, Weil ebbe una carriera di insegnamento internazionale, spaziando da Aligarh (India), Strasburgo (Francia) San Paolo (Brasile), Chicago e Princeton (USA). Al suo genio matematico si devono contributi sostanziali in Teoria dei Campi Algebrici e in Teoria dei Numeri, nonché buona parte di quella Geometria Algebrica (1946) che egli sviluppò durante la sua detenzione a Rouen, dopo avventurose vicende, per (presunta) renitenza alla leva. È tra l'altro famosa la sua paradossale richiesta di poter tornare in carcere per periodi da lui scelti a piacere, perché a suo parere vi poteva lavorare proficuamente come in nessun altro luogo. Weil fu anche noto come poliglotta, lingue antiche incluse (tra le quali addirittura il sanscrito, di cui fu un vero e proprio esperto). Torneremo a menzionare Weil nel testo principale.

[7] Anche in questa caratteristica si ravvisa una forte similitudine tra la matematica e l'arte creativa.

didattica o massmediatica che possa evitare questa difficoltà, le cui radici sono nella natura stessa della disciplina. In tal senso, la matematica si differenzia dalle scienze positive, *che sono sempre "comunicabili" sotto qualche loro aspetto*. Nel giudizio senza appello di Weil, «È completamente inutile parlare di ricerca matematica a un non matematico». Questa incomunicabilità *completa* della matematica di frontiera verso i non matematici può essere vista come permanente inadeguatezza della sua didattica; ma va anche considerato che le ricadute socio-culturali del fenomeno sono trascurabili. Secondo chi scrive, la dura sentenza di Weil vale più che altro in linea di principio: qualche compromesso (sia da parte del didatta che del discente) è ammissibile. [8]

Un altro diffusissimo equivoco didattico – sempre dovuto alla scuola, ma non più soltanto alla scuola di base – consiste nel suggerire che il valore della matematica sia tutto nell'utilità delle sue applicazioni. Relativamente pochi comprendono che gli obbiettivi e i bilanci della matematica sono *autonomi*, pur essendo vero che i suoi sviluppi più fecondi siano di norma ispirati dall'esperienza – almeno nel senso più remoto dell'espressione. Perfino certi fisici teorici [9] arrivano ad ignorare questa natura *non-strumentale* della matematica, e si meravigliano quando per caso si imbattono in essa. Ma quei fisici teorici vedono più che altro i problemi matematici connessi al loro naturale obbiettivo, che è quello di formulare rappresentazioni predittive (di sezioni) del mondo fenomenico (cfr. la nota precedente), e di solito non ne concepiscono altri. Ai fisici teorici in generale va comunque il merito di talvolta porre problemi matematici nuovi, anche se di un genere peculiare; agendo così da stimolo nei confronti della disciplina nel suo insieme e possibilmente ampliandone i confini. [10]

Passando agli aspetti più generali e fondativi della matematica, un rischio in cui incorre chi si dedica professionalmente a questa materia è quello di scivolare nella filosofia intesa come esercizio letterario fine a se stesso; e questo, nonostante la *concretezza* dell'argomento sia del tutto fuori discussione. I grandi nomi della matematica fondativa a noi più vicini nel tempo sono quelli di G. Frege (1848-1925), di D. Hilbert (1862-1943) e di K. Gödel (1906-1978). In particolare, va qui ricordata la grande illusione fondativa di Hilbert («Wir müssen wissen; und wir wissen werden.»), proprio da Gödel infranta con il suo teorema di incompletezza (1931).

Radicalmente lontano dal rischio cui accennavamo più sopra è l'approccio alla matematica ispirato ad una ideale "sistemazione" dei suoi capitoli, convenientemente scelti e presi uno per volta, che fu adottato a partire dal 1935 da un gruppo di matematici francesi, e poi anche statunitensi, battezzatosi con lo pseudonimo di "Nicolas Bourbaki" [11] (vedi N. Bourbaki, "Théorie des Ensembles" (TdE), Hermann, 1970 [12]). Con tale approccio, la matematica fondativa fu definitivamente presentata come "gioco" assiomatico-deduttivo su *segni*. Questa operazione di de-concettualizzazione della matematica in favore dei suoi segni riflette bene il fatto che i matematici in generale, e Bourbaki in particolare, non sono interessati agli enti matematici in sé ma soltanto alle loro relazioni. Infatti, pur *non coincidendo* con i segni, gli enti matematici *sono nascosti* in essi; e si può facilmente fare in modo che l'insieme degli uni sia isomorfo a quello degli altri.

---

[8] Ma la stessa definizione di "matematico", da parte di Weil, può essere oggetto di perplessità: «Matematico è colui al quale si deve almeno un teorema importante.»

[9] La fisica teorica si può a ragione considerare la disciplina più vicina alla matematica se se ne lascia completamente da parte l'obbiettivo primo, che è quello di formulare "modelli predittivi" (di sezioni) della realtà fenomenica.

[10] Basti il formidabile esempio della teoria della gravitazione universale nei confronti del calcolo differenziale, ad opera di I. Newton.

[11] N. Bourbaki fu un generale francese i cui sforzi di attraversare la linea prussiana durante la guerra franco-tedesca del 1870 finirono in un mezzo disastro. Lo pseudonimo fu quindi scelto con una buona dose di autoironia. Nello stesso spirito scherzoso, N. Bourbaki dichiarava di risiedere in "Nancago" (Nancy-Chicago). Vista dall'esterno, tutta l'attività di Bourbaki è insomma permeata di un umore giocoso, come di chi non si prenda troppo sul serio; ciò che non si riflette per nulla nella sua opera, tanto ambiziosa quanto imponente. Inizialmente e all'apparenza, anche i cosiddetti "Seminari Bourbaki" poco si discostavano da semplici bicchierate tra amici.

[12] Il 1970 è soltanto l'anno dell'edizione corrente dell'opera citata. In realtà, il primo prodotto compiuto di Bourbaki risale al 1939.

Superfluo aggiungere che l'opera di Bourbaki è un esempio straordinario di didattica matematica "trascendentale", della quale si è oggi persa gran parte del sapore e della capacità.

Ricordiamo ancora che la TdE bourbakiana include l'operatore "oggettualizzante" ε di Hilbert (notato τ da Bourbaki); e che anche in virtù di questa inclusione, *sulla stessa TdE si può fondare gran parte della matematica corrente* (a condizione di conservarvi valida l'"Ipotesi Generalizzata del Continuo", IGC [13]). Dopo la TdE, e sempre presso Hermann, Bourbaki ha pubblicato gli altri suoi testi fondativi "Algèbre", "Topologie génerale", "Fonctions d'une variable réelle", "Espaces vectoriels topologiques", "Intégration"; e un po' più tardi, "Algèbre commutative", "Variétés différentielles et analytiques", "Groupes et algèbres de Lie" e "Théories spectrales": dieci volumi per circa settemila pagine, non contando una breve storia della disciplina. Con chiara allusione ai mitici "Elementi" di Euclide, e con una punta di compiaciuto esibizionismo, Bourbaki ha intitolato l'intera sua opera in fieri "Éléments de Mathématique". Tutti i titoli nominati, compresa la TdE, esistono anche in lingua inglese presso Academic Press. Va anche detto che alcuni bourbakisti sono anche stati prolifici autori matematici a mezza strada tra la didattica e la ricerca, ma comunque sempre legati all'idea della "sistemazione"; basti pensare al monumentale "Treatise on Analysis" di J. Dieudonné (Academic Press, a partire dal 1970).

Sebbene il progetto di Bourbaki, di revisionare nel senso predetto l'intera matematica del tempo, non sia stato concluso (come era prevedibile), non si deve dimenticare che esso ha significativamente ispirato almeno un paio di generazioni di matematici, grosso modo quelli nati tra il 1930 e il 1980; e non soltanto di matematici. Inoltre i "Seminari Bourbaki", iniziati a Parigi nell'immediato dopoguerra, continuano a tenersi regolarmente, e sono attentamente seguiti dalla comunità matematica. Ma nonostante questo consenso, da tempo si parla di un "inaridimento" dell'approccio bourbakiano alla matematica; anche a non contarvi l'assenza, per mera ragione di date, di sviluppi più recenti come la Teoria delle Categorie. Si può supporre che questa sia un'espressione dell'invecchiamento fisiologico di un progetto che ha sempre escluso ogni forma di applicazione, e che ha scelto l'esposizione orientata dal generale allo speciale come regola indefettibile. Senza contare il progressivo venir meno "biologico" del Bourbaki della prima ora.

All'incirca fino alla metà del secolo scorso, la ricerca matematica si è concentrata su quelle tematiche generali e fondative che sono appunto oggetto del programma di Bourbaki: l'Algebra astratta, la Topologia, l'Analisi, la Teoria delle Varietà Differenziabili, .. e via elencando. Solo un po' più tardi è iniziato il tentativo di scoprire e studiare possibili *connessioni* tra quelle tematiche, che a prima vista sembrano indipendenti tra loro. L'impresa di gran lunga più nota in tal senso è quella del cosiddetto "Programma di Langlands". Robert Langlands (nato nel 1936) è un matematico canadese che si è poi trasferito all'Institute for advanced Studies di Princeton, dove è rimasto sino alla fine della sua attività istituzionale occupando il tavolo di lavoro già di A. Einstein. Il detto programma di unificazione tra tematiche fondative, ad oggi non concluso, ha avuto inizio nel 1967, quando Langlands scoprì la possibilità di stabilire un collegamento tra l'analisi armonica astratta e la teoria dei gruppi di Galois, e quindi di apparentare e unificare le due teorie. Il giovane studioso comunicò queste sue intuizioni a Weil, al tempo già sessantunenne e celebre come matematico per suo conto, oltre che per essere personaggio chiave del gruppo Bourbaki, con una lettera che divenne poi molto nota nell'ambiente per la sua insolita carica di understatement. Il programma di Langlands si è da allora notevolmente sviluppato, coinvolgendo un numero crescente di matematici attivi su simili problemi di collegamento-unificazione. Seguire e soprattutto *comprendere* (ma non è elementare) le vicende del programma di Langlands, mano a mano che la sua realizzazione progredisce, può essere un modo per farsi un'idea di dove sta andando la matematica fondativa contemporanea; beninteso, supponendo di conoscere a sufficienza le grandi tematiche ricordate più sopra. Come ci si aspetta, la società acculturata ignora *del tutto* quanto

---

[13] "Per ogni cardinale infinito α, ogni cardinale $> \alpha$ è $\geq 2^{\alpha}$" (TdE, E.III.50). Secondo l'uso, qui 2^{α} denota il cardinale dell'insieme delle parti di un (generico) insieme di cardinalità α. Teoremi metamatematici dovuti a K. Gödel e rispettivamente a P. Cohen affermano che né IGC né la sua negazione si possono dimostrare all'interno della TdE bourbakiana.

avviene su questi fronti avanzati della ricerca matematica; ma questo, lo ripetiamo, ha conseguenze trascurabili sul complesso del suo sapere. [14]

Prima di concludere queste brevi riflessioni sulla didattica matematica, vogliamo menzionare un altro comune equivoco, sempre suggerito dalla scuola di base – a prima vista più rozzo dei precedenti, ma che conduce ad altre considerazioni degne di attenzione –: precisamente, quello di identificare la matematica con tutto quanto ha in qualche modo "a che fare con i numeri", e specificamente con i numeri interi naturali, o "cardinali finiti". Nonostante la sua popolarità, questa idea è clamorosamente erronea per difetto, come mostra una moltitudine di controesempi già accessibili al giovane, o addirittura all'adolescente, acculturato (vedi la Geometria euclidea sintetica, l'Algebra elementare, .. ecc.). Essa suggerisce tuttavia la non banale questione di quanta matematica si possa fare *rinunciando alla nozione di intero naturale* (qui di seguito per brevità intero tout court) – ed escludendo ovviamente le proposizioni matematiche sugli interi stessi. La risposta (soltanto implicita) dei matematici formalisti-fondazionalisti à la Bourbaki è: "molta della matematica che conta". Infatti, la nozione di intero viene introdotta da Bourbaki solo *dopo* che le basi formali della TdE sono state poste (vedi TdE, E.III.30), e le loro implicazioni sono state evidenziate o attendono di esserlo con gli stessi mezzi. La conclusione è che, in linea di principio, agli interi si può rinunciare pur continuando a svolgere una cospicua attività matematica. Il contrasto con la celebre sentenza di L. Kronecker (1823-1891) "Dio ha creato gli interi, tutto il resto è opera dell'uomo", che poneva gli interi *alla base* della matematica, fa sicuramente riflettere; sebbene non possa meravigliare più di un tanto, visto che tra Kronecker e Bourbaki passa circa un secolo di ricerca matematica molto intensa.

Ma la precedente idea, di identificare una parte essenziale della matematica con quanto ha che fare con gli interi, *è comunque insostenibile*. La matematica comincia infatti molto prima, a monte degli interi, con discipline che la precedono e la introducono: la Logica Matematica, la Teoria degli Insiemi, la Teoria delle Strutture Algebriche, la Teoria dei Sistemi Formali, la Teoria della Dimostrazione .. e così via [15] ; mentre ovviamente si estende a dopo, a valle degli interi stessi, e lungo una enorme varietà di direttrici diverse, integrandosi con nuovi grandi temi matematici come la Topologia o la Teoria dei Gruppi di Lie. Un'occhiata alla "Mathematics Subject Classification" (MSC) [16] – oggi gestita e continuamente aggiornata da una collaborazione tra l'americana MR (Mathematical Reviews) e la storica fondatrice tedesca Cbl (Centralblatt für Mathematik), e nella quale si trovano elencate un numero a quattro cifre di voci argomentali di terzo livello suddivise in quasi cento sezioni (primo livello) – può dare un'idea della grandiosa (o mostruosa?) estensione della matematica contemporanea. Per esempio, la sezione 32, (primo livello) "Several complex variables and analytic spaces", già nel 1980 elencava un'ottantina di temi di terzo livello a ciascuno dei quali un giovane e poco curioso matematico potrebbe dedicare la sua intera carriera di ricerca. Almeno *segnalare* questi fatti è un atto dovuto, ma raramente offerto, dalla didattica corrente della matematica.

[14] Un discreto libro sostanzialmente incentrato sul programma di Langlands, di intenti divulgativi ma di comprensione non sempre elementare, è quello di E. Frenkel ("Love and Math, The Heart of Hidden Reality", 2013), molto recentemente apparso anche in traduzione italiana (Codice Edizioni, 2014). La precedente immagine dell'arte della pittura scambiata con la capacità di verniciare una parete è tratta da quel testo.
[15] Quanto alla TdE di Bourbaki, essa include versioni della Logica Matematica e della Teoria della Dimostrazione che, per quanto minimali, sono sufficienti a sviluppare il complesso degli Éléments de Mathématique.
[16] MSC è una classificazione alfanumerica su tre livelli in cui viene suddivisa l'intera matematica del momento.

Camillo Lo Surdo è un libero docente di Istituzioni di Fisica Matematica autore di numerose pubblicazioni su temi di analisi matematica, teoria del trasporto (lineare e non), teoria elettromagnetica, fisica teorica del plasma e delle macchine per la fusione nucleare controllata, teoria dei gas parzialmente ionizzati, ecc. Sono da segnalare tre monografie: *Fondamenti matematici della fisica macroscopica* (2013), *Analisi del reattore a fissione* (1964) con L. Orsoni e *Inductive Eigenmodes of a resistive toroidal surface* (1999).