ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Laboratori Nazionali di Frascati

INFN-DIV-15-03/LNF
27th October 2015

Relatività Speciale
Esercizi e Complementi

Danilo Babusci
INFN-Laboratori Nazionali di Frascati Via E. Fermi 40, Frascati, Italy

Pubblicato da SIDS–Pubblicazioni
Laboratori Nazionali di Frascati

Questa nota fa parte di una serie di dispense distribuite durante il corso "Incontri di Fisica Moderna", rivolto ai docenti di Matematica e Fisica dei Licei Scientifici. Il corso si è svolto, presso i Laboratori Nazionali di Frascati, nel periodo Novembre 2015 – Maggio 2016, ed è consistito di 15 lezioni di tre ore ciascuna.

Indice

Capitolo 1

Esercizi

1.1 Effetti fondamentali

1.1.1 Dilatazione temporale - 1

A quale velocità rispetto alla Terra deve viaggiare un'astronave per accumulare un ritardo pari a $t_r = 1$ s al giorno?

Indicati con t_a e t_T i tempi registrati da due orologi posti, rispettivamente, sull'astronave e a Terra, dal momento che il ritmo dell'orologio sull'astronave risulta dilatato, si ha:

$$t_a = \frac{t_T}{\gamma}. \tag{1.1}$$

Inoltre, poiché deve essere:

$$t_T = t_a + t_r,$$

in base alla (1.1), si ha:

$$t_T - t_r = \frac{t_T}{\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad t_T\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = t_r$$

i.e.

$$1 - \frac{t_r}{t_T} = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

da cui si ricava:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{t_r}{t_T}\right)^2}$$

Ricordando che un giorno equivale a 86400 s, si ottiene:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{86400}\right)^2} = \sqrt{1 - (1 - 1.157 \times 10^{-5})^2} = 4.811 \times 10^{-3}$$

i.e., $v = 1\,433.74$ km/s.

1.1.2 Paradosso di de Sitter

Consideriamo un sistema binario, posto a distanza D dalla Terra, costituito da una stella S_1 che percorre, con velocità v, un'orbita circolare di raggio R intorno a una stella S_2 di grande massa. Sia T il il tempo impiegato da S_1 a compiere un'orbita. Calcolare il tempo apparente Δt che S_1 impiega a muoversi dal punto A al punto diametralmente opposto B della sua orbita (cfr. Fig. 1.1), i.e., l'intervallo di tempo che intercorre tra gli istanti di ricezione sulla Terra dei segnali luminosi emessi da S_1 nelle posizioni A e B.

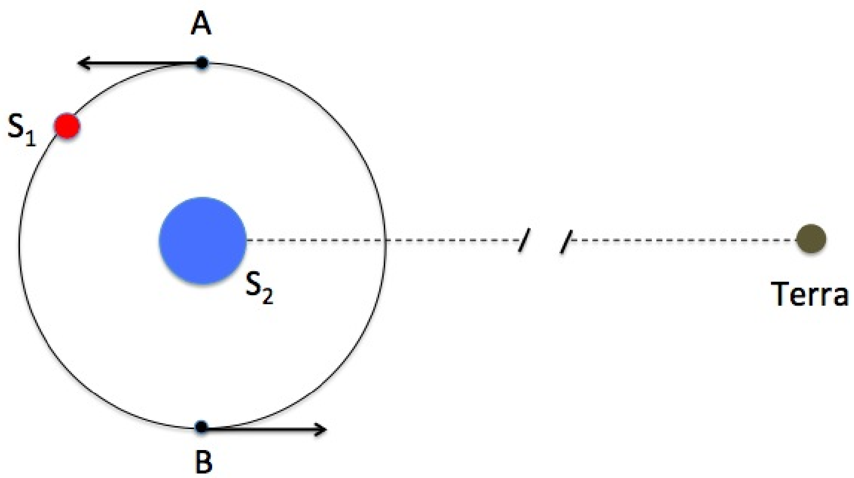


Figura 1.1: Illustrazione del paradosso di de Sitter

Notazioni:

- t_0 = istante in cui S_1 emette la luce da A;
- t_A = istante di arrivo sulla Terra del segnale emesso a t_0;
- t' = istante in cui S_1 emette la luce da B;
- t_B = istante di arrivo sulla Terra del segnale emesso a t'.

Utilizzando la regola di composizione Galileiana delle velocità, è facile vedere che risulta:

$$t_A = \frac{\sqrt{D^2 + R^2}}{c - v} \qquad\qquad t_B = \frac{T}{2} + \frac{\sqrt{D^2 + R^2}}{c + v}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\Delta t = t_B - t_A &= \frac{T}{2} + \frac{\sqrt{D^2 + R^2}}{c + v} - \frac{\sqrt{D^2 + R^2}}{c - v} \\ &= \frac{T}{2} + \sqrt{D^2 + R^2}\left(\frac{1}{c + v} - \frac{1}{c - v}\right) \\ &= \frac{T}{2} - \frac{2\,v\sqrt{D^2 + R^2}}{c^2 - v^2} \qquad (1.2)\end{aligned}$$

N. B. - nell'ipotesi $D >> R$:

$$\Delta t \simeq \frac{T}{2} - \frac{2\,v\,D}{c^2 - v^2}$$

In base alla (1.2), il semiperiodo apparente Δt può essere:

1. uguale a zero $\rightarrow$ S_1 sembra trovarsi simultaneamente in A e B;
2. negativo $\rightarrow$ S_1 occupa prima la posizione B e poi quella A, i.e., percorre l'orbita in senso inverso.

Entrambe questi casi sono paradossali. Se, però, come postulato da Einstein, la velocità della luce è indipendente dal moto della sorgente, si ha:

$$t_A = \frac{\sqrt{D^2 + R^2}}{c} \qquad\qquad t_B = \frac{T}{2} + \frac{\sqrt{D^2 + R^2}}{c},$$

per cui, risulta:

$$\Delta t = \frac{T}{2}$$

e il paradosso svanisce.

1.1.3 Dilatazione temporale - 2

Un'astronave viaggia a velocità $\beta = 2/3$ verso una stella distante dal Sole $L = 15$ anni-luce. Calcolare la durata del viaggio:

1. *per un osservatore sulla Terra;*
2. *per l'equipaggio dell'astronave.*

1. osservatore terrestre:
$$t_T = \frac{L}{v} = \frac{15\,c}{(2/3)\,c} = \frac{45}{2} = 22.5 \text{ anni}$$
2. osservatore sull'astronave:
$$t_a = \frac{L}{\gamma\,v} = \frac{t_T}{\gamma} = 22.5\,\times\,\sqrt{1-\frac{4}{9}} = 1.68 \text{ anni}$$

1.1.4 Righello inclinato

Nel suo riferimento di quiete, un righello di lunghezza $L = 1$ m risulta inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'asse x. Quale deve essere la velocità v lungo x di un osservatore O' perché il righello gli appaia inclinato rispetto all'asse x' di un angolo $\theta' = 45°$? Qual è la lunghezza del righello misurata dall'osservatore O'?

Poichè l'osservatore O' è in moto lungo la direzione $x - x'$, si ha:
$$L'_y = L_y \qquad\qquad L'_x = \frac{L_x}{\gamma} \tag{1.3}$$
per cui:
$$\tan\theta' = \frac{L'_y}{L'_x} = \gamma\,\frac{L_y}{L_x} = \gamma\,\tan\theta$$
i.e.
$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\tan\theta}{\tan\theta'}.$$
Quindi:
$$\sqrt{1-(v/c)^2} = \frac{\tan\theta}{\tan\theta'} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-\left(\frac{\tan\theta}{\tan\theta'}\right)^2}$$
$$v = c\sqrt{1-\left[\frac{\tan(\pi/6)}{\tan(\pi/4)}\right]^2} \simeq c\sqrt{1-\frac{(0.577)^2}{1}} \simeq 0.817\,c$$

Per quanto riguarda la lunghezza del righello misurata da O', si ha:

$$L' = \frac{L'_y}{\sin\theta'}$$

i.e., poiché nel riferimento di quiete del righello:

$$L'_y = L_y = L\,\sin\theta = 1 \times \sin(\pi/6) = 0.5 \text{ m}$$

abbiamo:

$$L' = \frac{0.5}{\sin(\pi/4)} = \frac{0.5}{1/\sqrt{2}} = 0.707 \text{ m.}$$

N.B. - La lunghezza misurata dall'osservatore O' può essere ottenuta anche nel modo seguente. In base alla (1.3)

$$L' = \sqrt{(L'_x)^2 + (L'_y)^2} = \sqrt{(L_x/\gamma)^2 + (L_y)^2} \tag{1.4}$$

e il fattore lorentziano risulta essere

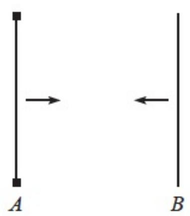
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1-(0.817)^2}} = 1.733\ ,$$

per cui, dalla (1.4), si ottiene:

$$L' \simeq \sqrt{(0.866/1.733)^2 + (0.5)^2} \simeq 0.707 \text{ m}$$

1.1.5 No contrazione trasversa

Due righelli di lunghezza pari a 1 m, A e B, si muovono l'uno verso l'altro come mostrato nel figura sotto. Alle estremità del righello A sono posizionati



due pennelli. Usare questa configurazione per mostrare che nel riferimento di un righello, l'altro ha ancora la lunghezza di 1 m.

Assumiamo che i pennelli siano in grado di lasciare dei segni sul righello B, se B (A) è abbastanza lungo (corto). In base al Principio di Relatività, i riferimenti rappresentati dai due righelli sono equivalenti, quindi, se A vede B più corto (o più lungo, o uguale a sé stesso), allora anche B vede A più corto (o più lungo, o uguale a sé stesso). Il fattore di contrazione deve essere lo stesso quando si passa da un riferimento all'altro.

Assumiamo che A veda B accorciato. Allora B non coprirà l'intera lunghezza di A e, quindi, i pennelli di A non lasceranno alcun segno su B (Fig. 1.2, pannello sinistro). Anche B deve vedere A accorciato, per cui, in questo caso, i pennelli trasportati da A lasceranno dei segni su B (Fig. 1.2, pannello destro). Otteniamo, quindi, una contraddizione; questo anche nel caso in cui

Figura 1.2: Il punto di vista di A (sinistra) e quello di B (destra).

assumiamo che A veda B allungato. Rimane soltanto la terza possibilità: ciascun righello vede l'altro di lunghezza pari a 1 m. Ovvero, **non si ha alcuna contrazione nella direzione traversa del moto**.

1.1.6 Gran premio di treni - 1

Due treni, A e B, ciascuno di lunghezza propria L, si muovono nella stessa direzione con velocità, rispettivamente, $\beta_A = 4/5$ *e* $\beta_B = 3/5$. *Il treno A parte dietro quello B. Dal punto di vista di un osservatore in quiete, quanto tempo impiega A a superare B?*
NB - il tempo t_s *richiesto dal sorpasso è l'intervallo tra l'istante in cui la testa*

di A appaia la coda di B (evento E_1) e quello in cui la coda di A s'allinea alla testa di B (evento E_2).

Fattori lorentziani di A e B:

$$\gamma_A = \frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} = \frac{5}{3} \qquad \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}$$

per cui, rispetto all'osservatore in quiete:

$$L_A = \frac{L}{\gamma_A} = \frac{3}{5}\,L \qquad L_B = \frac{L}{\gamma_B} = \frac{4}{5}\,L$$

Perché sopravanzi B, il treno A deve percorrere un tratto pari a:

$$s = L_A + L_B = \frac{7}{5}\,L$$

Rispetto all'osservatore in quiete, la velocità relativa dei due treni è:

$$v = v_A - v_B = \frac{c}{5}$$

per cui:

$$t_s = \frac{s}{v} = \frac{7\,L/5}{c/5} = 7\,\frac{L}{c}.$$

1.1.7 Il viaggio dell'astronave

Il pilota di un'astronave che viaggia con velocità $\beta = 0.6$ passando vicino alla Terra aggiusta il suo orologio in modo che segni le 12:00. Mezz'ora dopo, come misurato dal pilota, l'astronave giunge su una stazione spaziale, ferma rispetto alla Terra. Qual è il tempo segnato dall'orologio della stazione? Secondo il pilota, a quale distanza si trova la stazione dalla Terra? E secondo un osservatore sulla Terra?
Giunto sulla stazione, il pilota invia un segnale radio alla Terra. Quando il segnale arriva, quale tempo segna l'orologio dell'osservatore a Terra? E l'orologio del pilota?

Dalla formula della dilazione temporale, abbiamo che l'intervallo di tempo misurato dalla stazione è:

$$\Delta t_{st.} = \gamma\,\Delta t_{as.} = \frac{30}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = 37.5 \text{ min}$$

per cui, quando l'astronauta giunge sulla stazione, l'orologio di quest'ultima segna le 12:37 e 30 secondi.
La distanza Terra-stazione misurata dal pilota è:

$$d = v\,\Delta t_{as.} = \beta\, c\,\Delta t_{as.} = 0.6 \times 3 \times 10^5 \times 30 \times 60 = 3.24 \times 10^8 \text{ km},$$

mentre, poiché l'orologio della stazione è in quiete rispetto all'osservatore a Terra, secondo quest'ultimo questa distanza è:

$$d' = v\,\Delta t_{st.} = \beta\, c\,\Delta t_{st.} = 0.6 \times 3 \times 10^5 \times 37.5 \times 60 = 4.05 \times 10^8 \text{ km}.$$

Secondo l'osservatore a Terra, il segnale radio inviato dall'astronauta impiega

$$\Delta t' = \frac{d'}{c} = \frac{4.05 \times 10^8}{3 \times 10^5} = 1.35 \times 10^3 \text{ s} = 22.5 \text{ min},$$

per giungere a Terra, e, quindi, arriva quando l'orologio dell'osservatore a Terra segna le 13:00 (12:37:30 + 0:22:30). Secondo il pilota, invece, il tempo impiegato dal segnale per giungere a Terra è:

$$\Delta t = \frac{d}{c} = \frac{3.24 \times 10^8}{3 \times 10^5} = 1.08 \times 10^3 \text{ s} = 18 \text{ min},$$

ovvero, quando il suo orologio segna le 12:48.

1.1.8 Decadimento in volo dei muoni

Con riferimento al decadimento in volo dei muoni, si chiede a quale velocità essi devono muoversi all'interno di un tubo di lunghezza $L = 2$ km per emergere dimezzati in numero.

L'andamento nel tempo del numero di muoni sopravvissuti è descritto dalla seguente funzione:

$$N(t) = N(0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \tag{1.5}$$

dove $N(0)$ è numero iniziale di muoni e τ ($\simeq$ 2.2 μs) è la vita media (a riposo) del muone. Ai muoni che si muovono con velocità v il tubo appare di lunghezza $L' = L/\gamma$ e, quindi, per percorrerlo impiegano un tempo pari a L'/v. Per cui, in base alla (1.5), si ha:

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \exp\left(-\frac{L'}{v\,\tau}\right) = \exp\left(-\frac{L}{\gamma\, v\,\tau}\right).$$

Dalla condizione che alla fine del tubo giungano solo la metà dei muoni iniziali, si ottiene:

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \exp\left(-\frac{L}{\gamma\, v\, \tau}\right) = \frac{1}{2}$$

i.e.

$$\frac{L}{\gamma\, v\, \tau} = \ln 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{L}{\tau\, \ln 2} = \alpha = \frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

da cui si ottiene:

$$v = \frac{\alpha}{\sqrt{1+(\alpha/c)^2}}.$$

Poichè

$$\alpha = \frac{L}{\tau\, \ln 2} \simeq \frac{2 \times 10^3}{2.2 \times 10^{-6} \times 0.693} \simeq 1.312\, \times\, 10^9 \text{ m/s} \quad \to \quad \frac{\alpha}{c} \simeq 4.372$$

risulta:

$$v = \frac{1.312 \times 10^9}{\sqrt{1+(4.372)^2}} \simeq 2.924 \times 10^8 \text{ m/s}$$

1.1.9 Gemelli diversi

Un osservatore O' si muove con velocità $\beta = 0.8$ rispetto a un laboratorio posto sulla Terra, dirigendosi verso α-Centauri, una stella che dista $d = 4$ anni-luce dalla Terra. Quando giunge qui, inverte immediatamente il suo moto e, con la stessa velocità del viaggio d'andata, si dirige verso la Terra, dove, una volta giunto, confronta la sua età con quella del proprio gemello O rimasto ad aspettarlo nel laboratorio terrestre.

1. *Chi risulterà più giovane?*

2. *Supponiamo che ogni anno, come misurato da O, quest'ultimo invii un segnale luminoso verso O'. Quanti segnali riceverà quest'ultimo su ciascun tratto del suo viaggio? (In altre parole, cosa effettivamente "vede" O' se osserva O tramite un telescopio?)*

3. *Supponiamo che ogni anno, come misurato da O', quest'ultimo invii un segnale luminoso verso O. Consideriamo il segnale inviato da O' nell'istante in cui giunge sulla stella. Qual è l'istante in cui esso arriva a O, secondo l'orologio di quest'ultimo? (In altre parole, cosa effettivamente "vede" O se osserva O' tramite un telescopio?)*

1) Secondo O, il tempo richiesto per il viaggio Terra $-$ α-Centauri è:

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{4\,c}{0.8\,c} = 5 \text{ anni.}$$

Poiché il viaggio di ritorno ha luogo alla stessa velocità di quello di andata, il tempo totale richiesto per il viaggio secondo O è:

$$T = 2\,\Delta t = 10 \text{ anni.}$$

Il gemello O$'$, invece, misura il tempo proprio tra la partenza dalla Terra e l'arrivo sulla stella. Dalla formula della dilatazione temporale, si ha:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \Delta t\,\sqrt{1-\beta^2} = 5 \times \sqrt{1-(0.8)^2} = 5 \times 0.6 = 3 \text{ anni.}$$

per cui, il tempo totale del viaggio misurato da O$'$ è:

$$T' = 2\,\Delta t' = 6 \text{ anni.}$$

i.e., quando i gemelli si rincontrano sulla Terra, quello che ha viaggiato, O$'$, è quattro anni più giovane di quello O rimasto sulla Terra.

2) Secondo O, il gemello O$'$ giunge su α-Centauri dopo cinque anni dalla partenza. Perché un segnale luminoso raggiunga α-Centauri simultaneamente ad O$'$, O lo deve spedire in anticipo di:

$$\delta t = \frac{d}{c} = \frac{4\,c}{c} = 4 \text{ anni,}$$

i.e., un segnale spedito da O un anno dopo la partenza di O$'$, giunge alla stella nello stesso istante in cui ci giunge O$'$. Poiché, in totale, O invia dieci segnali (uno l'anno), i restanti nove raggiungeranno O$'$ quando questo è impegnato nel viaggio di ritorno sulla Terra.

3) Secondo O, il gemello O$'$ giunge su α-Centauri dopo cinque anni dalla partenza. Un segnale luminoso inviato da O$'$ nel momento in cui raggiunge la stella, viene ricevuto da O (come determinato da O) dopo

$$\delta\bar{t} = \frac{d}{c} = 4 \text{ anni,}$$

i.e., questo segnale raggiunge O al tempo:

$$T_\gamma = \Delta t + \delta\bar{t} = 9 \text{ anni.}$$

Quindi, dei sei segnali inviati da O$'$ (uno per ogni anno del suo viaggio di andata e ritorno, di durata T$'$), tre sono ricevuti da O durante i primi nove anni (uno ogni tre anni) e i rimanenti tre durante il viaggio di ritorno.

1.1.10 L'orologio in coda va avanti

Due orologi sono posizionati agli estremi di un treno di lunghezza propria L, in moto con velocità v. Essi sono sincronizzati nel riferimento del treno. Se nel nostro riferimento (al suolo) osserviamo allo stesso istante gli orologi, vediamo che quello in coda è avanti rispetto a quello posto sulla testa del treno (vedi Fig. 1.3). Di quanto?

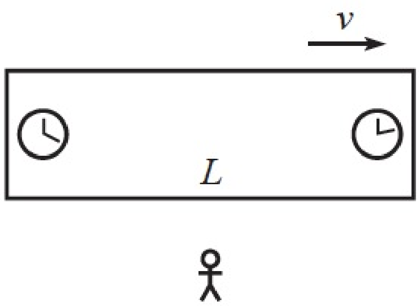


Figura 1.3: Situazione rispetto all'osservatore a terra.

All'interno del treno poniamo una sorgente di luce in una posizione tale che, nel nostro riferimento, i fotoni emessi dalla sorgente giungano ai due orologi nello stesso istante. In esso, le velocità relative fotone-orologio sono, rispettivamente, $c+v$ per l'orologio di coda e $c-v$ per quello sulla testa. Dividiamo, quindi, il treno in due segmenti le cui lunghezze, nel nostro riferimento, siano nel rapporto tra le velocità relative. Poiché la contrazione delle lunghezze è indipendente dalla posizione, questo deve anche essere il rapporto tra i segmenti nel riferimento del treno. È facile vedere che rispetto al treno le due lunghezze che sono in questo rapporto e la cui somma è L, sono:

$$L_1 = \frac{L}{2}\frac{c+v}{c} \qquad\qquad L_2 = \frac{L}{2}\frac{c-v}{c}$$

i.e., nel riferimento del treno la situazione è quella rappresentata nella Fig. 1.4. Quindi, la luce deve percorrere una distanza extra per raggiungere l'orologio posteriore data da:

$$\Delta L = L_1 - L_2 = \frac{L}{2}\frac{c+v}{c} - \frac{L}{2}\frac{c-v}{c} = L\,\frac{v}{c},$$

per cui essa impiega un tempo extra dato da:

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{c} = \frac{v\,L}{c^2}. \tag{1.6}$$

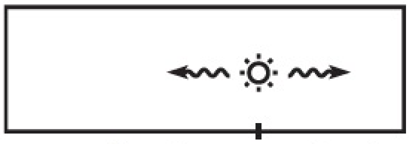


Figura 1.4: Dove posizionare la sorgente affinché i fotoni giungano ai due orologi nello stesso istante.

Assumendo che l'istante in cui osserviamo gli orologi è esattamente quello in cui i fotoni li raggiungono, l'intervallo di tempo dato dalla (1.6) è anche di quanto l'indicazione dell'orologio di coda risulterà avanti rispetto a quella mostrata dall'orologio frontale.
È da notare che la lunghezza L che appare nella (1.6) è la lunghezza propria del treno e non quella contratta che osserviamo nel nostro riferimento.
Alcune osservazioni finali:

- Δt in eq. (1.6) non ha nulla a che fare con il fatto che l'orologio di coda impiega più tempo per raggiungerci;
- la (1.6) **non** dice che l'orologio di coda ha un ritmo più veloce di quello di testa: i due orologi procedono con lo stesso ritmo (entrambi sono dilatati nello stesso modo rispetto a noi); l'orologio di coda, come visto da noi, è semplicemente avanti di una quantità costante rispetto a quello frontale;
- il fatto che nel nostro riferimento l'orologio di coda sia avanti rispetto a quello sulla testa significa che nel riferimento del treno la luce giunge prima sul fronte e poi sul retro del treno.

1.1.11 Dilatazione temporale - 3

Due pianeti, A e B, sono in quiete l'uno rispetto all'altro, a distanza L e con orologi sincronizzati. Un'astronave si muove da A verso B con velocità v, avendo sincronizzato il proprio orologio quando è passata per A (quando ciò accade l'osservatore su A e quello sull'astronave azzerano la lettura dei *loro orologi). Quando l'astronave raggiunge B scopre che il proprio orologio segna $t_a = L/(\gamma\, v)$, mentre quello di B segna $t_B = L/v$. Sull'astronave come viene spiegata, in modo quantitativo, l'osservazione $t_B > t_a$, dal momento che l'astronave vede l'orologio di B rallentare?*

La spiegazione dell'apparente paradosso è nel "vantaggio" che l'orologio di B ha rispetto a quello di A, come visto nel riferimento dell'astronave. I due pianeti, infatti, possono considerarsi posizionati agli estremi del treno dell'esercizio 1.1.10, per cui nel riferimento dell'astronave l'orologio di B risulta avanti, rispetto a quello di A, di un tempo Δt, dato dalla (1.6)[1]. Quindi, dal punto di vista dell'osservatore sull'astronave, la situazione può essere descritta nel modo seguente:

- quando si arriva in B, l'orologio sull'astronave segna t_a;
- poiché l'orologio di B procede ad un ritmo ridotto di un fattore γ, esso deve essere avanzato di un tempo
$$\Delta t_B = \frac{t_a}{\gamma} = \frac{L}{\gamma\, v}\,\frac{1}{\gamma} = \frac{L}{\gamma^2\, v};$$
- però l'orologio di B è partito non da zero, ma in ritardo del Δt di Eq. (1.6), per cui la lettura dell'orologio finale di B è data da:
$$\begin{aligned} t'_B = \Delta t + \Delta t_B &= \frac{v\, L}{c^2} + \frac{L}{\gamma^2\, v} = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \\ &= \frac{L}{v}\left[\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{L}{v} \end{aligned}$$

i.e. $t'_B = t_B$ c.v.d.

1.1.12 Bombe in stazione

Due bombe sono situate sul marciapiede di una stazione, a distanza L tra loro. Al passaggio di un treno, che si muove con velocità v, le bombe esplodono simultaneamente nel riferimento della stazione, S, e lasciano dei segni sulla fiancata del treno. Poiché sappiamo che in S la lunghezza del treno si contrae, questi segni devono essere a distanza $\gamma\, L$ tra loro quando visti nel riferimento del treno, T, poiché è questa distanza che si contrae alla distanza

[1] L'astronave vede passare davanti a sé prima A e poi B. Quindi, rispetto all'astronave, l'orologio di B si comporta come l'orologio di coda del treno dell'esercizio 1.1.10.

L in S. Come spiega l'osservatore sul treno che i segni sono a distanza γL, considerando che dal suo punto di vista le bombe sono a distanza L/γ?

La soluzione del paradosso è nel fatto che le esplosioni non avvengono simultaneamente in T. Poiché il marciapiede oltrepassa il treno, la bomba in "coda" esplode prima di quella in "testa"[2]. La bomba di testa, quindi, viaggia per un tratto più lungo prima di esplodere e lasciare il suo segno. La distanza tra i segni, quindi, è più grande di quella che ci si potrebbe, ingenuamente, aspettare.

Per essere quantitativi, supponiamo che le due bombe trasportino orologi che segnano il tempo zero quando esse esplodono (sono sincronizzati nel riferimento S). Allora, in T, l'orologio della bomba di testa segna $t_t = -L\,v/c^2$ quando la bomba di coda esplode al tempo $t_c = 0$ (cfr. esercizio 1.1.10). L'orologio della bomba di testa deve, quindi, avanzare di un tempo pari a $-t_t$ prima che essa esploda. Ma il treno vede gli orologi delle bombe procedere a un ritmo rallentato di un fattore γ, così che in T la bomba di testa esplode dopo un tempo

$$\Delta t = \gamma \frac{L\,v}{c^2}$$

rispetto all'istante di esplosione della bomba di coda. Durante Δt il marciapiede si muove, rispetto al treno, di un tratto

$$d = v\,\Delta t = \gamma\,L\,\frac{v^2}{c^2}.$$

Quindi, la situazione è descritta dall'osservatore in T nel modo seguente:

- causa la contrazione delle lunghezze, la distanza tra le bombe è L/γ;
- quando la bomba di coda esplode, rispetto a questa la bomba di testa è avanti di un tratto L/γ;

[2] Poiché siamo nel riferimento del treno, i termini "coda" e "testa" sono utilizzati nel modo in cui li usa qualcuno sul treno che vede sfrecciare davanti a sé il marciapiede della stazione. Se rispetto al marciapiede viaggia verso Nord, dal punto di vista del treno il marciapiede si muove verso Sud, per cui la bomba a Nord sul marciapiede è quella in "coda", mentre quella a Sud è la bomba di "testa". Ovvero, le bombe hanno un'orientazione opposta rispetto a quella che l'osservatore in stazione etichetta come coda e testa del treno.

- la bomba di testa viaggia per un tratto aggiuntivo pari a d e raggiunge il punto in cui esplode, che si trova avanti di un tratto

$$\begin{aligned}\frac{L}{\gamma}+d=\frac{L}{\gamma}+\gamma\,L\,\frac{v^2}{c^2}&=\gamma\,L\,\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{v^2}{c^2}\right)\\&=\gamma\,L\,\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{v^2}{c^2}\right]=\gamma\,L\end{aligned}$$

c.v.d.

1.1.13 Righello in moto

Un righello di lunghezza propria L sfreccia davanti ai vostri occhi con velocità v. Qual è l'intervallo di tempo che intercorre tra gli istanti in cui la testa e la coda del righello sono appaiati con voi:

a) nel vostro riferimento? (calcolato in questo riferimento)

b) nel vostro riferimento? (calcolato nel riferimento del righello)

c) nel riferimento del righello? (calcolato nel vostro riferimento)

d) nel riferimento del righello? (calcolato in questo riferimento)

a) Nel vostro riferimento, il righello si muove con velocità v ed è lungo L/γ, e il tempo impiegato a coprire questa distanza è

$$t_a=\frac{L\,v}{\gamma}.$$

b) Il righello vi vede in moto con velocità v. Poiché è lungo L, il tempo impiegato è $t=L/v$. Durante questo tempo, il righello vede il vostro orologio procedere con un ritmo rallentato di un fattore γ, e, quindi, il tempo segnato sul vostro orologio è

$$t_b=\frac{t}{\gamma}=\frac{L\,v}{\gamma},$$

in accordo con quanto dedotto nel punto a).

N.B. - Dal punto di vista logico, le soluzioni in a) e b) differiscono perché una utilizza la contrazione delle lunghezze e l'altra la dilazione temporale. Dal punto di vista matematico, esse differiscono semplicemente nell'ordine in cui sono eseguite le divisioni per γ e v.

c) L'orologio posizionato sulla coda del righello vi mostra una lettura maggiore di di quella mostrata da quello posizionato in coda di un intervallo $\Delta t = L\,v/c^2$ (cfr. esercizio 1.1.10). In aggiunta a questo vantaggio, più tempo sarà richiesto all'orologio di coda per raggiungervi. Nel vostro riferimento, poiché il righello ha lunghezza L/γ, questo tempo è $L/(\gamma\,v)$. Ma gli orologi del righello procedono con ritmo rallentato, per cui, nel tempo in cui esso vi raggiunge, l'orologio di coda accumulerà un tempo $L/(\gamma\,v)$. Il tempo totale aggiuntivo mostrato dall'orologio di coda è (confrontato con quello dell'orologio di testa quando s'allinea a voi):

$$t_c = \frac{L\,v}{c^2} + \frac{L}{v\,\gamma^2} = \frac{L}{v}\left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right) = \frac{L}{v}\left[\frac{v^2}{c^2} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] = \frac{L}{v}.$$

d) Il righello vi vede in moto con velocità v. Poiché è lungo L, il tempo trascorso nel riferimento del righello è $t = L/v$, in accordo con quanto ottenuto, in modo più complicato, nel punto c).

1.1.14 Una bomba, un treno e un tunnel

Un treno e un tunnel hanno entrambi lunghezza propria L. Il treno si muove verso il tunnel con velocità v. Una bomba posizionata sulla testa del treno è predisposta per esplodere quando la testa del treno oltrepassa la fine del tunnel. Sulla coda del treno è posto un meccanismo in grado di disarmare la bomba, che entra in azione quando la coda del treno raggiunge l'ingresso del tunnel. La bomba esplode?

La risposta è un deciso sì: **la bomba esplode**.
Questo è chiaro nel riferimento del treno (Fig. 1.5). In questo riferimento, il treno ha lunghezza L e il tunnel è contratto a L/γ. Quindi, l'estremità lontana del tunnel s'allinea alla testa del treno prima che l'estremità vicina oltrepassi la coda, e la bomba esplode.
Cosa accade nel riferimento del tunnel (Fig. 1.6)? Qui è il tunnel ad avere lunghezza L, mentre il treno è contratto a L/γ. Quindi, il meccanismo di disattivazione della bomba viene azionato prima che la testa del treno oltrepassi l'estremità lontana del tunnel: siamo portati ad affermare che la bomba non esploda, in contrasto con quanto dedotto analizzando la situazione dal punto di vista del treno.
La soluzione del paradosso è nell'osservazione che il meccanismo di disattivazione non può comunicare istantaneamente alla bomba di disinnescarsi:

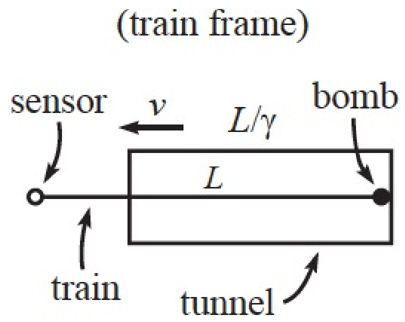


Figura 1.5: Riferimento del treno

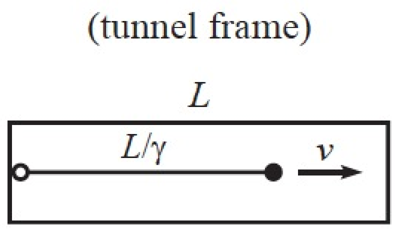


Figura 1.6: Riferimento del tunnel

il segnale inviato dal dispositivo impiega un tempo finito per attraversare il treno ed arrivare alla bomba. Supponiamo che questo segnale sia di natura elettromagnetica, ovvero viaggi con velocità c (è il tipo di segnale che ha maggiore possibilità di vincere la "corsa"). Questo segnale giungerà alla bomba prima che il treno emerga dal tunnel se, e solo se, il tempo, L/c, che esso impiega per attraversare l'intero il tunnel è minore di quello che impiega la testa del treno per percorrere il tratto restante di tunnel, una volta che la sua coda è appaiata all'altra estremità del tunnel. Questo tempo è:

$$t = \frac{L - (L/\gamma)}{v} = \frac{L}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Quindi, perché la bomba non esploda occorre che risulti $t > L/c$, ovvero:

$$\frac{L}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) > \frac{L}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \beta < 1 - \frac{1}{\gamma}$$

i.e.

$$\beta < 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{1 - \beta^2} < 1 - \beta$$

In definitiva, otteniamo la condizione:

$$\sqrt{1+\beta} < \sqrt{1-\beta}$$

che non è mai possibile soddisfare. Per cui, il segnale arriva sempre troppo tardi e la bomba esplode.

1.1.15 Righello nel muro

Un righello è infisso perpendicolarmente in un muro e voi siete a riposo rispetto al righello e al muro. Un'asta di lunghezza L scorre con velocità v davanti al righello in modo da oscurarne una parte alla vista. Quando l'asta colpisce il muro, si ferma.
Quale dei due ragionamenti seguenti è quello corretto (e cosa c'è di sbagliato nell'altro)?

1. *Nel vostro riferimento, l'asta ha lunghezza minore di L. Quindi, giusto prima che colpisca il muro, voi siete in grado di vedere un segno del righello che dista dal muro di meno di L unità (vedi Fig. 1.7).*

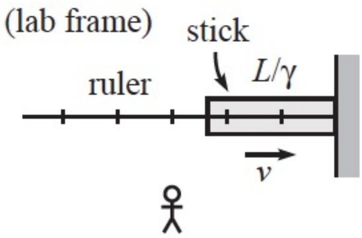


Figura 1.7: Riferimento del laboratorio

2. *Nel riferimento dell'asta, i segni del righello sono più vicini tra loro. Quindi, quando il muro colpisce l'asta, il segno più vicino al muro che voi potete vedere sul righello è più di L unità (vedi Fig. 1.8).*

Il ragionamento corretto è il primo: sarete in grado di vedere un segno del righello che dista dal muro di meno di L unità. In effetti, sarete in grado di vedere un segno anche più vicino al muro che quello corrispondente a L/γ (cfr. avanti).
L'errore nel secondo ragionamento, quello nel riferimento dell'asta, è che la Fig. 1.8 non è ciò che vedete. Questa figura mostra la situazione ad istanti

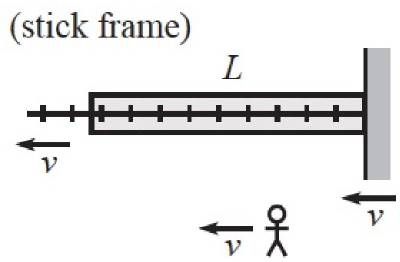


Figura 1.8: Riferimento del righello

istanti simultanei nel riferimento dell'asta, che non lo sono però nel vostro riferimento. Alternativamente, l'errore è nell'assunzione implicita di segnali che viaggiano istantaneamente. Ma, in effetti, la coda dell'asta non può "apprendere" che la testa è stata colpita dal muro se non dopo un tempo finito. Durante questo tempo, il righello (insieme a voi e il muro) viaggia di un altro tratto verso sinistra, consentendovi di vedere di più del righello.

Volendo essere più quantitativi su questo aspetto, cerchiamo di stabilire, in entrambi i riferimenti, qual è il segno più vicino al muro che potete vedere.

- <u>Vostro riferimento</u>
  L'asta ha lunghezza L/γ, per cui, quando colpisce il muro, potete vedere il segno sul righello che marca la distanza L/γ dal muro. Sarete, però, in grado di vedere un segno anche più vicino al muro, in quanto la coda dell'asta continuerà a muoversi in avanti poiché essa non "sa" ancora che la testa ha colpito il muro. Il segnale d'arresto, ovvero le onde di shock, richiedono tempo per propagarsi. Assumiamo che questo segnale si propaghi lungo l'asta con velocità c. (Potremmo ipotizzare una velocità u, ma c è di più facile uso e fornisce un limite superiore al segno più vicino che potete vedere). Il segnale dove raggiungerà la coda? Partendo dall'istante in cui l'asta colpisce il muro, il segnale si dirige verso la coda dell'asta con velocità c, mentre questa si muove verso il muro con velocità v (a partire da un punto che dista L/γ dal muro). Dal vostro punto di vista, quindi, la velocità relativa segnale-coda asta è $c + v$, per cui, il segnale raggiunge la coda dopo un tempo:

$$t = \frac{(L/\gamma)}{c+v},$$

avendo in tale tempo percorso un tratto di lunghezza

$$\ell = c\,t = \frac{c\,(L/\gamma)}{c+v} = \frac{(L/\gamma)}{1+v/c} = \frac{1}{\gamma}\,\frac{L}{1+\beta} = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

Questo è il segno più vicino al muro che potete vedere sul righello.

- Riferimento dell'asta
  Il muro si muove verso sinistra (i.e., verso l'asta) con velocità v. Dopo che esso ha colpito l'estremità di destra dell'asta, il segnale si muove verso sinistra con velocità c, mentre il muro continua a muoversi verso sinistra con velocità v. Dov'è il muro quando il segnale raggiunge l'estremità di sinistra? Nel tempo impiegato dal segnale a percorrere la distanza L, il muro copre la distanza $L\,v/c$. Questo significa che il muro è a una distanza

$$\bar{\ell} = L\left(1 - \frac{v}{c}\right) = L\,(1-\beta)$$

  dall'estremità sinistra dell'asta.
  Nel riferimento dell'asta, il righello è contratto, per cui $\bar{\ell}$ corrisponde a una distanza sul righello pari a

$$\gamma\,L\,(1-\beta) = L\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}.$$

  Questo è il valore del segno del righello con cui coincide l'estremità dell'asta, in accordo con la (1.1.15).

1.1.16 La fabbrica di biscotti

In una macchina per fare i biscotti, uno strato di pasta è spalmato su un nastro trasportatore che si muove con velocità v. I biscotti sono ottenuti punzonando la pasta con uno stampo circolare posto al di sopra del nastro. Quando comprate i biscotti al supermercato, che forma hanno? Sono schiacciati, o allungati, nella direzione di moto del nastro, oppure circolari?

Supponiamo che lo stampo circolare abbia diametro L e consideriamo le due linee di ragionamento seguenti.

1) Nel riferimento del laboratorio, la lunghezza dello strato di pasta è contratta, così che il diametro L corrisponde ad una distanza $\gamma\,L > L$ nel riferimento

del nastro trasportatore. Quindi, quando comprate un biscotto, esso è allungato di un fattore γ nella direzione del nastro, i.e., la forma è una ellisse con asse maggiore nella direzione del nastro.

N.B. - È facile dimostrare che l'eccentricità dell'ellisse è uguale alla velocità del nastro. Infatti, in un'ellisse, l'eccentricità è data dal rapporto tra la distanza tra i fuochi e l'asse maggiore, per cui (cfr. Fig. 1.9):

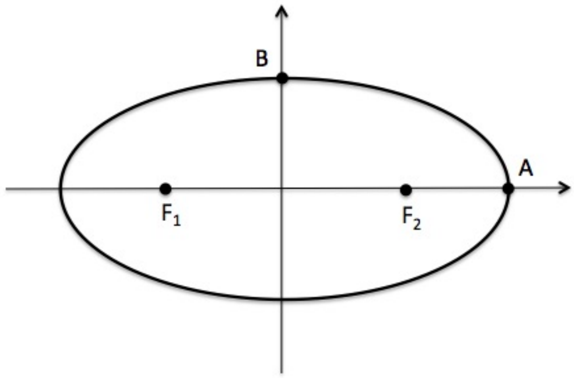


Figura 1.9: Indicati con a e b i semiassi, maggiore e minore, dell'ellisse, risulta: $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$. Le coordinate di fuochi dell'ellisse, sono: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$. Per la definizione di ellisse, risulta, inoltre: $\overline{BF_1} = \overline{BF_2} = a$.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

i.e.

$$a = \gamma\, L,\; b = L \qquad \Rightarrow \qquad e = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - (1 - \beta^2)} = \beta.$$

2) Nel riferimento del nastro, lo stampo è contratto di un fattore γ nella direzione del moto, e i biscotti hanno diametro L/γ. Quindi, quando aprite una di biscotti trovate delle ellissi con asse maggiore nella direzione perpendicolare al moto del nastro.

Qual è il ragionamento corretto? **Il primo**: i biscotti sono allungati nella direzione di moto del nastro.
L'errore nel secondo ragionamento sta nel fatto che nel riferimento del nastro

le varie parti dello stampo non giungono a contatto della pasta nello stesso istante. Dal punto di vista della pasta, la situazione è la seguente. Assumendo che lo stampo si muove verso sinistra, nel tempo richiesto perché tutte le parti dello stampo arrivino a contatto della pasta, lo stampo si è mosso ulteriormente verso sinistra. Per cui, il biscotto risulta essere più lungo di L. Vediamo nel dettagli quanto più lungo.
Consideriamo l'istante in cui l'estremità destra dello stampo entra in contatto con la pasta. Nel riferimento di questa, un orologio in tale punto dello stampo indica un tempo maggiore di quello posto nell'estremità sinistra di una quantità:

$$\Delta t = \frac{L\,v}{c^2}.$$

L'orologio di sinistra deve perciò avanzare di Δt per il tempo in cui esso è in contatto con la pasta (Questo perché nel riferimento dello stampo, tutti i punti di quest'ultimo toccano la pasta simultaneamente). Causa la dilatazione temporale, lo stampo impiega un tempo $\gamma\,\Delta t$ nel riferimento della pasta, durante il quale esso percorre una distanza $v\,\gamma\,\Delta t$. Poiché l'estremità sinistra era inizialmente avanti a quella di destra di L/γ (causa contrazione della lunghezza), la lunghezza totale del biscotto nel riferimento del nastro è:

$$\ell = \frac{L}{\gamma} + v\,\gamma\,\Delta t = \frac{L}{\gamma} + v\,\gamma\,\frac{L\,v}{c^2} = \gamma\,L\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma\,L$$

c.v.d.

1.2 Trasformazioni di Lorentz

1.2.1 Petardi sul treno

Un treno di lunghezza propria L viaggia con velocità v. Secondo un osservatore O a terra, due petardi posti alle estremità del treno esplodono simultaneamente. Qual è l'intervallo di tempo tra le esplosioni secondo un osservatore O' sul treno?

Indicati con A e B gli eventi corrispondenti alle esplosioni dei petardi, in base alla trasformazione di Lorentz della coordinata temporale, si ha:

$$t_B - t_A = \gamma \left[(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2} (x'_B - x'_A) \right]$$

i.e., poiché secondo O $t_B = t_A$:

$$\gamma \left[(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2} L \right] = 0$$

da cui:

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = -\frac{v}{c^2} L$$

(il segno - indica che, rispetto a O$'$, l'evento A accade prima di quello B).

N.B. - Confrontare con il risultato ottenuto, per altra via, nell'esercizio 1.1.10.

1.2.2 Legge oraria di una particella

Una particella si muove rispetto a un osservatore O' con velocità costante $u' = c/2$ nel piano $x' - y'$ secondo una traiettoria che forma un angolo di $60°$ con l'asse x'. Se la velocità di O' rispetto a un altro osservatore O è $v = 0.6\,c$ lungo il comune asse $x - x'$, determinare le equazioni del moto della particella secondo O.

Le equazioni del moto secondo O$'$ sono:

$$x' = u'_x\, t' \qquad\qquad y' = u'_y\, t'.$$

dove:

$$u'_x = u' \cos(\pi/3) = \frac{c}{2}\frac{1}{2} = \frac{c}{4}$$

$$u'_y = u' \sin(\pi/3) = \frac{c}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,c}{4}.$$

In base alle trasformazioni di Lorentz, risulta:

- per il moto lungo x':

$$\gamma\,(x - v\,t) = u'_x\,\gamma\,\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)$$

i.e.

$$x - v\,t = u'_x\,t - \frac{u'_x\,v}{c^2}\,x \qquad \Rightarrow \qquad x\,\left(1 + \frac{u'_x\,v}{c^2}\right) = (u'_x + v)\,t$$

da cui:

$$x = \frac{(u'_x + v)\,t}{1 + \dfrac{u'_x\,v}{c^2}} = \frac{(c/4) + 0.6\,c}{1 + (1/4) \times 0.6}\,t = \frac{0.85}{1.15}\,(c\,t) = 0.74\,(c\,t)\,;$$

- per il moto lungo y':

$$y' = u'_y\,\gamma\,\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) = y$$

per cui:

$$y = \frac{\sqrt{3}\,c}{4}\,\frac{1}{\sqrt{1 - (0.6)^2}}\,\left(t - \frac{0.6}{c}\,x\right)$$

i.e., sostituendo l'equazione del moto $x = 0.74\,(c\,t)$:

$$y = c\,\frac{\sqrt{3}}{4 \times \sqrt{0.64}}\,(1 - 0.6 \times 0.74)\,t \simeq 0.30\,(c\,t).$$

Quindi, in definitiva le equazioni del moto della particella secondo O sono:

$$x = 0.74\,(c\,t) \qquad\qquad y = 0.30\,(c\,t)$$

1.2.3 Eventi simultanei

Due eventi, A e B, simultanei nel riferimento K, hanno coordinate: $x_A = 1$ *m,* $x_B = 3$ *m,* $t_A = t_B = t = 1$ *ns. Qual è l'intervallo temporale tra i due eventi in un riferimento K', in moto rispetto a K lungo l'asse* $x \equiv x'$ *con velocità* $\beta = 0.1$*?*

In base alle trasformazioni di Lorentz:

$$x'_A = \gamma\,(x_A - \beta\,c\,t_A) = \gamma\,(x_A - \beta\,c\,t)$$
$$x'_B = \gamma\,(x_B - \beta\,c\,t_B) = \gamma\,(x_B - \beta\,c\,t)$$
$$\rightarrow \qquad \Delta x' = x'_B - x'_A = \gamma\,(x_B - x_A)$$

$$
\begin{aligned}
t'_A &= \gamma\left(t_A - \frac{\beta}{c}\,x_A\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\,x_A\right)\\
t'_B &= \gamma\left(t_B - \frac{\beta}{c}\,x_B\right) = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}\,x_B\right)\\
&\rightarrow \quad \Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\,\frac{\beta}{c}\,(x_A - x_B)
\end{aligned}
$$

Poiché (sviluppo in serie di Taylor: $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\,x + O(x^2)$):

$$
\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.1)^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}\,(0.1)^2 = 1.005
$$

si ha:

$$
\Delta t' = 1.005 \times \frac{0.1}{3 \times 10^8}\,(1-3) = -0.67 \text{ ns.}
$$

NB - $\Delta t' < 0 \rightarrow$ in K' l'evento A è successivo a B e ciò è conseguenza del fatto che $x_B > x_A$.

1.2.4 Separazione tra eventi

Secondo un osservatore O, due eventi sono separati da $\Delta x = 600$ m e $\Delta t = 800$ ns. Quanto veloce deve viaggiare un osservatore O' rispetto ad O affinché i due eventi gli appaiano simultanei? Qual è la separazione spaziale tra i due eventi, misurata da O'?

In base alla trasformazione di Lorentz della coordinata temporale, abbiamo:

$$
\Delta t' = \gamma\left[\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right]
$$

per cui, poiché per O$'$ deve essere $\Delta t' = 0$, abbiamo:

$$
\Delta t = \frac{v}{c^2}\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c^2\,\Delta t}{\Delta x} = \frac{(3 \times 10^8)^2 \times 800 \times 10^{-9}}{600} = 1.2 \times 10^8 \text{ m/s}
$$

i.e.

$$
\beta = \frac{v}{c} = \frac{1.2 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 0.4
$$

Dalla trasformazione di Lorentz della coordinata spaziale, otteniamo:

$$
\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - \beta\,c\,\Delta t)
$$

i.e.

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \frac{1}{\sqrt{1-(0.4)^2}}\left(600 - 0.4 \times 3 \times 10^8 \times 800 \times 10^{-9}\right)\\ &= \frac{1}{0.84}\left(600 - 96\right) \simeq 549.9 \text{ m.}\end{aligned}$$

1.2.5 La lampada nel razzo

Un razzo di lunghezza propria $L' = 90$ m viaggia con velocità costante $\beta = 0.8$ rispetto al suolo. Quando la testa del razzo oltrepassa un osservatore a terra, dalla cabina di testa viene inviato un raggio luminoso verso la coda del razzo. Quanto tempo impiega il raggio a raggiungere la coda del razzo:

- *come misurato dal pilota?*
- *come misurato dall'osservatore a terra?*

Quando la coda del razzo oltrepassa l'osservatore a terra:

- *secondo l'osservatore a terra?*
- *secondo il pilota?*

Indichiamo con A e B gli eventi definiti dall'emissione del segnale luminoso e dalla sua ricezione, rispettivamente. Poiché la luce viaggia con velocità c (in senso opposto a quello di moto del razzo), nel riferimento del razzo, risulta:

$$t'_B - t'_A = \frac{x'_B - x'_A}{-c} = \frac{-L'}{-c} = \frac{90}{3 \times 10^8} = 300 \text{ ns.}$$

Rispetto all'osservatore a terra, si ha (trasformazione inversa di Lorentz della coordinata temporale):

$$t_B - t_A = \gamma\left[(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)\right] = \gamma\left[(t'_B - t'_A) + \frac{\beta}{c}(-L')\right]$$

i.e.

$$\begin{aligned}t_B - t_A &= \frac{1}{\sqrt{1-(0.8)^2}}\left(300 \times 10^{-9} - \frac{0.8}{3 \times 10^8}\,90\right)\\ &= \frac{6 \times 10^{-8}}{0.6} = 100 \text{ ns}\end{aligned}$$

Come misurata dall'osservatore a terra, la lunghezza del razzo è:

$$L = \frac{L'}{\gamma} = 90 \times \sqrt{1 - (0.8)^2} = 54 \text{ m},$$

per cui, rispetto ad esso, la coda del razzo lo oltrepassa dopo un tempo:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{54}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 225 \text{ ns}.$$

Secondo il pilota del razzo, invece, tale evento si verifica dopo un tempo:

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{90}{0.8 \times 3 \times 10^8} = 375 \text{ ns}.$$

1.2.6 Luci sulla stazione spaziale

Alle due estremità di una stazione spaziale vengono accese due luci: 1 e 2. Nel riferimento della torre di controllo, l'evento 1 avviene nel punto $(t_1, x_1) \equiv (L/c, -L)$*, e quello 2 in* $(t_2, x_2) \equiv (L/c, L)$*. All'istante* $t = t' = 0$ *un'astronave passa vicino alla torre di controllo con velocità* v*, diretta lungo l'asse* x *del riferimento della torre. Determinare l'intervallo di tempo tra i due eventi nel riferimento dell'astronave. Qual è la sequenza temporale dell'evento per un osservatore nell'astronave?*

In base alla trasformazioni di Lorentz della coordinata temporale, si ha:

$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) = \gamma \left(\frac{L}{c} + \frac{v}{c^2} L \right) = \gamma \frac{L}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) = \gamma \left(\frac{L}{c} - \frac{v}{c^2} L \right) = \gamma \frac{L}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right)$$

per cui:

$$\Delta t_a = t_1' - t_2' = \gamma \frac{L}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \right) - \gamma \frac{L}{c} \left(1 - \frac{v}{c} \right) = 2 \gamma \frac{v L}{c^2}$$

$\Delta t_a > 0$: per un osservatore nell'astronave è l'evento 2 ad accadere per primo.

1.2.7 Football in treno - 1

Un treno di lunghezza propria L si muove con velocità $\beta = 5/13$ rispetto al suolo. Una palla è lanciata dalla coda verso la testa del treno con velocità $\beta_p = 1/3$. Dal punto di vista di un osservatore a terra, quanto tempo la palla rimane in aria e quanto lontano arriva?

I due eventi a cui siamo interessati sono:

1. la palla lascia la coda del treno;

2. la palla giunge sulla testa del treno.

Rispetto al treno, la separazione spaziale e temporale tra questi due eventi è:

$$\Delta x_T = L \qquad\qquad \Delta t_T = \frac{L}{v_p} = 3\,\frac{L}{c}.$$

Tenendo conto che il fattore lorentziano del treno è:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(5/13)^2}} = \frac{13}{12},$$

per la separazione spaziotemporale dei due eventi rispetto alle coordinate a terra, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \gamma\,(\Delta x_T + \beta\, c\,\Delta t_T) \\
&= \frac{13}{12}\left[L + \left(\frac{5\,c}{13}\right)\left(\frac{3\,L}{c}\right)\right] = \frac{13}{12}\left(1+\frac{15}{13}\right)L = \frac{7}{3}\,L \\
\Delta t &= \gamma\,\left[\Delta t_T + (\beta/c)\,\Delta x_T\right] \\
&= \frac{13}{12}\left[\frac{3\,L}{c} + \left(\frac{5\,c}{13}\right)\frac{L}{c^2}\right] = \frac{13}{12}\left(3+\frac{15}{13}\right)\frac{L}{c} = \frac{11}{3}\,\frac{L}{c}.
\end{aligned}$$

1.2.8 Invarianza della relazione di "mass-shell"

Dimostrare che la combinazione $(E/c)^2 - p^2$ è invariante per trasformazioni di Lorentz.

In base alle trasformazioni di Lorentz di impulso ed energia (vedi equazioni

(3.21) e (3.22) in sezione 3.7 di capitolo 3), si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{E'^{\,2}}{c^2} - p'^{\,2} &= \frac{\gamma^2}{c^2}\,(E - v\,p_x)^2 - \gamma^2\,\left(p_x - \frac{v}{c^2}\,E\right)^2 - p_y^2 - p_z^2 \\
&= \gamma^2\left[\frac{E^2}{c^2} - 2\,\frac{v\,p_x\,E}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\,p_x^2 - \left(p_x^2 - 2\,\frac{v\,p_x\,E}{c^2} + \frac{v^2}{c^4}\,E^2\right)\right] \\
&\qquad\qquad - p_y^2 - p_z^2 \\
&= \gamma^2\,\left(\frac{E^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\,p_x^2 - p_x^2 - \frac{v^2}{c^4}\,E^2\right) - p_y^2 - p_z^2 \\
&= \gamma^2\,\left[\frac{E^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - p_x^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] - p_y^2 - p_z^2 \\
&= \gamma^2\,\left(\frac{E^2}{c^2}\,\frac{1}{\gamma^2} - p_x^2\,\frac{1}{\gamma^2}\right) - p_y^2 - p_z^2 \\
&= \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2
\end{aligned}
$$

i.e.

$$
\frac{E'^{\,2}}{c^2} - p'^{\,2} = \frac{E^2}{c^2} - p^2
$$

c.v.d.

1.3 Composizione delle velocità

1.3.1 Collisioni di nuclei

Un nucleo d'oro in moto con $\beta_{Au} = 0.8$ *collide frontalmente con un nucleo di piombo che si muove con velocità* $\beta_{Pb} = 0.9$. *Qual è la velocità con cui il nucleo d'oro vede arrivare il nucleo di piombo?*

Il nucleo d'oro vede arrivare quello di piombo con velocità β data dalla composizione relativistica $\beta_{Au} \oplus \beta_{Pb}$, ovvero:

$$\beta = \frac{\beta_{Au} + \beta_{Pb}}{1 + \beta_{Au}\,\beta_{Pb}} = \frac{0.8 + 0.9}{1 + 0.8 \times 0.9} = \frac{1.7}{1.72} \simeq 0.988.$$

1.3.2 Collisioni di protoni

Due protoni vengono accelerati fino alla stessa velocità v_p *e fatti collidere frontalmente. La loro velocità relativa è* $v = 0.96\,c$. *Qual è la velocità rispetto all'acceleratore?*

In base dalla formula relativistica per la composizione delle velocità, si ha:

$$v = \frac{v_p + v_p}{1 + v_p^2/c^2}$$

i.e.

$$v + \frac{v\,v_p^2}{c^2} = 2\,v_p \qquad \to \qquad \frac{v}{c^2}\,v_p^2 - 2\,v_p + v = 0$$

per cui

$$v_p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v/c^2} = c\,\frac{1 \pm \sqrt{1 - (0.96)^2}}{0.96} = c\,\frac{1 \pm 0.28}{0.96} = \begin{cases} 1.33\,c \\ 0.75\,c \end{cases}$$

i.e., scartando il valore non fisico ($v_p > c$): $\beta_p = 0.75$

1.3.3 Particella in moto - 1

Rispetto ad un osservatore O, una particella si muove con velocità $u = 0.8\,c$ *lungo una direzione che forma un angolo* $\theta = 30°$ *con l'asse* x *del riferimento* *di O. Qual è la velocità della particella misurata da un osservatore O' in moto rispetto ad O con velocità $v = -0.6\,c$ lungo il comune asse $x - x'$?*

Rispetto ad O, si ha:

$$u_x = u\,\cos\theta = 0.8\,c \times \cos(\pi/6) = 0.693\,c$$
$$u_y = u\,\sin\theta = 0.8\,c \times \sin(\pi/6) = 0.400\,c$$

Rispetto ad O$'$, abbiamo ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x\,v/c^2} = \frac{0.693 - (-0.6)}{1 - 0.693 \times (-0.6)}\,c = \frac{1.293}{1 + 0.416} \simeq 0.913\,c$$

$$u'_y = \frac{1}{\gamma}\,\frac{u_y}{1 - u_x\,v/c^2} = \sqrt{1 - (-0.6)^2}\,\frac{0.4\,c}{1 + 0.416} \simeq 0.226\,c$$

per cui, la velocità misurata da O$'$ è:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = c\,\sqrt{(0.913)^2 + (0.226)^2} \simeq 0.941\,c,$$

e l'angolo θ' che tale velocità forma con l'asse x', è:

$$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.226\,c}{0.913\,c} = 0.248 \qquad \Rightarrow \qquad \theta' = 13.9°.$$

1.3.4 Particella in moto - 2

Nel riferimento del laboratorio, S, una particella si muove nel piano $x - y$ con $\vec{u} = c\,(0.3, 0.4)$. Il riferimento S' è in moto rispetto ad S lungo il comune asse $x - x'$ con velocità $v = 0.5\,c$ Determinare, in entrambi i riferimenti, la velocità della particella e l'angolo che il corrispondente vettore forma con l'asse x.

In S, risulta:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}\,c = 0.5\,c$$

e

$$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{0.4\,c}{0.3\,c} \simeq 1.333 \qquad \Rightarrow \quad \theta \simeq 53.1°.$$

In S$'$, si ha ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x\, v/c^2} = \frac{0.3\, c - 0.5\, c}{1 - 0.3 \times 0.5} \simeq -0.235\, c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\, (1 - u_x\, v/c^2)} = \sqrt{1 - (0.5)^2}\, \frac{0.4\, c}{1 - 0.3 \times 0.5} \simeq 0.408\, c$$

per cui:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = c\, \sqrt{(0.235)^2 + (0.408)^2} \simeq 0.471\, c$$

e

$$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.408\, c}{-0.235\, c} \simeq -1.736 \qquad \Rightarrow \qquad \theta \simeq 119.9°.$$

1.3.5 Moto di un fotone

All'istante $t = 0$, un osservatore O emette un fotone in una direzione che forma un angolo $\theta = 60°$ con l'asse x. Un secondo osservatore, O$'$, si muove con velocità $v = 0.6\, c$ lungo il comune asse $x - x'$. Qual è l'angolo che la direzione di moto del fotone forma con l'asse x'?

Rispetto a O, il fotone si muove con velocità:

$$u_x = c\, \cos(\pi/3) = 0.5\, c \qquad\qquad u_y = c\, \sin(\pi/3) = 0.866\, c,$$

per cui, rispetto a O$'$ ($\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x\, v/c^2} = \frac{0.5 - 0.6}{1 - 0.5 \times 0.6}\, c = \frac{-0.1}{1 - 0.3} = -0.143\, c$$

$$u'_y = \frac{1}{\gamma}\, \frac{u_y}{1 - u_x\, v/c^2} = \sqrt{1 - (0.6)^2}\, \frac{0.866\, c}{1 - 0.3} = \frac{0.8 \times 0.866}{0.7}\, c \simeq 0.990\, c$$

e, quindi:

$$\tan\theta' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.99\, c}{-0.143\, c} = -6.92 \qquad \Rightarrow \qquad \theta' \simeq 98.2°.$$

La velocità del fotone misurata in O$'$ è:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = c\, \sqrt{(0.143)^2 + (0.99)^2} = 1.000274\, c$$

i.e., c, come deve essere per il postulato di Einstein.
N.B. - La velocità del fotone è venuta più grande di c per le approssimazioni di calcolo, ma, in realtà, risulta:

$$u' = \frac{\sqrt{(u_x - v)^2 + u_y^2/\gamma^2}}{1 - u_x\, v/c^2} = \frac{\sqrt{u_x^2 - 2\, u_x\, v + v^2 + \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)\, u_y^2}}{1 - u_x\, v/c^2}$$

$$= \frac{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 - 2\, u_x\, v + v^2 - (v^2/c^2)\, u_y^2}}{1 - u_x\, v/c^2} = \frac{\sqrt{c^2 - 2\, u_x\, v + v^2 - (v^2/c^2)\, u_y^2}}{1 - u_x\, v/c^2}$$

i.e., poiché $u_y^2 = c^2 - u_x^2$:

$$u' = \frac{\sqrt{c^2 - 2\, u_x\, v + v^2 - (v^2/c^2)\,(c^2 - u_x^2)}}{1 - u_x\, v/c^2} = \frac{\sqrt{c^2 - 2\, u_x\, v + (v^2/c^2)\, u_x^2}}{1 - u_x\, v/c^2}$$

$$= \frac{c - (v/c)\, u_x}{1 - u_x\, v/c^2} = c\, \frac{1 - (v/c^2)\, u_x}{1 - (v/c^2)\, u_x} = c \qquad \text{c.v.d.}$$

1.3.6 Esperimento di Fizeau

Come è ben noto, la velocità della luce nell'acqua è c/n, con $n \simeq 4/3$. Fizeau, nel 1851, trovò la seguente formula per la velocità della luce nell'acqua in moto con velocità V (relativa al laboratorio):

$$u = \frac{c}{n} + k\, V,$$

dove k è detto "coefficiente di trascinamento" e vale circa 0.44. Determinare il valore di k secondo la Relatività Speciale.

La velocità della luce misurata da un osservatore a riposo rispetto all'acqua, risulta essere: $u'_x = c/n$. L'osservatore nel laboratorio, invece, misura:

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + u'_x\, V/c^2} = \frac{(c/n) + V}{1 + V/(c\, n)}$$

che, nel limite $V/c << 1$, diviene:

$$u_x \simeq \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{c\, n}\right) = \frac{c}{n} - \frac{V}{n^2} + V - \frac{V^2}{c\, n} \simeq \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

da cui, risulta:

$$k \simeq 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(4/3)^2} = \frac{7}{16} \simeq 0.438,$$

in accordo con il valore trovato da Fizeau.

1.3.7 Gran premio di treni - 2

Con riferimento all'esercizio 1.1.6:

i) come visto da A e B, quanto impiega A a sorpassare B?

ii) il capotreno D del treno B attraversa a velocità costante il treno in modo tale da coincidere con gli eventi E_1 ed E_2. Quanto tempo richiede il sorpasso dal punto di vista di D?

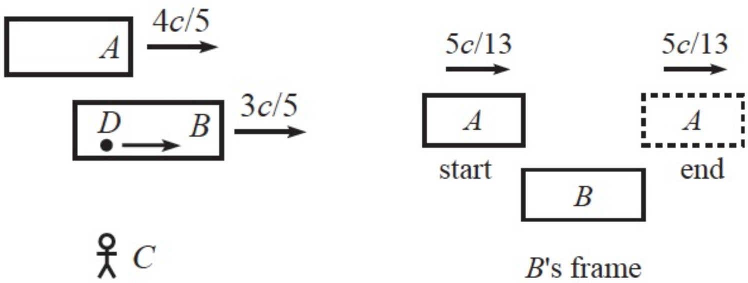


Figura 1.10: La situazione come appare a un osservatore in stazione (sinistra) e a uno solidale con il treno B (destra).

i) Dal punto di vista di B, A si muove con velocità (vedi Fig. 1.10):

$$u = \frac{v_A - v_B}{1 - v_A\, v_B/c^2} = \frac{(4/5)\,c - (3/5)\,c}{1 - (4/5) \times (3/5)} = c\,\frac{1/5}{13/25} = \frac{5}{13}\,c.$$

Per cui:

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 25/169}} = \frac{13}{12}$$

e, quindi, B vede A di lunghezza:

$$L_A = \frac{L}{\gamma_u} = \frac{12}{13}\,L.$$

Durante il sorpasso, A deve percorrere una distanza uguale alla somma delle lunghezze dei due treni nel riferimento di B:

$$L_t = L_A + L = \frac{12}{13}\,L + L = \frac{25}{13}\,L$$

e il tempo che impiega è:

$$t_B = \frac{L_t}{u} = \frac{(25/13)\,L}{(5/13)\,c} = 5\,\frac{L}{c}.$$

NB - lo stesso ragionamento vale dal punto di vista di A, per cui:

$$t_A = t_B = 5\,\frac{L}{c}.$$

ii) Punto di vista di D: il controllore è a riposo e rispetto ad esso i due treni si muovono con velocità v uguale ed opposta, altrimenti l'evento E_2 non potrebbe avvenire in coincidenza con la posizione di D (vedi Fig. 1.11).

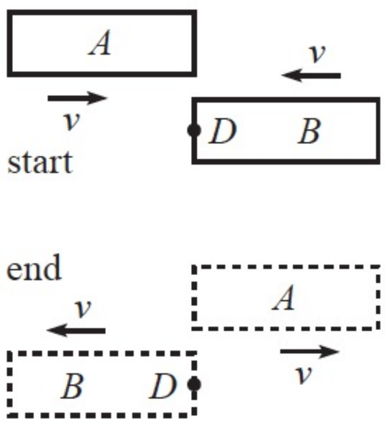


Figura 1.11: La situazione dal punto di vista di D.

L'addizione relativistica di v con sé stessa è la velocità di A come vista da B. Dal punto (i) sappiamo che questa velocità relativa è $\beta_u = 5/13$, per cui possiamo scrivere:

$$\frac{2\,v}{1 + v^2/c^2} = \frac{5}{13}\,c \quad \rightarrow \quad 26\,v = 5\,c\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

i.e.

$$26\,v = 5\,c\ + 5\,\frac{v^2}{c}$$

i.e.

$$5\,\frac{v^2}{c} - 26\,v + 5\,c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 5\,v^2 - 26\,c\,v + 5\,c^2 = 0$$

i.e

$$v = \frac{13\,c \pm \sqrt{169\,c^2 - 25\,c^2}}{5} = c\,\frac{13 \pm 2}{5} = \begin{cases} c/5 \\ 5\,c \end{cases}$$

Scartata la soluzione non fisica, si ha:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/25}} = \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{5}{2\,\sqrt{6}}$$

per cui D vede entrambi i treni di lunghezza:

$$L' = \frac{L}{\gamma_v} = \frac{2\,\sqrt{6}}{5}\,L.$$

Durante il sorpasso, ciascun treno deve percorrere una distanza pari alla sua lunghezza perché E_1 ed E_2 avvengano esattamente in corrispondenza di D. Per cui, il tempo totale nel riferimento di D è:

$$t_D = \frac{L'}{v} = \frac{2\,\sqrt{6}\,L/5}{c/5} = 2\,\sqrt{6}\,\frac{L}{c}.$$

1.3.8 Tre aerei - 1

Due aerei, A e B, viaggiano, rispettivamente, con velocità $\beta_A = 4/5$ e $\beta_B = 3/5$, rispetto al suolo. A quale velocità β deve viaggiare l'aereo C affinché esso veda A e B avvicinarsi con uguale velocità (cfr Fig. 1.12)? Quanto vale questa velocità?

Nel seguito, illustriamo tre diverse procedure per calcolare β.

1) la comune velocità, β_u, di A e B dal punto di vista di C (vedi Fig. 1.12), può essere ottenuta in due modi diversi: come sottrazione di β da β_A, o come sottrazione di β_B da β, i.e.

$$\frac{\beta_A - \beta}{1 - \beta_A\,\beta} = \beta_u = \frac{\beta - \beta_B}{1 - \beta\,\beta_B} \tag{1.7}$$

Figura 1.12: Il moto dei due aerei come visto dal suolo (sinistra) e dall'aereo C (destra).

i.e.

$$(\beta_A - \beta)\,(1 - \beta\,\beta_B) = (\beta - \beta_B)\,(1 - \beta_A\,\beta)$$

$$\Rightarrow \qquad (\beta_A + \beta_B)\,\beta^2 - 2\,(1 + \beta_A\,\beta_B)\,\beta + (\beta_A + \beta_B) = 0$$

che, indicato con

$$\widetilde{\beta} = \frac{\beta_A + \beta_B}{1 + \beta_A\,\beta_B}$$

può essere riscritta nel modo seguente:

$$\beta^2 - \frac{2}{\widetilde{\beta}}\,\beta + 1 = 0$$

e, quindi:

$$\beta = \frac{1}{\widetilde{\beta}} \pm \sqrt{\frac{1}{\widetilde{\beta}^2} - 1} = \frac{1}{\widetilde{\beta}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \widetilde{\beta}^2}\right)$$

La soluzione con il segno + va scartata in quanto, poiché $\widetilde{\beta} < 1$, implica $|\beta| > 1$. Quindi:

$$\beta = \frac{1}{\widetilde{\beta}}\left(1 - \sqrt{1 - \widetilde{\beta}^2}\right).$$

Poiché

$$\widetilde{\beta} = \frac{4/5 + 3/5}{1 + 12/25} = \frac{7}{5}\,\frac{25}{37} = \frac{35}{37}$$

si ha:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{37}{35}\left(1 - \sqrt{1 - (35/37)^2}\right) = \frac{37}{35}\left(1 - \frac{1}{37}\sqrt{(37)^2 - (35)^2}\right) \\ &= \frac{37}{35}\left(1 - \frac{12}{37}\right) = \frac{37}{35}\,\frac{25}{37} = \frac{5}{7}\end{aligned}$$

che inserita nella seconda uguaglianza della (1.7), fornisce:

$$\beta_u = \frac{5/7 - 3/5}{1 - (3/5)\,(5/7)} = \frac{25 - 21}{35}\,\frac{1}{1 - 3/7} = \frac{4}{35}\,\frac{7}{4} = \frac{1}{5}.$$

2) la velocità β può essere ottenuta in due modi diversi: sottraendo β_u da β_A, o sommando β_B e β_u, i.e.

$$\frac{\beta_A - \beta_u}{1 - \beta_A\,\beta_u} = \beta = \frac{\beta_B + \beta_u}{1 + \beta_B\,\beta_u} \tag{1.8}$$

i.e.

$$(\beta_A - \beta_u)\,(1 + \beta_B\,\beta_u) = (\beta_B + \beta_u)\,(1 - \beta_A\,\beta_u)$$
$$\Rightarrow \qquad (\beta_A - \beta_B)\,\beta_u^2 - 2\,(1 - \beta_A\,\beta_B)\,\beta_u + (\beta_A - \beta_B) = 0$$

che, indicato con

$$\hat{\beta} = \frac{\beta_A - \beta_B}{1 - \beta_A\,\beta_B}$$

può essere riscritta nel modo seguente:

$$\beta_u^2 - \frac{2}{\hat{\beta}}\,\beta_u + 1 = 0$$

e, quindi:

$$\beta_u = \frac{1}{\hat{\beta}} \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{\beta}^2} - 1} = \frac{1}{\hat{\beta}}\left(1 \pm \sqrt{1 - \hat{\beta}^2}\right).$$

La soluzione con il segno + va scartata in quanto, poiché $\hat{\beta} < 1$, implica $|\beta_u| > 1$. Quindi:

$$\beta_u = \frac{1}{\hat{\beta}}\left(1 - \sqrt{1 - \hat{\beta}^2}\right).$$

Poiché

$$\hat{\beta} = \frac{4/5 - 3/5}{1 - 12/25} = \frac{1}{5}\,\frac{25}{13} = \frac{5}{13}$$

si ha:

$$\beta_u = \frac{13}{5}\left(1 - \sqrt{1 - (5/13)^2}\right) = \frac{13}{5}\left(1 - \frac{1}{13}\sqrt{(13)^2 - (5)^2}\right)$$
$$= \frac{13}{5}\left(1 - \frac{12}{13}\right) = \frac{13}{5}\,\frac{1}{13} = \frac{1}{5}$$

che inserita nella prima uguaglianza della (1.8), fornisce:

$$\beta = \frac{4/5 - 1/5}{1 - 4/25} = \frac{3}{5}\,\frac{25}{21} = \frac{5}{7}.$$

3) la velocità relativa di A e B risulta essere:

$$\beta_{AB} = \frac{\beta_A - \beta_B}{1 - \beta_A \beta_B} = \frac{4/5 - 3/5}{1 - 12/25} = \frac{1}{5}\frac{25}{13} = \frac{5}{13}.$$

Dal punto di vista di C, β_{AB} è il risultato dell'addizione relativistica di β_u con β_u (cfr Fig. 1.12, pannello destro)

$$\beta_{AB} = \frac{\beta_u + \beta_u}{1 + \beta_u^2} = \frac{2\,\beta_u}{1 + \beta_u^2}$$

da cui, si ha:

$$2\,\beta_u = \frac{5}{13}\,(1 + \beta_u^2)$$

i.e.

$$26\,\beta_u = 5 + 5\,\beta_u^2 \qquad \Rightarrow \qquad 5\,\beta_u^2 - 26\,\beta_u + 5 = 0$$

i.e.

$$\beta_u = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 25}}{5} = \frac{13 \pm 12}{5}.$$

Anche in questo caso, scartiamo la soluzione con il segno +, a cui corrisponde $\beta_u = 5$, e, quindi:

$$\beta_u = \frac{13 - 12}{5} = \frac{1}{5}$$

che inserita nella (1.7), o nella (1.8), determina β.

1.3.9 Tre treni - 2

A si muove con velocità v rispetto al suolo; B, invece, è a riposo (vedi Fig. 1.13). Quanto veloce dovrebbe andare C perché veda A e B avvicinarsi ad

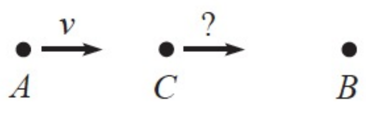


Figura 1.13:

esso alla stessa velocità? Nel riferimento del laboratorio (i.e., il riferimento *di B), qual è il rapporto tra le distanze CB e AC (si assuma che A e C giungono in B allo stesso tempo)?*

Indichiamo con u la velocità a cui C vede A e B avvicinarsi; questa rappresenta la velocità di C rispetto a B, ovvero, rispetto al suolo. Dal punto di vista di C, la velocità v risulta dall'addizione relativistica di u con se stessa, i.e.

$$v = \frac{2\,u}{1+u^2}$$

da cui otteniamo la seguente equazione di secondo grado in u:

$$v + u^2\,v = 2\,u \qquad \Rightarrow \qquad v\,u^2 - 2\,u + v = 0$$

e, quindi:

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1-v^2}}{v} \qquad \Rightarrow \qquad u = u_- = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v} \tag{1.9}$$

N. B. - La soluzione con il segno + va scartata in quanto comporta $v > 1$. Inoltre, nel limite di piccoli valori di v, si ha:

$$u_+ \simeq \frac{1+1-(v^2/2)}{v} \to \infty$$

mentre

$$u_- \simeq \frac{1-[1-(v^2/2)]}{v} = \frac{v}{2}$$

come aspettato.

Poiché A e C raggiungono B nello stesso istante, nel riferimento del laboratorio il rapporto tra le distanze CB e AC coincide con quello tra le differenze di velocità. Quindi:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{V_C - V_B}{V_A - V_C} = \frac{u_- - 0}{v - u_-} = \frac{1}{(v/u_-) - 1}$$

i.e., in base alla (1.9)

$$\begin{aligned} \frac{CB}{AC} &= \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{v^2 - 1 + \sqrt{1-v^2}} = \frac{1-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2}(1-\sqrt{1-v^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Ovvero, nel riferimento del laboratorio, C è γ volte più lontano da B di quanto lo sia da A.

N.B. - Nel caso di velocità non-relativistiche, i.e., $\gamma \simeq 1$, C è a metà strada tra A e B, com'era logico attendersi.

Una ragione intuitiva per il risultato (1.10) è la seguente. Immaginate che A e B, nel muoversi verso C, trasportino dei bastoni identici. Consideriamo come si presenta la situazione quando le punte raggiungono C. Nel riferimento del laboratorio (B in quiete), il bastone di B è inalterato, ma quello di A ha una lunghezza contratta di un fattore γ. Quindi, nel laboratorio A è più vicino a C di quanto lo sia B, di un fattore γ.

1.3.10 Oggetti in moto

Nel riferimento del laboratorio, un oggetto si muove con velocità (u_x, u_y), mentre voi vi muovete con velocità v lungo l'asse x. Per quale valore di v vedete l'oggetto muoversi con velocità u_y lungo l'asse y del vostro riferimento? Una soluzione è, ovviamente, $v = 0$; trovate l'altra.

Dal vostro punto di vista, il riferimento del laboratorio si muove con velocità v nella direzione delle x negative. Dalla formula di composizione delle velocità trasverse, la velocità lungo y nel vostro riferimento è:

$$u'_y = \frac{1}{\gamma}\,\frac{u_y}{1 - u_x\,v},$$

per cui, la condizione $u'_y = u_y$, implica:

$$\gamma\,(1 - u_x\,v) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 - u_x\,v = \sqrt{1 - v^2}$$

i.e.

$$1 - v^2 = 1 + u_x^2\,v^2 - 2\,u_x\,v \qquad \Rightarrow \qquad 2\,u_x\,v = (1 + u_x^2)\,v^2$$

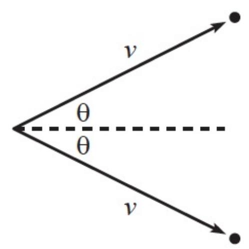
i.e., oltre a $v = 0$:

$$v = \frac{2\,u_x}{1 + u_x^2}.$$

Da tale formula si vede che v è semplicemente l'addizione relativistica di u_x con se stessa. Questo risultato è sensato perché significa che entrambi i riferimenti si muovono con velocità u_x (ma in direzioni opposte) rispetto al riferimento in cui l'oggetto non ha alcuna velocità lungo l'asse x. Per simmetria, quindi, la velocità dell'oggetto lungo l'asse y deve essere la stessa sia nel vostro riferimento che in quello del laboratorio.

1.3.11 Particelle divergenti - 1

Nel riferimento del laboratorio, due particelle si muovono, come rappresentato in figura, ciascuna con velocità v. Qual è la velocità di una particella come vista dall'altra?



Consideriamo il riferimento S$'$ che si muove con il punto P a metà strada tra le due particelle (i.e., lungo l'asse tratteggiato in figura). Questo riferimento si muove con velocità $v \cos\theta$, per cui il fattore lorentziano è

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 \cos^2\theta}}.$$

Calcoliamo le velocità trasverse delle particelle. Poiché esse hanno $u'_x = 0$, per la formula di composizione delle velocità trasverse, si ha:

$$v \sin\theta = \frac{u'_y}{\gamma}.$$

Quindi, in S$'$ ciascuna particella si muove lungo l'asse verticale, allontanandosi da P, con velocità

$$u'_y = \gamma\, v \sin\theta.$$

La velocità di una particella come vista dall'altra può essere trovata tramite la formula di composizione delle velocità longitudinali:

$$\begin{aligned}
w = \frac{2\,u'_y}{1 + u'^2_y} &= \frac{2\,\gamma\, v \sin\theta}{1 + (\gamma\, v \sin\theta)^2} \\
&= 2\,\frac{v \sin\theta}{\sqrt{1 - v^2 \cos^2\theta}}\,\frac{1}{1 + v^2 \sin^2\theta/(1 - v^2 \cos^2\theta)} \\
&= 2\,\frac{v \sin\theta}{\sqrt{1 - v^2 \cos^2\theta}}\,\frac{1 - v^2 \cos^2\theta}{1 - v^2\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}
\end{aligned}$$

i.e.

$$w = 2\,v\,\sin\theta\,\frac{\sqrt{1-v^2\,\cos^2\theta}}{1-v^2\,\cos 2\,\theta} \tag{1.11}$$

N.B. - Alcune osservazioni:

- quando $\theta = \pi/2$ la (1.11) diviene:

  $$w = \frac{2\,v}{1+v^2},$$

  mentre per $\theta = 0$, si ha $w = 0$; infine, per piccoli valori di θ, otteniamo:

  $$w \simeq 2\,v\,\theta\,\frac{\sqrt{1-v^2}}{1-v^2} = \frac{2\,v\,\theta}{\sqrt{1-v^2}} = 2\,\gamma\,v\,\theta$$

  che è semplicemente la composizione non-relativistica di u'_y con se stessa.

- Posto:

  $$\begin{aligned} a &= 1-v^2\,\cos 2\,\theta = 1-v^2\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1-v^2\,(1-2\,\sin^2\theta) \\ &= 1-v^2+2\,v^2\,\sin^2\theta \end{aligned}$$

  e

  $$b = (2\,v\,\sin\theta)\,\sqrt{1-v^2\cos^2\theta} = (2\,v\,\sin\theta)\,\sqrt{(1-v^2)+v^2\,\sin^2\theta},$$

  abbiamo:

  $$b^2 = 4\,v^2\,(1-v^2)\,\sin^2\theta + 4\,v^4\,\sin^4\theta = a^2-(1-v^2)^2$$

  per cui:

  $$w = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{a^2-(1-v^2)^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{(1-v^2)^2}{a^2}}$$

  i.e.

  $$w = \sqrt{1-\frac{(1-v^2)^2}{(1-v^2\,\cos 2\,\theta)^2}} \tag{1.12}$$

1.3.12 Particelle divergenti - 2

Rifare l'esercizio precedente utilizzando i 4-vettori velocità delle due particelle.

Nel riferimento del laboratorio, le 4-velocità delle due particelle sono (il moto si svolge nel piano $x - y$, per cui è soppressa la componente z):

$$u_A = \gamma_v \,(1, v\, \cos\theta, v\, \sin\theta) \qquad\qquad u_B = \gamma_v \,(1, v\, \cos\theta, -v\, \sin\theta)$$

Indichiamo con w la velocità di una particella come vista dall'altra, ad esempio, quella di A come vista da B: le 4-velocità nel riferimento di quiete di B sono:

$$u'_A = \gamma_w \,(1, w, 0) \qquad\qquad u'_B = (1, 0, 0)$$

dove gli assi sono stati ruotati di modo che, in tale riferimento, il moto avvenga lungo l'asse x'.
Poiché il prodotto scalare di 4-vettori è invariante sotto rotazioni e trasformazioni di Lorentz, abbiamo:

$$u_A \cdot u_B = u'_A \cdot u'_B \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_v^2 \,(1 - v^2\, \cos^2\theta + v^2\, \sin^2\theta) = \gamma_w$$

i.e.

$$\gamma_v^2 \,(1 - v^2\, \cos 2\,\theta) = \gamma_w \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1 - v^2\, \cos 2\,\theta}{1 - v^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}$$

i.e.

$$1 - w^2 = \left(\frac{1 - v^2}{1 - v^2\, \cos 2\,\theta}\right)^2$$

e, in definitiva:

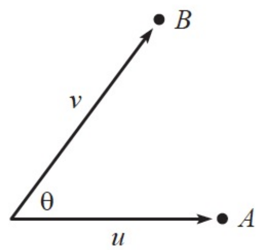
$$w = \sqrt{1 - \frac{(1 - v^2)^2}{(1 - v^2\, \cos 2\,\theta)^2}},$$

in accordo con la (1.12).

1.3.13 Particelle divergenti - 3

Nel riferimento del laboratorio, le particelle A e B si muovono con velocità u e v come illustrato in figura. Indicato con θ l'angolo tra le traiettorie delle due particelle, qual è la velocità di una particella come vista dall'altra?

Indichiamo con x la direzione in cui punta la velocità di A (vedi figura). Sia S$'$ il riferimento del laboratorio e S quello solidale con la particella A (i.e., S$'$



si muove con velocità $-u$ rispetto a S). Le componenti x ed y della velocità di B in S′ sono, rispettivamente, $v\,\cos\theta$ e $v\,\sin\theta$. In base alla formula di composizione relativistica delle velocità longitudinale e trasversa, si ha:

$$V_x = \frac{v\,\cos\theta - u}{1 - u\,v\,\cos\theta} \qquad\qquad V_y = \frac{1}{\gamma_u}\,\frac{v\,\sin\theta}{1 - u\,v\,\cos\theta}$$

e, quindi, la velocità totale di B nel riferimento S (i.e., dal punto di vista di A), è:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left(\frac{v\,\cos\theta - u}{1 - u\,v\,\cos\theta}\right)^2 + \frac{1}{\gamma_u^2}\left(\frac{v\,\sin\theta}{1 - u\,v\,\cos\theta}\right)^2}$$

i.e.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{1 - u\,v\,\cos\theta}\sqrt{(v\,\cos\theta - u)^2 + (1 - u^2)\,v^2\,\sin^2\theta} \\ &= \frac{\sqrt{v^2\,\cos^2\theta + u^2 - 2\,u\,v\,\cos\theta + v^2\,\sin^2\theta - u^2\,v^2\,\sin^2\theta}}{1 - u\,v\,\cos\theta} \\ &= \frac{\sqrt{v^2 + u^2 - 2\,u\,v\,\cos\theta - u^2\,v^2\,\sin^2\theta}}{1 - u\,v\,\cos\theta}. \end{aligned}$$

Questa espressione può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\sqrt{v^2 + u^2 - 2\,u\,v\,\cos\theta - u^2\,v^2 + u^2\,v^2\,\cos^2\theta}}{1 - u\,v\,\cos\theta} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - u\,v\,\cos\theta)^2 - 1 - u^2\,v^2 + u^2 + v^2}}{1 - u\,v\,\cos\theta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1 - v^2 - u^2 + v^2\,u^2}{(1 - u\,v\,\cos\theta)^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{(1 - v^2)\,(1 - u^2)}{(1 - u\,v\,\cos\theta)^2}} \qquad (1.13) \end{aligned}$$

N.B. - Alcune osservazioni:

- ponendo $v = u$ nella (1.13), si ha:

$$V = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - v^2}{1 - v^2\, \cos\theta}\right)^2}$$

i.e., il risultato dell'esercizio 1.3.11 se sostituiamo θ con $2\,\theta$;

- ponendo $\theta = \pi$ nella (1.13), si ha:

$$V = \frac{\sqrt{v^2 + u^2 + 2\,v\,u}}{1 + v\,u} = \frac{v + u}{1 + v\,u}$$

come risulta dalla composizione relativistica di due velocità di senso opposto;

- ponendo $\theta = 0$ nella (1.13), si ha:

$$V = \frac{\sqrt{v^2 + u^2 - 2\,v\,u}}{1 - v\,u} = \frac{\mid v - u \mid}{1 - v\,u}.$$

1.4 Intervallo

1.4.1 Intervallo tra eventi

Si considerino, in un certo riferimento inerziale, i seguenti eventi:

- *A:* $x_A = 2$ *m,* $t_A = 5$ *ns;*
- *B:* $x_B = 3$ *m,* $t_B = 10$ *ns;*
- *C:* $x_C = 4$ *m,* $t_C = 6$ *ns.*

Calcolare gli intervalli tra le varie coppie di eventi. Per quale di questi eventi esiste riferimento inerziale in cui essi sono simultanei? Se sì, con quale velocità si muove questo riferimento rispetto a quello di partenza?

Gli intervalli per le varie coppie di eventi sono:

$$\begin{aligned} s^2_{AB} &= [c\,(t_A - t_B)]^2 - (x_A - x_B)^2 \\ &= [3 \times 10^8 \times (5 - 10) \times 10^{-9}]^2 - (2 - 3)^2 = (1.5)^2 - 1 \\ &= 1.25 \text{ m}^2 \qquad \text{(tempo)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2_{AC} &= [c\,(t_A - t_C)]^2 - (x_A - x_C)^2 \\ &= [3 \times 10^8 \times (5 - 6) \times 10^{-9}]^2 - (2 - 4)^2 = 9 \times 10^{-2} - 4 \\ &= -3.91 \text{ m}^2 \qquad \text{(spazio)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2_{BC} &= [c\,(t_A - t_C)]^2 - (x_A - x_C)^2 \\ &= [3 \times 10^8 \times (10 - 6) \times 10^{-9}]^2 - (3 - 4)^2 = (1.2)^2 - 1 \\ &= 0.44 \text{ m}^2 \qquad \text{(tempo)} \end{aligned}$$

Quindi, solo per gli eventi A e C è possibile trovare un riferimento inerziale in cui essi sono simultanei. La condizione che essi risultino simultanei implica:

$$\Delta t'_{AC} = \gamma \left(\Delta t_{AC} - \frac{v}{c^2}\,\Delta x_{AC} \right) = 0$$

i.e.

$$c^2\,\Delta t_{AC} = v\,\Delta x_{AC} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c^2\,\Delta t_{AC}}{\Delta x_{AC}}$$

per cui:

$$v = \frac{(3 \times 10^8)^2\ \times (5 - 6) \times 10^{-9}}{(2 - 4)} = 0.15\,c$$

1.4.2 Football in treno - 2

Un treno di lunghezza propria L si muove con velocità $v = c/2$ rispetto al suolo. Un palla viene lanciata dalla coda verso la testa del treno con velocità $u = c/3$, rispetto al treno. Quanto tempo impiega e quale distanza copre la palla:

(a) *nel riferimento del treno?*

(b) *nel riferimento del suolo?*
(risolvere questo quesito sia utilizzando la composizione delle velocità che la trasformazione di Lorentz dal riferimento del treno a quello del suolo)

(c) *nel riferimento della palla?*

Inoltre:

(d) *verificare che l'intervallo spaziotemporale è lo stesso in tutti e tre i riferimenti;*

(e) *mostrare che i tempi nel riferimento della palla e in quello del suolo sono connessi dal fattore lorentziano γ;*

(f) *verificare che lo stesso accade per il riferimento della palla e quello del treno;*

(g) *mostrare che i tempi nel riferimento del treno e in quello del suolo non sono connessi da γ. Perché?*

(a) Nel riferimento del treno, la distanza è semplicemente L e il tempo è:

$$t = \frac{L}{c/3} = \frac{3\,L}{c}.$$

(b) Nel riferimento del suolo:

i) La velocità della palla rispetto al suolo è ($\beta_u = 1/3, \beta_v = 1/2$)

$$\beta = \frac{\beta_u + \beta_v}{1 + \beta_u\,\beta_v} = \frac{(1/3) + (1/2)}{1 + (1/6)} = \frac{(5/6)}{(7/6)} = \frac{5}{7}.$$

Poiché

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1/2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \tag{1.14}$$

la lunghezza del treno in questo riferimento è:

$$L_s = \frac{L}{\gamma_v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,L$$

e, quindi, al tempo t la posizione della testa del treno è $L_s + v\,t$, mentre quella della palla è $\beta\,c\,t$. Dall'uguaglianza di queste due posizioni, si ricava:

$$L_s + v\,t = \beta\,c\,t \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{L_s}{\beta\,c - v} = \frac{\sqrt{3}\,L/2}{(5/7 - 1/2)\,c} = \frac{7}{\sqrt{3}}\,\frac{L}{c}$$

(N.B - In modo equivalente, otteniamo questo tempo notando che la palla copre l'iniziale vantaggio L_s della testa del treno a una velocità relativa pari a $\beta\,c - v$.)

La distanza percorsa dalla palla è:

$$d = \beta\,c\,t = \frac{5}{7}\,c\,\frac{7\,L}{\sqrt{3}\,c} = \frac{5}{\sqrt{3}}\,L.$$

ii) Nel riferimento del treno, gli intervalli spaziali e temporali sono (cfr. punto (a)):

$$x' = L \qquad\qquad t' = \frac{3\,L}{c}$$

mentre il fattore lorentziano è dato dalla (1.14), per cui le coordinate rispetto la suolo sono:

$$\begin{aligned} x = \gamma_v\,(x' + v\,t') &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(L + \frac{c}{2}\,\frac{3\,L}{c}\right) = \frac{5}{\sqrt{3}}\,L \\ t = \gamma_v\,[t' + (v/c^2)\,x'] &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3\,L}{c} + \frac{c}{2\,c^2}\,L\right) = \frac{7}{\sqrt{3}}\,\frac{L}{c} \end{aligned}$$

in accordo con quanto ottenuto nel punto (i).

(c) Nel riferimento della palla, il treno ha lunghezza L'/γ_u. Poiché

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_u^2}} = \sqrt{1 - 1/9} = \frac{3}{2\,\sqrt{2}},$$

risulta

$$L'_p = \frac{2\,\sqrt{2}}{3}\,L.$$

Quindi, il tempo che il treno impiega ad oltrepassare la palla è:

$$t = \frac{L'_p}{\beta_u\, c} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\frac{L}{c/3} = 2\sqrt{2}\,\frac{L}{c}.$$

Ovviamente, la distanza è $d = 0$ in quanto la palla è ferma nel suo riferimento di quiete.

(d) Il valore di s^2 nei tre riferimenti è:

- treno: $(c\,t)^2 - d^2 = c^2\,(3\,L/c)^2 - L^2 = 8\,L^2$,
- suolo $(c\,t)^2 - d^2 = c^2\,[7\,L/(\sqrt{3}\,c)]^2 - (5\,L/\sqrt{3})^2 = 8\,L^2$
- palla: $(c\,t)^2 - d^2 = c^2\,(2\sqrt{2}\,L/c)^2 - 0 = 8\,L^2$.

(e) La velocità relativa tra il riferimento della palla e quello del suolo è $\beta = 5/7$ (cfr. (b)). Quindi:

$$\gamma_{ps} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-25/49}} = \frac{7}{2\sqrt{6}}.$$

I tempi sono, rispettivamente (cfr. (b) e (c)):

$$t_s = \frac{7}{\sqrt{3}}\,\frac{L}{c} \qquad\qquad t_p = 2\sqrt{2}\,\frac{L}{c},$$

per cui:

$$\frac{t_s}{t_p} = \frac{7\,L}{\sqrt{3}\,c}\,\frac{c}{2\sqrt{2}\,L} = \frac{7}{2\sqrt{6}} = \gamma_{ps}$$

c.v.d.

(f) La velocità relativa tra il riferimento della palla e quello del treno è $u = c/3$, per cui (cfr. (c)):

$$\gamma_{pt} = \gamma_u = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

I tempi sono, rispettivamente (cfr. (a) e (c)):

$$t_t = 3\,\frac{L}{c} \qquad\qquad t_p = 2\sqrt{2}\,\frac{L}{c},$$

per cui:

$$\frac{t_t}{t_p} = \frac{3\,L}{c}\,\frac{c}{2\sqrt{2}\,L} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \gamma_u$$

c.v.d.

(f) La velocità relativa tra il riferimento del treno rispetto al suolo è $v = c/2$, per cui:

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1/4}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

I tempi sono, rispettivamente (cfr. (b) e (a)):

$$t_s = \frac{7}{\sqrt{3}}\,\frac{L}{c} \qquad\qquad t_t = 3\,\frac{L}{c},$$

per cui:

$$\frac{t_s}{t_t} = \frac{7\,L}{\sqrt{3}\,c}\,\frac{c}{3\,L} = \frac{7}{3\sqrt{3}} = \frac{7}{6}\,\gamma_v.$$

In questo caso il rapporto tra i due tempi non è semplicemente il fattore lorentziano perché la dilatazione temporale si applica se i due eventi accadono nello stesso posto in uno dei due riferimenti. Matematicamente, la trasformazione di Lorentz:

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v}{c^2}\,\Delta x'\right)$$

guida a $\Delta t = \gamma\,\Delta t'$ soltanto se $\Delta x' = 0$. In questo esercizio, gli eventi: "palla che abbandona la coda" e "palla che colpisce la testa" avvengono nello stesso punto nel riferimento della palla ma non in quello del treno e del suolo. Equivalentemente, né il riferimento del treno né quello del suolo sono più speciali dell'altro. Chi insistesse nell'utilizzare la dilatazione temporale avrebbe un bel problema nel decidere in quale lato dell'equazione mettere il fattore lorentziano.

1.4.3 Classificazione degli intervalli

1. *Dati due eventi separati da intervallo di tipo* ***spazio*** *($\Delta s^2 < 0$), mostrare che esiste sempre un riferimento inerziale in cui essi sono simultanei. (Per semplicità, consideriamo il caso di una sola dimensione spaziale).*

   Nel riferimento K, risulta:

   $$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$$

   i.e.

   $$|\Delta x| > c\,|\Delta t|$$

Nel riferimento K′, si ha:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \, \Delta x \right)$$

per cui, imponendo la condizione di simultaneità, i.e., $\Delta t' = 0$, deve risultare:

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \, \Delta x$$

i.e.

$$|\beta| = \frac{c \, |\Delta t|}{|\Delta x|} < 1$$

i.e., un valore consentito per la velocità relativa due riferimenti.

2. *Dati due eventi separati da un intervallo di tipo* ***tempo*** *($\Delta s^2 > 0$), mostrare che esiste sempre un riferimento inerziale in cui essi sono spazialmente coincidenti.*

Nel riferimento K, risulta:

$$\Delta s^2 = c^2 \, \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$$

i.e.

$$|\Delta x| < c \, |\Delta t|$$

Nel riferimento K′, si ha:

$$\Delta x' = \gamma \, (\Delta x - v \, \Delta t)$$

per cui, imponendo la condizione di coincidenza, i.e., $\Delta x' = 0$, deve risultare:

$$\Delta x = v \, \Delta t$$

i.e.

$$|\beta| = \frac{|\Delta x|}{c \, |\Delta t|} < 1$$

i.e., un valore consentito per la velocità relativa due riferimenti.

1.5 Diagrammi di Minkowski

1.5.1 Simultaneità

In un dato riferimento, l'evento 1 avviene nel punto $x_1 = 0$, $ct_1 = 0$ *e l'evento 2 in* $x_2 = 2$, $ct_2 = 1$ *(in unità di una specificata lunghezza). Trovare il riferimento in cui i due eventi sono simultanei.*

Illustriamo tre diverse soluzioni del problema.

Soluzione 1 - Consideriamo il diagramma di Minkowski di Fig. 1.14. Nel riferimento S, l'evento 1 è nell'origine e il 2 nel punto $(2, 1)$. Consideriamo

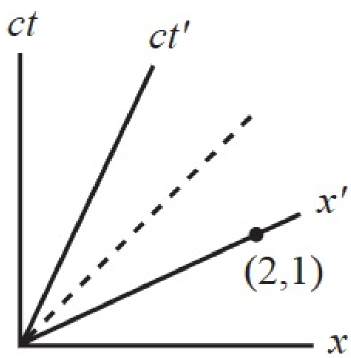


Figura 1.14:

ora il riferimento S′ il cui asse x' passa per il punto $(2, 1)$. Poiché tutti i punti sull'asse x' sono simultanei in S′ (hanno tutti $t' = 0$), si vede che S′ è il riferimento cercato. La pendenza di questo asse è uguale a $ct_2/x_2 = 1/2$, per cui, risulta:

$$v = \frac{c}{2}.$$

Dalla Fig. 1.14 è chiaro che se la velocità relativa di S e S′ è più grande di $c/2$, l'evento 2 avviene prima di quello 1, in S′; se, invece, $v < c/2$, allora l'evento 2 accade dopo di quello 1, in S′.

Soluzione 2 - Sia S il riferimento originale e S′ quello cercato. Indichiamo con v la velocità con cui S′ si muove, nella direzione positiva dell'asse x, rispetto a S. Dobbiamo calcolare v.

La trasformazione di Lorentz S $\rightarrow$ S$'$ é:

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - v\,\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\,\Delta x\right)$$

Imponendo $\Delta t'$ (eventi simultanei in S$'$) nella seconda equazione, otteniamo:

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\,\Delta x$$

i.e.

$$v = c^2\,\frac{\Delta t}{\Delta x} = c\,\frac{c\,\Delta t}{\Delta x} = \frac{c}{2}.$$

<u>Soluzione 3</u> - Consideriamo la situazione rappresentata in Fig. 1.15. I rive-

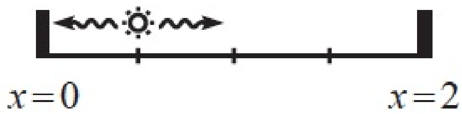


Figura 1.15:

latori di luce sono posizionati in $x = 0$ e $x = 2$ e la sorgente di luce è posta ad $x = 1/2$.
La sorgente emette un lampo e quando la luce raggiunge un rivelatore diremo che si è verificato un evento. Quindi, l'evento di sinistra accade a $x = 0$, $c\,t = 1/2$; quello di destra accade a $x = 2$, $c\,t = 3/2$. Se vogliamo, possiamo spostare le lancette dei nostri orologi indietro di

$$t_0 = -\frac{1}{2\,c}$$

in modo che gli eventi accadano a $c\,t = 0$ e $c\,t = 1$, rispettivamente questo spostamento è irrilevante in quanto ciò che ci interessa è la differenza in tempo.
Consideriamo ora un osservatore che si muove verso destra con velocità v, i.e., rispetto al quale l'apparato si muove con velocità v verso sinistra (vedi Fig. 1.16). Quale deve essere v affinché questo osservatore veda i fotoni

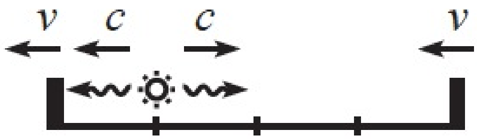


Figura 1.16:

giungere ai due rivelatori nello stesso istante? Consideriamo i fotoni che si muovono verso sinistra. L'osservatore li vede in moto con velocità c, ma il rivelatore di sinistra si allontana con velocità v, per cui la velocità relativa fotone-rivelatore, come misurata dall'osservatore è $c - v$. Ragionando nello stesso modo, deduciamo che nel caso del rivelatore di destra, la velocità relativa fotoni-rivelatore è $c + v$. La sorgente di luce è tre volte più lontana dal rivelatore di destra di quanto lo sia da quello di sinistra, per cui, affinché la luce raggiunga i rivelatori nello stesso istante, deve risultare:

$$\frac{c+v}{c-v} = 3$$

i.e.

$$c + v = 3\,c - 3\,v \qquad \Rightarrow \qquad 4\,v = 2\,c \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{c}{2}.$$

1.5.2 Unità di misura

Consideriamo un riferimento S', in moto, lungo l'asse x, con velocità v rispetto al riferimento S. Disegnare gli assi x' e t' nel piano $(x, c\,t)$ di S e derivare il rapporto tra le unità degli assi temporali e spaziali.

Esaminiamo due modi di risolvere il problema.

Prima soluzione - Con riferimento alla Fig. 1.17, consideriamo il punto $(x', c\,t') = (0, 1)$ nel piano $(x, c\,t)$. In base alla trasformazione di Lorentz $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$:

$$x = \gamma\,(x' + \beta\,t') \qquad\qquad c\,t = \gamma\,(c\,t' + \beta\,x'),$$

tale punto, in S, ha coordinate:

$$(x, c\,t) = (\gamma\,\beta, \gamma).$$

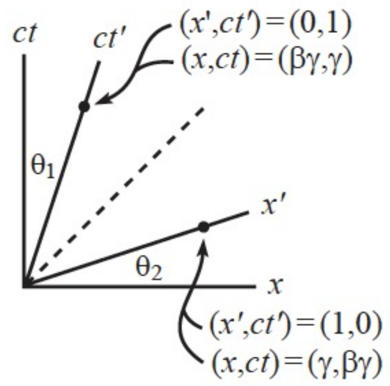


Figura 1.17:

Questo punto dista dall'origine[3]

$$d = \sqrt{x^2 + (c\,t)^2} = \sqrt{(\gamma\,\beta)^2 + \gamma^2} = \gamma\,\sqrt{1+\beta^2}$$

per cui, risulta:

$$\frac{\text{un.}\,(c\,t')}{\text{un.}\,(c\,t)} = \frac{\gamma\,\sqrt{1+\beta^2}}{1} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}},$$

come misurato in un piano in cui gli assi x e $c\,t$ sono ortogonali.

N.B. - Risulta:

- $$\lim_{\beta\to 1} \frac{\text{un.}\,(c\,t')}{\text{un.}\,(c\,t)} \to \infty;$$

  che è un altro modo di dire che il tempo non scorre per un corpo che si muove con velocità c;

- e, ovviamente:
  $$\lim_{\beta\to 0} \frac{\text{un.}\,(c\,t')}{\text{un.}\,(c\,t)} = 1.$$

[3]Attenzione: dimenticate la metrica dello spazio di Minkowski: non c'entra nulla. Dobbiamo calcolare distanze tra punti nel piano cartesiano, per cui la formula da utilizzare è quella euclidea.

Inoltre, come è evidente dalla figura, lo stesso rapporto sussiste tra le unità degli assi spaziali, i.e.

$$\frac{\text{un.}\, x'}{\text{un.}\, x} = \frac{\gamma\,\sqrt{1+\beta^2}}{1} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}.$$

<u>Seconda soluzione</u> - Tracciamo nel piano $(x, c\,t)$ l'iperbole $c^2\,t^2 - x^2 = 1$ (vedi Fig. 1.18). Causa l'invarianza dell'intervallo, per tutti i punti dell'iperbole

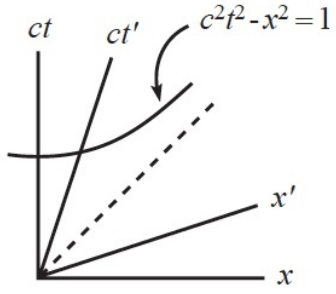


Figura 1.18:

risulta anche $c^2\,t'^2 - x'^2 = 1$, per cui, dal momento che $x'_A = 0$ (vedi Fig. 1.19), $c\,t'_A = 1$. Quindi, dobbiamo semplicemente determinare la distanza

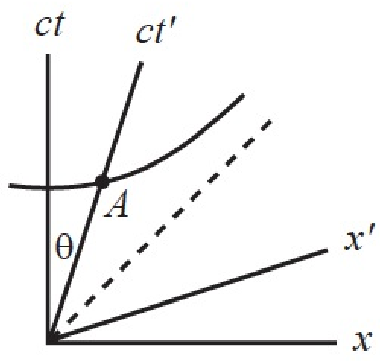


Figura 1.19:

nel piano cartesiano $(x, c\,t)$ che separa A dall'origine. Poiché:

$$\tan\theta = \frac{x}{c\,t} = \beta,$$

si ha:

$$x = \beta\, c\, t$$

che inserita nell'equazione dell'iperbole $c^2\, t^2 - x^2 = 1$, fornisce:

$$c\, t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Quindi, la distanza di A dall'origine risulta essere:

$$d = \sqrt{x^2 + (c\, t)^2} = \sqrt{(\beta\, c\, t)^2 + (c\, t)^2} = c\, t\, \sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}.$$

Questa quantità è il rapporto tra le unità degli assi $c\, t'$ e $c\, t$.

1.5.3 Contrazione delle lunghezze

Dati i riferimenti S e S′, quest'ultimo in moto con velocità v lungo l'asse x di S, consideriamo i seguenti problemi:

a) Un metro è a riposo lungo l'asse x′ di S′: se l'osservatore in S misura la sua lunghezza, qual è il risultato?

b) Un metro è a riposo lungo l'asse x di S: se l'osservatore in S′ misura la sua lunghezza, qual è il risultato?

Utilizzare un diagramma di Minkowski in cui gli assi nel riferimento S sono ortogonali

a) Le linee d'universo dei due estremi del metro sono mostrate in Fig. 1.20[4] La distanza $\overline{AC}$ è uguale a 1 metro in S′ perché A e C sono gli estremi del metro a istanti simultanei: è così che viene misurata una lunghezza. La lunghezza del segmento AC nel piano cartesiano $(x, c\, t)$ coincide con l'unità di lunghezza sull'asse x', per cui:

$$\overline{AC} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.15}$$

Come misura l'osservatore in S la lunghezza del metro? Egli annota le coordinate dei due estremi a istanti, dal suo punto di vista, simultanei e ne fa la

[4]Abbiamo supposto che l'estremo sinistro del metro sia posizionato nell'origine di S′. Ciò non implica alcuna perdita di generalità

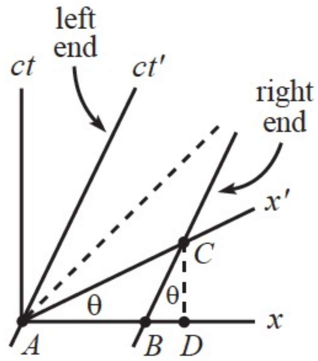


Figura 1.20:

differenza. Sia $t = 0$ l'istante in cui viene eseguita questa misura. L'osservatore, allora, misura gli estremi nei punti A e B. La lunghezza del segmento AB è data da (vedi Fig. 1.20):

$$\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BD}.$$

Indicato con θ l'angolo d'inclinazione degli assi "accentati", abbiamo:

$$\overline{AD} = \overline{AC}\,\sin\theta$$

Inoltre, poiché $\widehat{BCD} = \theta$, risulta:

$$\overline{BD} = \overline{CD}\,\tan\theta = (\overline{AC}\,\sin\theta)\,\tan\theta = \overline{AC}\,\cos\theta\,(1 - \tan^2\theta)$$

per cui:

$$\overline{AB} = \overline{AC}\,(\cos\theta - \sin\theta\,\tan\theta) = \overline{AC}\,\cos\theta\,\left(1 - \tan^2\theta\right).$$

Poiché

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}$$

si ha:

$$\overline{AB} = \overline{AC}\,\frac{1 - \tan^2\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

i.e., tenendo conto della (1.15):

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,\frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Quindi, l'osservatore in S misura per il metro una lunghezza ridotta del fattore di contrazione standard.

b) Il metro è a riposo in S, e vogliamo calcolare la lunghezza che misura l'osservatore in S′. Supponiamo l'estremo sinistro del metro nell'origine di S. Le linee d'universo dei due estremi sono mostrate in Fig. 1.21. La distanza

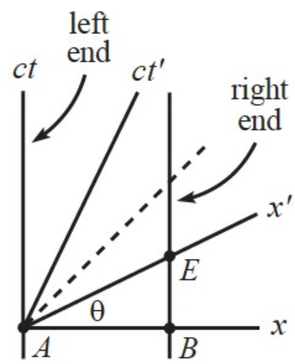


Figura 1.21:

$\overline{AB}$ è uguale a 1 metro in S. Nel misurare la lunghezza del metro, l'osservatore in S′ annota le coordinate x' dei due estremi a istanti, dal suo punto di vista, simultanei e ne fa la differenza. Sia $t' = 0$ l'istante in cui viene eseguita questa misura. L'osservatore, allora, misura gli estremi nei punti A ed E. La lunghezza del segmento AE è (vedi Fig. 1.21):

$$\overline{AE} = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1+\tan^2\theta} = \sqrt{1+\beta^2}.$$

Poiché una unità lungo l'asse x' ha una lunghezza

$$\frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

nel piano cartesiano $(x, c\,t)$, risulta:

$$\overline{AE} = \sqrt{1-\beta^2} \times (\text{un.asse}\, x')$$

e, quindi, l'osservatore in S′ misura per il metro una lunghezza ridotta del fattore di contrazione standard.

1.6 Effetto Doppler

1.6.1 Autovelox

Una macchina si avvicina ad un autovelox alla velocità $v = 100$ km/h. Se il radar del dispositivo lavora alla frequenza $\nu = 20$ GHz, qual è lo spostamento in frequenza misurato dal poliziotto?

La frequenza dell'onda ricevuta dalla macchina è:

$$\nu' = \nu\,\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

che, al primo ordine in v/c, risulta essere:

$$\nu' \simeq \nu\,\sqrt{(1+v/c)\,(1+v/c)} = \nu\,\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

La macchina agisce come una sorgente di onde di frequenza ν', per cui la frequenza che torna all'autovelox è:

$$\nu'' \simeq \nu'\,\left(1+\frac{v}{c}\right) = \nu\,\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 \simeq \nu\,\left(1+2\,\frac{v}{c}\right)$$

e, quindi:

$$\nu'' - \nu \simeq 2\,\frac{v}{c}\,\nu = \frac{2\times 100\times(1/3600)}{3\times 10^5}\,2\times 10^{10} \simeq 3.7\ \text{kHz}.$$

1.6.2 Galassie in allontanamento

Per lo studio delle galassie nell'ammasso della Vergine, gli astronomi utilizzano una linea spettrale dell'atomo di calcio. La lunghezza d'onda della luce proveniente dalla galassia risulta essere $\lambda = 398.4$ nm, mentre la lunghezza d'onda misurata in laboratorio risulta essere $\lambda_0 = 396.86$ nm. Basandosi su questa informazione, stimare la velocità con cui la galassia recede da noi.

Dalla formula dell'effetto Doppler, si ha:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\,\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_0^2}\,\frac{c-v}{c+v}$$

i.e.

$$\lambda_0^2\,(c+v) = \lambda^2\,(c-v)$$

da cui si ricava:

$$\beta = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} = \frac{(398.4)^2 - (396.85)^2}{(398.4)^2 + (396.85)^2} \simeq 3.90 \times 10^{-3}.$$

N.B. - Poiché $\lambda - \lambda_0 << \lambda$, è possibile scrivere:

$$\beta = \frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{\lambda^2 + \lambda_0^2} \simeq \frac{(\lambda - \lambda_0)\,(\lambda + \lambda_0)}{2\,\lambda_0^2} \simeq \frac{2\,\lambda_0\,(\lambda - \lambda_0)}{2\,\lambda_0^2}$$

i.e.

$$\beta \simeq \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{398.4 - 396.85}{396.85} \simeq 3.91 \times 10^{-3}.$$

1.6.3 Redshift

Una stella si allontana dalla Terra con velocità $v = 5 \times 10^{-3}\,c$. *Qual è lo spostamento in lunghezza d'onda per la riga* D_2 *del Sodio?*

La riga D_2 del Sodio a riposo ha una lunghezza d'onda $\lambda_0 = 5890$ Å. In termini di lunghezza d'onda, la formula dell'effetto Doppler è:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

i.e.

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

N.B. - $\beta \leq 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{(1 + \beta)/(1 - \beta)} > 1 \quad \rightarrow \quad \lambda > \lambda_0 \rightarrow$ redshift)

Quindi:

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - \lambda_0 = \lambda_0 \left[\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1\right]$$

i.e., poichè $\beta = 5 \times 10^{-3}$, al primo ordine in β, si ha:

$$\Delta\lambda \simeq \lambda_0 \left(\sqrt{(1 + \beta)\,(1 + \beta)} - 1\right) = \lambda_0\,\beta = 5890 \times 5 \times 10^{-3} \simeq 29.5 \text{ Å}$$

1.6.4 La torcia dell'astronauta

Un'astronauta all'interno di un razzo che si allontana con velocità $v_1 = 0.6\,c$ *da una stazione spaziale, invia verso quest'ultima un raggio luminoso con lunghezza d'onda* $\lambda = 500$ *nm. Qual è la frequenza ricevuta da un osservatore sulla stazione spaziale? Qual è la frequenza misurata da un passeggero di un secondo razzo che si muove in direzione opposta al primo con velocità* $v_2 = 0.8\,c$ *rispetto alla stazione?*

La frequenza osservata dalla stazione è:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \nu\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{1-\beta_1}{1+\beta_1}} \\ &= \frac{3\times 10^8}{5\times 10^{-7}}\sqrt{\frac{1-0.6}{1+0.6}} = 3\times 10^{14}\ \text{Hz} = 300\ \text{THz}.\end{aligned}$$

La velocità del primo razzo rispetto al secondo è:

$$u = \frac{v_1 - v_2}{1-\beta_1\,\beta_2} = c\,\frac{0.6-(-0.8)}{1-0.6\times(-0.8)} = c\,\frac{1.4}{1.48} \simeq 0.946\,c$$

per cui, la frequenza misurata dall'osservatore sul secondo razzo è:

$$\begin{aligned}\nu_2 &= \nu\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} = \frac{c}{\lambda}\sqrt{\frac{1-u/c}{1+u/c}} \\ &= \frac{3\times 10^8}{5\times 10^{-7}}\sqrt{1-0.9461+0.946} \simeq 10^{14}\ \text{Hz} = 100\ \text{THz}.\end{aligned}$$

1.7 Cinematica e Dinamica

1.7.1 Elettrone accelerato

Qual è la velocità di un elettrone accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = 100\ kV$*?*

Poiché l'energia cinetica acquisita dall'elettrone è uguale alla energia potenziale $V = e\,\Delta V$ a cui è soggetto, abbiamo

$$T = E - m\,c^2 = \gamma\,m\,c^2 - m\,c^2 = V$$

i.e.

$$m\,c^2\,(\gamma - 1) = V \qquad \Rightarrow \qquad m\,c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = e\,\Delta V$$

da cui, posto $r = m\,c^2/V$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{r} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \beta^2 = \frac{1}{(1+1/r)^2}$$

otteniamo:

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{(1+1/r)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \beta^2 = \frac{2/r + 1/r^2}{(1+1/r)^2}$$

i.e.

$$\beta = \frac{\sqrt{2/r + 1/r^2}}{1+1/r} = \frac{\sqrt{1+2\,r}}{1+r} \tag{1.16}$$

Poiché

$$V = e\,\Delta V = 10^5 \text{ eV} = 0.1 \text{ MeV} \qquad m\,c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

abbiamo $r = 0.511/0.1 = 5.11$, e, quindi, per la (1.16):

$$\beta = \frac{\sqrt{1 + 2 \times 5.11}}{1 + 5.11} \simeq 0.548.$$

1.7.2 Vita media del muone

La massa a riposo di un muone è circa 207 volte quella di un elettrone. La sua vita media a riposo è $\tau_0 = 2.2$ μs. A quale velocità e con quale energia cinetica viaggia il muone se nel laboratorio misuriamo una vita media $\tau = 7$ μs?

Dalla formula per la dilatazione temporale, sappiamo che:

$$\tau = \gamma\, \tau_0$$

i.e.

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.17}$$

da cui

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\tau_0}{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad 1-\beta^2 = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2$$

i.e.

$$\beta = \sqrt{1-\tau_0^2/\tau^2} = \sqrt{1-(2.2/7)^2} \simeq 0.949$$

Poiché l'energia cinetica è data da $T = m\,c^2\,(\gamma - 1)$, in base alla (1.17) abbiamo

$$T = m\,c^2\,\frac{\tau}{\tau_0} = 207 \times 0.511 \times \frac{7}{2.2} \simeq 336.6 \text{ MeV}.$$

1.7.3 Energia cinetica relativistica

A quale frazione della velocità della luce deve muoversi una particella affinché la sua energia cinetica risulti essere il doppio della sua energia di riposo (i.e. della massa)?

Deve essere:

$$T = m\,c^2\,(\gamma - 1) = 2\,m\,c^2 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = 3$$

i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad 1-\beta^2 = \frac{1}{9}$$

da cui:

$$\beta = \sqrt{1-1/9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \simeq 0.943$$

1.7.4 Energia di soglia - 1

Calcolare l'energia di soglia per la reazione: $p + p \to p + p + p + \bar{p}$.

Riferimento del CM: dal momento che l'impulso totale dello stato iniziale è nullo, l'energia di soglia altro non è che la somma delle energie di massa delle particelle finali[5]

$$E_s = 3\,m_p + m_{\bar{p}}$$

ovvero, poiché $m_p = m_{\bar{p}}$:

$$E_s = 4\,m_p = 4 \times 938.27 = 3\,753.08 \text{ MeV} \simeq 3.75 \text{ GeV}.$$

Questo significa che in un collisore protone-protone, quale LHC, la reazione può avvenire solo se l'energia di ciascun faccio di protoni è maggiore di $E_s/2 = 1\,876.54$ MeV, i.e., una energia cinetica pari a:

$$T_p = E_s - m_p = 1\,876.54 - 938.27 = 938.27 \text{ MeV}$$

i.e., pari alla massa del protone, com'era logico aspettarsi. In termini di massa, infatti, lo stato finale differisce da quello iniziale di $2\,m_p$, e questo surplus di massa deve essere fornito dall'energia cinetica complessiva dei fasci iniziali, che, essendo composti da particelle identiche, viene equamente divisa tra ciascuno di essi.

Riferimento del LAB: l'energia di soglia è data (cfr. slide 116):

$$E_s = \frac{(\sum m_{\text{fin.}})^2 - \sum m^2_{\text{iniz.}}}{2\,m_2} = \frac{(4\,m_p)^2 - 2\,m_p^2}{2\,m_p} = 7\,m_p$$

$$= 7 \times 938.27 = 6\,567.89 \text{ MeV} \simeq 6.57 \text{ GeV}.$$

1.7.5 Energia di soglia - 2

Calcolare l'energia di soglia nel laboratorio per la reazione: $\gamma + p \to n + \pi^+$.

Dalla formula per l'energia di soglia (cfr. Esercizio 1.7.4), nel caso della reazione in oggetto, si ha ($m_\gamma = 0$):

$$E_s = \frac{(m_n + m_{\pi^+})^2 - m_p^2}{2\,m_p} = \frac{(939.57 + 139.57)^2 - (938.27)^2}{2 \times 938.27} \simeq 151.44 \text{ MeV}.$$

[5] In questa sezione, eccetto in alcuni casi, esplicitamente indicati, useremo l'unità naturale $c = 1$

1.7.6 Energia di soglia - 3

Calcolare l'energia di soglia nel laboratorio per la reazione: $\gamma + e^- \to e^- + e^- + e^+$.

Dalla formula per l'energia di soglia (cfr. Esercizio 1.7.4), nel caso della reazione in oggetto, si ha ($m_{e^-} = m_{e^+} = m$):

$$E_s = \frac{(3\,m)^2 - m^2}{2\,m} = 4\,m = 4 \times 0.511 = 2.04 \text{ MeV}.$$

1.7.7 Il decadimento $\pi^0 \to 2\,\gamma$

Consideriamo il decadimento del π^0 *in due fotoni, i.e., il processo*

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma.$$

Determinare le energie dei fotoni prodotti in funzione della velocità β *del pione e dei loro angoli di emissione* θ_1 *e* θ_2*.*

a) Riferimento di quiete del pione: indicate con $\omega^*_{1,2}$ le energie dei due fotoni finali, dalla formula generale per l'energia dei prodotti finali nel decadimento $1 \to 2 + 3$ (cfr. slide 122)

$$E^*_{2,3} = \frac{m_1^2 \pm m_2^2 \mp m_3^2}{2\,m_1}$$

specificata alla reazione in oggetto, otteniamo:

$$\omega^*_{\gamma_1} = \omega^*_{\gamma_2} = \frac{m^2_{\pi^0}}{2\,m_{\pi^0}} = \frac{m_{\pi^0}}{2}$$

Per quanto riguarda gli angoli, ciò che risulta fissato è l'angolo tra i due fotoni. Questo, infatti, dal momento che il riferimento di quiete del pione è il CM del sistema dei due fotoni (identici) finali, risulta essere π, di modo che l'impulso totale risulta uguale a zero.

a) Riferimento del laboratorio: indicata con β la velocità del pione, dalla formula generale per il coseno dell'angolo di emissione delle particelle finali nel decadimento $1 \to 2 + 3$ (cfr. slide 124)

$$\cos\theta = \frac{\gamma\,E - E^*}{\gamma\,\beta\,|\vec{p}|},$$

specificata nel caso in oggetto, si ottiene ($i = 1, 2$):

$$\cos\theta_i = \frac{\gamma\,\omega_i - \omega_i^*}{\gamma\,\beta\,\omega_i} = \frac{\gamma\,\omega_i - (m_{\pi^0}/2)}{\gamma\,\beta\,\omega_i} = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{m_{\pi^0}}{2\,\gamma\,\omega_i}\right)$$

Per le energie dei fotoni finali, applicando la trasformazione di Lorentz per l'energia:

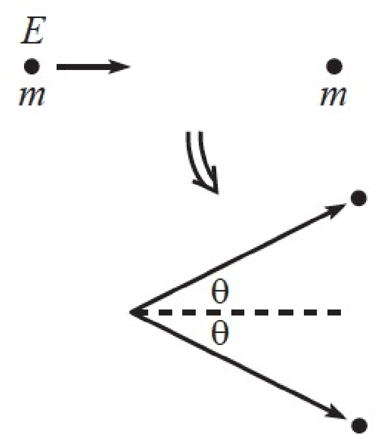
$$E = \gamma\,(E^* + \beta\,|\,\vec{p}^*|\,\cos\theta^*) = \gamma\,\omega_i^*\,(1 + \beta\,\cos\theta_i^*)$$

nel nostro caso ($E = |\,\vec{p}|$ per i fotoni), si ottiene ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \omega_i &= \gamma\,(\omega_i^* + \beta\,\omega_i^*\,\cos\theta_i^*) = \gamma\,\omega_i^*\,(1 + \beta\,\cos\theta_i^*) \\ &= \gamma\,\frac{m_{\pi^0}}{2}\,(1 + \beta\,\cos\theta_i^*). \end{aligned}$$

1.7.8 Urto elastico

Una particella di massa m ed energia E collide in modo elastico[6] *con una particella identica inizialmente a riposo, in modo tale che entrambe vengono diffuse a un angolo θ rispetto alla direzione di volo della particella (vedi figura). Determinare l'espressione di θ in termini di E e m. Qual è il limite*



[6] Una collisione elastica in fisica non-relativistica è definita come una in cui non viene generato calore. In relatività, il calore si manifesta come una massa, per cui una collisione elastica è definita come una in cui nessuna delle masse partecipanti cambia.

relativistico e non-relativistico di θ?

I 4-impulsi prima della collisione sono:

$$p_1^\mu = (E, p, 0, 0) \qquad\qquad p_2^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

dove

$$p = \sqrt{E^2 - m^2}. \tag{1.18}$$

Dopo la collisione, i 4-impulsi sono:

$$p_1'^\mu = (E', p' \cos\theta, p' \sin\theta, 0) \qquad\qquad p_2'^\mu = (E', p' \cos\theta, -p' \sin\theta, 0)$$

dove $p' = \sqrt{E'^2 - m^2}$.

N.B. - Per la conservazione dell'impulso, risulta $\vec{p}_1' = \vec{p}_2' = \vec{p}'$, e, quindi, poiché le particelle sono identiche e non cambiano la loro massa nella collisione, $E_1' = E_2' = E'$.

Leggi di conservazione:

- Energia $\quad\rightarrow\quad E + m = 2\,E' \quad\Rightarrow\quad E' = \dfrac{E+m}{2}$;
- Componente x dell'impulso $\quad\rightarrow\quad p = 2\,p' \cos\theta \quad\Rightarrow\quad p' \cos\theta = \dfrac{p}{2}$.

Per cui:

$$p_1'^\mu = \left(\frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, \frac{p}{2}\tan\theta, 0\right) \qquad\qquad p_2'^\mu = \left(\frac{E+m}{2}, \frac{p}{2}, -\frac{p}{2}\tan\theta, 0\right)$$

$$\mathsf{p}_1'^2 = m^2 \qquad\Rightarrow\qquad \left(\frac{E+m}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \tan^2\theta = m^2$$

i.e.

$$4\,m^2 = E^2 + 2\,m\,E + m^2 - p^2\,(1 + \tan^2\theta)$$

$$3\,m^2 = E^2 + 2\,m\,E - \frac{p^2}{\cos^2\theta}$$

i.e., tenendo conto della (1.18):

$$3\,m^2 = E^2 + 2\,m\,E - \frac{E^2 - m^2}{\cos^2\theta}$$

da cui si ottiene:

$$\cos^2\theta = \frac{E^2 - m^2}{E^2 + 2\,m\,E - 3\,m^2} = \frac{(E-m)\,(E+m)}{(E-m)\,(E+3\,m)} = \frac{E+m}{E+3\,m}$$

Nell'ipotesi $\theta < \pi/2$, i.e., $\cos\theta > 0$, si ha:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{E+m}{E+3\,m}}.$$

Per quanto riguarda i limiti cinematici richiesti, abbiamo:

- relativistico: $E >> m \qquad \rightarrow \qquad \cos\theta \simeq 1$
  i.e., entrambe le particelle diffondono quasi nella direzione in avanti rispetto alla direzione di volo iniziale della particella incidente;

- non-relativistico: $E \simeq m \qquad \rightarrow \qquad \cos^2\theta \simeq 1/2$
  i.e., $\theta \simeq \pi/4$: le particelle diffondono con un angolo di circa $\pi/2$ tra loro (cosa che sa bene chiunque giochi a biliardo).

1.7.9 Decadimento delle particelle - 1

Una particella di massa M ed energia E decade in due particelle identiche. Nel riferimento del laboratorio, una di esse è emessa a un angolo di $\pi/2$, come mostrato in Fig 1.22. Determinare le energie delle particelle prodotte.

Illustriamo due diversi modi di rispondere al quesito.

Soluzione 1 - Prima del decadimento, il 4-impulso è:

$$p^\mu = (E, p, 0, 0) \qquad\qquad p = \sqrt{E^2 - m^2}$$

Indichiamo con m il comune valore della massa delle particelle prodotte e con θ l'angolo formato dalla direzione di volo della seconda particella con l'asse x. I 4-impulsi dopo il decadimento sono (vedi Fig. 1.22):

$$p_1^\mu = (E_1, 0, p_1, 0) \qquad\qquad p_2^\mu = (E_2, p_2\,\cos\theta, -p_2\,\sin\theta, 0).$$

Leggi di conservazione:

- della componente x dell'impulso:

  $$p_2\,\cos\theta = p$$

  che implica:

  $$p_2\,\sin\theta = p\,\tan\theta \tag{1.19}$$

  Poiché la componente y dell'impulso iniziale è nulla, risulta:

  $$p_1 - p_2\,\sin\theta = 0$$

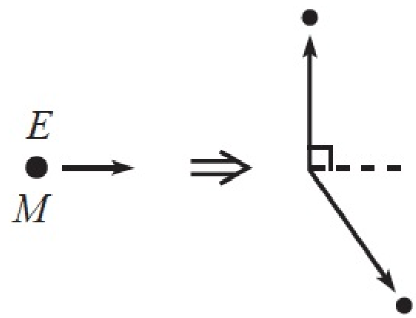


Figura 1.22:

i.e., per la (1.19):

$$p_1 = p \tan\theta.$$

Quindi, i 4-impulsi finali sono:

$$p_1 = (E_1, 0, p \tan\theta, 0) \qquad\qquad p_2 = (E_2, p, -p \tan\theta, 0).$$

- dell'energia:

$$E = E_1 + E_2$$

i.e.

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\vec{p}_1^{\,2} + m^2} + \sqrt{\vec{p}_2^{\,2} + m^2} \\ &= \sqrt{p^2 \tan^2\theta + m^2} + \sqrt{p^2 + p^2 \tan^2\theta + m^2} \\ &= \sqrt{p^2 \tan^2\theta + m^2} + \sqrt{p^2 (1 + \tan^2\theta) + m^2} \end{aligned}$$

Da cui:

$$E - \sqrt{p^2 \tan^2\theta + m^2} = \sqrt{p^2 (1 + \tan^2\theta) + m^2}$$

i.e., ricordando l'espressione per l'energia E_1

$$E^2 + p^2 \tan^2\theta + m^2 - 2\,E\,E_1 = p^2 (1 + \tan^2\theta) + m^2$$

da cui

$$E^2 - 2\,E\,E_1 = p^2$$

i.e.

$$E_1 = \frac{E^2 - p^2}{2\,E} = \frac{M^2}{2\,E}.$$

e, quindi:

$$E_2 = E - E_1 = E - \frac{M^2}{2\,E} = \frac{2\,E^2 - M^2}{2\,E}.$$

Soluzione 2 - Conservazione del 4-impulso:

$$p^\mu = (p_1 + p_2)^\mu \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{p}_2^2 = (\mathsf{p} - \mathsf{p}_1)^2$$

i.e.

$$\mathsf{p}^2 - 2\,\mathsf{p}\cdot\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_1^2 = \mathsf{p}_2^2$$

e dal momento che $\mathsf{p}_1^2 = \mathsf{p}_2^2 = m^2$ e $\mathsf{p} = M^2$, otteniamo:

$$M^2 = 2\,\mathsf{p}\cdot\mathsf{p}_1$$

i.e.

$$2\,E\,E_1 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{p}_1 = M^2$$

da cui, poiché $\vec{p}\cdot\vec{p}_1 = 0$, si ottiene:

$$2\,E\,E_1 = M^2 \qquad \Rightarrow \qquad E_1 = \frac{M^2}{2\,E}$$

(visto quanto è più semplice usando l'algebra dei 4-vettori?)

1.7.10 Collisione di fotoni - 1

Due fotoni, ciascuno di energia E, collidono ad un angolo θ e creano un particella di massa M. Quanto vale M?

Ricordando che per i fotoni risulta $\omega = k$, i 4-impulsi dei fotoni sono:

$$k_1^\mu = (\omega, \omega, 0, 0) \qquad\qquad k_2^\mu = (\omega, \omega\, cos\theta, \omega\,\sin\theta, 0).$$

Il 4-impulso della particella finale:

$$p^\mu = (k_1 + k_2)^\mu = (2\,\omega, \omega\,(1 + \cos\theta), \omega\,\sin\theta, 0)$$

per cui:

$$\begin{aligned} M^2 = \mathsf{p}^2 &= 4\,\omega^2 - \omega^2\,(1+\cos\theta)^2 - \omega^2\,\sin^2\theta \\ &= \omega^2\,(4 - 1 - 2\,\cos\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \omega^2\,(2 - 2\,\cos\theta) = 2\,\omega^2\,(1-\cos\theta) = 4\,\omega^2\,\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

In definitiva:

$$M = 2\,\omega\,\sin\frac{\theta}{2}.$$

N.B. Casi particolari:

- $\theta = 0 \qquad \to \qquad M = 0$
  non si crea alcuna massa: tutta l'energia finale è cinetica (in realtà, in questo caso i due fotoni non collidono);
- $\theta = \pi \qquad \to \qquad M = 2\,\omega$
  tutta l'energia dei fotoni iniziali è convertita in massa: nessuna energia cinetica rimane nello stato finale.

1.7.11 Particelle legate

Una massa M in moto con velocità V collide con una massa m, inizialmente a riposo, e rimane attaccata ad essa. Qual é la massa dell'oggetto risultante?

Nel riferimento del laboratorio, l'energia dell'oggetto risultante è:

$$E = \gamma\,M + m$$

con un impulso pari a:

$$P = \gamma\,M\,V,$$

per cui, la massa dell'oggetto risultante è:

$$\begin{aligned} M' = \sqrt{E^2 - P^2} &= \sqrt{(\gamma\,M + m)^2 - \gamma^2\,M^2\,V^2} \\ &= \sqrt{\gamma^2\,M^2 + 2\,\gamma\,M\,m + m^2 - \gamma^2\,M^2\,V^2} \\ &= \sqrt{\gamma^2\,M^2\,(1 - V^2) + 2\,\gamma\,M\,m + m^2} \end{aligned}$$

i.e.

$$M' = \sqrt{M^2 + 2\,\gamma\,M\,m + m^2}.$$

N. B. - Nell'ipotesi $M >> m$, si ha:

$$\begin{aligned} M' &\simeq \sqrt{M^2 + 2\,\gamma\,M\,m} = M\,\sqrt{1 + 2\,\gamma\,\frac{m}{M}} \\ &\simeq M\left(1 + \gamma\,\frac{m}{M}\right) = M + \gamma\,m \end{aligned}$$

i.e., l'aumento di massa è γ volte la massa dell'oggetto fermo. Questo aumento è maggiore di quello non-relativistico (m) in quanto nella collisione è generato del calore che si manifesta come massa nell'oggetto finale.
L'aumento $\gamma\, m$ è chiaro se lavoriamo nel riferimento dove M è inizialmente in quiete. In questo riferimento, la massa m si muove con energia $\gamma\, m$ e, quindi, tutta questa energia si manifesta come massa dell'oggetto finale. Ovvero, essenzialmente niente di essa si manifesta come energia cinetica dell'oggetto finale. Questo risultato, i.e., che l'energia cinetica è trascurabile, è generale quando un piccolo oggetto colpisce un oggetto grande in quiete, e segue dal fatto che la velocità v dell'oggetto grande è proporzionale a m/M (se la situazione è relativistica c'è un fattore γ), per cui l'energia cinetica va come $M\,(m/M)^2 = m^2/M \simeq 0$. In altre parole, il piccolo valore di v "domina" su quello grande di M.

1.7.12 Decadimento delle particelle - 2

Una massa in quiete M_A decade in due masse, M_B e M_C. Quali sono le energie e gli impulsi di queste due masse?

Ovviamente, le particelle B e C hanno impulsi uguali e opposti, per cui:

$$E_B^2 - M_B^2 = E_C^2 - M_C^2 \tag{1.20}$$

Dalla conservazione dell'energia, inoltre:

$$M_A = E_B + E_C$$

che, sostituita nella (1.20), fornisce:

$$(M_A - E_C)^2 - M_B^2 = E_C^2 - M_C^2 \quad \Rightarrow \quad M_A^2 - 2\,M_A\,E_C - M_B^2 = -M_C^2$$

i.e.

$$E_C = \frac{M_A^2 - M_B^2 + M_C^2}{2\,M_A}$$

e, quindi:

$$E_B = E_A - E_C = M_A - \frac{M_A^2 - M_B^2 + M_C^2}{2\,M_A} = \frac{M_A^2 + M_B^2 - M_C^2}{2\,M_A}.$$

Dalla (1.20), si ottiene il comune valore del modulo dell'impulso delle 2 particelle:

$$
\begin{aligned}
p =& \sqrt{E_B^2 - M_B^2} = \sqrt{\frac{(M_A^2 + M_B^2 - M_C^2)^2}{4\,M_A^2} - M_B^2} \\
=& \frac{\sqrt{M_A^4 + M_B^4 + M_C^4 + 2\,M_A^2\,M_B^2 - 2\,M_A^2\,M_C^2 - 2\,M_B^2\,M_C^2 - 4\,M_A^2\,M_B^2}}{2\,M_A} \\
=& \frac{\sqrt{M_A^4 + M_B^4 + M_C^4 - 2\,M_A^2\,M_B^2 - 2\,M_A^2\,M_C^2 - 2\,M_B^2\,M_C^2}}{2\,M_A} \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

N.B. - Alcune osservazioni:

- Si può verificare che la quantità sotto radice nel numeratore della (1.21) può essere fattorizzata nel modo seguente:

  $(M_A + M_B + M_C)\,(M_A + M_B - M_C)\,(M_A - M_B + M_C)\,(M_A - M_B - M_C)$,

  da cui si vede che se $M_A = M_B + M_C$, allora $p = 0$: non rimane alcuna energia disponibile per far muovere B e C.

- La (1.21) appare simile alla formula di Erone per l'area di un triangolo di lati a, b e c:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{2\,a^2\,b^2 + 2\,a^2\,c^2 + 2\,b^2\,c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

1.7.13 Energia di soglia - 4

Una particella di massa m ed energia E collide con una particella identica inizialmente a riposo. Qual è l'energia di soglia per uno stato finale contenente N particelle di massa m?

I 4-impulsi iniziali sono:

$$p_1^\mu = (E, p, 0, 0) \qquad\qquad p_2^\mu = (m, 0, 0, 0)$$

dove $p = \sqrt{E^2 - m^2}$. Quindi, il 4-impulso totale delle particelle prodotte nello stato finale, nel riferimento del laboratorio è:

$$P^\mu = (E + m, p, 0, 0).$$

Poiché nel riferimento del CM, il 4-impulso totale è:

$$P^{\mathrm{CM}\,\mu} = (E^{\mathrm{CM}}, 0, 0, 0)$$

si ha:

$$\mathsf{P}^2 = (\mathsf{P}^{\mathrm{CM}})^2 \qquad \Rightarrow \qquad (E+m)^2 - p^2 = (E^{\mathrm{CM}})^2$$

i.e.

$$E^2 + 2\,m\,E + m^2 - (E^2 - m^2) = (E^{\mathrm{CM}})^2$$

i.e

$$2\,m\,E + 2\,m^2 = (E^{\mathrm{CM}})^2,$$

per cui:

$$E^{\mathrm{CM}} = \sqrt{2}\,m\,\sqrt{1+\frac{E}{m}}. \tag{1.22}$$

La soglia della reazione corrisponde al minimo di E^{CM}, che altro non è che la somma delle masse di tutte le particelle presenti nello stato finale, i.e., per la (1.22)

$$E^{\mathrm{CM}} = N\,m \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{E}{m}}$$

i.e.

$$N^2 = 2\left(1+\frac{E}{m}\right) \quad \Rightarrow \quad N^2\,m - 2\,m = 2\,E$$

da cui otteniamo:

$$E = \left(\frac{N^2}{2} - 1\right)\,m.$$

Dal momento che alla soglia non c'è moto relativo tra le particelle nel CM, non c'è moto relativo in nessun altro riferimento. Questo significa che a soglia, nel laboratorio, le N masse viaggiano insieme come un oggetto unico. La soglia E è più grande della energia $(N-1)\,m$ che avremmo potuto, ingenuamente, immaginare perché, nel riferimento del laboratorio, lo stato finale, per la conservazione dell'energia, deve contenere energia cinetica. Infine, nel caso di N molto grande, si ha: $E \propto N^2$.

1.7.14 Collisione di particelle

Una particella di massa M ed energia E collide con una particella di massa m in quiete, proseguendo il suo moto lungo la direzione iniziale. Calcolare l'energia finale della particella di massa M.

I 4-impulsi prima della collisione sono:

$$p_M^\mu = (E, p, 0, 0) \qquad\qquad p_m^\mu = (m, 0, 0, 0) \tag{1.23}$$

dove $p = \sqrt{E^2 - M^2}$. Dopo la collisione, il 4-impulso della particella di massa M è:

$$p'^{\mu}_M = (E', p', 0, 0) \tag{1.24}$$

dove $p' = \sqrt{E'^2 - M^2}$.

(N.B. - non abbiamo bisogno del 4-impulso finale della particella di massa m.)

Dalla conservazione del 4-impulso totale:

$$\mathsf{p}_M + \mathsf{p}_m = \mathsf{p}'_M + \mathsf{p}'_m$$

si ha:

$$\mathsf{p}'^2_m = (\mathsf{p}_M + \mathsf{p}_m - \mathsf{p}'_M)^2$$

i.e.

$$m^2 = M^2 + m^2 + M^2 + 2\,\mathsf{p}_M \cdot \mathsf{p}_m - 2\,\mathsf{p}_M \cdot \mathsf{p}'_M - 2\,\mathsf{p}_m \cdot \mathsf{p}'_M$$

i.e.

$$M^2 + \mathsf{p}_M \cdot \mathsf{p}_m - \mathsf{p}_M \cdot \mathsf{p}'_M - \mathsf{p}_m \cdot \mathsf{p}'_M = 0$$

In base alla (1.23) e (1.24), risulta:

$$\mathsf{p}_M \cdot \mathsf{p}'_M = E\,E' - p\,p' \qquad \mathsf{p}_M \cdot \mathsf{p}_m = E\,m \qquad \mathsf{p}_m \cdot \mathsf{p}'_M = m\,E'$$

per cui:

$$M^2 + E\,m - (E\,E' - p\,p') - E'\,m = 0$$
$$M^2 + (E - E')\,m - E\,E' + p\,p' = 0$$

i.e.

$$M^2 + (E - E')\,m - E\,E' = -\sqrt{E^2 - M^2}\,\sqrt{E'^2 - M^2}$$

i.e., elevando al quadrato ambo i membri:

$$\begin{aligned} M^4 + (E - E')^2\,m^2 + E^2\,E'^2 + 2\,m\,M^2\,(E - E') - 2\,M^2\,E\,E' \\ - 2\,m\,(E - E')\,E\,E' = (E^2 - M^2)\,(E'^2 - M^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^4 + (E - E')^2\,m^2 + E^2\,E'^2 + 2\,m\,M^2\,(E - E') - 2\,M^2\,E\,E' \\ -2\,m\,(E - E')\,E\,E' = E^2\,E'^2 - M^2\,E'^2 - M^2\,E^2 + M^4 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} M^2\,(E^2 + E'^2 - 2\,E\,E') + m^2\,(E - E')^2 \\ + 2\,m\,M^2\,(E - E') - 2\,m\,E\,E'\,(E - E') = 0 \end{aligned}$$

i.e.

$$(M^2+m^2)\,(E-E')^2+2\,m\,M^2\,(E-E')-2\,m\,E\,E'\,(E-E')=0$$

da cui, facilmente, si vede che una soluzione di tale equazione è $E'=E$, come deve essere perché questa uguaglianza, insieme a quella $p=p'$, soddisfa la conservazione di energia e impulso.
Dividendo per $E-E'$, si ha:

$$(M^2+m^2)\,(E-E')+2\,m\,M^2-2\,m\,E\,E'=0$$

i.e.

$$(M^2+m^2+2\,m\,E)\,E'=2\,m\,M^2+(M^2+m^2)\,E$$

da cui si ha:

$$E'=\frac{(M^2+m^2)\,E+2\,m\,M^2}{M^2+m^2+2\,m\,E}.$$

N.B. - Alcuni casi particolari:

- $E\simeq M$ (i.e., la particella iniziale ha poca energia cinetica)

  $$E'\simeq\frac{(M^2+m^2)\,M+2\,m\,M^2}{M^2+m^2+2\,m\,M}=M\,\frac{M^2+m^2+2\,m\,M}{(M+m)^2}=M$$

  i.e., anche dopo la collisione, M ha una energia cinetica trascurabile;

- $M=m$

  $$E'=\frac{2\,M^2\,E+2\,M^3}{2\,M^2+2\,M\,E}=\frac{E+M}{1+E/M}=M$$

  i.e., M si ferma e m si prende tutta l'energia che aveva M (pendolo di Newton);

- $m>>E,M$

  $$E'\simeq\frac{m^2\,E+2\,m\,M^2}{m^2}=E+\frac{2\,M^2}{m}\simeq E$$

  i.e., essenzialmente, la massa pesante, in questo caso m, non acquista alcuna energia;

- $M,E>>m$ e $M^2>>E\,m$

  $$E'\simeq\frac{M^2\,E}{M^2}=E$$

  i.e., essenzialmente, la massa m non svolge alcun ruolo: non esiste;

- $M, E >> m$ e $M^2 << E\,m$

$$E' \simeq \frac{M^2\,E}{2\,E\,m} = \frac{M^2}{2\,m} \tag{1.25}$$

  i.e., l'energia finale di M non dipende dalla sua energia iniziale E. Questo significa che non importa quanto veloce è l'oggetto grande che lanciate contro quello piccolo, purché di energia sufficiente, quello grande finirà per avere l'energia (1.25). E dal momento che stiamo assumendo $M^2 << E\,m$, questa energia è molto minore di E, e, quindi, la maggior parte della (grande) energia iniziale finirà assorbita da m.

- $E >> m >> M$

$$E' \simeq \frac{m^2\,E}{2\,E\,m} = \frac{m}{2}$$

  i.e., non importa quanto veloce viene lanciato un oggetto piccolo contro uno grande, purché di energia sufficiente, quello piccolo finirà per avere un'energia pari a metà della massa in quiete (situazione simile a uno dei casi limite della diffusione Compton).

Capitolo 2

Domande

Esiste un corpo perfettamente rigido?

No. Poiché l'informazione non può propagarsi più velocemente della luce, ci vuole un tempo finito perché gli atomi che compongono un oggetto possano comunicare tra loro. Se premiamo l'estremità di un'asta, l'altra non si muoverà immediatamente. Se lo facesse, vorrebbe dire che gli eventi "pressione" e "moto" sarebbero separati da un intervallo di tipo spazio, con il che esisterebbe un riferimento in cui l'evento "moto" avviene prima di quello "pressione", con evidente violazione della causalità. Dobbiamo concludere che la seconda estremità non può reagire istantaneamente alla pressione esercitata sulla prima.

Gli orologi in moto procedono più lentamente. Questo risultato ha qualcosa a che fare con il tempo che impiega la luce a viaggiare dall'orologio ai vostri occhi?

No. Quando parliamo del ritmo di un orologio in un dato riferimento, ci riferiamo a quanto effettivamente indica l'orologio in questo riferimento. Ci vuole sicuramente un certo tempo perché la luce dall'orologio giunga all'occhio dell'osservatore, ma è sottinteso che l'osservatore sottrae questo tempo dal computo. Allo stesso modo, altri effetti relativistici quali la contrazione della lunghezza e il carattere relativo della simultaneità, non hanno niente a che fare con il tempo che impiega la luce a raggiungere i vostri occhi.

Come rispondete a chi afferma che un'asta in moto non è realmente più corta, ma appare soltanto più corta?

L'asta è realmente più corta nel nostro riferimento. La contrazione della lunghezza non ha nulla a che fare con come appaiono le cose. Essa ha a che fare con dove le estremità dell'asta a si trovano a istanti simultanei nel vostro riferimento. (Questo, dopo tutto, è come si misura la lunghezza di un oggetto.) A un dato istante di tempo nel vostro riferimento, la distanza tra le estremità è, infattii, minore della lunghezza propria dell'asta.

Immaginate di illuminare con un fascio di luce uno specchio che si muove verso di voi. A quale velocità si muove il fascio riflesso?

A velocità c. La luce riflessa avrà una frequenza più alta a causa dell'effetto Doppler, ma la velocità sarà sempre c.

Siete all'interno di un'astronave in viaggio attraverso lo spazio. Esiste un modo di stabilire la vostra velocità senza guardare dall'oblò dell'astronave?

Ci sono due punti da precisare.
1) La domanda è priva di significato in quanto non esiste velocità assoluta. L'astronave non ha una velocità assoluta. L'astronave non ha una velocità; essa possiede soltanto una velocità relativa a qualcosa.
2) Anche se si chiedesse della velocità rispetto, ad esempio, a una nube stellare, la risposta sarebbe ancora negativa. La velocità uniforme non è misurabile dall'interno dell'astronave. L'accelerazione, invece, è misurabile (assumendo che non ci sia gravità nell'intorno a confondervi).

Riguardo a questo problema, è importante spendere due parole sulla cosiddetta anisotropia di dipolo del fondo cosmico a microonde (CMB), tramite la quale è stato possibile stabilire che la Terra (in realtà, il nostro Gruppo Locale) si muove rispetto al CMB con velocità pari a 640 km/s.
Questa osservazione non implica alcuna violazione del Principio di Relatività Galileiano (PRG). Infatti, in questo caso non compiamo alcun esperimento, ma stiamo soltanto "guardando fuori". Questa operazione consente di rendersi conto del proprio moto, anche rettilineo uniforme, rispetto a qualunque altro sistema di riferimento, ma non è un esperimento.
Se siamo all'interno di un aereo, guardando dal finestrino non abbiamo nessuna difficoltà a renderci conto di essere in moto. Ma non stiamo conducendo un esperimento. Questo lo facciamo quando, ad esempio, beviamo il caffè che ci viene servito dal personale dell'aereo. Se questo esperimento è fatto con gli oblò chiusi, non abbiamo alcun modo di sapere che siamo in moto, e con quale velocità: tutto va come se fossimo seduti sul divano di casa.
Nella formulazione del PRG occorre sempre tener presente che non è con-

sentita alcuna possibilità di "guardare fuori". (Galileo l'aveva ben presente e scriveva: "... rinserratevi ... sotto coperta ..."). Se ne abbiamo la possibilità, possiamo rivelare anche un nostro moto in qualche senso assoluto. Questo sarebbe in contrasto con il PRG se quest'ultimo affermasse, cosa che non fa, che è impossibile rivelare un moto assoluto. In realtà la formulazione corretta del PRG è: *esperimenti condotti nelle stesse condizioni in diversi riferimenti inerziali danno gli stessi risultati.*
Per meglio comprendere la differenza, consideriamo l'esperimento di Michelson e Morley. Lo spostamento delle frange d'interferenza va come $(v/c)^2$, dove v è la presunta velocità della Terra nel moto attraverso l'etere (circa 30 km/s). Il moto rispetto al CMB (nulla vieta di pensarlo come una sorta di etere) avviene con velocità di 640 km/s, per cui lo spostamento delle frange dovrebbe essere circa 400 volte più grande. Eppure, anche nelle versioni più recenti - in grado di evidenziare velocità rispetto all'etere di qualche m/s - dell'esperimento non si osserva nulla. Anche se cè un etere, non è sperimentando che possiamo metterlo in evidenza.

Due oggetti volano verso di voi: uno da est con velocità u; l'altro da ovest con velocità v. È corretto dire che la loro velocità relativa, come misurata da voi, è $u + v$? Oppure deve essere utilizzata la formula relativistica di addizione delle velocità? È possibile per la loro velocità relativa, come misurata da voi, eccedere c?

Sì, è lecito semplicemente sommare le due velocità per ottenere $u + v$. Non c'è alcuna necessità di usare la formula relativistica di addizione delle velocità perché entrambe le velocità sono riferite allo stesso osservatore. È perfettamente lecito per la velocità relativa essere più grande di c, ma non si può ottenere più di $2\,c$ (la velocità relativa di due fotoni che si muovono in verso contrario).
La formula relativistica di addizione delle velocità va utilizzata quando, ad esempio, viene assegnata la velocità della palla rispetto al treno e di questo rispetto al suolo, e si chiede di determinare la velocità della palla rispetto al suolo. In questo caso, le due velocità assegnate sono misurate rispetto a cose differenti, ovvero il treno e il suolo.

Antonio rincorre Bruno. Come misurate nel riferimento al suolo, essi hanno, rispettivamente, velocità $4\,c/5$ e $3\,c/5$. Se inizialmente essi sono distanti L (come misurata nel riferimento al suolo), quanto tempo impiegherà (come *misurata nel riferimento al suolo) Antonio ad acchiappare Bruno?*

Come misurata nel riferimento al suolo, la velocità relativa è

$$\frac{4\,c}{5} - \frac{3\,c}{5} = \frac{c}{5}.$$

Antonio deve recuperare lo svantaggio iniziale L e per far ciò impiegherà un tempo:

$$\frac{L}{c/5} = \frac{5\,L}{c}.$$

Non c'è alcun bisogno, in questo caso, di utilizzare formule relativistiche di addizione di velocità e contrazione di lunghezza: tutte le quantità indicate nel problema sono misurate rispetto allo stesso riferimento.

Due gemelli si allontanano l'uno dall'altro a velocità relativistica. Il risultato sulla dilatazione temporale afferma che ciascun gemello vede l'orologio dell'altro procedere più lentamente per cui ciascuno dice che l'altro invecchia meno. Come rispondere, quindi, alla domanda: qual è il gemello realmente più giovane?

È privo di senso chiedersi quale gemello sia più giovane, in quanto essi non sono nello stesso riferimento; essi usano differenti coordinate per misurare il tempo.

L'impulso di un oggetto di massa m e velocità v è $p = m\,\gamma\,v$. Un fotone ha massa nulla, quindi ha impulso nullo?

No. È vero che m è zero, ma γ è infinito in quanto $v = c$. Quindi, si ha un risultato indefinito. Un fotone, in realtà, ha impulso uguale a E/c.

Non è necessario postulare l'impossibilità di accelerare un oggetto alla velocità della luce. Essa segue dalla espressione relativistica dell'energia. Spiegare.

$E = m\,\gamma\,c^2$, per cui se $v = c$, $\gamma \to \infty$ e l'oggetto deve possedere una quantità infinita d'energia (a meno che $m = 0$, come per il fotone).

Capitolo 3

Complementi

3.1 Equazioni di Maxwell

La dinamica del campo e.m. è governata dalle equazioni di Maxwell. Nel vuoto, in assenza di sorgenti ($\rho = 0, \vec{j} = 0$):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \tag{3.2}$$

Eseguendo il rotore di ambo i membri della prima delle (3.2) (legge di Faraday-Neumann-Lenz), si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

da cui, tenendo conto della seconda delle (3.2) (legge di Ampère-Maxwell):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Poiché[1]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

tenendo conto della prima delle (3.1) (legge di Gauss), risulta:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

e, quindi:

$$\Box \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{3.3}$$

[1] Utilizziamo l'identità vettoriale: $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$

i.e., l'*equazione delle onde*[2]. In maniera analoga si dimostra che la stessa equazione è verificata dal vettore campo magnetico.

Le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galilei. È possibile dimostrare ciò in tre modi diversi:

1. A titolo di esempio, consideriamo la componente x dell'equazione di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t}, \tag{3.4}$$

e applichiamo una trasformazione Galileiana lungo l'asse x, ovvero:

$$x' = x - v\,t \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} &= \frac{\partial w'}{\partial w}\frac{\partial}{\partial w'} = \frac{\partial}{\partial w'} \qquad\qquad (w = x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -v\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} \tag{3.5}$$

per cui la (3.4) diviene:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\left(-v\frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\partial B_x}{\partial t'}\right)$$

i.e.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{v}{c}\frac{\partial B_x}{\partial x'}.$$

<u>Domanda</u>: È possibile che i campi si trasformino in modo tale che questa equazione possa riscriversi nella stessa forma della (3.4)? i.e., che risulti:

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B'_x}{\partial t'},$$

con $\vec{E}'$ e $\vec{B}'$ campi nel riferimento K'? La risposta è **no**: qualunque sia la trasformazione di B_x, non c'è modo di eliminare il termine fastidioso - quello proporzionale a v/c -, perché le equazioni di Maxwell non contengono alcuna relazione tra la derivata spaziale e quella temporale della componente di uno stesso campo.

[2] L'operatore $\Box = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ è detto *dalembertiano*.

2. Argomento di Einstein
   Consideriamo un'onda e.m. piana nello spazio 3-dimensionale[3]. Scegliamo l'orientazione degli assi del riferimento K in modo che in esso la direzione di propagazione dell'onda coincide con l'asse $+x$. Le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto sono:
   $$\vec{V} = \hat{V}\,\exp\{i\,(k\,x - \omega\,t)\} = \hat{V}\,\exp\{i\,k\,(x - c\,t)\} \qquad (V = E, B).$$
   Per un'osservatore in moto con velocità v lungo $+x$, i campi associati all'onda risultano essere:
   $$\vec{V} = \hat{V}\,\exp\{i\,k\,[x' - (c - v)\,t]\} \qquad (V = E, B),$$
   per cui, nel caso $v = c$ (Einstein "a cavallo dell'onda") scompare la dipendenza dalla variabile temporale, i.e., l'onda diviene *statica*. Questo tipo di onda non è ammessa come soluzione delle equazioni di Maxwell. La soluzione radiativa, infatti, prevede che le oscillazioni di uno dei campi siano sorgente dell'altro e un riferimento di quiete per l'onda e.m. non esiste.

3. Trasformazione Galileiana del dalembertiano
   Tenendo conto delle trasformazioni (3.5) degli operatori di derivazione, si ha:
   $$\frac{\partial^2}{\partial w^2} = \frac{\partial^2}{\partial w'^2} \qquad (w = x, y, z)$$
   $$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\,\frac{\partial}{\partial x'}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\,\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\,\frac{\partial}{\partial x'}\right)\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - v\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} - v\,\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} + v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\,v\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} + v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\end{aligned}$$
   da cui, quindi:
   $$\begin{aligned}\Box = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\,v\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} + v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\end{aligned}$$

[3] Ricordiamo che $n = 3$ è il numero minimo di dimensioni spaziale per cui un'onda di questo tipo è possibile.

i.e.

$$\Box = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial y'^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial z'^{\,2}} + 2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t'^{\,2}}$$

Da ciò risulta che l'equazione delle onde non è isotropa: una rotazione (ad esempio, nel piano $x - y$) non la lascia invariata. La direzione del moto nella trasformazione ha rotto la simmetria che rendeva tutte le direzione dello spazio uguali.

Sotto una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x (per semplicità, ci limitiamo al caso di una sola dimensione spaziale)

$$x' = \gamma\,(x - v\,t) \qquad\qquad t' = \gamma\,\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)$$

gli operatori di derivazione si trasformano, invece, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial t'} = \gamma\,\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t'} \\
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma\,\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\,v\,\frac{\partial}{\partial x'}
\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\gamma\,\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t'}\right)\left(\gamma\,\frac{\partial}{\partial x'} - \gamma\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t'}\right) \\
&= \gamma^2\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}} - \frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} - \frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} + \frac{v^2}{c^4}\,\frac{\partial^2}{\partial t'^{\,2}}\right) \\
&= \gamma^2\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}} - 2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} + \frac{v^2}{c^4}\,\frac{\partial^2}{\partial t'^{\,2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(\gamma\,\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\,v\,\frac{\partial}{\partial x'}\right)\left(\gamma\,\frac{\partial}{\partial t'} - \gamma\,v\,\frac{\partial}{\partial x'}\right) \\
&= \gamma^2\,\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^{\,2}} - v\,\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} - v\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} + v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}}\right) \\
&= \gamma^2\,\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^{\,2}} - 2\,v\,\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} + v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}}\right)
\end{aligned}$$

e, quindi:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\,\gamma^2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} + \gamma^2\,\frac{v^2}{c^4}\,\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\
&\quad - \frac{1}{c^2}\left(\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2\,\gamma^2\,v\,\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} + \gamma^2\,v^2\,\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right) \\
&= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2\,\gamma^2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial x'\,\partial t'} + 2\,\gamma^2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t'\,\partial x'} \\
&\quad + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)\frac{\partial^2}{\partial t'^2} \\
&= \gamma^2\,(1-\beta^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)
\end{aligned}
$$

Poiché $\gamma^2\,(1-\beta^2) = 1$, otteniamo:

$$\Box = \Box'$$

i.e., l'equazione delle onde è invariate per trasformazioni di Lorentz.

3.2 Invarianza dell'intervallo

In un riferimento K siano dati due eventi così definiti:

- Evento A: segnale luminoso emesso all'istante t_A da sorgente posta in (x_A, y_A, z_A);
- Evento B: segnale luminoso giunge all'istante t_B in (x_B, y_B, z_B).

L'intervallo tra i due eventi è:

$$\Delta s^2 = c^2\,(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2.$$

L'equazione del fronte d'onda del segnale luminoso è:

$$(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = c^2\,(t_B - t_A)^2$$

da cui: $\Delta s^2 = 0$.

Nel riferimento K$'$, l'osservatore registra gli eventi:

$$A' \equiv (x'_A, y'_A, z'_A) \qquad\qquad B' \equiv (x'_B, y'_B, z'_B)$$

per cui:

$$\Delta s'^2 = c^2\,(t'_B - t'_A)^2 - (x'_B - x'_A)^2 - (y'_B - y'_A)^2 - (z'_B - z'_A)^2$$

In base al postulato della costanza della velocità della luce, l'equazione del fronte d'onda del segnale è, quindi:

$$(x'_B - x'_A)^2 - (y'_B - y'_A)^2 - (z'_B - z'_A)^2 = c^2\,(t'_B - t'_A)^2$$

per cui: $\Delta s'^2 = 0$. Ovvero, se l'intervallo è nullo in un riferimento inerziale, lo è in tutti gli altri riferimenti inerziali:

$$\Delta s^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta s'^2 = 0. \tag{3.6}$$

Come procede la dimostrazione nel caso $\Delta s^2 \neq 0$? Imponiamo le seguenti condizioni:

- la trasformazione $\mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ deve essere lineare, per cui, tenendo conto della (3.6), deve risultare:
$$\Delta s^2 = \lambda\,\Delta s'^2$$
- uniformità dello spazio e del tempo (i.e., tutti i punti dello spazio-tempo sono uguali) $\to \lambda$ dipende solo dalla velocità relativa $\vec{v}$ dei due riferimenti;
- isotropia dello spazio (i.e., tutti le direzioni spaziali sono uguali) $\to \lambda$ dipende solo da $v = |\vec{v}|$ e ne è una funzione pari, i.e.:
$$\Delta s^2 = \lambda(v)\,\Delta s'^2 \qquad\qquad \lambda(v) = \lambda(-v) \tag{3.7}$$

Per il Principio di Relatività, K e K′ sono equivalenti, per cui la trasformazione $\mathrm{K} \to \mathrm{K}'$ deve essere come quella inversa $\mathrm{K}' \to \mathrm{K}$, soltanto con il segno di v cambiato, i.e.:

$$\Delta s'^2 = \lambda(-v)\,\Delta s^2$$

Per cui, in base alla (3.7), risulta:

$$\lambda(v) = \frac{1}{\lambda(-v)} = \frac{1}{\lambda(v)}$$

i.e.

$$\lambda(v)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda(v) = \pm 1$$

Questo risultato vale qualunque sia v. Poichè nel caso $v = 0$ deve essere $\Delta s^2 = \Delta s'^2$, la soluzione $\lambda = -1$ va scartata, e, quindi:

$$\lambda(v) = 1$$

da cui risulta: $\Delta s'^2 = \Delta s^2$, i.e., l'intervallo è invariante.

3.3 Trasformazioni di Lorentz

Da ciò che abbiamo appreso dallo studio degli effetti fondamentali previsti dalla teoria della Relatività Speciale, due sono le condizioni da imporre per determinare la forma analitica delle trasformazioni relativistiche tra riferimenti inerziali:

- il moto rettilineo uniforme in K deve mantenersi tale in K′, il che implica che la trasformazione deve essere *lineare*;
- le variabili spaziale e temporale devono risultare mescolate.

Adottiamo per le trasformazioni una forma che generalizza quella delle trasformazioni Galileiane:

$$\begin{aligned} x' &= a\,(x - v\,t) \\ t' &= b\,(t - u\,x) \end{aligned}$$

con i parametri a, b e u da determinare[4]. Inserendo queste espressioni nella condizione d'invarianza dell'intervallo, otteniamo:

$$\begin{aligned} (c\,t)^2 - x^2 = c^2\,t'^2 - x'^2 &= c^2\,b^2\,(t - u\,x)^2 - a^2\,(x - v\,t)^2 \\ &= c^2\,b^2\,(t^2 - 2\,u\,t\,x + u^2\,x^2) - a^2\,(x^2 - 2\,v\,t\,x + v^2\,t^2) \\ &= (c^2\,b^2 - a^2\,v^2)\,t^2 - (a^2 - c^2\,b^2\,u^2)\,x^2 + 2\,(a^2\,v - c^2\,b^2\,u)\,t\,x \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei monomi dello stesso tipo nei due membri di tale relazione, si ha:

$$\begin{aligned} t^2 &\to \qquad c^2\,b^2 - a^2\,v^2 = c^2 \qquad (1) \\ x^2 &\to \qquad a^2 - c^2\,b^2\,u^2 = 1 \qquad (2) \\ t\,x &\to \qquad a^2\,v - c^2\,b^2\,u = 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Combinando opportunamente queste tre equazioni, otteniamo:

i) (2) $- u \times$ (3):

$$a^2 - c^2\,b^2\,u^2 - a^2\,v\,u - c^2\,b^2\,u^2 = 1$$

i.e.

$$a^2\,(1 - u\,v) = 1$$

per cui:

$$a^2 = \frac{1}{1 - u\,v} \tag{3.8}$$

[4]Notare che si riottengono le trasformazioni Galileiane per $a = b = 1$ e $u = 0$.

ii) $(2) + u^2 \times (1)$:

$$a^2 - c^2\, b^2\, u^2 + c^2\, b^2\, u^2 - a^2\, v^2\, u^2 = 1 + u^2\, c^2$$

i.e.

$$a^2\,(1 - v^2\, u^2) = 1 + u^2\, c^2$$

i.e., tenendo conto della (3.8)

$$1 + u^2\, c^2 = \frac{1 - v^2\, u^2}{1 - u\, v} = 1 + u\, v \qquad \Rightarrow \qquad u = \frac{v}{c^2}$$

Inserendo tale relazione:

- nella (3.8), otteniamo

$$a^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} \qquad \Rightarrow \qquad a = \gamma$$

- nella (3), otteniamo:

$$a^2\, v = c^2\, b^2 \frac{v}{c^2} = b^2\, v \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = b^2$$

i.e.,

$$b = \gamma$$

Per cui, in definitiva:

$$x' = \gamma\,(x - v\,t) \qquad\qquad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right) \tag{3.9}$$

Passiamo ora a considerare il caso più generale di riferimenti K e K′ con assi paralleli, ma in moto relativo lungo una direzione arbitraria individuata da $\vec{v}$.
Riscriviamo il vettore posizione come somma delle sue componenti parallela e perpendicolare a $\vec{v}$:

$$\vec{x} = \vec{x}_\parallel + \vec{x}_\perp$$

Le trasformazioni di Lorentz di questi vettori sono:

$$\vec{x}'_\parallel = \gamma\,(\vec{x}_\parallel - \vec{v}\,t) \qquad\qquad \vec{x}'_\perp = \vec{x}_\perp,$$

per cui:

$$\begin{aligned}
\vec{x}' &= \vec{x}'_{\parallel} + \vec{x}'_{\perp} \\
&= \gamma\,(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}\,t) + \vec{x}_{\perp} = (\gamma - 1)\,\vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\parallel} - \gamma\,\vec{v}\,t + \vec{x}_{\perp} \\
&= (\gamma - 1)\,\vec{x}_{\parallel} + \vec{x} - \gamma\,\vec{v}\,t
\end{aligned}$$

Poiché, per definizione, risulta:

$$\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \hat{v})\,\hat{v} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v}\,\frac{\vec{v}}{v}$$

possiamo scrivere:

$$\vec{x}' = (\gamma - 1)\,(\vec{x} \cdot \vec{v})\,\frac{\vec{v}}{v^2} + \vec{x} - \gamma\,\vec{v}\,t$$

i.e.

$$\vec{x}' = \vec{x} + \left[(\gamma - 1)\,\frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2} - \gamma\,t\right]\,\vec{v}$$

La trasformazione della variabile temporale, invece, è ottenuta sostituendo nella (3.9) $v\,x$ con $\vec{v} \cdot \vec{x}$, per cui:

$$t' = \gamma\,\left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2}\right)$$

3.4 Esperimento Hafele-Keating

Eseguiamo il calcolo esplicito della differenza percentuale tra il tempo proprio $\Delta\tau_1$ dell'orologio 1, in quiete sulla superficie della Terra, e quello $\Delta\tau_2$ dell'orologio 2, a bordo dell'aereo. Per semplicità, supporremo che l'orologio 1 sia posizionato all'equatore e quello 2 viaggi su un'orbita equatoriale.

Indicati con v la velocità dell'aereo, con $\Omega_\oplus$ e $R_\oplus$, rispettivamente, la velocità angolare e il raggio della Terra, e con Δt il tempo misurato da un osservatore inerziale esterno posto al centro della Terra, abbiamo ($v_\oplus = \Omega_\oplus R_\oplus$):

$$\Delta\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_\oplus^2}{c^2}}\,\Delta t \qquad\qquad \Delta\tau_2 = \sqrt{1 - \frac{(v_\oplus \pm v)^2}{c^2}}\,\Delta t$$

dove nella espressione del tempo proprio dell'orologio 2, il segno + si riferisce al caso in cui l'aereo vola verso EST, quello − nel caso che voli verso OVEST. Eliminando Δt, si ottiene:

$$\Delta\tau_2 = \frac{\sqrt{1 - \dfrac{(v_\oplus \pm v)^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_\oplus^2}{c^2}}}\,\Delta\tau_1$$

Poiché $v_\oplus, v << c$, sviluppando secondo Taylor entrambe le radici quadrate, possiamo scrivere:

$$\Delta\tau_2 \simeq \frac{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{(v_\oplus \pm v)^2}{c^2}}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{v_\oplus^2}{c^2}}\,\Delta\tau_1$$

i.e., sviluppando ulteriormente il denominatore:

$$\Delta\tau_2 \simeq \left[1 - \frac{1}{2}\frac{(v_\oplus \pm v)^2}{c^2}\right]\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v_\oplus^2}{c^2}\right)\Delta\tau_1$$

quindi:

$$\begin{aligned}
\Delta\tau_2 &\simeq \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_\oplus^2 + v^2 \pm 2\,v_\oplus\,v}{c^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v_\oplus^2}{c^2}\right)\Delta\tau_1 \\
&\simeq \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v_\oplus^2}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{v_\oplus^2}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \mp \frac{v_\oplus\,v}{c^2}\right)\Delta\tau_1 \\
&\simeq \left(1 - \frac{v^2 \pm 2\,v_\oplus\,v}{2\,c^2}\right)\Delta\tau_1
\end{aligned}$$

da cui, si ottiene:

$$\delta = \frac{\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1}{\Delta\tau_1} \simeq -\frac{v^2 \pm 2\,v_\oplus\,v}{2\,c^2} \tag{3.10}$$

Poiché

$$\Omega_\oplus = 7.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad\qquad R_\oplus = 6.37 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

risulta $v_\oplus \simeq 465.01$ m/s, che inserita nella (3.10), insieme al valore $v = 300$ m/s, fornisce:

$$\begin{aligned}
\delta &\simeq -\frac{(300)^2 \pm 2 \times 465.01 \times 300}{2 \times (3 \times 10^8)^2} \\
&\simeq -\frac{9 \times 10^4 \pm 2 \times 465.01 \times 3 \times 10^4}{18 \times 10^{16}} \\
&\simeq -\frac{9 \pm 27.9}{18}\,10^{-12}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\delta = \begin{cases} -2.05 \times 10^{-12} & \text{verso EST} \\ +1.05 \times 10^{-12} & \text{verso OVEST} \end{cases}$$

3.5 Impulso relativistico

Affinché la legge di conservazione dell'impulso possa valere in tutti i sistemi di riferimento inerziali, occorre modificare la relazione tra $\vec{p}$ e $\vec{v}$. Per essa, ipotizziamo la forma seguente[5]:

$$\vec{p} = m\, g(v^2/c^2)\, \vec{v}, \tag{3.11}$$

dove, per motivi dimensionali e di simmetria, la funzione g dipende dalla velocità tramite la combinazione β^2. (Per semplicità di notazione, nel seguito indicheremo con v l'argomento della funzione g).

N.B. - Nel limite $c \to \infty$, la (3.11) deve ridursi all'espressione Newtoniana $\vec{p} = m\, \vec{v}$, per cui deve essere: $g(0) = 1$.

Consideriamo ora l'urto tra due particelle identiche di massa m. Analizzeremo il processo in tre riferimenti diversi: il riferimento del CM, K^*, e i riferimenti di quiete delle due particelle, K_1 e K_2.

- Riferimento K^* – Per definizione di centro di massa, abbiamo:

  $$\vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} = 0$$

  i.e., essendo $m_1 = m_2 = m$:

  $$g(v_1^*)\, \vec{v}_1^{\,*} = g(v_2^*)\, \vec{v}_2^{\,*}$$

  il che comporta $v_1^* = v_2^*$ e, quindi:

  $$\vec{v}_1^{\,*} = -\vec{v}_2^{\,*}$$

  i.e., per la conservazione dell'impulso, anche le velocità finali sono uguali e opposte. La situazione, quindi, è quella rappresentata in Fig. 3.1

- Riferimento K_2 – Questo riferimento è ottenuto da quello K^* tramite un boost di velocità $-\vec{v}_2^{\,*}$. Indichiamo con $\vec{v}$ la velocità della particella 1 prima dell'urto, e con $\vec{w}$ e $\vec{u}$, rispettivamente, le velocità di 1 e 2 dopo l'urto (Fig. 3.2).

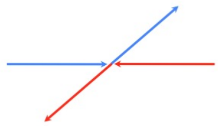


Figura 3.1: Urto elastico tra particelle identiche nel riferimento del CM.

Figura 3.2: Urto elastico di Fig. 3.1 visto nel riferimento di riposo della particella 2, prima (sinistra) e dopo (destra) l'urto.

- <u>Riferimento K_1</u> – Poiché il boost che fa passare da K^* a tale riferimento ha velocità $\vec{v}_1^* = -\vec{v}_2^*$, per ragioni di simmetria la velocità della particella 2 in K_1 sarà $-\vec{v}$, mentre quelle delle due particelle dopo l'urto saranno, rispettivamente, $-\vec{w}$ e $-\vec{u}$ (vedi Fig. 3.3).

Figura 3.3: Urto elastico di Fig. 3.1 visto nel riferimento di riposo della particella 1, prima (sinistra) e dopo (destra) l'urto.

Nel riferimento K_1, la legge di conservazione dell'impulso totale per la componente y assume la forma:

$$0 = -m\, g(u)\, u_y - m\, g(w)\, w_y \tag{3.12}$$

[5]Il parallelismo di $\vec{p}$ e $\vec{v}$ consente l'esistenza di una legge di conservazione.

Osservando che K_1 è legato a K_2 da un boost di velocità $-\vec{v}$, la legge di composizione relativistica della velocità consente di scrivere:

$$-w_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)}$$

che, combinata con la (3.12), fornisce:

$$g(u) = \frac{g(w)}{\gamma(v)\left(1 + \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right)}.$$

Nel limite di urto radente $\vec{u} \to 0$, $\vec{w} = \vec{v}$, questa equazione diviene:

$$g(0) = \frac{g(v)}{\gamma(v)}$$

e, poiché $g(0) = 1$, si ha:

$$g(v) = \gamma(v),$$

che inserita nella (3.11), fornisce l'espressione relativistica dell'impulso:

$$\vec{p} = m\,\gamma(v)\,\vec{v}. \tag{3.13}$$

3.6 Energia relativistica

Consideriamo il decadimento di una particella di massa M in due particelle, rispettivamente, di massa m_1 e m_2. Analizziamo il processo nel riferimento S_1 di quiete della particella che decade, e quello S_2 in cui quest'ultima si muove con velocità u lungo l'asse $+y$, ovvero verso l'alto (vedi Fig. 3.4)
La conservazione della componente verticale dell'impulso totale, nel riferimento S_2 assume la forma:

$$M\,c^2\,\gamma(u)\,u = m_1\,c^2\,\gamma(w_1)\,u + m_2\,c^2\,\gamma(w_2)\,u$$

i.e.

$$M\,c^2\,\gamma(u) = m_1\,c^2\,\gamma(w_1) + m_2\,c^2\,\gamma(w_2). \tag{3.14}$$

Nel limite $u \to 0$, i.e. nel riferimento S_1, risulta:

$$\gamma(u) \to 1 \qquad\qquad \gamma(w_i) \to \gamma(v_i) \qquad (i = 1, 2)$$

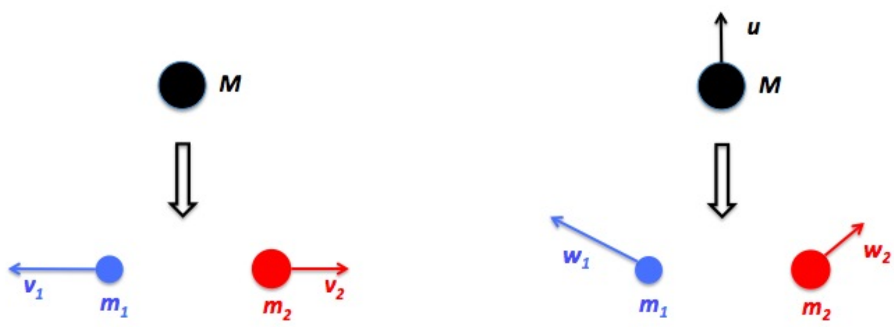


Figura 3.4: Decadimento della particella di massa M nel riferimento S_1 (sinistra) e in quello S_2 (destra).

per cui, la (3.14) diviene ($\gamma(v_i) = \gamma_i$):

$$M\, c^2 = m_1\, c^2\, \gamma_1 + m_2\, c^2\, \gamma_2. \tag{3.15}$$

N.B. - $\gamma_i \geq 1 \quad \Rightarrow \quad M \geq m_1 + m_2$: in Relatività Speciale *la massa non si conserva.* E la massa "mancante"? È convertita in movimento!

Riscriviamo ora la (3.15) nel modo seguente:

$$M\, c^2 = m_1\, c^2 + m_2\, c^2 + (\gamma_1 - 1)\, m_1\, c^2 + (\gamma_2 - 1)\, m_2\, c^2$$

Il termine $m\, c^2\, (\gamma - 1)$ ha un significato fisico preciso che risulta evidente considerando che:

- per una particella in quiete risulta $\gamma = 1$ e, quindi:

$$\gamma - 1 = 0;$$

- per piccole velocità ($v \simeq 0$), si ha[6]:

$$\begin{aligned} m\, c^2\, (\gamma - 1) &= m\, c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \approx m\, c^2 \left(\frac{1}{1-\beta^2/2} - 1 \right) \\ &\approx m\, c^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

[6]Si ricordino i seguenti sviluppi in serie di Taylor:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}\, x + O(x^2) \qquad\qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$$

i.e.

$$m\,c^2\,(\gamma-1) \approx \frac{m\,c^2}{2}\,\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Ciò porta ad assumere che

$$T = m\,c^2\,(\gamma-1)$$

sia l'espressione relativistica dell'energia cinetica, e, quindi, che per l'energia totale risulti:

$$E = m\,c^2 + T = m\,c^2\,\gamma. \tag{3.16}$$

N.B. - Alcune osservazioni:

- nel caso di una particella in quiete ($\gamma = 1$), la (3.16) diviene:

  $$E = m\,c^2$$

  la più famosa, almeno tra i giornalisti, delle equazioni di Einstein!

- in base alle (3.13), (3.16), si ha:

  $$p = E\,\frac{v}{c^2} \tag{3.17}$$

  per cui:

  $$E^2 - (p\,c)^2 = E^2 - \left(E\,\frac{v}{c^2}\right)^2 c^2 = E^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{E^2}{\gamma^2}$$

  i.e., per la (3.16), la cosiddetta relazione di *mass shell*

  $$\sqrt{E^2-(p\,c)^2} = \frac{E}{\gamma} = m\,c^2 \tag{3.18}$$

- nel caso $v = c$, in base alla (3.17) si ha:

  $$p = \frac{E}{c}$$

  da cui, per la (3.18), si ricava:

  $$m = 0$$

  i.e., le particelle che si muovono alla velocità della luce hanno massa nulla.

3.7 Trasformazione di Lorentz di impulso ed energia

Consideriamo i due riferimenti inerziali seguenti:

- Riferimento K - particella in moto con velocità $\vec{u}$

$$\vec{p} = m_0\,\gamma(u)\,\vec{u} \qquad\qquad E = m_0\,c^2\,\gamma(u)$$

dove:

$$\gamma(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

- Riferimento K′ - in moto rettilineo uniforme rispetto a K con velocità v diretta lungo l'asse $x \equiv x'$

$$\vec{p}' = m_0\,\gamma(u')\,\vec{u}' \qquad\qquad E' = m_0\,c^2\,\gamma(u') \tag{3.19}$$

Per ricavare le leggi di trasformazione di tali quantità, è necessario, innanzitutto, determinare quella del fattore lorentziano. Ricordando che ($\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}} \qquad\qquad u'_\alpha = \frac{u_\alpha}{\gamma\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)} \quad (\alpha = y, z)$$

si ha:

$$\begin{aligned}
u'^{\,2} &= u'^{\,2}_x + u'^{\,2}_y + u'^{\,2}_z \\
&= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left[(u_x - v)^2 + \frac{u_y^2 + u_z^2}{\gamma^2}\right] \\
&= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left[(u_x - v)^2 + (u^2 - u_x^2)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

da cui, si ottiene:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{u'^{\,2}}{c^2} &= 1 - \frac{1}{\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left[\frac{1}{c^2}\left(u_x^2 - 2\,u_x\,v + v^2 + u^2 - u_x^2 - \frac{u^2\,v^2}{c^2} + \frac{u_x^2\,v^2}{c^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left[\left(1 - \frac{u_x\,v}{c^2}\right)^2 - \frac{v^2 + u^2 - 2\,u_x\,v}{c^2} + \frac{v^2\,(u^2 - u_x^2)}{c^4}\right]
\end{aligned}$$

i.e.

$$1-\frac{u'^2}{c^2}=\frac{1}{\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left[1-2\,\frac{u_x\,v}{c^2}+\frac{u_x^2\,v^2}{c^4}-\frac{v^2+u^2-2\,u_x\,v}{c^2}\right.$$
$$\left.+\frac{v^2\,(u^2-u_x^2)}{c^4}\right]$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left(1-\frac{v^2+u^2}{c^2}+\frac{u^2\,v^2}{c^4}\right)$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left[1-\frac{v^2}{c^2}-\frac{u^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)$$

i.e.

$$\frac{1}{\gamma^2(u')}=\frac{1}{\gamma^2\,\gamma^2(u)\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}$$

quindi:

$$\gamma(u')=\gamma\,\gamma(u)\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right). \tag{3.20}$$

N.B. - la relazione inversa è ottenuta eseguendo la trasformazione: $v\to -v$, $u\leftrightarrow -u$, i.e.:

$$\gamma(u)=\gamma\,\gamma(u')\left(1+\frac{u'_x\,v}{c^2}\right).$$

Inserendo la (3.20) nella prima della (3.19), si ottiene:

$$p'_x=m_0\,\gamma\,\gamma(u)\,(u_x-v)$$
$$p'_\alpha=m_0\,\gamma(u)\,u_\alpha \qquad (\alpha=y,z)$$

i.e.

$$p'_x=\gamma\left(p_x-\frac{v}{c^2}\,E\right)\qquad p'_y=p_y\qquad p'_z=p_z \tag{3.21}$$

e nella seconda della (3.19)

$$E'=m_0\,c^2\,\gamma\,\gamma(u)\left(1-\frac{u_x\,v}{c^2}\right)$$
$$=\gamma\left[m_0\,c^2\,\gamma(u)-m_0\,c^2\,\gamma(u)\,\frac{u_x\,v}{c^2}\right]$$
$$=\gamma\left[m_0\,c^2\,\gamma(u)-m_0\,\gamma(u)\,u_x\,v\right]$$

i.e.

$$E' = \gamma\,(E - v\,p_x) \tag{3.22}$$

3.8 Trasformazione di Lorentz dell'accelerazione

Consideriamo i due riferimenti inerziali seguenti:

- Riferimento K - particella in moto con velocità $\vec{u}$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

- Riferimento K′ - in moto rettilineo uniforme rispetto a K con velocità v diretta lungo l'asse $x \equiv x'$

$$\vec{a}\,' = \frac{\mathrm{d}^2\vec{x}\,'}{\mathrm{d}t'^{\,2}} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}\,'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}\,'}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$

Poichè (cfr. slide 52):

$$\mathrm{d}t' = \gamma\,\left(1 - \frac{u_x\,v}{c^2}\right)\,\mathrm{d}t,$$

posto

$$g(u_x) = \left(1 - \frac{u_x\,v}{c^2}\right),$$

risulta:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{\gamma\,g(u_x)} \tag{3.23}$$

e, quindi:

$$\vec{a}\,' = \frac{1}{\gamma\,g(u_x)}\,\frac{\mathrm{d}\vec{u}\,'}{\mathrm{d}t}$$

Dalla trasformazione di Lorentz della componente x della velocità (cfr. slide 53), si ha:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{g(u_x)}$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{g^2(u_x)}\left[\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,g(u_x) - (u_x - v)\,\frac{\mathrm{d}g(u_x)}{\mathrm{d}t}\right] \\
&= \frac{1}{g^2(u_x)}\left[\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,g(u_x) - (u_x - v)\left(-\frac{v}{c^2}\right)\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\right] \\
&= \frac{1}{g^2(u_x)}\left[a_x\,g(u_x) + (u_x - v)\,a_x\left(\frac{v}{c^2}\right)\right] \\
&= \frac{a_x}{g^2(u_x)}\left(1 - \frac{u_x\,v}{c^2} + \frac{u_x\,v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\right) \\
&= \frac{a_x}{g^2(u_x)}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{a_x}{\gamma^2\,g^2(u_x)}
\end{aligned}$$

per cui, tenendo conto della (3.23)

$$\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'} = \frac{a_x}{\gamma^2\,g(u_x)}\,\frac{1}{\gamma\,g^2(u_x)}$$

e, quindi, sostituendo la definizione di $g(u_x)$:

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)^3}$$

A partire dalla trasformazione della componente y della velocità (cfr. slide 53), si ottiene :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\gamma\,g^2(u_x)}\left[\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\,g(u_x) - u_y\,\frac{\mathrm{d}g(u_x)}{\mathrm{d}t}\right] \\
&= \frac{1}{\gamma\,g^2(u_x)}\left[a_y\,g(u_x) - u_y\left(-\frac{v}{c^2}\right)a_x\right] \\
&= \frac{1}{\gamma\,g(u_x)}\left(a_y + \frac{1}{g(u_x)}\,\frac{u_y\,v}{c^2}\,a_x\right)
\end{aligned}$$

da cui, in base alla (3.23):

$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2\,g^2(u_x)}\left(a_y + \frac{1}{g(u_x)}\,\frac{u_y\,v}{c^2}\,a_x\right)$$

i.e.

$$a'_y = \frac{1}{\gamma^2\left(1 - \dfrac{u_x\,v}{c^2}\right)^2}\left(a_y + \frac{u_y\,v/c^2}{1 - u_x\,v/c^2}\,a_x\right)$$

Per ottenere la trasformazione della componente z, basta eseguire nella espressione di di a'_y le sostituzioni: $a_y \to a_z$, $u_y \to u_z$.
N.B. - contrariamente a quanto accade nella fisica Newtoniana, l'accelerazione dipende dal sistema di riferimento.

3.9 Legge di Minkowski

La legge di Minkowski, i.e., la legge fondamentale della dinamica valida per ogni regime di velocità, sancisce che:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0\,\gamma\,\vec{v}) = \vec{F}$$

i.e.,

$$\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\vec{v} + \gamma\,\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}$$

Poiché

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\left(-\frac{2}{c^2}\right)\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma^3}{c^2}\,\vec{v}\cdot\vec{a} \tag{3.24}$$

si ha:

$$m_0\left[\frac{\gamma^3}{c^2}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\,\vec{v} + \gamma\,\vec{a}\right] = \vec{F}$$

i.e.

$$m_0\,\gamma\,\vec{a} = \vec{F} - m_0\,\gamma^3\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\,\vec{v} \tag{3.25}$$

Moltiplicando scalarmente per $\vec{v}$ ambo i membri di questa equazione, otteniamo:

$$m_0\,\gamma\,(\vec{v}\cdot\vec{a}) = \vec{F}\cdot\vec{v} - m_0\,\gamma^3\,\frac{v^2}{c^2}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\vec{v} &= m_0\,\gamma\,\left(1 + \gamma^2\,\frac{v^2}{c^2}\right)(\vec{v}\cdot\vec{a}) \\
&= m_0\,\gamma\,\left(1 + \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}\right)(\vec{v}\cdot\vec{a}) \\
&= m_0\,\frac{\gamma}{1 - v^2/c^2}\,(\vec{v}\cdot\vec{a}) = m_0\gamma^3\,(\vec{v}\cdot\vec{a})
\end{aligned}$$

che inserita nella (3.25), fornisce:

$$m_0\,\gamma\,\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{c^2}\,(\vec{F}\cdot\vec{v})\,\vec{v}. \tag{3.26}$$

3.10 Variazione nel tempo dell'energia

In base all'espressione relativistica dell'energia, abbiamo:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,c^2 + T) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

quindi, poiché $T = (\gamma - 1)\,m\,c^2$:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\,c^2\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

da cui, in base alla (3.24), otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\,\gamma^3\,(\vec{v}\cdot\vec{a})$$

i.e., utilizzando la (3.25):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \gamma^2\,\vec{v}\cdot\left[\vec{F} - \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c^2}\,\vec{v}\right]\\ &= \gamma^2\,\left[\vec{F}\cdot\vec{v} - (\vec{F}\cdot\vec{v})\,\frac{v^2}{c^2})\right]\\ &= \gamma^2\,\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\,(\vec{F}\cdot\vec{v})\end{aligned}$$

quindi, in definitiva:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}.$$

3.11 4-accelerazione

Il 4-vettore associato all'accelerazione è definito come segue:

$$w^\mu = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$

Ricordando che $u^\mu = \gamma\,(c, \vec{v})$, abbiamo:

- $\underline{\mu = 0}$

$$w^0 = \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} = c\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau} = c\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

i.e., poiché $\tau = t/\gamma$ e tenendo conto della (3.24):

$$w^0 = (c\,\gamma)\left[\frac{\gamma^3}{c^2}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\right] = c\,\gamma\,\frac{\gamma^3}{c^2}\,(\vec{v}\cdot\vec{a}) = \gamma^4\,(\vec{\beta}\cdot\vec{a})$$

- $\underline{\mu = k}$ $\quad (k = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}\vec{w} = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\tau}\,\vec{v} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \\ &= \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\,\vec{v} + \gamma\,\vec{a}\right)\end{aligned}$$

i.e., sempre in base della (3.24), abbiamo

$$\vec{w} = \frac{\gamma^4}{c^2}\,(\vec{v}\cdot\vec{a})\,\vec{v} + \gamma^2\,\vec{a} = \gamma^2\,\left[\gamma^2\,(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\,\vec{\beta} + \vec{a}\right].$$

N.B. - Alcune osservazioni:

- la parte spaziale della 4-accelerazione ha due componenti: una parallela alla accelerazione 3-dimensionale $\vec{a}$ e una parallela alla velocità 3-dimensionale $\vec{v}$; quindi $\vec{w}$ *non* è parallelo ad $\vec{a}$;
- derivando rispetto a τ ambo i membri della relazione $u^\mu\,u_\mu = c^2$, si ha:

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\,u_\mu + u^\mu\,\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

i.e.

$$w^\mu\,u_\mu = 0$$

i.e., 4-velocità e 4-accelerazione sono ortogonali tra loro.

3.12 Il vertice $e \to e + \gamma$

In questa sezione dimostriamo l'impossibilità cinematica del processo $e^- \to e^- + \gamma$.

Cinematica del processo:

- stato iniziale: $\quad p^\mu = (E, \vec{p})$
- stato finale: $\quad p'^{\,\mu} = (E', \vec{p}\,'),\ k^\mu = (\omega, \vec{k})$

Imponiamo la conservazione del 4-impulso:

$$p^\mu = (p' + k)^\mu \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{p}^2 = \mathsf{p}'^2 + 2\,\mathsf{p}' \cdot \mathsf{k} + \mathsf{k}^2$$

$$\mathsf{p}^2 = \mathsf{p}'^2 = m^2, \mathsf{k}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathsf{p}' \cdot \mathsf{k} = 0$$

i.e.

$$E'\,\omega - \vec{p}' \cdot \vec{k} = E'\,\omega - |\,\vec{p}'\,||\,\vec{k}\,|\ \cos\theta = 0$$

Poiché $\mathsf{k}^2 = \omega^2 - \vec{k}^{\,2} = 0$, si ha $\omega = |\,\vec{k}\,|$, che sostituita nell'eq.ne precedente, fornisce la condizione:

$$E' = |\,\vec{p}'\,|\ \cos\theta$$

che, dal momento che $E' > |\,\vec{p}'\,|$, implica $\cos\theta > 1$, i.e., un assurdo.

N.B. - Nella teoria quantistica dei campi, processi di questo tipo sono d'importanza fondamentale in quanto rappresentano i vertici elementari dei diagrammi di Feynman, grafi che rappresentano le espressioni matematiche delle ampiezze di probabilità associate ai processi d'interazione tra particelle. In questo caso, l'assurdità trigonometrica è curata ammettendo che il fotone non sia un fotone reale, per il quale vale $\mathsf{k}^2 = 0$, ma un fotone "virtuale" per il quale risulta $\mathsf{k}^2 \neq 0$, quindi: $\omega \neq |\vec{k}|$.

3.13 Urto elastico

Per urto elastico è da intendersi il seguente processo:

$$1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$$

dove le particelle presenti nello stato finale hanno la stessa natura di quella delle particelle iniziali, ma, in generale, diverso impulso ed energia.

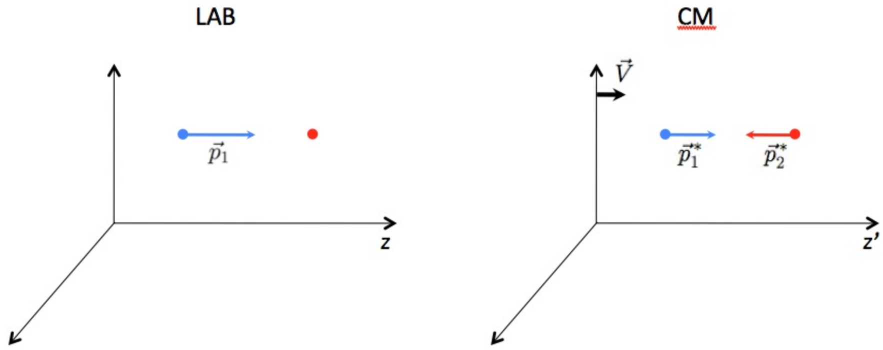
Consideriamo la trasformazione di Lorentz dal sistema del LAB a quello del CM (cfr. figura sotto).
Il 4-impulso totale dello stato iniziale è:

- riferimento del LAB

$$P^\mu = (p_1 + p_2)^\mu = (E_1 + m_2, 0, 0, p) \tag{3.27}$$

- riferimento del CM

$$P^{*\,\mu} = (p_1^* + p_2^*)^\mu = (E_1^* + E_2^*, 0, 0, 0) \tag{3.28}$$



La trasformazione di Lorentz LAB $\rightarrow$ CM della componente z del 4-impulso totale è:

$$P^{*\,z} = \gamma_{\rm CM}\,(P^z - \beta_{\rm CM}\,P^0)$$

dove, in unità $c = 1$, $\beta_{\rm CM} = V$. Per cui, in base alle (3.27), (3.28), abbiamo:

$$0 = \gamma_{\rm CM}\,\left[p - \beta_{\rm CM}\,(E_1 + m_2)\right]$$

da cui si ottiene:

$$\beta_{\rm CM} = \frac{p}{E_1 + m_2}$$

i.e., tenendo conto che:

$$p = m_1\,\gamma(v_1)\,v_1 \qquad\qquad E_1 = m_1\,\gamma(v_1)$$

si ha:

$$\beta_{\rm CM} = \frac{m_1\,\gamma(v_1)\,v_1}{m_1\,\gamma(v_1) + m_2}.$$

Partendo dalla trasformazione di Lorentz CM $\rightarrow$ LAB della componente z del 4-impulso della particella 2, abbiamo:

$$0 = \gamma_{\rm CM}\,(-p^* + \beta_{\rm CM}\,E_2^*)$$

dove con p^* abbiamo indicato il comune valore del modulo della componente z dell'impulso delle particelle iniziali nel CM. Da ciò, la velocità $\beta_{\rm CM}$ può essere riscritta in termini di variabili cinematiche definite nel CM come segue[7]:

$$\beta_{\rm CM} = \frac{p^*}{E_2^*} = \beta_2^*. \tag{3.29}$$

[7]Risultato evidente: per rendere nulla la velocità della particella 2, che nel CM è β_2^*, è necessario un boost con $\vec{\beta}_{\rm CM} = -\vec{\beta}_2^*$.

Nel caso particolare in cui le particelle iniziali 1 e 2 siano identiche, entrambe di massa m, indicato con E^* il comune valore delle loro energie nel CM, dalla (3.29), otteniamo:

$$\beta_{\rm CM} = \beta^* = \frac{p^*}{E^*} \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_{\rm CM} = \frac{E^*}{m}. \tag{3.30}$$

I 4-impulsi delle particelle finali sono (cfr. Fig. 3.5):

- riferimento del LAB

$$p_1'^{\,\mu} = (E_1', p_1' \sin\theta, 0, p_1' \cos\theta)$$
$$p_2'^{\,\mu} = (E_2', -p_2' \sin\varphi, 0, p_2' \cos\varphi)$$

- riferimento del CM

$$p_1'^{*\,\mu} = (E', p'^* \sin\theta^*, 0, p'^* \cos\theta^*)$$
$$p_2'^{*\,\mu} = (E', -p'^* \sin\theta^*, 0, -p'^* \cos\theta^*)$$

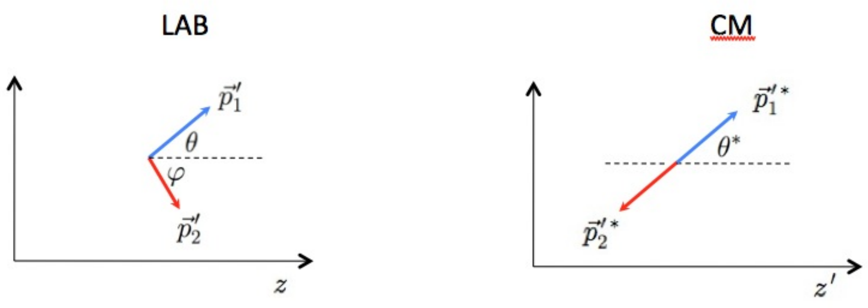


Figura 3.5: Impulsi delle particelle finali nel LAB e nel CM

La trasformazione di Lorentz CM $\to$ LAB dell'impulso della particella finale $1'$ è:

$$p_1' \, \sin\theta = p^* \sin\theta^* \qquad\qquad p_1' \, \cos\theta = \gamma_{\rm CM} \, (p^* \, \cos\theta^* + \beta_{\rm CM} \, E^*)$$

da cui, eseguendo il rapporto tra queste equazioni e tenendo conto della (3.30), otteniamo:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta^*}{\gamma_{\rm CM} \, (1 + \cos\theta^*)}$$

La trasformazione di Lorentz CM $\rightarrow$ LAB dell'impulso della particella finale $2'$ è:

$$-p_2' \sin\varphi = -p^* \sin\theta^* \qquad\qquad p_2' \cos\varphi = \gamma_{\rm CM}\,(-p^* \cos\theta^* + \beta_{\rm CM}\, E^*)$$

da cui, eseguendo il rapporto tra queste equazioni e tenendo conto della (3.30), otteniamo:

$$\tan\varphi = \frac{\sin\theta^*}{\gamma_{\rm CM}\,(1-\cos\theta^*)}$$

Per cui:

$$\tan\theta\,\tan\varphi = \frac{\sin^2\theta^*}{\gamma_{\rm CM}^2\,(1-\cos^2\theta^*)} = \frac{1}{\gamma_{\rm CM}^2} = 1-\beta^{*\,2}. \tag{3.31}$$

N.B. - Consideriamo il limite Newtoniano: $c \rightarrow \infty$, i.e., $\beta^* \rightarrow 0$ nella (3.31). Si ottiene:

$$\lim_{c\rightarrow\infty} \tan\theta\,\tan\varphi = 1.$$

Poiché:

$$\tan(\theta+\varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1-\tan\theta\,\tan\varphi}$$

abbiamo:

$$\lim_{c\rightarrow\infty} \tan(\theta+\varphi)\ \rightarrow\ \infty \qquad \Rightarrow \qquad \theta+\varphi\ \rightarrow\ \pi/2$$

i.e., le direzioni di moto delle particelle finali, supposte di uguale massa, formano, nel LAB, un angolo di 90°, indipendentemente dalla loro velocità (come ben sa ogni giocatore di biliardo).
Nel caso $\beta^* \neq 0$, risulta, invece:

$$\tan\theta\,\tan\varphi < 1$$

per cui $\tan(\theta+\varphi)$ è finita, e, quindi:

$$\theta+\varphi < \pi/2.$$

3.14 Effetto Compton

Il processo consiste nell'urto elastico di un fotone con un elettrone in quiete. Indicato con θ l'angolo di diffusione del fotone, ci proponiamo di determinare la lunghezza d'onda del fotone diffuso.

I 4-impulsi prima della collisione sono:

$$k^{\mu} = (\omega, \omega, 0, 0) \qquad\qquad p^{\mu} = (m, 0, 0, 0).$$

Dopo la collisione, il 4-impulso del fotone è:

$$k'^{\,\mu} = (\omega', \omega' \cos\theta, \omega' \sin\theta, 0).$$

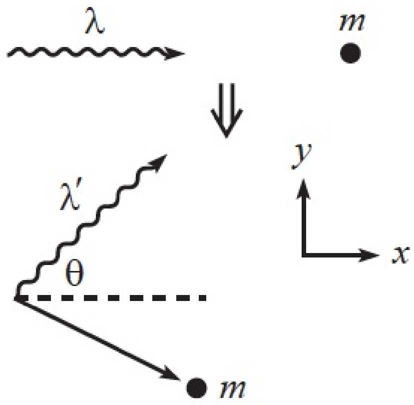


Figura 3.6: Diffusione Compton sull'elettrone.

(N.B. - non abbiamo bisogno del 4-impulso finale dell'elettrone.)

Conservazione del 4-impulso totale:

$$\mathsf{k} + \mathsf{p} = \mathsf{k}' + \mathsf{p}'$$

da cui, si ha:

$$\mathsf{p}'^{\,2} = (\mathsf{k} + \mathsf{p} - \mathsf{k}')^2$$

i..e

$$m^2 = m^2 + 2\,\mathsf{k}\cdot\mathsf{p} - 2\,\mathsf{k}\cdot\mathsf{k}' - 2\,\mathsf{p}\cdot\mathsf{k}'$$

i.e.
$$\mathsf{k}\cdot\mathsf{p}-\mathsf{k}\cdot\mathsf{k}'-\mathsf{p}\cdot\mathsf{k}'=0$$
Poiché risulta
$$\mathsf{k}\cdot\mathsf{p}=m\,\omega \qquad \mathsf{k}\cdot\mathsf{k}'=\omega\,\omega'\,(1-\cos\theta) \qquad \mathsf{p}\cdot\mathsf{k}'=m\,\omega'$$
si ha:
$$m\,\omega-\omega\,\omega'\,(1-\cos\theta)-m\,\omega'=0$$
i..e
$$m\,\omega=[\omega\,(1-\cos\theta)+m]\,\omega' \qquad \Rightarrow \qquad \omega'=\frac{m\,\omega}{\omega\,(1-\cos\theta)+m}$$
In definitiva:
$$\omega'=\frac{m}{1-\cos\theta+m/\omega} \tag{3.32}$$
oppure:
$$\omega'=\frac{\omega}{1+(\omega/m)\,(1-\cos\theta)} \tag{3.33}$$
N.B. - Per calcolare la lunghezza d'onda del fotone finale, conviene ripristinare la velocità della luce nella formula per ω' (facile: basta rendere omogenee le unità di misura nei due membri di (3.32) e (3.33), i.e., in questo caso, eseguire la sostituzione: $m\to m\,c^2$). Ad esempio, partendo dalla (3.32):
$$\omega'=\frac{m\,c^2}{1-\cos\theta+(m\,c^2/\omega)}$$

Poiché $\omega'=h\,\nu'=h\,c/\lambda'$, si ha:
$$\frac{h\,c}{\lambda'}=\frac{m\,c^2}{1-\cos\theta+\dfrac{m\,\lambda\,c^2}{h\,c}}$$
i.e.
$$h\,c\,(1-\cos\theta)+m\,\lambda\,c^2=m\,\lambda'\,c^2$$
e, infine:
$$\lambda'=\lambda+\frac{h}{m\,c}\,(1-\cos\theta)$$

N. B. - Casi particolari:

- $\theta=0 \quad\to\quad$ no diffusione: $\lambda'=\lambda$;

- $\theta = \pi \quad \rightarrow \quad$ diffusione all'indietro: $\lambda' = \lambda + 2\,\dfrac{h}{m\,c}$;
- $\theta = \pi$ e $\lambda << h/(m\,c)$, i.e., $m\,c^2 << h\,c/\lambda = \omega$ (energia del fotone molto maggiore dell'energia di riposo dell'elettrone):

$$\lambda' \simeq 2\,\frac{h}{m\,c} \qquad \Rightarrow \qquad \omega' \simeq \frac{m\,c^2}{2}$$

ovvero, il fotone rimbalza essenzialmente con energia fissata, indipendente da quella iniziale, purché sufficientemente elevata.

3.15 Massa invariante di un sistema di particelle

Dato un sistema costituito da N particelle, la sua *massa invariante* W è definita dalla relazione:

$$W^2 = (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2 + \ldots + \mathsf{p}_N)^2 \tag{3.34}$$

i.e.

$$W^2 = \sum_{i=1}^{N} \mathsf{p}_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j = \sum_{i=1}^{N} m_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j<i} \mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j$$

Per quanto riguarda il prodotto scalare dei 4-impulsi di una generica coppia di particelle, risulta:

$$\mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j = E_i\,E_j - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = E_i\,E_j - p_i\,p_j\,\cos\theta_{ij}$$

e, quindi:

$$\mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j \geq E_i\,E_j - p_i\,p_j = E_i\,E_j - \sqrt{E_i^2 - m_i^2}\,\sqrt{E_j^2 - m_j^2}. \tag{3.35}$$

Poiché

$$\begin{aligned}(E_i^2 - m_i^2)\,(E_j^2 - m_j^2) &= E_i^2\,E_j^2 + m_i^2\,m_j^2 - E_i^2\,m_j^2 - E_j^2\,m_i^2 \\ &= (E_i\,E_j - m_i\,m_j)^2 + 2\,m_i\,m_j\,E_i\,E_j - E_i^2\,m_j^2 - E_j^2\,m_i^2 \\ &= (E_i\,E_j - m_i\,m_j)^2 - (E_i\,m_j - E_j\,m_i)^2,\end{aligned}$$

risulta:

$$(E_i\,E_j - m_i\,m_j)^2 \geq (E_i^2 - m_i^2)\,(E_j^2 - m_j^2)$$

i.e.

$$E_i\,E_j - m_i\,m_j \geq \sqrt{E_i^2 - m_i^2}\,\sqrt{E_j^2 - m_j^2}$$

che, inserita nella (3.35), consente di scrivere:

$$\mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j \geq E_i\,E_j - (E_i\,E_j - m_i\,m_j)$$

i.e.

$$\mathsf{p}_i \cdot \mathsf{p}_j \geq m_i\,m_j.$$

Per cui, in base alla definizione (3.34), risulta:

$$W^2 \geq \sum_{i=1}^{N} m_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j<i} m_i\,m_j = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)^2$$

i.e

$$W^2 \geq (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)^2.$$

A titolo di esempio, consideriamo l'urto anelastico:

$$1 + 2 \to 3 + 4 + \ldots + N$$

Si ha:

$$W^2 = (\mathsf{p}_1 + \mathsf{p}_2)^2 = (\mathsf{p}_3 + \cdot\mathsf{p}_4 + \ldots + \mathsf{p}_N)^2$$

i.e., W rappresenta l'energia disponibile per la generazione di massa nello stato finale della reazione. Risulta:

- riferimento del CM:

  $$W = \sqrt{(E_1^* + E_2^*)^2 - (\vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*})^2}$$

  $$\vec{p}_1^{\,*} + \vec{p}_2^{\,*} = 0 \qquad \to \qquad W = E_1^* + E_2^*$$

  i.e., la massa invariante coincide con l'energia totale delle particelle;

- riferimento del LAB:

  $$W = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} < E_1 + E_2$$

  i.e. la massa invariante è minore dell'energia totale delle particelle.

  N.B. - Nel caso di esperimento su bersaglio fermo, $\vec{p}_2 = 0$, quindi $E_2 = m_2$, si ha:

  $$W = \sqrt{E_1^2 + m_2^2 + 2\,E_1\,m_2 - \vec{p}_1^{\,2}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\,E_1\,m_2}$$

  i.e., W cresce linearmente con l'energia nel CM, mentre solo con la radice quadrata dell'energia del proiettile nel LAB.

Consideriamo ora il caso $1 \equiv 2$ con $E_1 >> m_1, m_2$. Risulta:

- riferimento del CM:
$$W = 2\,E_1^*$$
- riferimento del LAB:
$$W = \sqrt{2\,m_2\,E_1}$$
i.e., a parità d'energia delle particelle iniziali, il W che si raggiunge nel CM è *molto maggiore* di quello che si ottiene nel LAB. Questo spiega perchè, dal punto di vista cinematico, i collisori sono più vantaggiosi degli acceleratori con fascio estratto e inviato su bersaglio fisso.

Applichiamo questo risultati ad LHC. In questo caso, abbiamo due fasci di protoni da 7 TeV ciascuno, per cui:

$$W = E_1 + E_2 = 14 \text{ TeV}.$$

Per ottenere lo stesso valore di W in un protosincrotrone (i.e., in una configurazione sperimentale che prevede un fascio di protoni che incide su bersaglio d'idrogeno), i protoni del fascio dovrebbero avere un'energia:

$$E_p = \frac{W^2}{2\,m_p} \simeq \frac{14^2}{2 \times 10^{-3}} \simeq 9.8 \times 10^4 \text{ TeV}.$$