

## **MISURA DELLA VITA MEDIA DEL MUONE**

Matteo Beretta, Caterina Bloise, Marco Dreucci, Claudio Gatti, Silvia Martellotti

*LNF - INFN, Via E. Fermi 40, I-00044 Frascati, Italy*

### **Abstract**

La vita media del muone è una grandezza fondamentale della fisica delle particelle elementari. La sua misura consente di determinare con precisione la costante di accoppiamento, o "carica", delle interazioni deboli.

Questa nota, nata come appunti di laboratorio per gli stage estivi che si svolgono nei Laboratori Nazionali di Frascati (LNF), descrive un metodo "classico" per effettuare tale misura: l'osservazione del decadimento di muoni fermati in un materiale passivo.

Dopo una breve introduzione sui raggi cosmici, al livello del mare costituiti per circa il 70% da muoni, viene descritto il metodo di misura e l'apparato sperimentale situato in una stazione di test per raggi cosmici presente nei LNF.

La nota contiene anche alcune brevi introduzioni sulle interazioni deboli, sull'utilizzo dell'oscilloscopio e sui moduli di coincidenza e discriminazione NIM. Seguono copia di tabelle redatte dal Particle Data Group su proprietà dei materiali, unità di misura e una breve descrizione dei metodi di analisi statistica dei dati.



## 1. INTRODUZIONE

La nostra atmosfera è continuamente bombardata da un flusso di particelle relativistiche (cioè con velocità prossima a quella della luce) di alta energia, dette **raggi cosmici**. Si tratta prevalentemente di protoni (~80%), particelle  $\alpha$  (~15%), nuclei più pesanti (4%) ed elettroni (~1%). Parte di esse provengono dal sole (vento solare) e parte da ogni direzione dello spazio che ci circonda. L'interesse per questo tipo di particelle risiede nel fatto che esse, assieme alla radiazione elettromagnetica che pure proviene dallo spazio che ci circonda (luce, radiazione infrarossa, raggi X, onde radio), ci forniscono informazioni preziose che consentono di fare congetture ed ipotesi sull'**universo che ci circonda**.

Il problema centrale della fisica dei raggi cosmici rimane ancora oggi aperto. Quale è la loro origine? Come ottengono le loro straordinarie energie? Sappiamo che esiste una relazione fondamentale tra la temperatura di un corpo, lo spettro e l'intensità della radiazione elettromagnetica (fotoni) che esso emette. Maggiore la temperatura di un corpo, maggiore l'energia media dei fotoni che irradia. La luce delle stelle ci permette ad esempio di stimare la temperatura della loro superficie: la luce bianco-gialla del Sole ci dice che la sua superficie è a circa 6000 °C; la luce blu di Rigel ci dice che ha una temperatura superficiale di circa 11000 °C; la luce rossastra di Betelgeuse indica una temperatura di circa 4000 °C (Rigel e Betelgeuse sono stelle nella costellazione di Orione). L'emissione dei raggi cosmici, invece, non è determinata dalla temperatura della loro sorgente, ma da processi di natura differente. I raggi cosmici possono, infatti, avere un'energia anche cento miliardi di miliardi di volte più elevata dei fotoni del Sole, e nessun luogo nell'Universo attuale ha una temperatura così straordinaria. Si pensa oggi che le sorgenti dove i raggi cosmici sono accelerati corrispondano a luoghi dove avvengono i processi più violenti nell'Universo, dove grandi masse sono accelerate e si scontrano. In questi cataclismi cosmici si formano gli intensi campi elettrici capaci di accelerare particelle cariche fino a grandissime energie. L'opinione più diffusa è che la maggior parte dei raggi cosmici siano accelerati dalle esplosioni di supernova.

Nei raggi cosmici, le **proporzioni** tra i vari elementi sono simili a quelle nel sistema solare, ma con alcune significative differenze. In particolare, nei raggi cosmici sono molto più abbondanti i nuclei leggeri, tra elio e carbonio, e quelli più leggeri del ferro: essi sono il risultato della frammentazione di nuclei più pesanti a seguito di urti con la materia interstellare.

Si definiscono raggi cosmici **primari** quelli provenienti dallo spazio cosmico e raggi cosmici

**secondari** quelli prodotti dall'interazione di un raggio cosmico primario con l'atmosfera terrestre. L'interazione di un raggio cosmico primario col nucleo N di una molecola della nostra atmosfera produce particelle secondarie che, interagendo a loro volta, producono altre particelle e così via, sino a formare uno **sciame** di particelle. L'**energia** di un raggio cosmico primario può arrivare come detto sino a  $10^{20}$  eV, equivalente all'energia cinetica di una palla da tennis a 100 km/h, energia attualmente irraggiungibile nei nostri acceleratori (l'energia media del fascio di protoni accelerati ad LHC sarà di 7 TeV per protone, cioè  $7 \times 10^{12}$  eV). L'estensione dello sciame, evidentemente, dipende da tale energia e può arrivare in tali casi ad interessare aree a terra di decine di km.

Le particelle secondarie prodotte sono principalmente **pioni** ( $\pi$ ), **muoni** ( $\mu$ ), **elettroni** (e), **fotoni** ( $\gamma$ ) e **neutrini** ( $\nu$ ). Mentre i neutrini, non avendo carica elettrica ed interagendo debolmente con la materia arrivano a terra, attraversano il nostro pianeta e sfuggono dalla parte opposta praticamente indisturbati, le altre particelle interagiscono continuamente con la materia che attraversano, perdendo via via energia a causa di interazioni essenzialmente elettromagnetiche. Questo significa che solo una parte di esse è effettivamente in grado di raggiungere il suolo. Quelle che in maggior numero raggiungono la superficie terrestre sono i **muoni**. Il flusso di questa componente a terra vale all'incirca  $70 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ sr}^{-1}$ .

## 2. IL MUONE

Il muone è una particella del tutto identica all'elettrone, eccetto per il fatto che ha una **massa** circa 200 volte superiore. Inoltre il muone si trasforma ("decade") in  $e \nu_\mu \bar{\nu}_e$  con una **vita media** di  $2,2 \mu\text{s}$ . Al contrario, sappiamo che l'elettrone è una particella stabile. **La misura della vita media del muone** è il principale obiettivo di questo stage.

La grande massa che possiede ne fa una particella estremamente penetrante (è l'unica, assieme ovviamente ai neutrini, che riesce ad attraversare i grandi spessori degli enormi rivelatori usati nella fisica delle particelle). Apparentemente i  $2,2 \mu\text{s}$  di vita media, anche a una velocità prossima a quella della luce, non dovrebbero consentirgli di percorrere distanze superiori a  $(3 \times 10^8 \text{ m/s}) \times (2,2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 660 \text{ m}$ . La Teoria della Relatività di Einstein, tuttavia ci dice che per particelle relativistiche le durate temporali si allungano. Ad esempio, la vita media di una particella che si muove al 99,99 % della velocità della luce è circa 70 volte più grande di una (identica) particella ferma. Questo consentirebbe ad un muone avente questa velocità di percorrere una distanza di  $(70 \times 660 \text{ m}) \cong 46 \text{ km}$  e raggiungere

facilmente la superficie terrestre.

Di seguito è riportato un elenco delle principali particelle che costituiscono i raggi cosmici secondari con le loro principali proprietà.

Particella (simbolo)	Massa (MeV) [*]	Carica elettrica	Tipo di interazioni
neutrino ( $\nu$ )	< 2eV	no	d
fotone ( $\gamma$ )	0	no	em
elettrone ( $e^\pm$ )	0,5	si	d,em
muone ( $\mu^\pm$ )	105	si	d,em
pione ( $\pi^\pm$ )	140	si	d,em,f
kaone ( $K^\pm$ )	493	si	d,em,f
protone (p)	938	si	d,em,f

d=interazione debole, em=interazione elettromagnetica, f=interazione forte

[\*] 1 eV=1,6 10<sup>-19</sup> joule. Se si vuole ottenere la massa in kg occorre utilizzare la relazione  $E=mc^2$ .

### 3. NOTE STORICHE

#### 3.1. NASCITA DEI RAGGI COSMICI.

L'atto fondativo della fisica dei raggi cosmici è un esperimento eseguito il 7 agosto del 1912. Alle sei del mattino un pallone aereostatico si sollevò dalla città di Aussig in Austria e rimase in volo per circa tre ore, superando i 5000 metri di quota. A bordo c'erano il pilota, un meteorologo e il fisico Victor Hess, che aveva con sé gli strumenti per misurare la **ionizzazione** dell'aria. Sorprendentemente la ionizzazione ad alta quota risultò maggiore che al suolo. La conclusione di Hess fu: "I risultati delle mie osservazioni si spiegano meglio assumendo che una radiazione di alto potere ionizzante entri dall'alto nella nostra atmosfera".

All'inizio si pensava che i raggi cosmici fossero costituiti da fotoni di alta energia e da elettroni Compton di rinculo. A partire dal 1935 fu invece chiaro (grazie ad Auger) che essi erano formati da due componenti: una **molle**, facilmente assorbibile e composta da elettroni e da fotoni, e una **dura**, il cui potere penetrante non era spiegabile se non con l'introduzione di una nuova particella. Infatti agli inizi

degli anni '30, esperimenti condotti sui raggi cosmici mostrarono che parte di tale radiazione era in grado di attraversare spessi strati di piombo. Ciò dimostrò che i raggi cosmici erano composti da particelle cariche di energia molto elevata (almeno  $10^9$  eV). Si osservò inoltre che particelle cosmiche producevano a terra **coincidenze** su contatori Geiger posti a distanze superiori a 200 metri. Fu dunque chiaro che queste particelle cariche relativistiche, interagendo con l'atmosfera terrestre, producevano cascate estese di particelle secondarie alle quali fu dato il nome di Extensive Air Showers (EAS). Nacque quindi l'idea di studiare una possibile produzione di particelle secondarie nell'interazione dei raggi cosmici con la materia. E infatti dagli studi dei raggi cosmici nella prima metà del ventesimo secolo è nata la fisica delle particelle elementari: sfruttando la radiazione cosmica come fascio di particelle naturali sono stati scoperti negli sciami prodotti: il positrone (1932), il muone (1937), il pione (1947) e altri barioni, quali ad esempio la  $\Sigma^+$  (1953). A distanza di un secolo dalla loro scoperta, sebbene la fisica dei raggi cosmici abbia compiuto grandi passi in avanti, rimangono ancora irrisolti molti quesiti quali la spiegazione dettagliata della loro origine, produzione, propagazione nello spazio e dei meccanismi di accelerazione che portano all'osservazione di energie così elevate.

### 3.2. LA SCOPERTA DEL MUONE.

Nel **1934 Yukawa**, per spiegare come i nucleoni (protoni e neutroni nel nucleo di un atomo) interagiscano rendendo stabile un nucleo, propone un modello secondo il quale essi si scambiano delle particelle. Prevede per la loro massa un valore circa 200 volte quella dell'elettrone e per questo li chiama **mesoni** (massa intermedia tra elettrone e protone).

Nel **1937 Anderson** scopre nei raggi cosmici una particella di massa circa 200 volte superiore a quella dell'elettrone. Tale particella venne battezzata col nome di **mesotrone**. Yukawa la identifica con la propria particella. Ipotizza inoltre che il mesone sia instabile e decada in un elettrone più un neutrino con vita media dell'ordine del microsecondo. Pochi anni dopo, due misure indipendenti (Rossi e Nereson (1942) , Conversi e Piccioni (1944) ) della vita media del mesotrone forniscono un valore di circa  $2 \mu\text{s}$ . Una prima stima era stata fatta da Rasetti nel 1941.

Nel **1944** Conversi e Piccioni e poi Pancini, che si unisce a loro nel 1945, progettano e realizzano un nuovo apparato per eseguire un ulteriore test delle previsioni di Tomonaga e Araki, inserendovi "lenti magnetiche" che selezionano i mesotroni di un dato segno, e **stabiliscono che la nuova particella non è quella di Yukawa**. E' simile ad un elettrone, ma più pesante, e **non è una particella stabile**. Viene battezzata con il nome di **muone**.

#### 4. LA MISURA DELLA VITA MEDIA DEL MUONE

La logica dell'esperimento (coincidenze ritardate) è simile a quella utilizzata da Conversi e Piccioni nel 1944.

Un muone che viaggia ad una velocità prossima a quella della luce attraversa diverse decine di km (a causa della dilatazione temporale) prima di decadere in  $e \nu_\mu \bar{\nu}_e$ . Per osservarne il decadimento **occorre quindi fermarlo** cosicché la sua vita media tornerà (per noi) ad essere pari a 2.2  $\mu$ s.

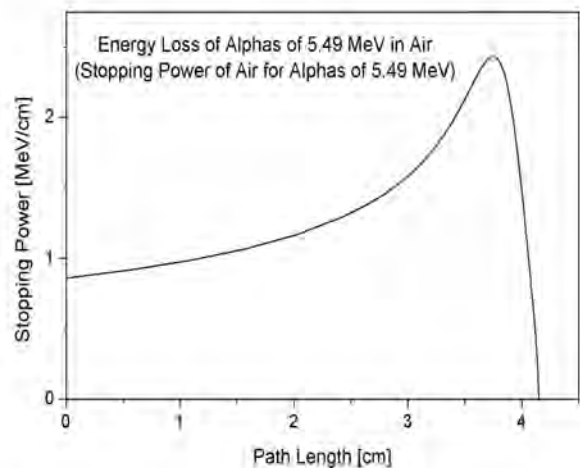
Per fermare un muone basta semplicemente mettere del materiale (ad esempio delle lastre di ferro o il materiale plastico di cui è fatto il rivelatore) lungo il suo cammino. Quando il muone attraversa il materiale interposto comincia ad urtarne gli atomi circostanti e, come una palla da biliardo, perde energia ad ogni urto fino eventualmente a fermarsi.

La **perdita di energia** è costante finché la particella si muove con velocità prossima a quella della luce. Nel caso di muoni nel ferro è pari a 11.4 MeV/cm e nel materiale plastico 2 MeV/cm. Appena la velocità scende a circa l'80% di quella della luce, la particella subisce una brusca decelerazione e si ferma quasi istantaneamente rilasciando l'energia cinetica residua.

Una volta fermi, però, i muoni con carica elettrica negativa (**muoni negativi**) risentono dell'**attrazione dei nuclei atomici** che hanno carica positiva. Come un

meteorite catturato dal campo gravitazionale terrestre, i muoni negativi sono assorbiti dal nucleo atomico. Nel caso del ferro la cattura avviene in un tempo medio pari a 206 ns ( $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$ ) e solo una piccola parte (10%) riesce a decadere prima. Nel materiale plastico la cattura è molto più lenta ed il suo effetto si evidenzia in una leggera diminuzione della vita media da 2.2 a circa 2.0  $\mu$ s. Al contrario, i **muoni positivi** sentendo una forza repulsiva non vengono catturati e decadono tutti in un antielettrone (positrone) e due neutrini con vita media 2.2  $\mu$ s.

Se riuscissimo a misurare il tempo  $T_0$  in cui un muone (positivo) entra e si ferma in una lastra di ferro e quello  $T_1$  in cui osserviamo il passaggio del positrone prodotto dal suo decadimento, potremmo misurare il tempo di decadimento dalla differenza  $T_1 - T_0$ . Osservandone un **gran numero** saremo in grado di determinare la vita media.



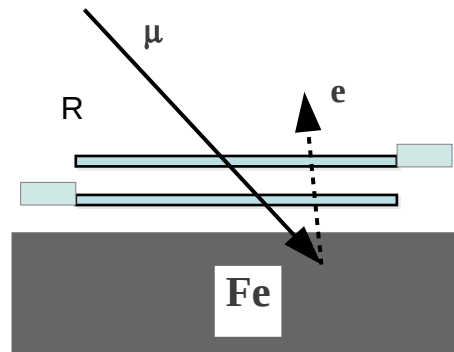
Lo schema dell'esperimento è mostrato nella figura accanto.

Un muone arriva dall'alto e attraversa il rivelatore (R), composto da scintillatori e fototubi (si veda il paragrafo 6). R ne misura il tempo di arrivo ( $T_0$ ) e la posizione (Z) di attraversamento.

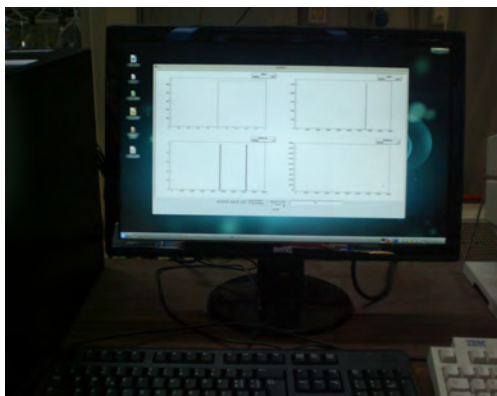
Entrando nella lastra di ferro (Fe), o nel materiale plastico, se non è troppo energetico, rallenta e si ferma in una frazione di ns.

Quindi, decade. L'elettrone emesso, se abbastanza energetico, riesce ad attraversare il materiale sovrastante e a raggiungere, sempre in una frazione di ns, il rivelatore che ne misura il tempo di arrivo ( $T_1$ ).

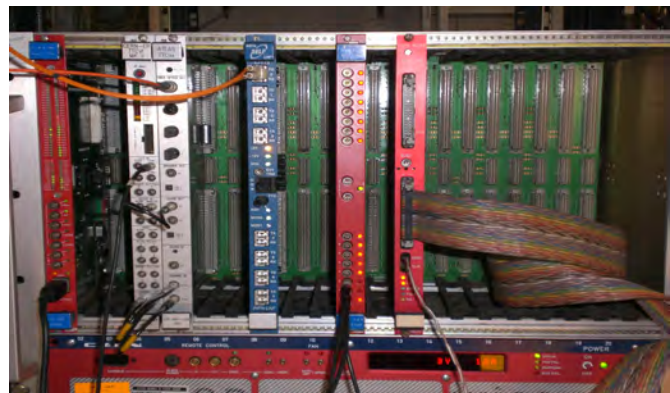
I tempi così misurati vengono letti e registrati con un computer.



*Figura 1: Foto del rivelatore. Sono visibili i due scintillatori sovrapposti e uno dei due fototubi. Il tutto è appoggiato sopra delle lastre di ferro.*



*Figura 2: Computer che acquisisce, analizza e visualizza i dati raccolti.*



*Figura 3: Elettronica di acquisizione (DAQ). In basso a sinistra si vede il cavo USB che porta i dati al computer.*



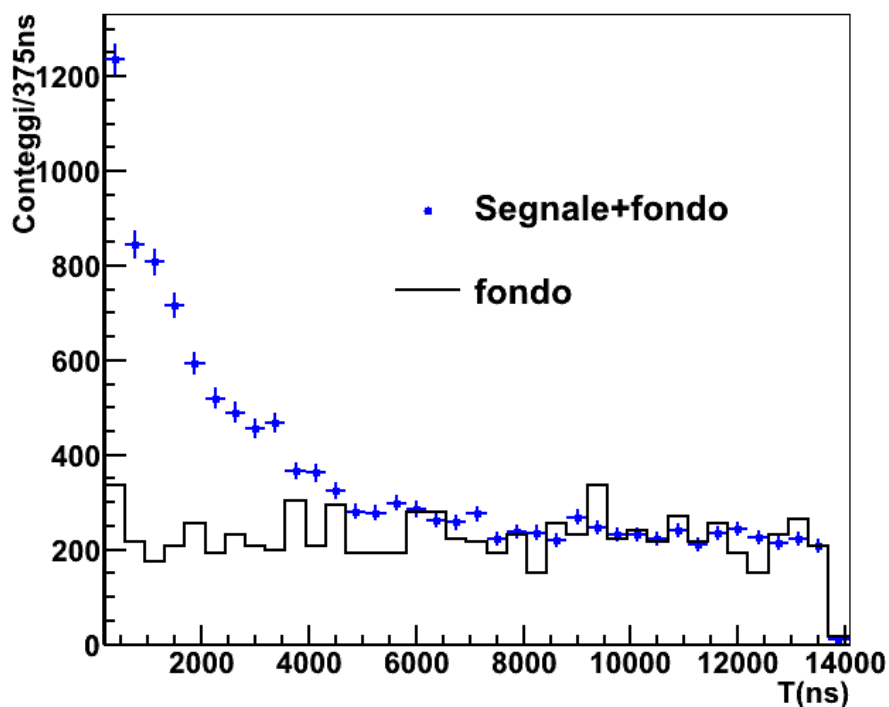


Figura 4: Distribuzione dei tempi  $T=T_1-T_0$  tra il passaggio del muone e del positrone nel rivelatore. La linea continua rappresenta il fondo stimato dovuto al passaggio di altri raggi cosmici.

Un esempio di dati raccolti ed analizzati sono mostrati in figura 4. I punti blu mostrano la distribuzione della differenza di tempi  $T_1-T_0$  dovuta al passaggio dei muoni e successivamente degli elettroni prodotti nel decadimento. Si può vedere il tipico andamento esponenziale ( $Ne^{-T/\tau}$ ) dove  $T$  è il tempo misurato e  $\tau$  è la vita media del muone (si veda il paragrafo successivo). Inoltre, osserviamo che a grandi tempi la distribuzione non tende a zero ma ad un valore costante (circa 200 in questo caso). Ciò è dovuto al **passaggio accidentale** (e per fortuna raro) di un secondo muone, indipendentemente dal fatto che il primo sia decaduto o meno. Esso viene scambiato per un elettrone del decadimento ma, essendo il suo passaggio raro e temporalmente indipendente da quello del primo, la distribuzione osservata è sostanzialmente uniforme nel tempo. Questo contributo è mostrato dalla linea nera. Nel paragrafo successivo spiegheremo come sia possibile estrarre il valore della vita media  $\tau$  da questa distribuzione.

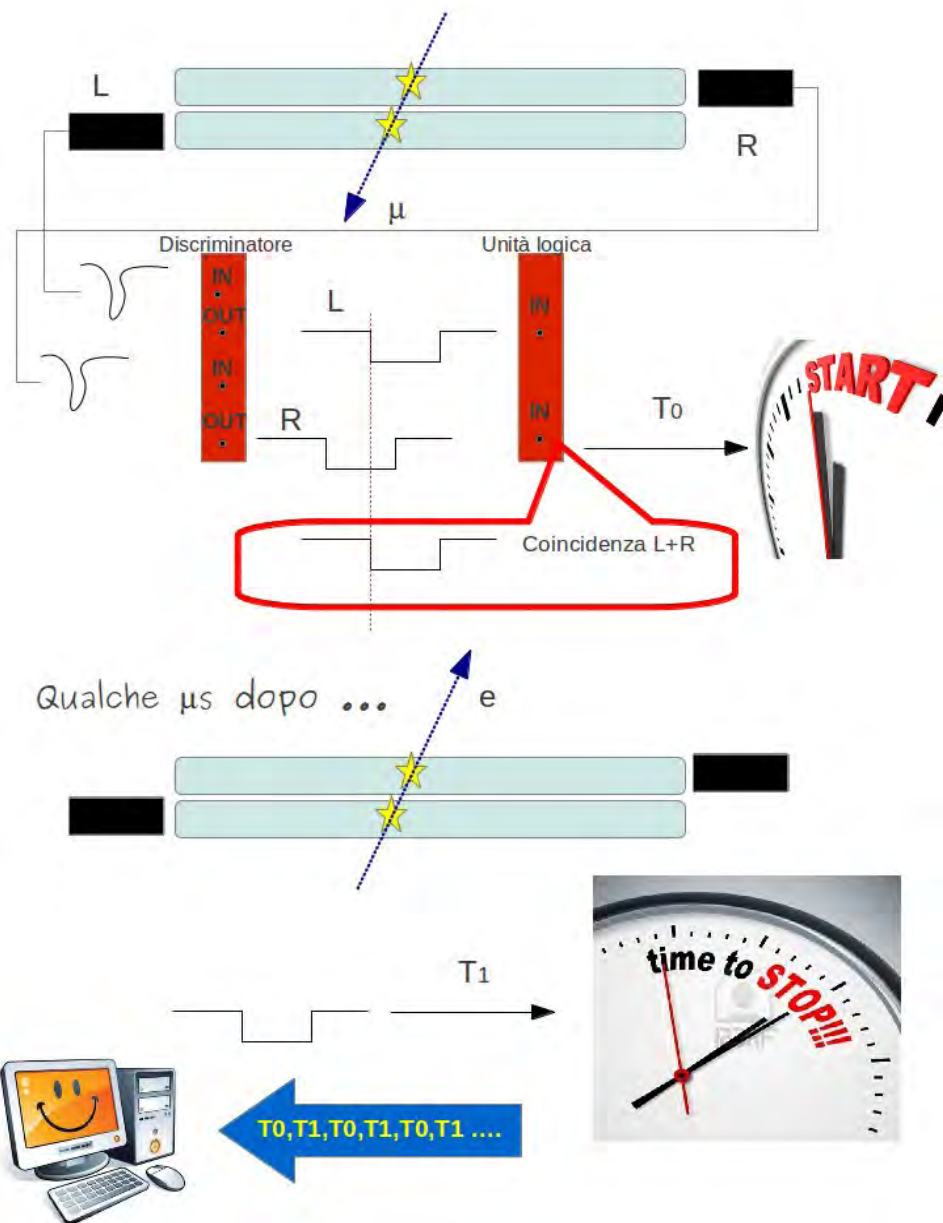


Figura 5: Schema dell'esperimento. Un muone attraversa il rivelatore. I segnali analogici (L e R) sono raccolti e mandati ad un discriminatore. I segnali NIM in uscita sono mandati ad una unità logica che forma il segnale di coincidenza. L'arrivo di questo segnale determina il  $T_0$  dell'evento. Il successivo passaggio di un elettrone determina il tempo  $T_1$ . Un computer registra la serie di dati  $T_0$  e  $T_1$  da vari eventi.

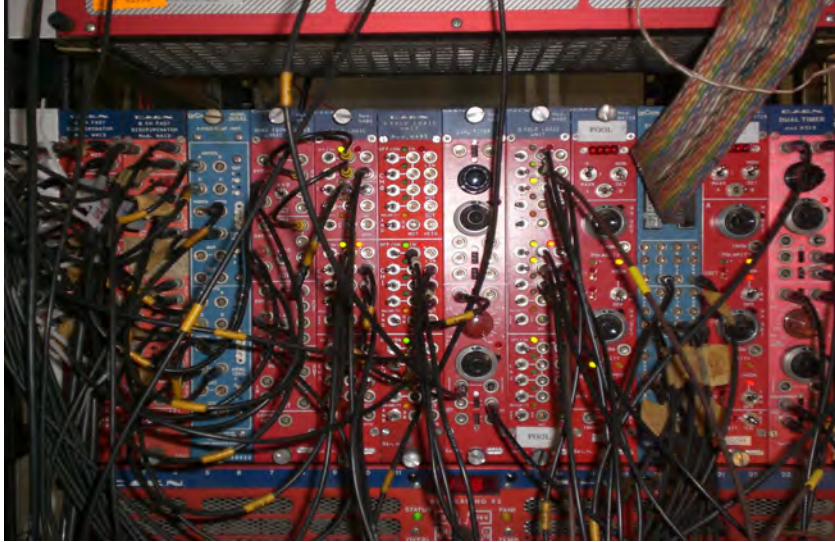


Figura 6: Discriminatori e coincidenze nel mondo reale.

## 5. ESTRAZIONE DELLA VITA MEDIA DAI DATI SPERIMENTALI

La funzione  $f(t; \tau)$  che descrive il fenomeno del decadimento di una particella instabile è ben nota:

$$n = f(t; \tau) dt = N_0 e^{-t/\tau} dt / \tau$$

dove  $N_0$  rappresenta il numero totale di particelle prima che decadano;  $n$  è il numero di quelle che decadono nel piccolo intervallo di tempo compreso tra  $t$  e  $t+dt$ . Il parametro  $\tau$  è la **vita media**.

Il significato di questa formula è il seguente: se all'istante iniziale ci sono  $N_0$  particelle, e ognuna di queste ha una probabilità  $dt/\tau$  di decadere in un tempo  $dt$ , dopo un tempo  $dt$  avremo  $N_0(1-dt/\tau)$  particelle; dopo un altro intervallo  $dt$ ,  $N_0(1-dt/\tau)^2$ , ecc. ecc.. Se  $dt/\tau=0.5$ , avremo quindi  $0.5 \times N_0$  per  $t=dt$ ,  $0.25 \times N_0$  per  $t=2dt$ ,  $0.125 \times N_0$  per  $t=3dt$  e così via, fino a valori molto piccoli come ad esempio  $0.00098 \times N_0$  per  $t=10dt$ . Questo è proprio il caratteristico andamento della funzione esponenziale

$$N_0 e^{-T/\tau} .$$

Sebbene sia nota la relazione funzionale che descrive il decadimento di una particella, non è a priori noto il valore della vita media  $\tau$  che va quindi misurato dai dati. La procedura che si segue è semplicemente quella di provare diversi valori dei parametri (nel nostro caso  $N_0$  e  $\tau$ ) finché la curva esponenziale non si sovrappone alla nostra distribuzione sperimentale (come quella in figura 4). Questa **procedura di adattamento** (“fit” in inglese) viene in genere fatta numericamente da un computer ma

può anche essere fatta analiticamente in alcuni casi semplici.

Per decidere quale sia il miglior adattamento (“fit”) e quanto esso sia “buono” si usa spesso il **test del  $\chi^2$**  (chi-quadro). Il  $\chi^2$  è la somma dei quadrati delle distanze della curva teorica dai dati sperimentali, distanza espressa in unità barre-di-errore  $\sigma_i$ , o in altri termini la somma dei quadrati dei **residui**:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{n_i^{obs} - f(t_i; \alpha) \Delta t}{\sigma_i} \right)^2$$

dove  $n_i^{obs}$  è il numero osservato di eventi tra il tempo  $t_i$  e  $t_i + \Delta t$  (i-esimo **bin**);  $N$  è il numero di osservazioni;  $f(t_i; \alpha) \Delta t$  è il numero **atteso** di eventi per il medesimo bin;  $\sigma_i$  è l'incertezza in quel bin, pari a  $\sigma_i = \sqrt{n_i^{obs}}$  per i semplici conteggi.

Se l'ipotesi teorica per l'andamento funzionale è corretta ci si aspetta di trovare un valore del  $\chi^2$  tale che

$$\chi^2 / dof \sim 1$$

dove i 'degrees of freedom',  $dof = (N - \# \text{parametri da determinare})$ . Un valore maggiore indica un disaccordo che va capito. Un valore minore è indice solitamente di una sovrastima degli errori  $\sigma_i$ .

Vediamo cosa vuol dire tutto questo in pratica. In figura 7 abbiamo graficato i dati ottenuti al Cosmic Ray Stand dopo aver sottratto il contributo dovuto al fondo continuo di raggi cosmici. Quindi abbiamo graficato la funzione esponenziale corrispondente a  $\tau = 1.2 \mu s$  (*attenzione! 1.2 non 2.2*).  $N_0$  è stato scelto quindi in modo da massimizzare l'accordo. Come si può vedere, i punti neri si discostano notevolmente dalla linea rossa. L'errore sui punti è rappresentato dalla distanza tra i trattini neri orizzontali sopra e i punti sperimentali. Possiamo intuire che il contributo dei **residui** al  $\chi^2$  totale sarà grande. In effetti, troviamo  $\chi^2 / dof = 660 / 32 \sim 20$  che è molto maggiore di 1.

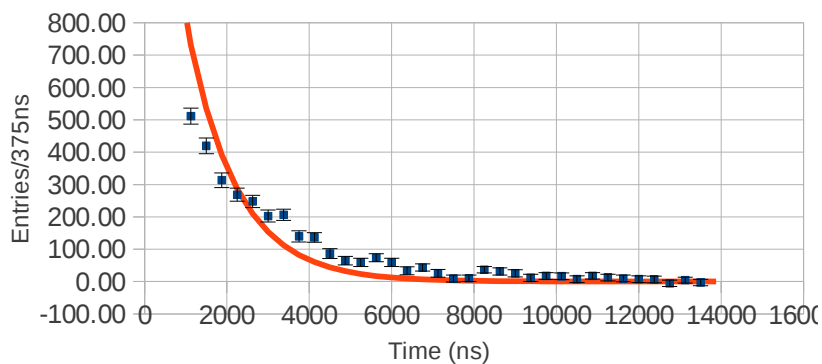


Figura 7: Curva esponenziale sovrapposta ai dati sperimentali nel caso in cui  $\tau = 1.2 \mu s$ . In questo caso si ha  $\chi^2 / dof = 660 / 32$ .

Al contrario, se prendiamo  $\tau=2.2 \mu\text{s}$ , l'accordo con i dati sperimentali migliora notevolmente: i residui sono molto più piccoli, ed abbiamo infatti  $\chi^2/\text{dof}=36/32\sim 1^1$ .

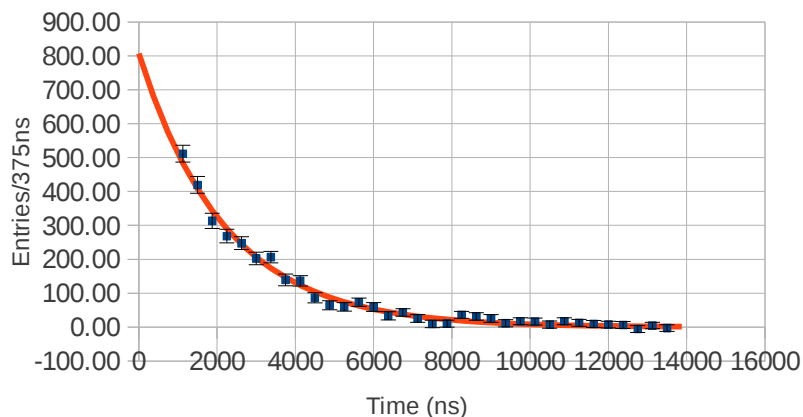


Figura 8: Distribuzione della differenza di tempi  $T_1-T_0$  dopo la sottrazione degli eventi di fondo. La linea rossa rappresenta la funzione esponenziale attesa per  $\tau=2.2 \mu\text{s}$ . In questo caso si ha  $\chi^2/\text{dof}=36/32$ .

In figura 9 abbiamo graficato il valore del  $\chi^2$  per diversi valori del parametro  $\tau$ . Si vede come la curva **raggiunge un minimo**. Questo ci permette di scegliere il valore del parametro più probabile.

Infine possiamo anche associargli un errore utilizzando la seguente semplice regola:

$$\chi^2(p + \sigma_p) = \chi^2_{\min} + 1$$

cioè, variando il parametro di una deviazione standard si ha la variazione del  $\chi^2$  di una unità.

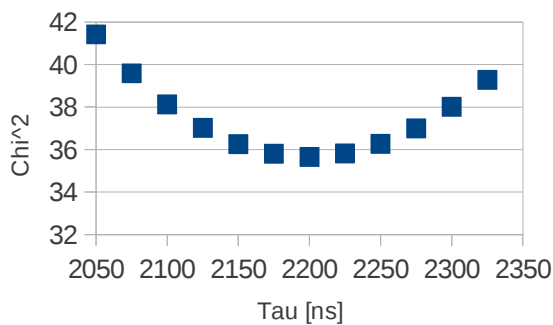


Figura 9: Distribuzione del  $\chi^2$  ottenuta per diversi valori del parametro  $\tau$ .

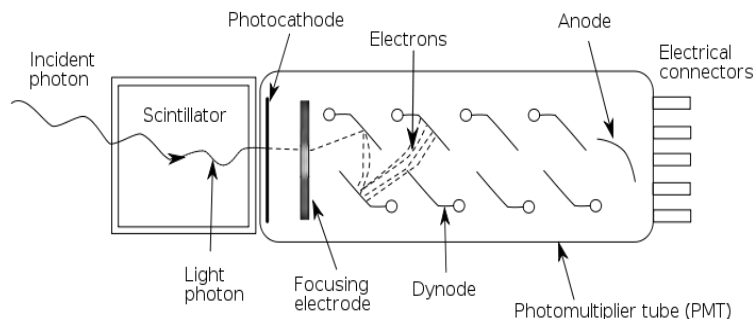
1 La variabile  $\chi^2$  ci permette anche di quantificare in termini probabilistici questo accordo. In questo caso ad esempio se ripetessimo l'esperimento avremmo una probabilità del 29% di ottenere un risultato peggiore, a causa delle sole fluttuazioni statistiche. Considerando che mediamente questo valore deve essere 50%, possiamo dire che l'accordo è buono e le differenze osservate sono compatibili con la natura stocastica del processo.

## 6. SCINTILLATORI e FOTOTUBI

Uno **scintillatore** è un materiale che riemette sotto forma di luce l'energia che viene rilasciata da una particella che lo attraversa. Nel caso di scintillatori plastici (organici) si ha tipicamente l'emissione di 1 fotone per 100 eV di energia rilasciata. Ad esempio, una particella carica rilascia all'incirca 2 MeV in uno spessore di 1 cm di scintillatore, pari quindi ad una emissione di circa 20,000 fotoni.

Per rivelare il passaggio di particelle, la luce così prodotta viene raccolta e trasformata in un segnale elettrico mediante dei **fotomoltiplicatori**.

Un fotomoltiplicatore (o fototubo) è una sorta di lampadina alla rovescia, dove entra luce dal “bulbo” ed esce corrente elettrica dal filo. Lo schema di funzionamento è mostrato nella figura accanto. I fotoni emessi dallo scintillatore



che arrivano all'ingresso (“bulbo”) del fototubo urtano contro gli elettroni di un sottile strato di materiale estraendoli e facendoli entrare nella zona di **moltiplicazione**.

Qui, gli elettroni risentono di forti campi elettrici che li accelerano, fino a farli urtare su degli elettrodi (**dinodi**) da cui scanzano a loro volta altri elettroni. Il processo si ripete per questi ultimi fino a creare una vera e propria valanga costituita da circa  $10^7$  elettroni. Questo genera tipicamente un segnale con una ampiezza di circa 100 mV.



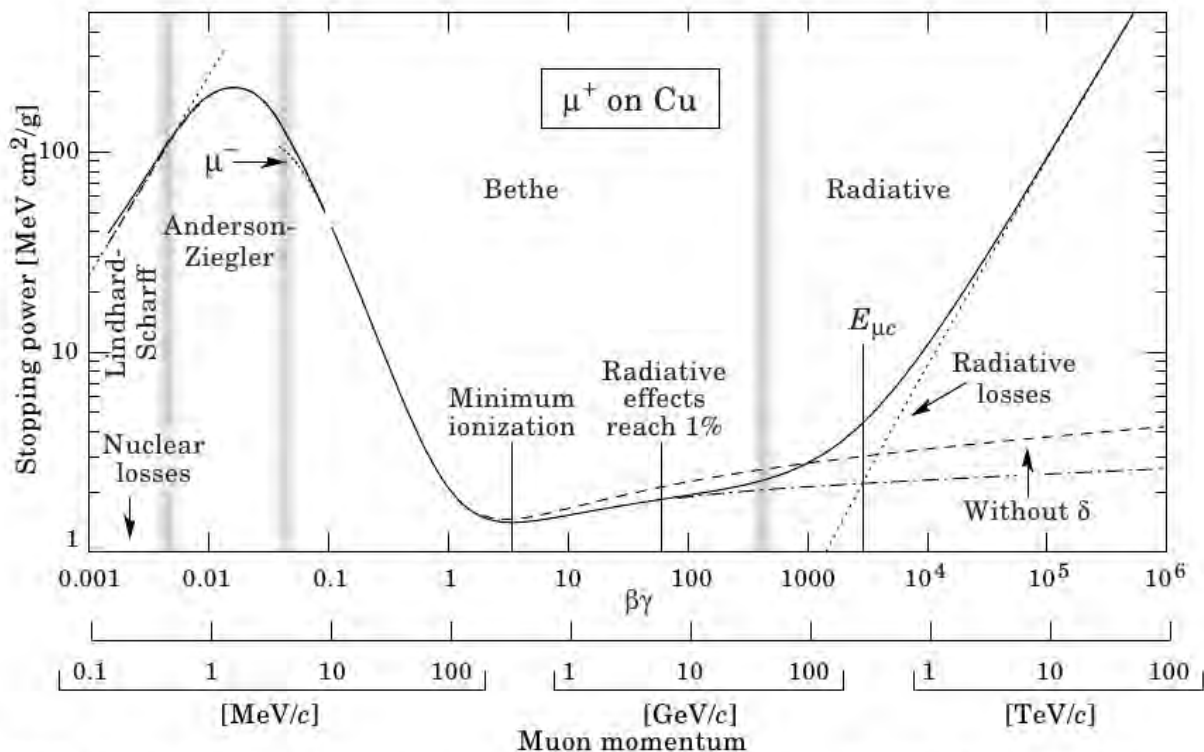
Figura 10: Retro di un fotomoltiplicatore. Il cavo rosso porta l'alta tensione (2 kV) mentre quello nero porta il segnale in uscita.

**Attenzione !!** Gli intensi campi elettrici sono attenuati applicando alte tensioni ai fototubi (circa 2 kV).

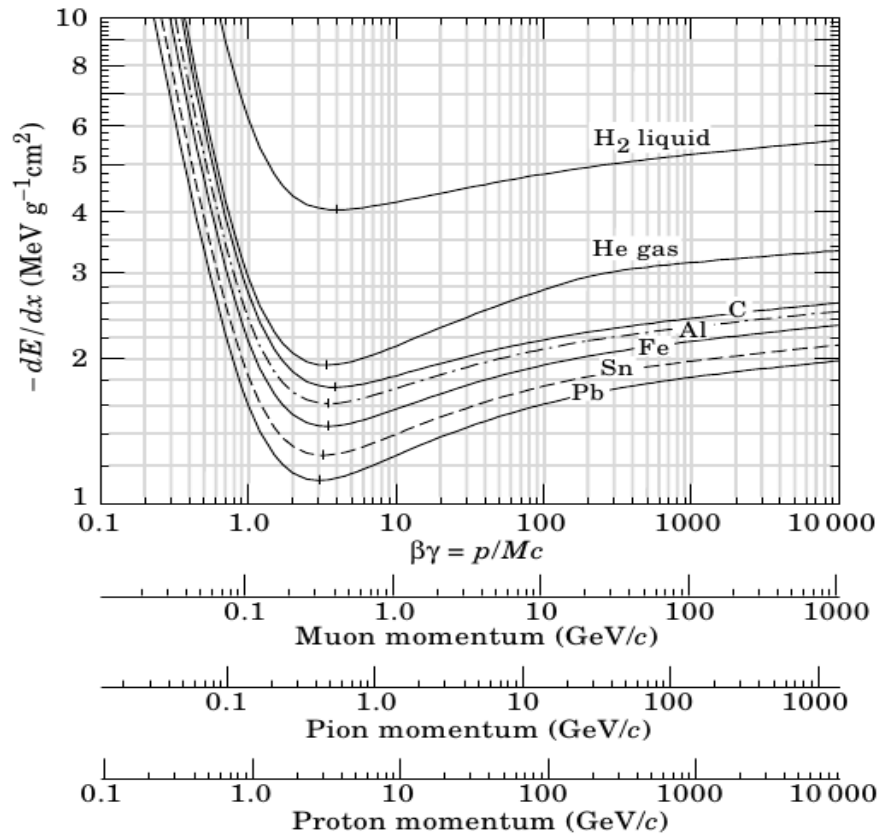
Queste sono portate mediante i **cavi rossi**. **Non toccare.**

## APPENDICE

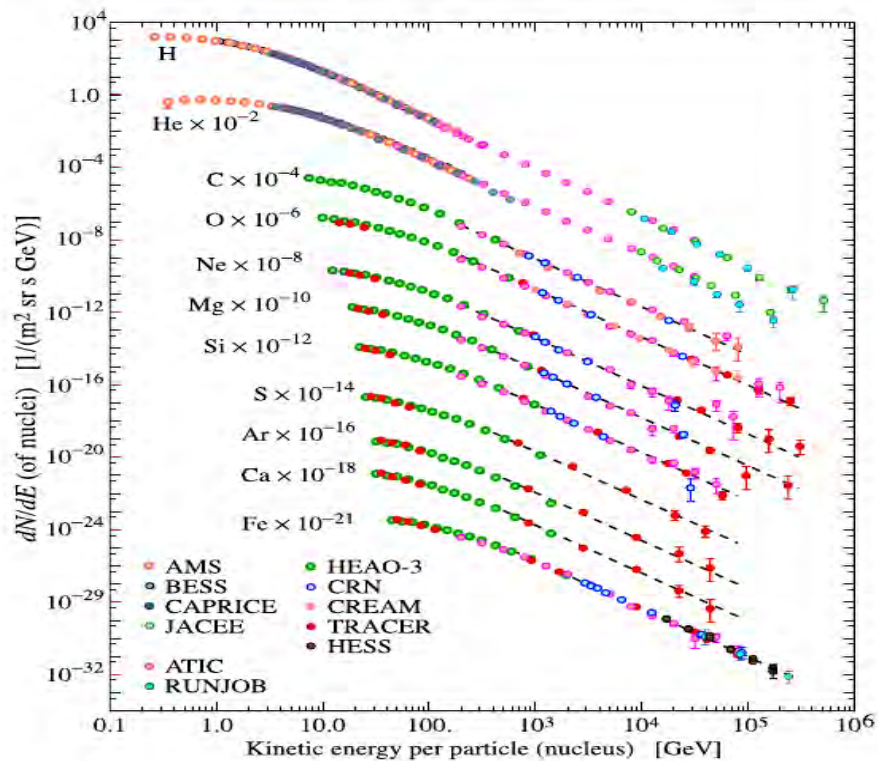
### 1) Perdita di energia nei materiali



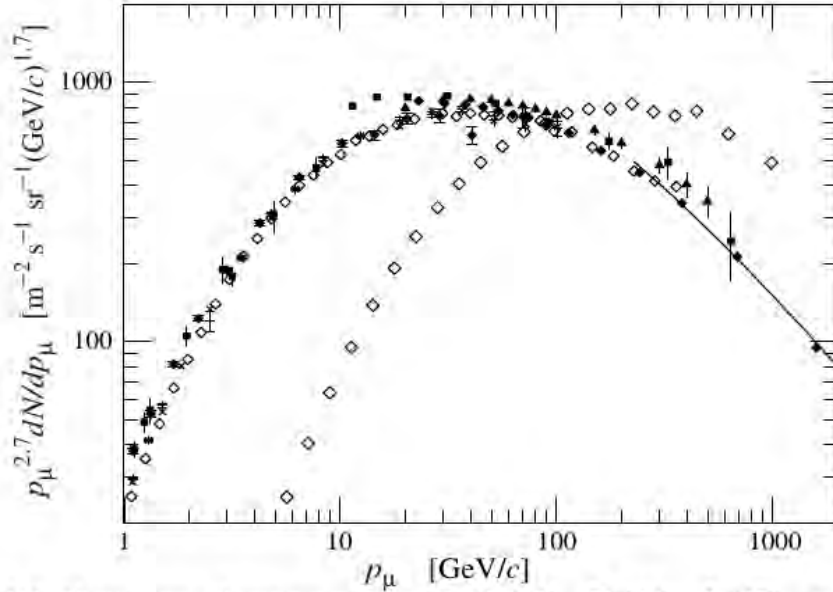
**Fig. 27.1:** Stopping power ( $= \langle -dE/dx \rangle$ ) for positive muons in copper as a function of  $\beta\gamma = p/Mc$  over nine orders of magnitude in momentum (12 orders of magnitude in kinetic energy). Solid curves indicate the total stopping power. Data below the break at  $\beta\gamma \approx 0.1$  are taken from ICRU 49 [4], and data at higher energies are from Ref. 5. Vertical bands indicate boundaries between different approximations discussed in the text. The short dotted lines labeled “ $\mu^-$ ” illustrate the “Barkas effect,” the dependence of stopping power on projectile charge at very low energies [6].



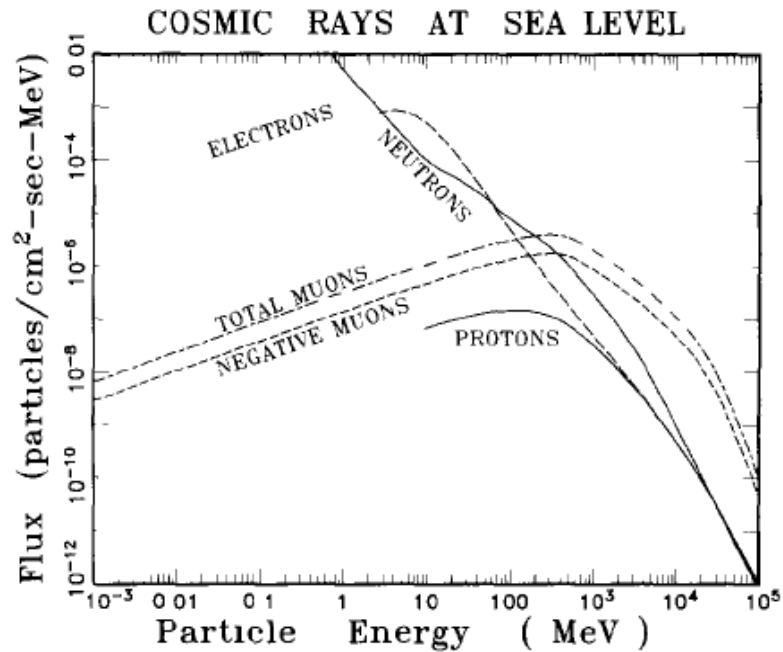
## 2) Flusso di raggi cosmici e spettro di energia







**Figure 24.4:** Spectrum of muons at  $\theta = 0^\circ$  ( $\diamond$  [41],  $\blacksquare$  [46],  $\blacktriangledown$  [47],  $\blacktriangle$  [48],  $\times$ ,  $+$  [43],  $\circ$  [44], and  $\bullet$  [45] and  $\theta = 75^\circ$   $\diamond$  [49]). The line plots the result from Eq. (24.4) for vertical showers.



**Fig 1** The flux of sea level cosmic rays at about  $40^\circ \text{N}$  geomagnetic latitude. These curves vary from those of ref 1 because of new data [3,4]. The low energy dotted curves for electrons and protons are not based on data, and may significantly change depending on local structures because these fluxes are mostly produced by nearby nuclear reactions.

## Il decadimento del muone nel Modello Standard

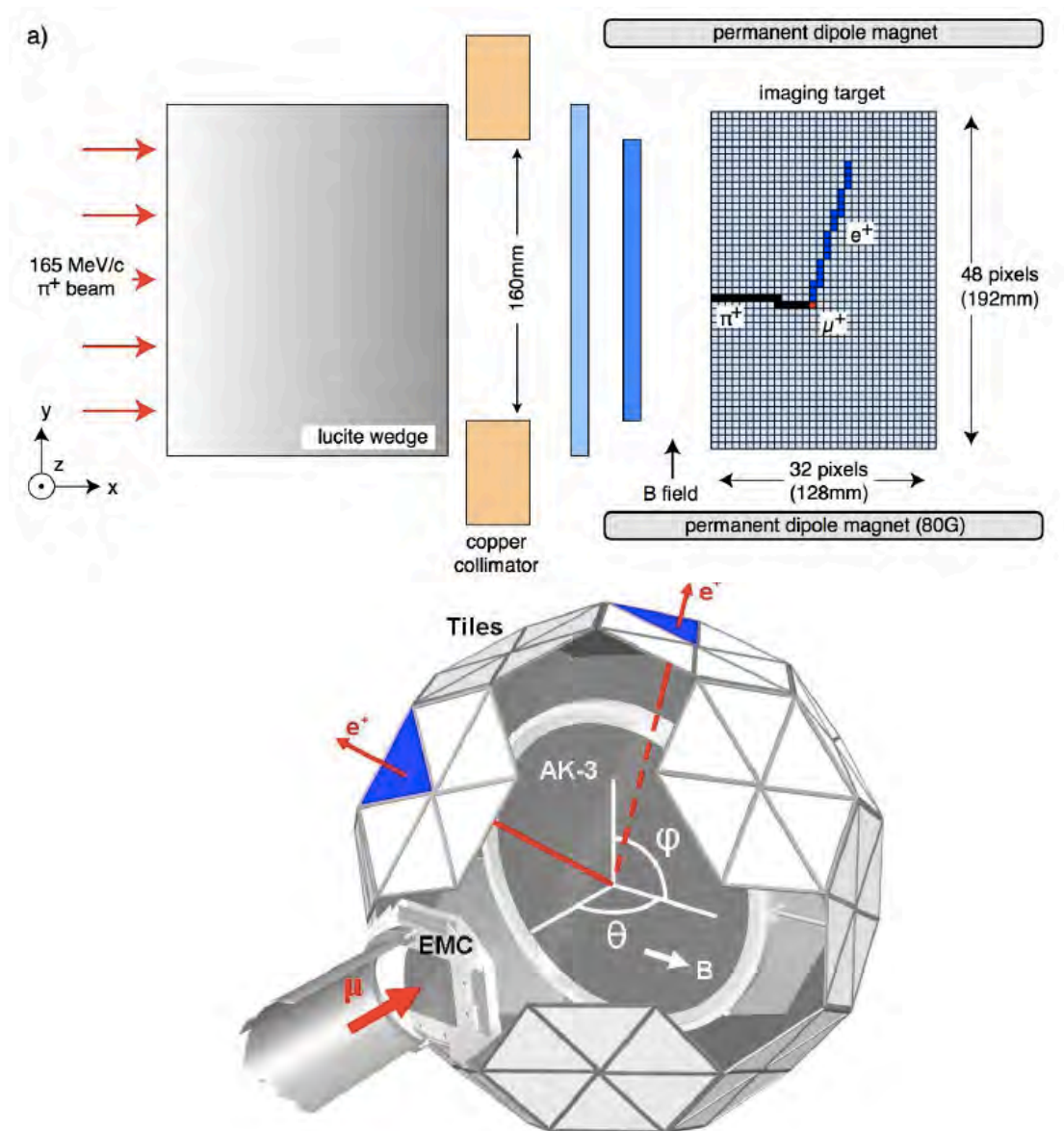
Il decadimento del muone e' un processo elettrodebole, mediato dal bosone vettore  $W^\pm$ . Lo Standard Model permette di calcolare la vita media del muone una volta fissato il valore della costante di accoppiamento elettrodebole, che e' uno dei parametri liberi della teoria. Dalle stesse relazioni si puo' ottenere la costante di accoppiamento utilizzando il valore della vita media misurato sperimentalmente con precisione relativa di 10 parti per milione ( $10 \text{ ppm} = 10^{-5}$ ).

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_F^2}{192\pi^3} m_\mu^5 (1 + \Delta q)$$

$$\tau_\mu = 2.197034(21) \times 10^{-6} \text{ s}$$

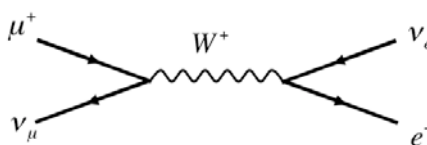
$$G_F = 1.166364(5) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

I due esperimenti piu' recenti, al PSI di Zurigo, che hanno misurato con estrema precisione la vita media del muone nel 2007 sono riportati schematicamente:

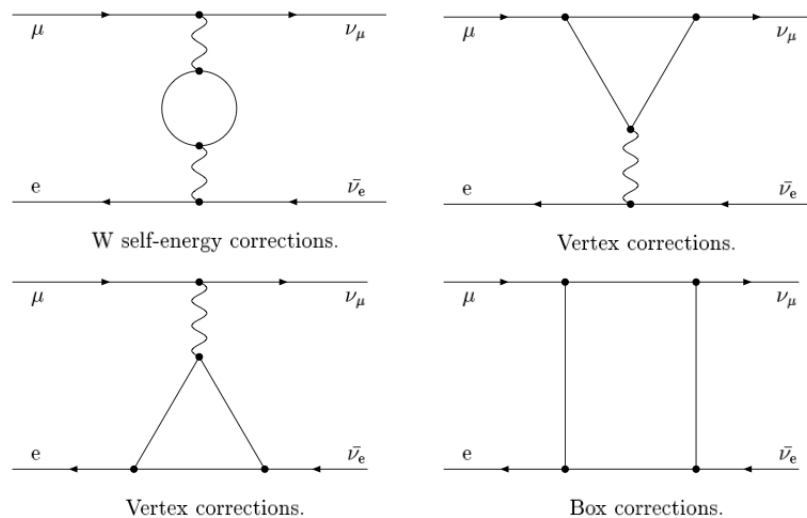


Dalle misure di FAST e  $\mu$ LAN, questi sono i nomi degli esperimenti, si e' ottenuta la migliore misura della costante di accoppiamento debole, la costante di Fermi, che caratterizza innumerevoli processi, dall'evoluzione stellare, all'emissione di energia solare, alle trasmutazioni nucleari, alle elusive interazioni dei neutrini.

Gli altri termini che bisogna conoscere, oltre alla vita media del  $\mu$ , per determinare la costante di Fermi sono la massa del muone e il contributo  $\Delta q$ . La massa del muone e' conosciuta con una precisione di 0.04 parti per milione (0.04 ppm=  $4 \times 10^{-8}$ ) mentre  $\Delta q = 4.2753 \times 10^{-3}$  e' una piccola correzione ottenuta da calcoli teorici che hanno valutato l'incidenza sul decadimento di processi diversi da quello dominante dell'interazione tra muone e bosone W.



*Schema del processo dominante che determina il decadimento del muone*



*Schema di alcuni dei processi sub-dominanti che contribuiscono al decadimento del muone e sono valutati dal termine correttivo  $\Delta q$*

### La cattura dei muoni e gli atomi muonici

Le misure di precisione della massa dei muoni si ottengono dalle linee spettrali degli atomi muonici, dove un elettrone e' rimpiazzato da un muone. Gli studi di spettroscopia piu' recenti condotti su questi atomi, sono stati ottenuti nel laboratorio di Los Alamos, nel New Mexico, USA.

I muoni di carica negativa che vengono catturati negli atomi sottostanno poi a due processi competitivi, l'interazione con i componenti, neutroni e protoni, dei nuclei e l'accoppiamento col bosone W che origina il fenomeno del decadimento.

Questo perché la cattura atomica (processo elettromagnetico) "avvicina" i muoni ai nuclei tanto che per i muoni catturati, e solo per questi, diventano possibili processi di interazione debole con la materia nucleare.

Per i muoni negativi si misura quindi una costante di decadimento effettiva

$$\frac{1}{\tau_{eff}} = \frac{1}{\tau_c} + \frac{1}{\tau_\mu}$$

e una vita media inferiore al valore nel vuoto e al valore misurato col campione di muoni positivi, che non sono soggetti alla cattura atomica perché di carica opposta agli elettroni e quindi respinti dal campo elettromagnetico dei nuclei.

Nel Carbonio, ad esempio, la vita media effettiva misurata dal campione di muoni negativi, è inferiore del 10% alla vita media del muone,  $\tau_\mu$ .

# L'oscilloscopio

L'oscilloscopio (figura 1) è uno strumento di misura elettronico che consente di visualizzare, su un grafico bidimensionale, l'andamento temporale di un segnale elettrico. Il segnale da misurare viene introdotto nell'oscilloscopio attraverso un apposito connettore: un cavo coassiale BNC (figura 2), che deve essere inserito in uno degli ingressi indicati in rosso in figura 1.



Figura 1: Oscilloscopio.



Figura 2: Cavo coassiale BNC.

Ciascun ingresso viene detto canale. Un oscilloscopio con 4 ingressi ossia a quattro canali, permette di visualizzare fino a 4 segnali elettrici contemporaneamente. In figura 3 è illustrato un esempio di schermata sulla quale sono visualizzati tre segnali differenti (canale 1 in giallo, canale 2 in verde, canale 3 in rosa).

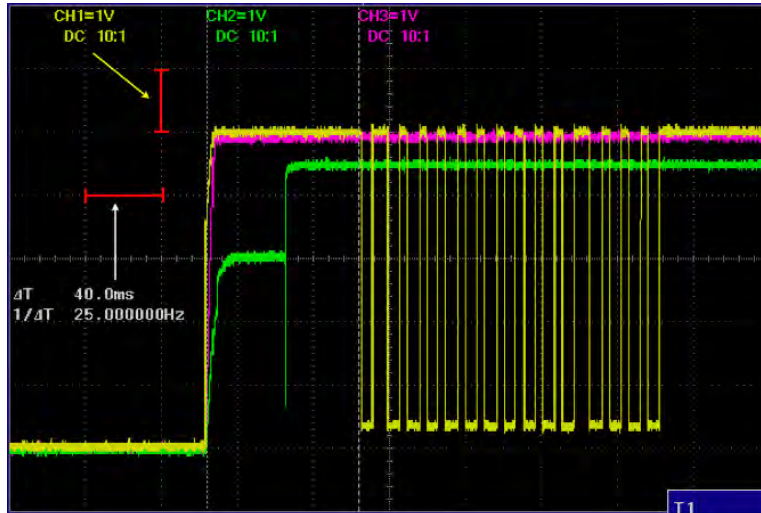


Figura 3: Esempio di segnali visualizzati sull'oscilloscopio.



Figura 4: Manopole necessarie per modificare la scala orizzontale (evidenziate in rosso) e verticale (evidenziate in blu) sullo schermo dell'oscilloscopio.

L'oscilloscopio si utilizza per verificare il corretto passaggio dei segnali elettrici all'interno della catena di acquisizione e per caratterizzarli, misurandone sia l'ampiezza (data dalla tensione) che la larghezza temporale.

L'asse orizzontale dello schermo rappresenta il tempo, l'asse verticale la tensione. All'immagine che appare sull'oscilloscopio è sovrapposto un reticolo, ogni intervallo del reticolo è chiamato divisione e ha una dimensione caratteristica che può essere modificata a piacere. Nel caso illustrato in figura 3, la scala orizzontale dei tempi è data da 40 ms per divisione, la scala verticale della tensione è espressa da 1V per divisione (per tutti e tre i canali). Un segnale alto 3 divisioni e largo 2 sarà quindi caratterizzato da un'ampiezza di 3 volt e una durata di 80 millisecondi. La scala orizzontale è la stessa per tutti i canali e la frazione di secondi per divisione può essere modificata utilizzando le due manopole cerchiare in rosso in figura 4. La scala verticale può essere invece diversa per ciascun segnale visualizzato sullo schermo, l'unità di volt per divisione può essere modificata utilizzando le quattro manopole cerchiare in blu in figura 4, dove ciascuna agisce sul canale corrispondente.

## Il Trigger

La base dei tempi dell'oscilloscopio non è sincronizzata con il segnale che si vuole osservare, questo impedisce di avere una traccia stabile e ferma, la traccia infatti fluttuerà da destra a sinistra e viceversa. Per ottenere un segnale stabile gli oscilloscopi dispongono di una funzione chiamata *trigger*. Grazie al trigger è possibile sincronizzare la visualizzazione del segnale, rendendolo perfettamente stabile. Il compito del trigger è quello di far sì che la partenza della scansione del segnale sia sincronizzata con un preciso livello di soglia del segnale da analizzare.



Figura 5: Freccia che indica sullo schermo il livello di trigger (evidenziata in rosso) e valore numerico corrispondente (sempre evidenziato in rosso).

Appena l'ampiezza del segnale in ingresso supera un determinato valore della tensione (positivo o negativo a scelta, a seconda delle caratteristiche del segnale che si vuole analizzare), il trigger fa partire la scansione da sinistra a destra,

dopo la quale l'oscilloscopio rimane in "fermo immagine", in attesa dell'arrivo di un nuovo segnale.

Il trigger è rappresentato sullo schermo dell'oscilloscopio da una freccia, che indica il livello di soglia prescelto, il cui valore numerico è riportato in basso. Livello di trigger e corrispondente valore di soglia sono evidenziati in rosso nella figura 5, in cui è illustrato il caso di un segnale negativo.

La soglia del trigger si può variare a seconda delle esigenze agendo sulla manopola evidenziata in rosso in figura 6. Inoltre, premendo il pulsante MENU è possibile modificare alcune caratteristiche del trigger, ad esempio decidere se far partire la scansione del segnale in corrispondenza del suo fronte di salita o del suo fronte di discesa.



Figura 6: Manopola con la quale è possibile modificare il livello di trigger (evidenziata in rosso).



## IL SISTEMA DI ACQUISIZIONE

Nell'ambito della fisica delle alte energie, uno degli esperimenti più semplici consiste nel contare il numero di eventi provenienti da un rivelatore durante un tempo prefissato (Gate).

Per effettuare questa misura sono necessari, oltre a uno o più rivelatori, anche dei moduli di elettronica che consentono di effettuare un trattamento adeguato del segnale, generato dal passaggio di una particella.

La catena di acquisizione tipica per questo tipo di esperimento è riportata nella figura (1).

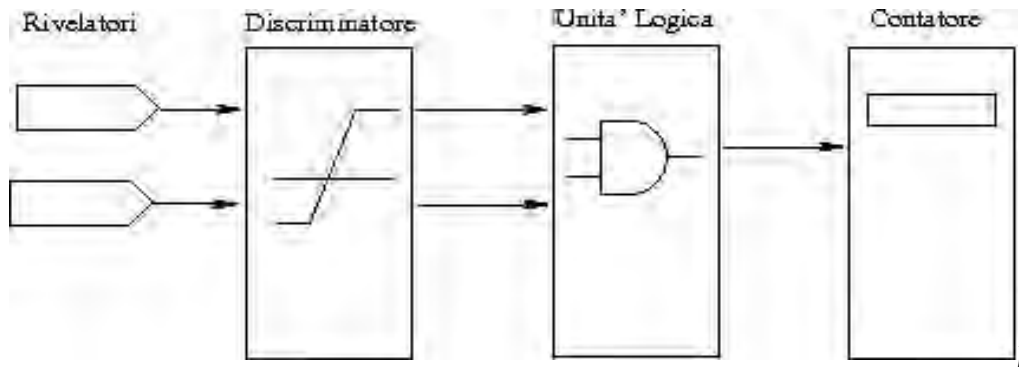


figura 1: Catena di acquisizione

Come si può vedere è composta oltre che dai rivelatori, anche da un discriminatore, da un'unità logica ed infine da un contatore.

Passeremo ora alla descrizione dei singoli blocchi.

### Discriminatore

È un dispositivo fondamentale nei sistemi di acquisizione di qualunque complessità. I segnali elettrici che escono dai rivelatori sono di tipo analogico, cioè la loro ampiezza (tensione e corrente) varia in modo continuo tra un valore massimo ed un valore minimo. Il discriminatore si occupa di convertire i segnali analogici in segnali digitali. Inoltre, tramite l'impostazione di una soglia adeguata, consente di eliminare una parte del rumore elettronico che normalmente è sommato al segnale utile proveniente dal rivelatore.

Come si può vedere dalla figura (2) il discriminatore è un comparatore che confronta il valore di tensione del segnale di ingresso con una tensione di soglia, quando il valore di quest'ultima viene superato l'uscita commuta tra lo zero logico (0V) e l'uno logico (-800mV nello standard NIM). La durata del segnale di uscita può essere impostata manualmente dall'utente.

Tutti i segnali la cui ampiezza è più piccola della soglia impostata non provocano nessun cambiamento dell'uscita. Quindi, come detto precedentemente, impostando ad un valore opportuno la tensione di soglia si può eliminare parte del rumore sovrapposto al segnale analogico proveniente dal rivelatore.

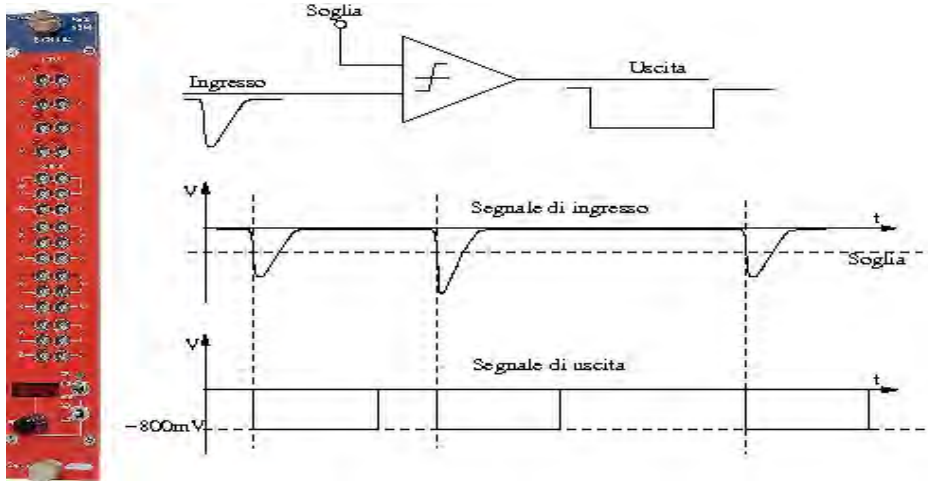
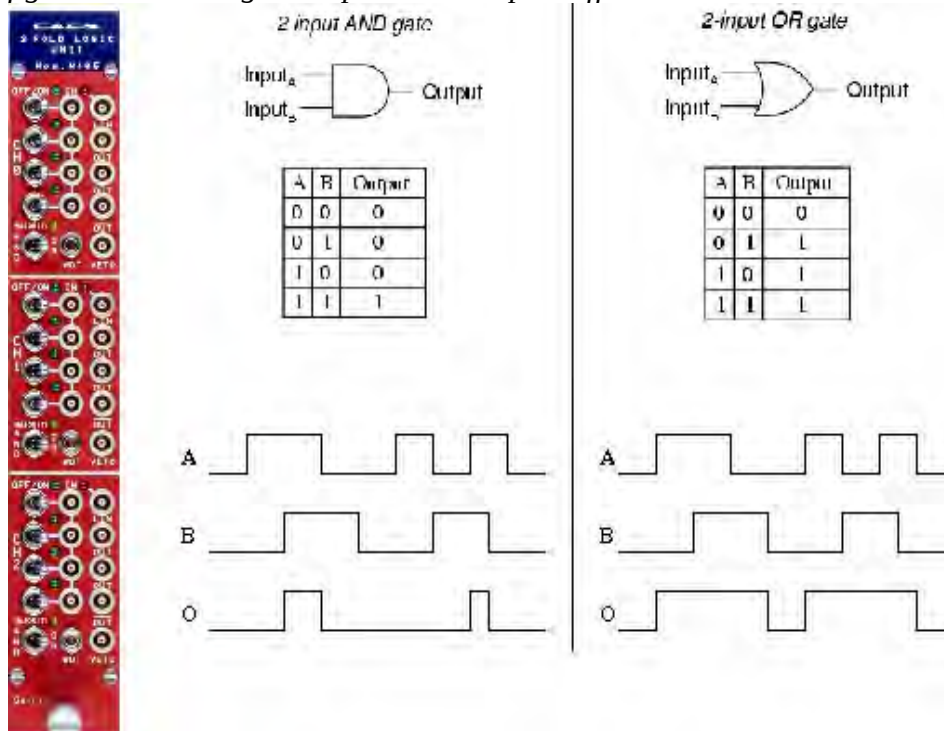


figura 2: Schema di funzionamento di un discriminatore a singola

Gli impulsi digitali in uscita dal discriminatore possono essere ora inviati a dei moduli che possono effettuare delle operazioni logiche su di loro.

### Unita' logica

figura 3: Unita' logica e operazioni che puo' effettuare



All'unita' logica vengono mandate in ingresso le uscite digitali dei discriminatori e su di esse effettua delle operazioni di AND e OR logico. Nella figura (3) e' riportata una immagine dell'unita' logica, i simboli delle operazioni che puo' effettuare (AND e OR), le tabelle delle verita' e un esempio dei diagrammi temporali dei segnali di ingresso e uscita.

Nell'operazione di AND logico di due segnali (detta anche coincidenza) l'uscita assume valore '1' solo quando i due ingressi sono contemporaneamente a '1', in tutti gli altri casi e' '0'. In altri termini,

l'uscita e' il prodotto logico degli ingressi.

Invece nell'operazione di OR logico di due segnali l'uscita assume valore '1' quando uno o l'altro dei due segnali assume valore '1', va a '0' solo quando entrambi gli ingressi sono a '0' contemporaneamente. In altri termini, l'uscita e' la somma logica degli ingressi.

### Scaler (contatore)

Per contare il numero di impulsi che escono, ad esempio, dall'unita' logica, si utilizza un modulo chiamato "scaler". Questo ha al suo interno quattro contatori e un orologio. Gli impulsi di tensione generati dalla unita' logica o dai discriminatori vengono mandati in ingresso ai contatori. Ogni volta che c'e' un impulso il contatore si incrementa di una unita'. L'orologio interno al modulo viene usato per effettuare il conteggio in una determinata finestra temporale impostabile dall'utente. In questo modo e' possibile determinare le frequenze di arrivo degli impulsi nel contatore.



figura 4: Modulo contatore: scaler

## 6. ATOMIC AND NUCLEAR PROPERTIES OF MATERIALS

**Table 6.1** Abridged from [pdg.lbl.gov/AtomicNuclearProperties](http://pdg.lbl.gov/AtomicNuclearProperties) by D. E. Groom (2007). See web pages for more detail about entries in this table including chemical formulae, and for several hundred other entries. Quantities in parentheses are for NTP (20° C and 1 atm), and square brackets indicate quantities evaluated at STP. Boiling points are at 1 atm. Refractive indices  $n$  are evaluated at the sodium D line blend (589.2 nm); values  $\gg 1$  in brackets are for  $(n - 1) \times 10^6$  (gases).

Material	$Z$	$A$	$\langle Z/A \rangle$	Nucl.coll. length $\lambda_T$ {g cm <sup>-2</sup> }	Nucl.inter. length $\lambda_I$ {g cm <sup>-2</sup> }	Rad.len. $X_0$ {g cm <sup>-2</sup> }	$dE/dx _{\min}$ { MeV g <sup>-1</sup> cm <sup>2</sup> }	Density {g cm <sup>-3</sup> } {(gℓ <sup>-1</sup> )}	Melting point (K)	Boiling point (K)	Refract. index (@ Na D)
H <sub>2</sub>	1	1.00794(7)	0.99212	42.8	52.0	63.04	(4.103)	0.071(0.084)	13.81	20.28	1.11[132.]
D <sub>2</sub>	1	2.01410177803(8)	0.49650	51.3	71.8	125.97	(2.053)	0.169(0.168)	18.7	23.65	1.11[138.]
He	2	4.002602(2)	0.49967	51.8	71.0	94.32	(1.937)	0.125(0.166)		4.220	1.02[35.0]
Li	3	6.941(2)	0.43221	52.2	71.3	82.78	1.639	0.534	453.6	1615.	
Be	4	9.012182(3)	0.44384	55.3	77.8	65.19	1.595	1.848	1560.	2744.	
C diamond	6	12.0107(8)	0.49955	59.2	85.8	42.70	1.725	3.520			2.42
C graphite	6	12.0107(8)	0.49955	59.2	85.8	42.70	1.742	2.210			
N <sub>2</sub>	7	14.0067(2)	0.49976	61.1	89.7	37.99	(1.825)	0.807(1.165)	63.15	77.29	1.20[298.]
O <sub>2</sub>	8	15.9994(3)	0.50002	61.3	90.2	34.24	(1.801)	1.141(1.332)	54.36	90.20	1.22[271.]
F <sub>2</sub>	9	18.9984032(5)	0.47372	65.0	97.4	32.93	(1.676)	1.507(1.580)	53.53	85.03	[195.]
Ne	10	20.1797(6)	0.49555	65.7	99.0	28.93	(1.724)	1.204(0.839)	24.56	27.07	1.09[67.1]
Al	13	26.9815386(8)	0.48181	69.7	107.2	24.01	1.615	2.699	933.5	2792.	
Si	14	28.0855(3)	0.49848	70.2	108.4	21.82	1.664	2.329	1687.	3538.	3.95
Cl <sub>2</sub>	17	35.453(2)	0.47951	73.8	115.7	19.28	(1.630)	1.574(2.980)	171.6	239.1	[773.]
Ar	18	39.948(1)	0.45059	75.7	119.7	19.55	(1.519)	1.396(1.662)	83.81	87.26	1.23[281.]
Ti	22	47.867(1)	0.45961	78.8	126.2	16.16	1.477	4.540	1941.	3560.	
Fe	26	55.845(2)	0.46557	81.7	132.1	13.84	1.451	7.874	1811.	3134.	
Cu	29	63.546(3)	0.45636	84.2	137.3	12.86	1.403	8.960	1358.	2835.	
Ge	32	72.64(1)	0.44053	86.9	143.0	12.25	1.370	5.323	1211.	3106.	
Sn	50	118.710(7)	0.42119	98.2	166.7	8.82	1.263	7.310	505.1	2875.	
Xe	54	131.293(6)	0.41129	100.8	172.1	8.48	(1.255)	2.953(5.483)	161.4	165.1	1.39[701.]
W	74	183.84(1)	0.40252	110.4	191.9	6.76	1.145	19.300	3695.	5828.	
Pt	78	195.084(9)	0.39983	112.2	195.7	6.54	1.128	21.450	2042.	4098.	
Au	79	196.966569(4)	0.40108	112.5	196.3	6.46	1.134	19.320	1337.	3129.	
Pb	82	207.2(1)	0.39575	114.1	199.6	6.37	1.122	11.350	600.6	2022.	
U	92	[238.02891(3)]	0.38651	118.6	209.0	6.00	1.081	18.950	1408.	4404.	
Air (dry, 1 atm)			0.49919	61.3	90.1	36.62	(1.815)	(1.205)		78.80	
Shielding concrete			0.50274	65.1	97.5	26.57	1.711	2.300			
Borosilicate glass (Pyrex)			0.49707	64.6	96.5	28.17	1.696	2.230			
Lead glass			0.42101	95.9	158.0	7.87	1.255	6.220			
Standard rock			0.50000	66.8	101.3	26.54	1.688	2.650			
Methane (CH <sub>4</sub> )			0.62334	54.0	73.8	46.47	(2.417)	(0.667)	90.68	111.7	[444.]
Ethane (C <sub>2</sub> H <sub>6</sub> )			0.59861	55.0	75.9	45.66	(2.304)	(1.263)	90.36	184.5	
Propane (C <sub>3</sub> H <sub>8</sub> )			0.58962	55.3	76.7	45.37	(2.262)	0.493(1.868)	85.52	231.0	
Butane (C <sub>4</sub> H <sub>10</sub> )			0.59497	55.5	77.1	45.23	(2.278)	(2.489)	134.9	272.6	
Octane (C <sub>8</sub> H <sub>18</sub> )			0.57778	55.8	77.8	45.00	2.123	0.703	214.4	398.8	
Paraffin (CH <sub>3</sub> (CH <sub>2</sub> ) <sub>n</sub> ≈23CH <sub>3</sub> )			0.57275	56.0	78.3	44.85	2.088	0.930			
Nylon (type 6, 6/6)			0.54790	57.5	81.6	41.92	1.973	1.18			
Polycarbonate (Lexan)			0.52697	58.3	83.6	41.50	1.886	1.20			
Polyethylene ([CH <sub>2</sub> CH <sub>2</sub> ] <sub>n</sub> )			0.57034	56.1	78.5	44.77	2.079	0.89			
Polyethylene terephthalate (Mylar)			0.52037	58.9	84.9	39.95	1.848	1.40			
Polyimide film (Kapton)			0.51264	59.2	85.5	40.58	1.820	1.42			
Polymethylmethacrylate (acrylic)			0.53937	58.1	82.8	40.55	1.929	1.19			1.49
Polypropylene			0.55998	56.1	78.5	44.77	2.041	0.90			
Polystyrene ([C <sub>6</sub> H <sub>5</sub> CHCH <sub>2</sub> ] <sub>n</sub> )			0.53768	57.5	81.7	43.79	1.936	1.06			1.59
Polytetrafluoroethylene (Teflon)			0.47992	63.5	94.4	34.84	1.671	2.20			
Polyvinyltoluene			0.54141	57.3	81.3	43.90	1.956	1.03			1.58
Aluminum oxide (sapphire)			0.49038	65.5	98.4	27.94	1.647	3.970	2327.	3273.	1.77
Barium fluoride (BaF <sub>2</sub> )			0.42207	90.8	149.0	9.91	1.303	4.893	1641.	2533.	1.47
Bismuth germanate (BGO)			0.42065	96.2	159.1	7.97	1.251	7.130	1317.		2.15
Carbon dioxide gas (CO <sub>2</sub> )			0.49989	60.7	88.9	36.20	1.819	(1.842)			[449.]
Solid carbon dioxide (dry ice)			0.49989	60.7	88.9	36.20	1.787	1.563	Sublimes at 194.7 K		
Cesium iodide (CsI)			0.41569	100.6	171.5	8.39	1.243	4.510	894.2	1553.	1.79
Lithium fluoride (LiF)			0.46262	61.0	88.7	39.26	1.614	2.635	1121.	1946.	1.39
Lithium hydride (LiH)			0.50321	50.8	68.1	79.62	1.897	0.820	965.		
Lead tungstate (PbWO <sub>4</sub> )			0.41315	100.6	168.3	7.39	1.229	8.300	1403.		2.20
Silicon dioxide (SiO <sub>2</sub> , fused quartz)			0.49930	65.2	97.8	27.05	1.699	2.200	1986.	3223.	1.46
Sodium chloride (NaCl)			0.55509	71.2	110.1	21.91	1.847	2.170	1075.	1738.	1.54
Sodium iodide (NaI)			0.42697	93.1	154.6	9.49	1.305	3.667	933.2	1577.	1.77
Water (H <sub>2</sub> O)			0.55509	58.5	83.3	36.08	1.992	1.000(0.756)	273.1	373.1	1.33
Silica aerogel			0.50093	65.0	97.3	27.25	1.740	0.200	(0.03 H <sub>2</sub> O, 0.97 SiO <sub>2</sub> )		

Material	Dielectric constant ( $\kappa = \epsilon/\epsilon_0$ ) ( ) is $(\kappa-1)\times 10^6$ for gas	Young's modulus [ $10^6$ psi]	Coeff. of thermal expansion [ $10^{-6}$ cm/cm- $^{\circ}$ C]	Specific heat [cal/g- $^{\circ}$ C]	Electrical resistivity [ $\mu\Omega$ cm(@ $^{\circ}$ C)]	Thermal conductivity [cal/cm- $^{\circ}$ C-sec]
H <sub>2</sub>	(253.9)	—	—	—	—	—
He	(64)	—	—	—	—	—
Li	—	—	56	0.86	8.55(0 $^{\circ}$ )	0.17
Be	—	37	12.4	0.436	5.885(0 $^{\circ}$ )	0.38
C	—	0.7	0.6–4.3	0.165	1375(0 $^{\circ}$ )	0.057
N <sub>2</sub>	(548.5)	—	—	—	—	—
O <sub>2</sub>	(495)	—	—	—	—	—
Ne	(127)	—	—	—	—	—
Al	—	10	23.9	0.215	2.65(20 $^{\circ}$ )	0.53
Si	11.9	16	2.8–7.3	0.162	—	0.20
Ar	(517)	—	—	—	—	—
Ti	—	16.8	8.5	0.126	50(0 $^{\circ}$ )	—
Fe	—	28.5	11.7	0.11	9.71(20 $^{\circ}$ )	0.18
Cu	—	16	16.5	0.092	1.67(20 $^{\circ}$ )	0.94
Ge	16.0	—	5.75	0.073	—	0.14
Sn	—	6	20	0.052	11.5(20 $^{\circ}$ )	0.16
Xe	—	—	—	—	—	—
W	—	50	4.4	0.032	5.5(20 $^{\circ}$ )	0.48
Pt	—	21	8.9	0.032	9.83(0 $^{\circ}$ )	0.17
Pb	—	2.6	29.3	0.038	20.65(20 $^{\circ}$ )	0.083
U	—	—	36.1	0.028	29(20 $^{\circ}$ )	0.064

**Table 4.1.** Revised 2011 by D.E. Groom (LBNL), and E. Bergren. Atomic weights of stable elements are adapted from the Commission on Isotopic Abundances and Atomic Weights, "Atomic Weights of the Elements 2007," <http://www.chem.qmul.ac.uk/iupac/AtWt/>. The atomic number (top left) is the number of protons in the nucleus. The atomic mass (bottom) of a stable elements is weighted by isotopic abundances in the Earth's surface. If the element has no stable isotope, the atomic mass (in parentheses) of the most stable isotope currently known is given. In this case the mass is from <http://www.nndc.bnl.gov/amdc/masstable/Ame2003/mass.mas03> and the longest-lived isotope is from [www.nndc.bnl.gov/ensdf/za\\_form.jsp](http://www.nndc.bnl.gov/ensdf/za_form.jsp). The exceptions are Th, Pa, and U, which do have characteristic terrestrial compositions. Atomic masses are relative to the mass of  $^{12}\text{C}$ , defined to be exactly 12 unified atomic mass units (u) (approx. g/mole). Relative isotopic abundances often vary considerably, both in natural and commercial samples; this is reflected in the number of significant figures given. IUPAC officially accepted elements 114 and 116 and gave them official status in June, 2011, and in December, 2011, provisionally accepted the names flerovium (Fl) and livermorium (Lv), respectively. It does not accept the claims for elements 113, 115, and 118 as conclusive at this time.

1 IA																				18 VIIIA	
1 H Hydrogen 1.00794																	2 He Helium 4.002602				
<b>PERIODIC TABLE OF THE ELEMENTS</b>																					
3 Li Lithium 6.941	4 Be Beryllium 9.012182															5 B Boron 10.811	6 C Carbon 12.0107	7 N Nitrogen 14.0067	8 O Oxygen 15.9994	9 F Fluorine 18.9984032	10 Ne Neon 20.1797
11 Na Sodium 22.98976928	12 Mg Magnesium 24.3050	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8	9 VIII	10	11 IB	12 IIB	13 Al Aluminum 26.9815386	14 Si Silicon 28.0855	15 P Phosph. 30.973762	16 S Sulfur 32.065	17 Cl Chlorine 35.453	18 Ar Argon 39.948				
19 K Potassium 39.0983	20 Ca Calcium 40.078	21 Sc Scandium 44.955912	22 Ti Titanium 47.867	23 V Vanadium 50.9415	24 Cr Chromium 51.9961	25 Mn Manganese 54.938045	26 Fe Iron 55.845	27 Co Cobalt 58.933195	28 Ni Nickel 58.6934	29 Cu Copper 63.546	30 Zn Zinc 65.38	31 Ga Gallium 69.723	32 Ge German. 72.64	33 As Arsenic 74.92160	34 Se Selenium 78.96	35 Br Bromine 79.904	36 Kr Krypton 83.798				
37 Rb Rubidium 85.4678	38 Sr Strontium 87.62	39 Y Yttrium 88.90585	40 Zr Zirconium 91.224	41 Nb Niobium 92.90638	42 Mo Molybd. 95.96	43 Tc Technet. (97.90722)	44 Ru Ruthen. 101.07	45 Rh Rhodium 102.90550	46 Pd Palladium 106.42	47 Ag Silver 107.8682	48 Cd Cadmium 112.411	49 In Indium 114.818	50 Sn Tin 118.710	51 Sb Antimony 121.760	52 Te Tellurium 127.60	53 I Iodine 126.90447	54 Xe Xenon 131.293				
55 Cs Cesium 132.9054519	56 Ba Barium 137.327	57-71 Lanthenides	72 Hf Hafnium 178.49	73 Ta Tantalum 180.94788	74 W Tungsten 183.84	75 Re Rhenium 186.207	76 Os Osmium 190.23	77 Ir Iridium 192.217	78 Pt Platinum 195.084	79 Au Gold 196.966569	80 Hg Mercury 200.59	81 Tl Thallium 204.3833	82 Pb Lead 207.2	83 Bi Bismuth 208.98040	84 Po Polonium (208.98243)	85 At Astatine (209.98715)	86 Rn Radon (222.01758)				
87 Fr Francium (223.01974)	88 Ra Radium (226.02541)	89-103 Actinides	104 Rf Rutherford. (267.122)	105 Db Dubnium (268.125)	106 Sg Seaborg. (271.133)	107 Bh Bohrium (270.134)	108 Hs Hassium (269.134)	109 Mt Meitner. (276.151)	110 Ds Darmstadt. (281.162)	111 Rg Roentgen. (280.164)	112 Cn Copernicium (277)	114 Fl Flerovium (289)	116 Lv Livermorium (288)								

Lanthanide series	57 La Lanthan. 138.90547	58 Ce Cerium 140.116	59 Pr Praseodym. 140.90765	60 Nd Neodym. 144.242	61 Pm Prometh. (144.91275)	62 Sm Samarium 150.36	63 Eu Europium 151.964	64 Gd Gadolin. 157.25	65 Tb Terbium 158.92535	66 Dy Dyspros. 162.500	67 Ho Holmium 164.93032	68 Er Erbium 167.259	69 Tm Thulium 168.93421	70 Yb Ytterbium 173.054	71 Lu Lutetium 174.9668
Actinide series	89 Ac Actinium (227.02775)	90 Th Thorium 232.03806	91 Pa Protactin. 231.03588	92 U Uranium 238.02891	93 Np Neptunium (237.04817)	94 Pu Plutonium (244.06420)	95 Am Americ. (243.06138)	96 Cm Curium (247.07035)	97 Bk Berkelium (247.07031)	98 Cf Californ. (251.07959)	99 Es Einstein. (252.0830)	100 Fm Fermium (257.09510)	101 Md Mendelev. (258.09843)	102 No Nobelium (259.1010)	103 Lr Lawrenc. (262.110)

## 1. PHYSICAL CONSTANTS

**Table 1.1.** Reviewed 2010 by P.J. Mohr (NIST). Mainly from the “CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2006” by P.J. Mohr, B.N. Taylor, and D.B. Newell in Rev. Mod. Phys. **80** (2008) 633. The last group of constants (beginning with the Fermi coupling constant) comes from the Particle Data Group. The figures in parentheses after the values give the 1-standard-deviation uncertainties in the last digits; the corresponding fractional uncertainties in parts per  $10^9$  (ppb) are given in the last column. This set of constants (aside from the last group) is recommended for international use by CODATA (the Committee on Data for Science and Technology). The full 2006 CODATA set of constants may be found at <http://physics.nist.gov/constants>. See also P.J. Mohr and D.B. Newell, “Resource Letter FC-1: The Physics of Fundamental Constants,” Am. J. Phys, **78** (2010) 338.

Quantity	Symbol, equation	Value	Uncertainty (ppb)
speed of light in vacuum	$c$	299 792 458 m s <sup>-1</sup>	exact*
Planck constant	$h$	6.626 068 96(33) × 10 <sup>-34</sup> J s	50
Planck constant, reduced	$\hbar \equiv h/2\pi$	1.054 571 628(53) × 10 <sup>-34</sup> J s = 6.582 118 99(16) × 10 <sup>-22</sup> MeV s	50 25
electron charge magnitude	$e$	1.602 176 487(40) × 10 <sup>-19</sup> C = 4.803 204 27(12) × 10 <sup>-10</sup> esu	25, 25
conversion constant	$\hbar c$	197.326 9631(49) MeV fm	25
conversion constant	$(\hbar c)^2$	0.389 379 304(19) GeV <sup>2</sup> mbarn	50
electron mass	$m_e$	0.510 998 910(13) MeV/c <sup>2</sup> = 9.109 382 15(45) × 10 <sup>-31</sup> kg	25, 50
proton mass	$m_p$	938.272 013(23) MeV/c <sup>2</sup> = 1.672 621 637(83) × 10 <sup>-27</sup> kg = 1.007 276 466 77(10) u = 1836.152 672 47(80) $m_e$	25, 50 0.10, 0.43
deuteron mass	$m_d$	1875.612 793(47) MeV/c <sup>2</sup>	25
unified atomic mass unit (u)	(mass <sup>12</sup> C atom)/12 = (1 g)/(N <sub>A</sub> mol)	931.494 028(23) MeV/c <sup>2</sup> = 1.660 538 782(83) × 10 <sup>-27</sup> kg	25, 50
permittivity of free space	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	8.854 187 817 ... × 10 <sup>-12</sup> F m <sup>-1</sup>	exact
permeability of free space	$\mu_0$	4π × 10 <sup>-7</sup> N A <sup>-2</sup> = 12.566 370 614 ... × 10 <sup>-7</sup> N A <sup>-2</sup>	exact
fine-structure constant	$\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	7.297 352 5376(50) × 10 <sup>-3</sup> = 1/137.035 999 679(94) <sup>†</sup>	0.68, 0.68
classical electron radius	$r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$	2.817 940 2894(58) × 10 <sup>-15</sup> m	2.1
(e <sup>-</sup> Compton wavelength)/2π	$\lambda_e = \hbar/m_e c = r_e \alpha^{-1}$	3.861 592 6459(53) × 10 <sup>-13</sup> m	1.4
Bohr radius ( $m_{\text{nucleus}} = \infty$ )	$a_\infty = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / m_e e^2 = r_e \alpha^{-2}$	0.529 177 208 59(36) × 10 <sup>-10</sup> m	0.68
wavelength of 1 eV/c particle	$\hbar c / (1 \text{ eV})$	1.239 841 875(31) × 10 <sup>-6</sup> m	25
Rydberg energy	$\hbar c R_\infty = m_e c^4 / 2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 = m_e c^2 \alpha^2 / 2$	13.605 691 93(34) eV	25
Thomson cross section	$\sigma_T = 8\pi r_e^2 / 3$	0.665 245 8558(27) barn	4.1
Bohr magneton	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	5.788 381 7555(79) × 10 <sup>-11</sup> MeV T <sup>-1</sup>	1.4
nuclear magneton	$\mu_N = e\hbar/2m_p$	3.152 451 2326(45) × 10 <sup>-14</sup> MeV T <sup>-1</sup>	1.4
electron cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^e / B = e/m_e$	1.758 820 150(44) × 10 <sup>11</sup> rad s <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>	25
proton cyclotron freq./field	$\omega_{\text{cycl}}^p / B = e/m_p$	9.578 833 92(24) × 10 <sup>7</sup> rad s <sup>-1</sup> T <sup>-1</sup>	25
gravitational constant <sup>‡</sup>	$G_N$	6.674 28(67) × 10 <sup>-11</sup> m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup> = 6.708 81(67) × 10 <sup>-39</sup> $\hbar c$ (GeV/c <sup>2</sup> ) <sup>-2</sup>	1.0 × 10 <sup>5</sup> 1.0 × 10 <sup>5</sup>
standard gravitational accel.	$g_N$	9.806 65 m s <sup>-2</sup>	exact
Avogadro constant	$N_A$	6.022 141 79(30) × 10 <sup>23</sup> mol <sup>-1</sup>	50
Boltzmann constant	$k$	1.380 6504(24) × 10 <sup>-23</sup> J K <sup>-1</sup> = 8.617 343(15) × 10 <sup>-5</sup> eV K <sup>-1</sup>	1700 1700
molar volume, ideal gas at STP	$N_A k (273.15 \text{ K}) / (101 325 \text{ Pa})$	22.413 996(39) × 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup> mol <sup>-1</sup>	1700
Wien displacement law constant	$b = \lambda_{\text{max}} T$	2.897 7685(51) × 10 <sup>-3</sup> m K	1700
Stefan-Boltzmann constant	$\sigma = \pi^2 k^4 / 60\hbar^3 c^2$	5.670 400(40) × 10 <sup>-8</sup> W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup>	7000
Fermi coupling constant**	$G_F / (\hbar c)^3$	1.166 37(1) × 10 <sup>-5</sup> GeV <sup>-2</sup>	9000
weak-mixing angle	$\sin^2 \hat{\theta}(M_Z) (\overline{\text{MS}})$	0.231 16(13) <sup>††</sup>	5.6 × 10 <sup>5</sup>
W <sup>±</sup> boson mass	$m_W$	80.399(23) GeV/c <sup>2</sup>	2.9 × 10 <sup>5</sup>
Z <sup>0</sup> boson mass	$m_Z$	91.1876(21) GeV/c <sup>2</sup>	2.3 × 10 <sup>4</sup>
strong coupling constant	$\alpha_s(m_Z)$	0.1184(7)	5.9 × 10 <sup>6</sup>
$\pi = 3.141 592 653 589 793 238$		$e = 2.718 281 828 459 045 235$	$\gamma = 0.577 215 664 901 532 861$
1 in ≡ 0.0254 m	1 G ≡ 10 <sup>-4</sup> T	1 eV = 1.602 176 487(40) × 10 <sup>-19</sup> J	$kT$ at 300 K = [38.681 685(68)] <sup>-1</sup> eV
1 Å ≡ 0.1 nm	1 dyne ≡ 10 <sup>-5</sup> N	1 eV/c <sup>2</sup> = 1.782 661 758(44) × 10 <sup>-36</sup> kg	0 °C ≡ 273.15 K
1 barn ≡ 10 <sup>-28</sup> m <sup>2</sup>	1 erg ≡ 10 <sup>-7</sup> J	2.997 924 58 × 10 <sup>9</sup> esu = 1 C	1 atmosphere ≡ 760 Torr ≡ 101 325 Pa

\* The meter is the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299 792 458 of a second.

† At  $Q^2 = 0$ . At  $Q^2 \approx m_W^2$  the value is  $\sim 1/128$ .

‡ Absolute lab measurements of  $G_N$  have been made only on scales of about 1 cm to 1 m.

\*\* See the discussion in Sec. 10, “Electroweak model and constraints on new physics.”

†† The corresponding  $\sin^2 \theta$  for the effective angle is 0.23146(12).

**3. INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS (SI)**

See “The International System of Units (SI),” NIST Special Publication **330**, B.N. Taylor, ed. (USGPO, Washington, DC, 1991); and “Guide for the Use of the International System of Units (SI),” NIST Special Publication **811**, 1995 edition, B.N. Taylor (USGPO, Washington, DC, 1995).

**SI prefixes**

$10^{24}$	yotta	(Y)
$10^{21}$	zetta	(Z)
$10^{18}$	exa	(E)
$10^{15}$	peta	(P)
$10^{12}$	tera	(T)
$10^9$	giga	(G)
$10^6$	mega	(M)
$10^3$	kilo	(k)
$10^2$	hecto	(h)
10	deca	(da)
$10^{-1}$	deci	(d)
$10^{-2}$	centi	(c)
$10^{-3}$	milli	(m)
$10^{-6}$	micro	( $\mu$ )
$10^{-9}$	nano	(n)
$10^{-12}$	pico	(p)
$10^{-15}$	femto	(f)
$10^{-18}$	atto	(a)
$10^{-21}$	zepto	(z)
$10^{-24}$	yocto	(y)



## 2 3. International system of units (SI)

Physical quantity	Name of unit	Symbol
<i>Base units</i>		
length	meter	m
mass	kilogram	kg
time	second	s
electric current	ampere	A
thermodynamic temperature	kelvin	K
amount of substance	mole	mol
luminous intensity	candela	cd
<i>Derived units with special names</i>		
plane angle	radian	rad
solid angle	steradian	sr
frequency	hertz	Hz
energy	joule	J
force	newton	N
pressure	pascal	Pa
power	watt	W
electric charge	coulomb	C
electric potential	volt	V
electric resistance	ohm	$\Omega$
electric conductance	siemens	S
electric capacitance	farad	F
magnetic flux	weber	Wb
inductance	henry	H
magnetic flux density	tesla	T
luminous flux	lumen	lm
illuminance	lux	lx
celsius temperature	degree celsius	$^{\circ}\text{C}$
activity (of a radioactive source)*	becquerel	Bq
absorbed dose (of ionizing radiation)*	gray	Gy
dose equivalent*	sievert	Sv

\*See our section 30, on “Radioactivity and radiation protection,” p. 341.

**33.1.1. Estimators for mean, variance and median :**

Suppose we have a set of  $N$  independent measurements,  $x_i$ , assumed to be unbiased measurements of the same unknown quantity  $\mu$  with a common, but unknown, variance  $\sigma^2$ . Then

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (33.4)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{\mu})^2 \quad (33.5)$$

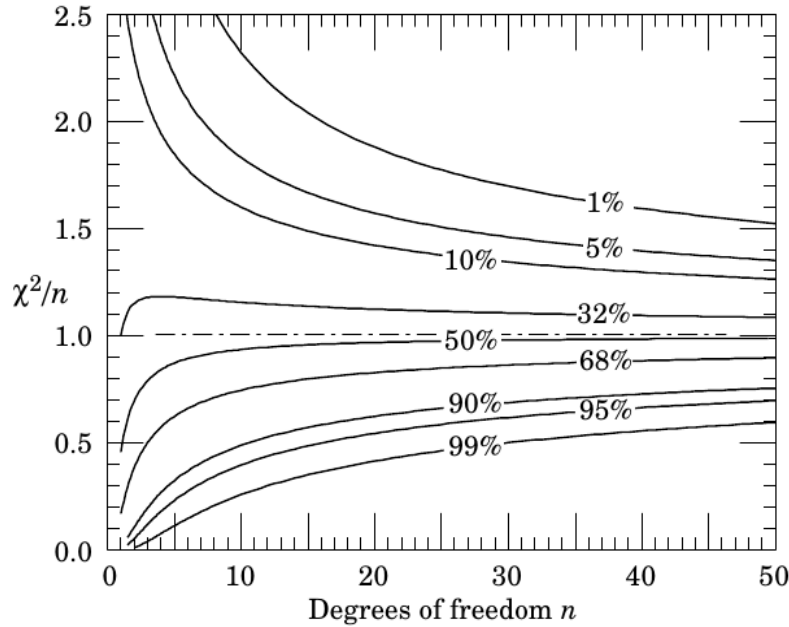
are unbiased estimators of  $\mu$  and  $\sigma^2$ . The variance of  $\hat{\mu}$  is  $\sigma^2/N$  and the variance of  $\hat{\sigma}^2$  is

**33.1.3. The method of least squares :**

The *method of least squares* (LS) coincides with the method of maximum likelihood in the following special case. Consider a set of  $N$  independent measurements  $y_i$  at known points  $x_i$ . The measurement  $y_i$  is assumed to be Gaussian distributed with mean  $F(x_i; \theta)$  and known variance  $\sigma_i^2$ . The goal is to construct estimators for the unknown parameters  $\theta$ . The likelihood function contains the sum of squares

$$\chi^2(\theta) = -2 \ln L(\theta) + \text{constant} = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - F(x_i; \theta))^2}{\sigma_i^2}. \quad (33.13)$$

$$\chi^2(\theta) = \chi^2(\hat{\theta}) + 1 = \chi_{\min}^2 + 1 \quad (33.23)$$



**Figure 33.2:** The ‘reduced’  $\chi^2$ , equal to  $\chi^2/n$ , for  $n$  degrees of freedom. The curves show as a function of  $n$  the  $\chi^2/n$  that corresponds to a given  $p$ -value.

## 32.4. Some probability distributions

Table 32.1 gives a number of common probability density functions and corresponding characteristic functions, means, and variances. Further information may be found in Refs. [1– 8], [17], and [11], which has particularly detailed tables. Monte Carlo techniques for generating each of them may be found in our Sec. 34.4 and in Ref. 17. We comment below on all except the trivial uniform distribution.

### 32.4.1. *Binomial distribution* :

A random process with exactly two possible outcomes which occur with fixed probabilities is called a *Bernoulli* process. If the probability of obtaining a certain outcome (a “success”) in an individual trial is  $p$ , then the probability of obtaining exactly  $r$  successes ( $r = 0, 1, 2, \dots, N$ ) in  $N$  independent trials, without regard to the order of the successes and failures, is given by the binomial distribution  $f(r; N, p)$  in Table 32.1. If  $r$  and  $s$  are binomially distributed with parameters  $(N_r, p)$  and  $(N_s, p)$ , then  $t = r + s$  follows a binomial distribution with parameters  $(N_r + N_s, p)$ .

### 32.4.2. *Poisson distribution* :

The Poisson distribution  $f(n; \nu)$  gives the probability of finding exactly  $n$  events in a given interval of  $x$  (*e.g.*, space or time) when the events occur independently of one another and of  $x$  at an average rate of  $\nu$  per the given interval. The variance  $\sigma^2$  equals  $\nu$ . It is the limiting case  $p \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $Np = \nu$  of the binomial distribution. The Poisson distribution approaches the Gaussian distribution for large  $\nu$ .

For example, a large number of radioactive nuclei of a given type will result in a certain number of decays in a fixed time interval. If this interval is small compared to the mean lifetime, then the probability for a given nucleus to decay is small, and thus the number of decays in the time interval is well modeled as a Poisson variable.

**Table 32.1.** Some common probability density functions, with corresponding characteristic functions and means and variances. In the Table,  $\Gamma(k)$  is the gamma function, equal to  $(k-1)!$  when  $k$  is an integer;  ${}_1F_1$  is the confluent hypergeometric function of the 1st kind [11].

Distribution	Probability density function $f$ (variable; parameters)	Characteristic function $\phi(u)$	Mean	Variance $\sigma^2$
Uniform	$f(x; a, b) = \begin{cases} 1/(b-a) & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{ibu} - e^{iau}}{(b-a)iu}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Binomial	$f(r; N, p) = \frac{N!}{r!(N-r)!} p^r q^{N-r}$ $r = 0, 1, 2, \dots, N; \quad 0 \leq p \leq 1; \quad q = 1-p$	$(q + pe^{iu})^N$	$Np$	$Npq$
Poisson	$f(n; \nu) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \nu > 0$	$\exp[\nu(e^{iu} - 1)]$	$\nu$	$\nu$
Normal (Gaussian)	$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$ $-\infty < x < \infty; \quad -\infty < \mu < \infty; \quad \sigma > 0$	$\exp(i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2)$	$\mu$	$\sigma^2$
Multivariate Gaussian	$f(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{ V }}$ $\times \exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T V^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]$ $-\infty < x_j < \infty; \quad -\infty < \mu_j < \infty; \quad  V  > 0$	$\exp[i\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T V \mathbf{u}]$	$\boldsymbol{\mu}$	$V_{jk}$
$\chi^2$	$f(z; n) = \frac{z^{n/2-1} e^{-z/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}; \quad z \geq 0$	$(1 - 2iu)^{-n/2}$	$n$	$2n$
Student's $t$	$f(t; n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$ $-\infty < t < \infty; \quad n$ not required to be integer	—	0 for $n > 1$	$n/(n-2)$ for $n > 2$
Gamma	$f(x; \lambda, k) = \frac{x^{k-1} \lambda^k e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}; \quad 0 \leq x < \infty;$ $k$ not required to be integer	$(1 - iu/\lambda)^{-k}$	$k/\lambda$	$k/\lambda^2$
Beta	$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$ $0 \leq x \leq 1$	${}_1F_1(\alpha; \alpha + \beta; iu)$	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$