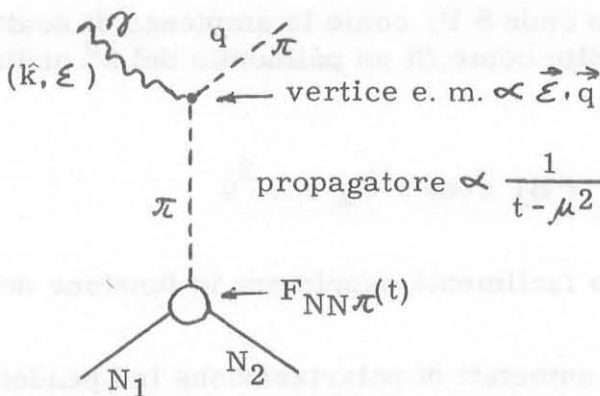


INFN/AE-67/1
4 Marzo 1967

M. Nigro e E. Schiavuta: ANALISI DELLE SEZIONI D'URTO DI FOTOPRODUZIONE DI π^+ DA γ POLARIZZATI ($\gamma + p = \pi^+ + N$). -

1) - INTRODUZIONE -

E' ben noto che una grossa complicazione nell'analisi delle sezioni d'urto di fotoproduzione di pioni carichi, anche a bassa energia, deriva dall'esistenza di contributi non trascurabili di onde parziali elevate; l'origine di questi contributi, o almeno di parte di essi, è chiaramente individuabile nel termine della matrice di fotoproduzione responsabile dell'emissione "periferica"(x) (graf. 1) che introduce un polo assai vicino alla regione fisica.



graf. 1

Emissione periferica di π^+
 $F_{NN\pi}(t)$, funzione di vertice, dipende da $t = -(k - q)^2$

Mentre da un lato lo studio di questa singolarità non presenta grande interesse, la sua presenza obbliga ad analizzare le sezioni d'urto dei π^\pm con un fit alla Moravcsik, cioè con una espressione del tipo:

$$(1) \quad (1 - \beta \cos\theta)^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_0^\infty A_n \cos^n \theta$$

(x) - Abbiamo usato per descrivere l'interazione periferica un grafiro un pò diverso da quello del termine di Born. I motivi della nostra scelta sono in 5.1.

2.

Se si suddivide la matrice di produzione nella forma

$$(2) \quad M = M_0 + M_S$$

con M_S contributo del graf. 1, si può dire che anche nel caso semplice in cui M_0 contiene soltanto onde S e P, nella (1) si ha a che fare con un polinomio del 4° ordine; lo studio della eventuale presenza di onde elevate in M_0 è quindi legata alla possibilità di distinguere fra un fit di 4° ordine e uno di ordine superiore. In pratica, a causa soprattutto dei rilevanti errori sistematici da cui sono evidentemente affette le misure si può dire che le onde elevate di M_0 , se esistono, sono "coperte" da quelle di M_S . Per di più, anche accettando a priori l'ipotesi che M_0 a bassa energia contenga solo onde S-P, non è possibile in un fit alla Moravcsik determinare le relative ampiezze di multipolo, a causa della eccessiva sensibilità dei coefficienti del fit polinomiale dalle misure.

Un notevole progresso è possibile nell'analisi dei dati, utilizzando le misure di fotoproduzione con γ polarizzati; infatti, da argomenti estremamente generali si deduce che il vertice $\gamma\pi\pi$ del graf. 1 è proporzionale a $\vec{q} \cdot \vec{\epsilon}$, se \vec{q} è il momento del π^+ , $\vec{\epsilon}$ la polarizzazione del fotone; pertanto M_S non dà contributo alla sezione d'urto $d\sigma_{\perp}/d\Omega$ per produzione da parte di fotoni polarizzati perpendicolarmente a \vec{q} :

$$(3) \quad \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = |M_0^{\perp}|^2$$

e nell'ipotesi che M_0 contenga solo onde S P, come le ampiezze di scattering e fotoproduzione di π^0 , ammette come fit un polinomio del 2° ordine in $\cos\theta$

$$(4) \quad \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = A_{\perp} + B_{\perp} \cos\theta + C_{\perp} \cos^2\theta$$

I coefficienti A_{\perp} B_{\perp} C_{\perp} si possono facilmente esprimere in funzione delle componenti di multipolo di M_0 .

Poichè un fotone ha due autostati di polarizzazione indipendenti, le misure con γ polarizzati forniscono oltre a $d\sigma_{\perp}/d\Omega$ una seconda quantità indipendente, ad esempio la sezione d'urto $d\sigma_{\parallel}/d\Omega$ per produzione da parte di γ polarizzati parallelamente a \vec{q} , o una qualsiasi combinazione di $d\sigma_{\perp}/d\Omega$ e $d\sigma_{\parallel}/d\Omega$; naturalmente conviene usare per le analisi una quantità che dipende da $\cos\theta$ in maniera il più semplice possibile. A questo scopo si consideri la quantità

$$(5) \quad H(\Delta^2) = \left[-\frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) (t - \mu^2) - \delta \right] (t - \mu^2)^{-1}$$

(dove δ è una costante opportuna^(x)), è possibile dimostrare, in maniera rigorosa, che se M_0 non contiene onde superiori a P e se è lecito trascurare la dipendenza da t della funzione di vertice $F_{NN\pi}(t)$, allora $H(\Delta^2)$ è una funzione lineare di $\Delta^2 = t - \mu^2$, e quindi di $\cos\theta$ ⁽⁻⁾. Dimostreremo nel prossimo paragrafo questa importante proprietà; qui osserviamo che, mentre $d\epsilon_{\perp}/d\Omega$ non dipende da M_S , la funzione $H(\Delta^2)$ è fortemente influenzata da questo termine e dalle sue interferenze con M_0 : infatti M_S contribuisce unicamente a $d\epsilon_{\parallel}/d\Omega$ e il suo effetto è percentualmente esaltato nella differenza $(d\epsilon_{\perp}/d\Omega - d\epsilon_{\parallel}/d\Omega)$. Nella definizione di $H(\Delta^2)$ si è voluto sostanzialmente estrarre dalla $(d\epsilon_{\perp}/d\Omega - d\epsilon_{\parallel}/d\Omega)$ tutta la dipendenza funzionale complicata, ma banale, derivante da un fattore $\sin^2\theta$ in evidenza nella espressione più generale di questa quantità, e dal propagatore $(t - \mu^2)^{-1}$ presente in M_S , e si è voluto anche tener conto della conoscenza della costante d'accoppiamento $NN\pi$; questi accorgimenti consentono di ricondurre l'analisi della $(d\epsilon_{\perp}/d\Omega - d\epsilon_{\parallel}/d\Omega)$ a quella di una quantità dipendente linearmente da $\cos\theta$, con dei notevoli vantaggi pratici. Nelle ipotesi stabilite sopra si ha dunque

$$(6) \quad H(\Delta^2) = \alpha(t - \mu^2) + \gamma = \alpha\Delta^2 + \gamma$$

l'analisi dei dati sperimentali, oltre a permettere la verifica di queste ipotesi, fornisce, se esse risultano soddisfatte, due coefficienti α, γ , che, come $A_{\perp}, B_{\perp}, C_{\perp}$ possono essere determinati in funzione delle componenti di multipolo di M_0 .

Riassumendo, l'esprimere tramite $H(\Delta^2)$ e $(d\epsilon_{\perp}/d\Omega)$ i risultati delle misure presenta i seguenti vantaggi:

- 1) - Si è parametrizzato nella forma più semplice possibile tutto il contenuto informativo delle distribuzioni angolari. Il vantaggio pratico che ne deriva è assai rilevante; per esempio, per individuare eventuali onde superiori a P provenienti da M_0 , è sufficiente rivelare deviazioni da un fit parabolico della $(d\Omega_{\perp}/d\Omega)$ e lineare della $H(\Delta^2)$, mentre, come si è visto, nell'analisi della $(d\epsilon/d\Omega)$ (sezione d'urto ordinaria) occorre discriminare fra un polinomio del 4° e del 5° ordine.
- 2) - Il numero di onde parziali presenti può essere determinato in maniera del tutto indipendente sia sulla $(d\epsilon_{\perp}/d\Omega)$ che sulla $H(\Delta^2)$; ciò fornisce un modo per verificare la consistenza interna dei risultati.
- 3) - Nell'intervallo di energia in cui siano presenti solo onde S P in M_0 , la

(x) - Precisamente δ è proporzionale alla costante di accoppiamento πNN . (vedi par. 2).

(-) - Vedi 5,2 per alcune osservazioni.

4.

(4) e la (6) forniscono in totale 5 coefficienti indipendenti che possono essere determinati con buona precisione anche con un numero limitato di dati sperimentali. I risultati delle analisi mostrano che i valori di questi coefficienti calcolati con un fit di ordine basso, non risentono molto degli errori di misura: ciò è particolarmente importante in quanto il quadro globale dei risultati sperimentali rivela chiaramente la presenza di errori sistematici a volte assai rilevanti.

4) - Questi coefficienti sono espressi in funzione dei multipoli da relazioni sufficientemente semplici da poter essere invertite con un buon grado di univocità ed è quindi possibile come vedremo, almeno a bassa energia, ottenere dalle misure un set di multipoli non ambiguo.

2) - CALCOLO DI $d\sigma_{\perp}/d\Omega$ e $H(\Delta^2)$ IN FUNZIONE DELLE AMPIEZZE DI MULTIPOLO -

I coefficienti della $d\sigma_{\perp}/d\Omega$ e di $H(\Delta^2)$ in funzione delle ampiezze di multipolo si ricavano dalla espressione generale dell'ampiezza di produzione^(x)(1)

$$(7) \quad \mathcal{F} = i \gamma_1 \vec{\sigma} \cdot \vec{\xi} + \gamma_2 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{\sigma} \cdot \vec{K} \times \vec{\xi})}{kq} + i \gamma_3 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{K})(\vec{q} \cdot \vec{\xi})}{kq} + i \gamma_4 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{\xi})}{q^2}$$

Calcolando le sezioni d'urto nella maniera usuale e mediando sugli stati di spin del nucleone uscente si può dimostrare che:

$$(8) \quad \frac{k}{q} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 - 2 \operatorname{Re} \gamma_1^* \gamma_2 \cos\theta$$

e

$$(9) \quad -\frac{K}{q} \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) = |\gamma_3|^2 + |\gamma_4|^2 + 2 \operatorname{Re} (\gamma_2^* \gamma_3 + \gamma_1^* \gamma_4 + \gamma_3^* \gamma_4 \cos\theta)$$

Suddividiamo l'ampiezza \mathcal{F} nella forma (2):

(x) - La metrica usata è $g_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$), $g_0 = -1$; le unità $\hbar = c = \mu$ (massa del pione = 1; \vec{k} e \vec{q} sono il momento del ϑ e del π nel centro di massa, $\omega = \sqrt{q^2 + 1}$ energia totale del π , $\beta = q/\omega$; $\vec{\xi}$ il vettore polarizzazione del fotone incidente, W è l'energia totale nel centro di massa e θ è l'angolo di produzione del π nello stesso sistema.

$$(2bis) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_R$$

dove \mathcal{F}_R rappresenta il contributo del grafico 1 con $F_{\pi NN}(t) = \mathcal{F}^{(x)}$

$$(10) \quad \mathcal{F}^R = e \sqrt{2} \left(\frac{M}{W} \right) \frac{ef}{\omega K(1-\beta \cos\theta)} \vec{\epsilon} \cdot (\vec{K}-\vec{q})(\vec{q} \cdot \vec{\xi})$$

e \mathcal{F}_0 la rimanente parte dell'ampiezza.
 \mathcal{F}_0 può svilupparsi in onde parziali:

$$(11) \quad \mathcal{F}_0 = \sum_{\ell} O_{\ell} \mathcal{F}_{0,\ell}$$

O_{ℓ} è l'operatore di proiezione dell'ampiezza \mathcal{F}_0 sullo stato di momento angolare del π^{11} ; la somma è arrestata a $\ell = 1$ nella ipotesi discussa al par. 1, della presenza di sole onde S e P in M_0 . Con questa ipotesi scriviamo \mathcal{F} nella forma:

$$(12) \quad \sum_{\ell} O_{\ell} (\mathcal{F}_{0,\ell} + \mathcal{F}_{\ell}^R) + (\mathcal{F}^R - \sum_{\ell} O_{\ell} \mathcal{F}_{\ell}^R)$$

mettendo in evidenza nello sviluppo il contributo $\sum_{\ell} O_{\ell} \mathcal{F}_{\ell}^R$ alle onde S e P della ampiezza (10).

Notando dalla (7) e (10) che $\mathcal{F}_1^R = \mathcal{F}_2^R = 0$ e facendo uso degli sviluppi delle $\mathcal{F}_i^{(1)}$ in ampiezze di multipolo si ottiene(+):

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= E_{0+} + 3(M_{1+} + E_{1+}) \cos\theta - [E_{0+}^R + 3(M_{1+}^R + E_{1+}^R) \cos\theta] \\ \mathcal{F}_2 &= (2M_{1+} + M_{1-}) - [2M_{1+}^R + M_{1-}^R] \\ \mathcal{F}_3 &= 3(E_{1+} - M_{1+}) + \mathcal{F}_3^R - 3(E_{1+}^R - M_{1+}^R) \\ \mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_4^R \end{aligned}$$

dove $E_{0+}, M_{1-}, E_{1+}, M_{1+}$ sono le ampiezze di multipolo elettriche (E) e magnetiche (M) per eccitazione di stati con $\ell = 0, 1$ e $J = 1/2, 3/2$; $M_{1-}^R, M_{1+}^R, E_{1+}^R$ sono le proiezioni di \mathcal{F}^R sugli stessi stati di momento angolare, pre-

(x) - $ef = 2.42 \cdot 10^{-2}$. χ_{π} ; $\chi_{\pi} = (h/m_{\pi}c) = 1.41 \cdot 10^{-13}$ cm.

(+) - Nel paragrafo 5.3 sono riportate alcune osservazioni sugli sviluppi (13).

6.

cisamente^(x)(2):

$$\begin{aligned}
 E_{0+}^R &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \mathcal{Z}_4^R dx \\
 M_{1-}^R &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \mathcal{Z}_3^R dx \\
 E_{1+}^R &= \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \left(\frac{\mathcal{Z}_3^R}{2} + x \mathcal{Z}_4^R \right) dx \\
 M_{1+}^R &= -\frac{1}{8} \int_{-1}^{+1} (1-x^2) \mathcal{Z}_3^R dx
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Scrivendo, per un motivo che sarà chiaro in seguito, \mathcal{Z}_3^R e \mathcal{Z}_4^R nella forma:

$$\mathcal{Z}_3^R = \frac{R_3}{1-\beta \cos \theta}, \quad \mathcal{Z}_4^R = \frac{R_4}{1-\beta \cos \theta} = -\frac{q}{K} \frac{R_3}{(1-\beta \cos \theta)}
 \tag{15}$$

con

$$R_3 = \sqrt{2} \left(\frac{M}{W} \right) \beta \text{ ef}
 \tag{15}$$

dall'integrazione delle (14) si trova:

$$\begin{aligned}
 M_{1+}^R &= -\frac{R_3}{8\beta} \left[\lg \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \cdot \frac{1-\beta^2}{\beta^2} + \frac{2}{\beta} \right] \\
 M_{1-}^R &= -2M_{1+}^R \\
 E_{0+}^R &= 2 \frac{q}{K} M_{1+}^R \\
 E_{1+}^R &= M_{1+}^R + \frac{R_3}{3}
 \end{aligned}
 \tag{14bis}$$

(x) - $x = \cos \theta$ angolo di produzione nel c. m.

L'andamento delle ampiezze (14bis) in funzione dell'energia è dato in fig. 1.

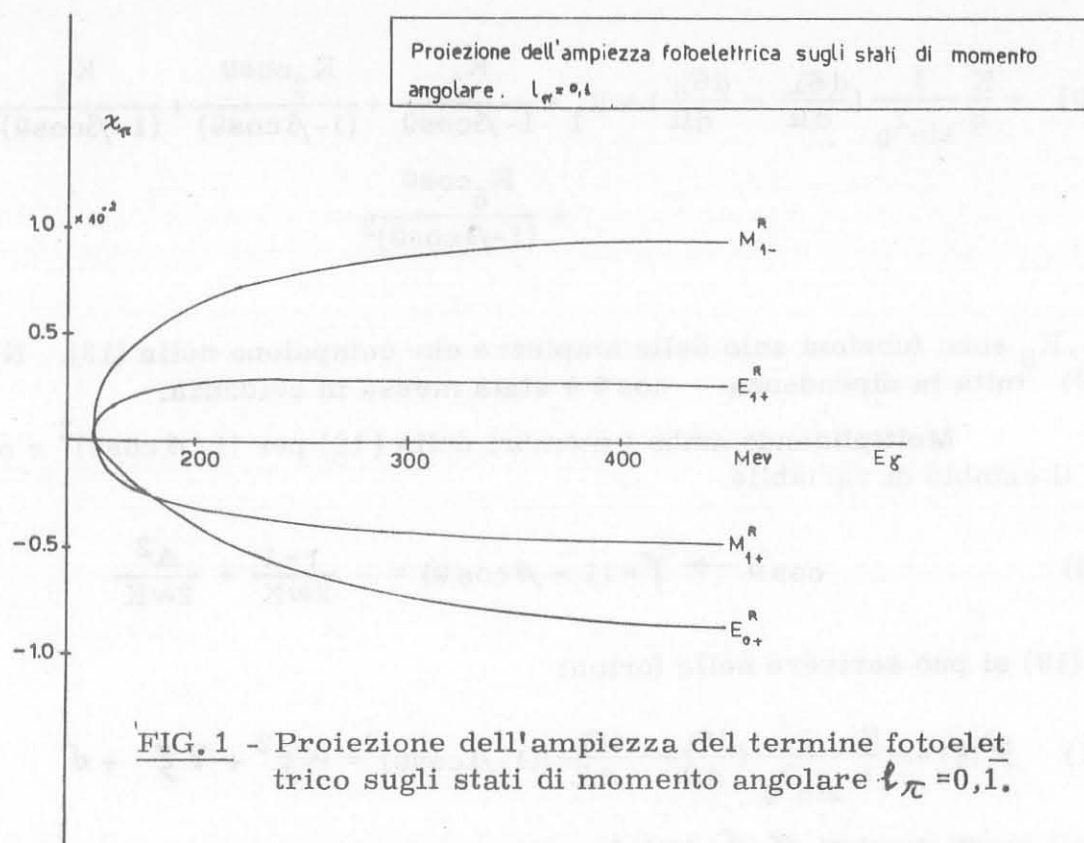


FIG. 1 - Proiezione dell'ampiezza del termine fotoelettrico sugli stati di momento angolare $l_{\pi} = 0, 1$.

Notiamo dalla (14bis) che $(2M_{1+}^R + M_{1-}^R) = 0$ e poniamo inoltre per comodità di scrittura:

$$(16) \quad \mathcal{F}_{11} = -E_{0+}^R, \quad \mathcal{F}_{12} = -3(M_{1+}^R + E_{1+}^R), \quad \mathcal{F}_3 = -3(E_{1+}^R - M_{1+}^R)$$

Introducendo le (14) e (16) nella (8) si ottiene:

$$(17) \quad \frac{K}{q} \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} = A_{\perp} + B_{\perp} \cos\theta + C_{\perp} \cos^2\theta$$

con

$$(18) \quad \begin{aligned} A_{\perp} &= |E_{0+}|^2 + 4|M_{1+}|^2 + |M_{1-}|^2 + 4\text{Re}(M_{1+}^* M_{1-}) + 2\mathcal{F}_{11} \text{Re}E_{0+} + \mathcal{F}_{11}^2 \\ B_{\perp} &= 2\text{Re}(E_{0+}^* (M_{1+} + 3E_{1+} - M_{1-})) + 2\mathcal{F}_{11} \text{Re}(M_{1+} - M_{1-} + 3E_{1+}) + \\ &+ 2\mathcal{F}_{12} \text{Re}(E_{0+} + \mathcal{F}_{11}) \\ C_{\perp} &= 9|E_{1+}|^2 - 3|M_{1+}|^2 + 6\text{Re}(M_{1+}^* E_{1+} - M_{1+}^* M_{1-} - E_{1+}^* M_{1-}) + \\ &+ 2\mathcal{F}_{12} \text{Re}(3E_{1+} + M_{1+} - M_{1-}) + \mathcal{F}_{12}^2 \end{aligned}$$

Introducendo le (13), (16) e le (15) nella (9) si può scrivere questa ultima nella forma:

$$(19) \quad -\frac{K}{q} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) = K_1 + \frac{K_2}{1-\beta \cos \theta} + \frac{K_3 \cos \theta}{(1-\beta \cos \theta)} + \frac{K_4}{(1-\beta \cos \theta)^2} + \frac{K_5 \cos \theta}{(1-\beta \cos \theta)^2}$$

K_1, K_5 sono funzioni solo delle ampiezze che compaiono nella (13). Nella (19) tutta la dipendenza $\cos \theta$ è stata messa in evidenza.

Moltiplicando ambo i membri della (19) per $(1-\beta \cos \theta)^2$ e operando il cambio di variabile

$$(20) \quad \cos \theta \rightarrow \xi = (1 - \beta \cos \theta) = -\frac{t-1}{2\omega K} = \frac{\Delta^2}{2\omega K}$$

la (19) si può scrivere nella forma:

$$(21) \quad \mathcal{F}(\xi) = -\frac{K}{q} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) (1-\beta \cos \theta)^2 = \alpha \xi^2 + \gamma \xi + \delta$$

con i coefficienti α, γ, δ dati da:

$$(22) \quad \begin{aligned} \alpha &= 9 |E_{1+}|^2 - 3 |M_{1+}|^2 + 6 \operatorname{Re}(E_{1+}^* M_{1-} - E_{1+}^* M_{1+} - M_{1+}^* M_{1-}) + \\ &+ 12 \left(\frac{\omega}{K} \right) R_3 \operatorname{Re}(E_{1+} - E_{1+}^R) + 2 \mathcal{F}_3 \operatorname{Re}(3E_{1+} + M_{1-} - M_{1+}) + \mathcal{F}_3^2 \\ \gamma &= 2 R_3 \operatorname{Re} \left[3 \left(1 - \frac{2\omega}{K} \right) E_{1+} - \frac{q}{K} E_{0+} + M_{1-} - M_{1+} \right] + \\ &+ 2 R_3 \left[\left(1 - \frac{\omega}{K} \right) \mathcal{F}_3 - \frac{q}{K} (\mathcal{F}_{11} + \frac{\mathcal{F}_{12}}{\beta}) + \frac{\omega}{K} R_3 \right] \\ \delta &= R_3^2 \left(1 + \left(\frac{q}{K} \right)^2 - 2 \left(\frac{\omega}{K} \right) \right). \end{aligned}$$

Dalla (21) appare chiaro che δ , valore della $f(\xi)$ nel punto $\xi = 0$, è il residuo di

$$-\frac{K}{q} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right)$$

nel polo $t = 1$, $\cos \theta = \frac{1}{\beta}$:

$$(23) \quad \delta = f(0) = -\frac{K}{q} \lim_{\cos \theta \rightarrow \frac{1}{\beta}} \left[\left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) \frac{(1 - \beta \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right]$$

ed è legato ad residuo R della sezione d'urto ordinaria, nello stesso polo, dalla:

$$(24) \quad \delta = \frac{K}{q} \lim_{\cos \theta \rightarrow \frac{1}{\beta}} \left(\frac{2(1 - \beta \cos \theta)^2 (d\sigma/d\Omega)}{\sin^2 \theta} \right) = -2 \frac{K}{q} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} R$$

L'andamento di δ e R in funzione dell'energia sono dati in fig. 2.

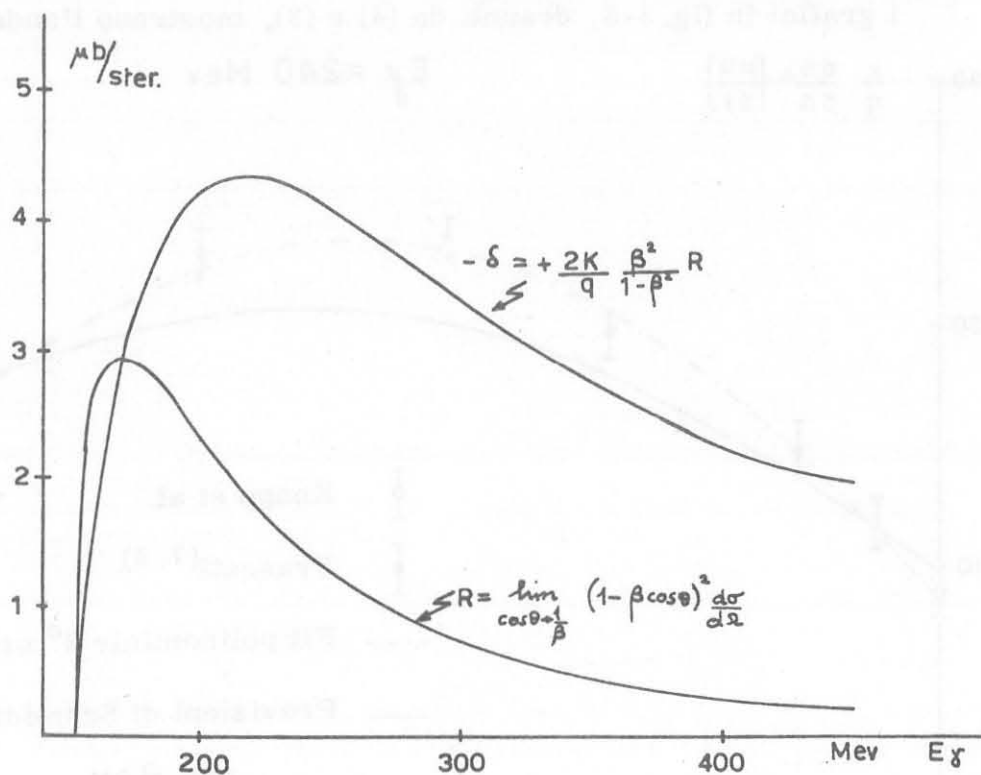


FIG. 2 - R e δ in funzione di E_{γ} .

Poichè δ è una costante nota si può da $f(\xi)$ costruire la funzione lineare $H(\xi)$:

$$(25) \quad H(\xi) = \left[-\frac{K}{q} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) (1 - \beta \cos \theta)^2 - \delta \right] \xi^{-1} = \alpha \xi + \gamma$$

dimostrando in tal modo quanto affermato al par. 1.

(formula 6)^(x). Il significato fisico dei coefficienti α e γ è chiarito dalle formule (21) e (22): α dipende quasi essenzialmente da M_0 , mentre γ proviene dalla interferenza reciproca dei termini M_0 e M_S .

3 - RISULTATI DI UNA ANALISI PRELIMINARE DEI DATI SPERIMENTALI -

Le misure finora eseguite di sezione d'urto ordinaria⁽³⁾ e del coefficiente di asimmetria $A = (\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}) / (\sigma_{\perp} + \sigma_{\parallel})$ ⁽⁴⁾ permette di ricavare $(d\sigma_{\perp}/d\Omega)$ e $H(\xi)$ nella regione angolare 20° 90° e di $(d\sigma_{\perp}/d\Omega)$ ^(5,6) a 0° e a 180° , dove necessariamente $A = 0$.

I grafici in fig. 3-8, desunti da (4) e (3), mostrano l'andamento

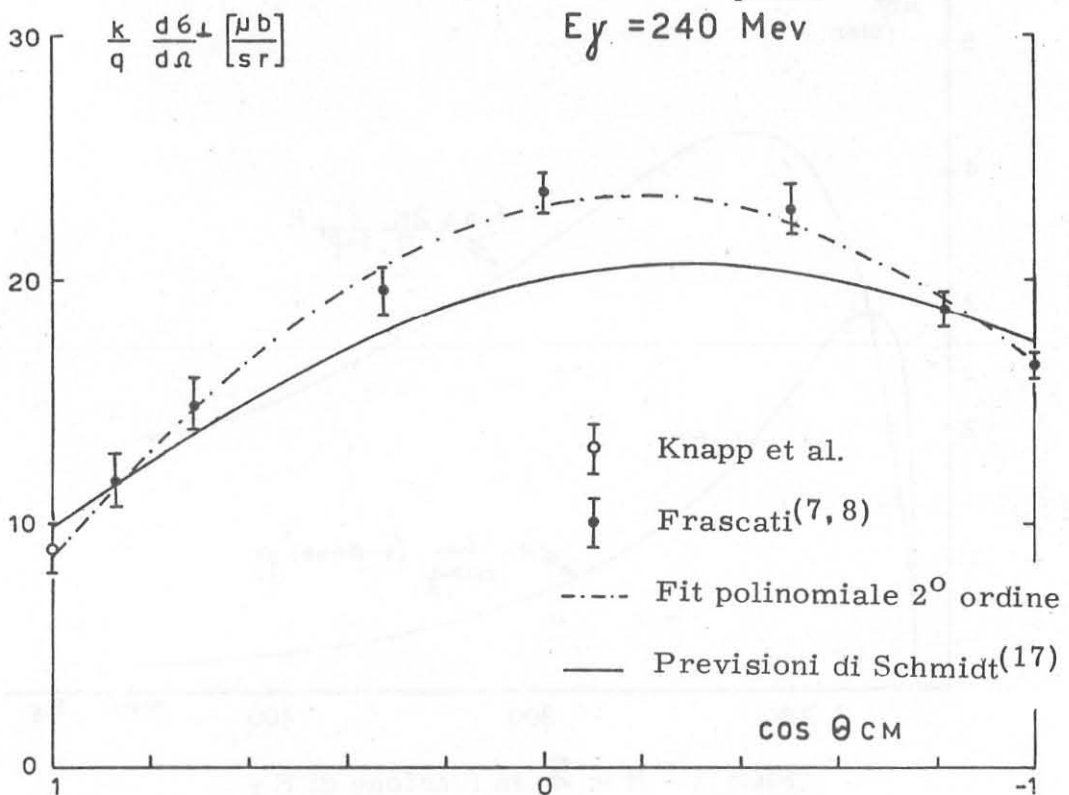


FIG. 3 - $(K/q) \cdot (d\sigma_{\perp}/d\Omega)$ sezione d'urto da γ polarizzati normalmente al piano di produzione in funzione dell'angolo di emissione del π per $E_\gamma = 240 \text{ MeV}$.

(x) - Abbiamo usato per comodità la variabile adimensionale ξ anziché Δ^2 , poichè in tal modo sia α che γ hanno dimensioni di una sezione d'urto.

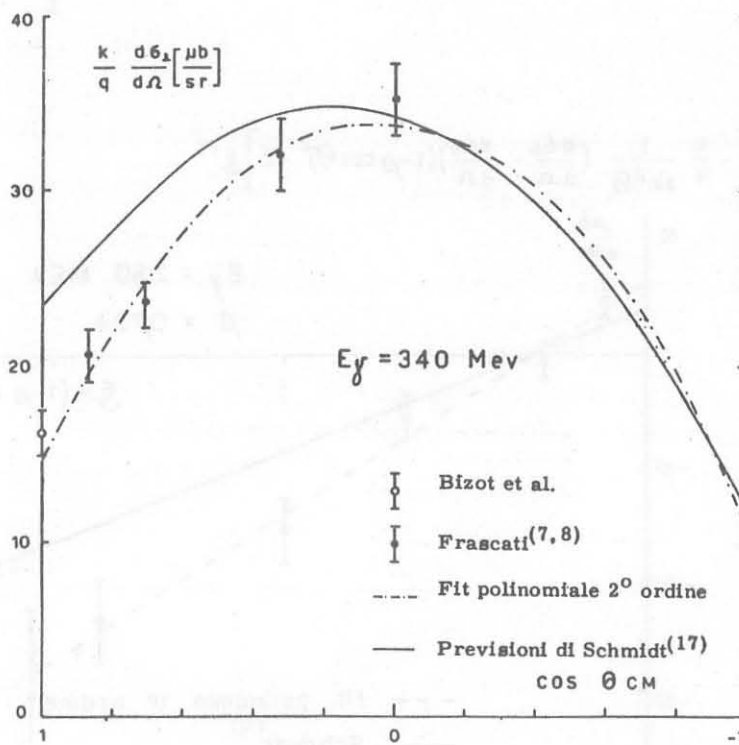
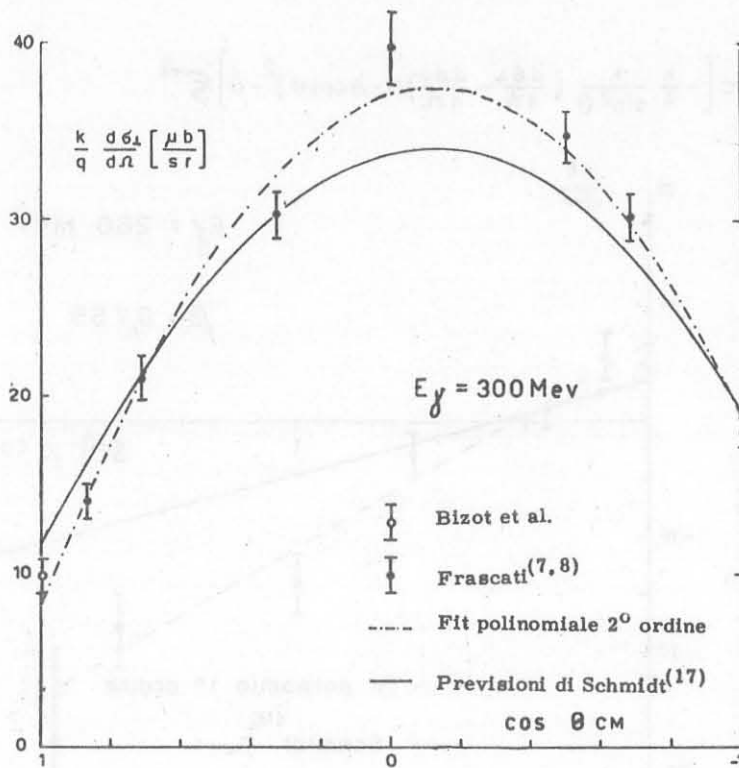
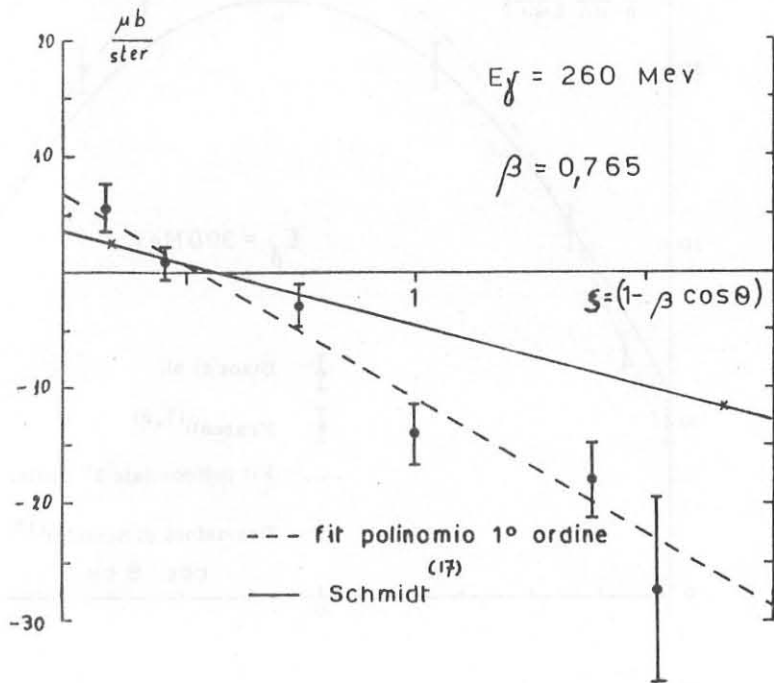


FIG. 4 e 5 - $(K/q) \cdot (d\sigma_{\perp}/d\Omega)$ sezione d'urto da γ polarizzati normalmente al piano di produzione in funzione dell'angolo di emissione del π per $E_{\gamma} = 300, 340 \text{ MeV}$.

$$H(\xi) = \left[-\frac{k}{q} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) (1 - \beta \cos \theta)^2 - \delta \right] \xi^{-1}$$



$$H(\xi) = \left[-\frac{k}{q} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} \right) (1 - \beta \cos \theta)^2 - \delta \right] \xi^{-1}$$

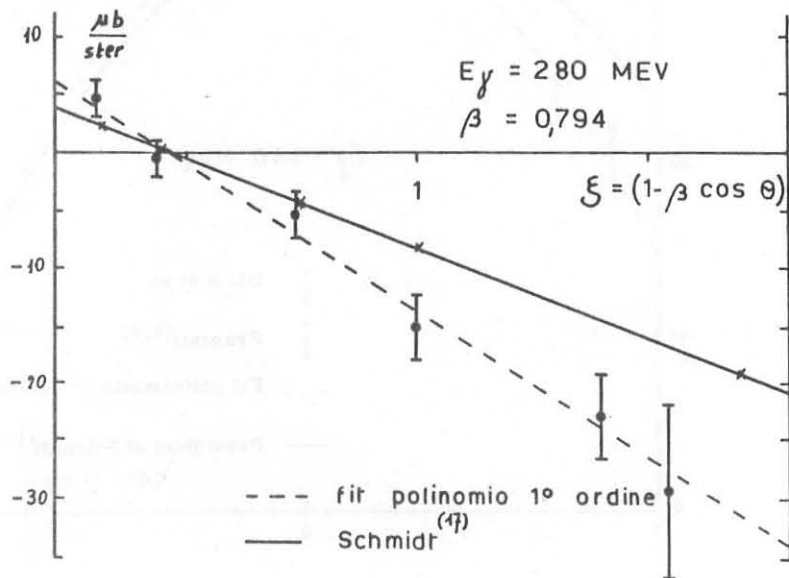
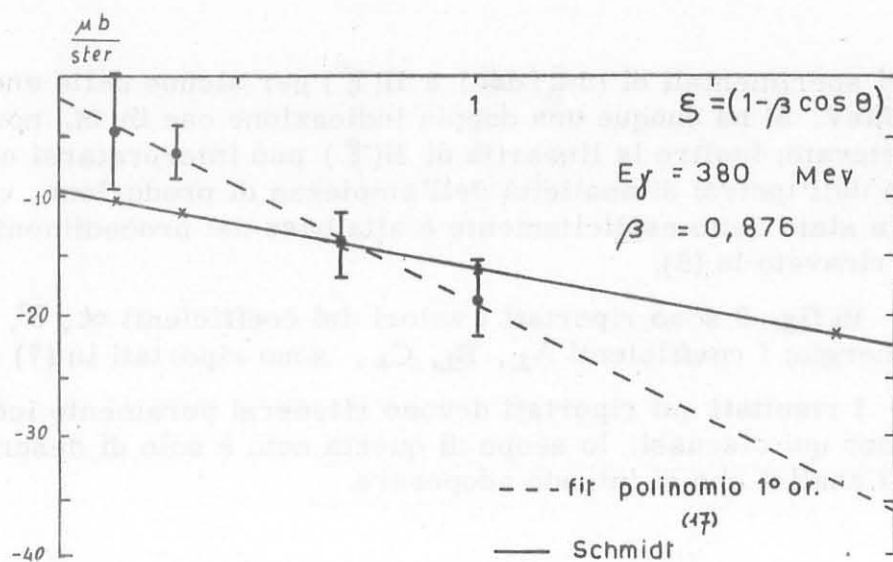


FIG. 6 e 7 - $H(\xi)$ in funzione di $\xi = -\frac{t-1}{2\omega K}$ (con t momento trasferito) per $E_{\gamma} = 260, 280 \text{ MeV}$.



$$H(\xi) = \left[-\frac{k}{q} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d\sigma_\perp}{d\Omega} - \frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega} \right) (1 - \beta \cos \theta)^2 - \delta \right] \xi^{-1}$$

FIG. 8 - $H(\xi)$ in funzione di $\xi = -\frac{t-1}{2\omega K}$ (con t momento trasferito) per $E_\gamma = 380 \text{ MeV}$.

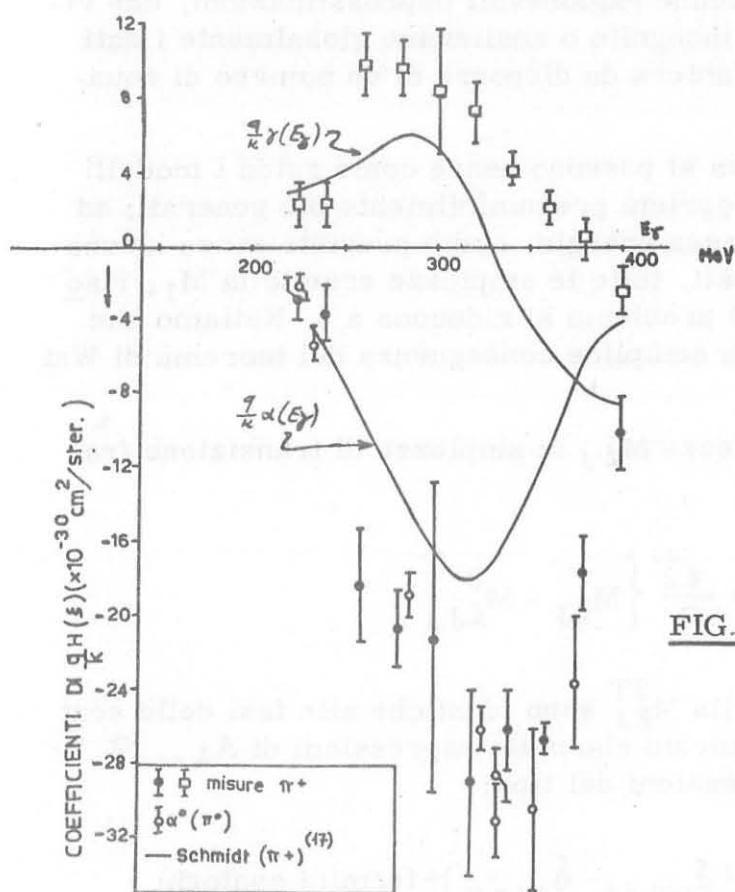


FIG. 9 - I coefficienti $\alpha(\xi)$ e $\gamma(\xi)$, dedotti dai fit di $H(\xi)$, in funzione dell'energia. Il coefficiente $\alpha^0(\pi^0)$, che riporta mo per confronto, è dedotto dalle misure di fotoproduzione di π^0 , ref. (9), (14), (15), (16), (v. formula 29).

dei valori sperimentali di $(d\sigma_1/d\Omega)$ e $H(\xi)$ per alcune delle energie fra 240-400 MeV. Si ha dunque una doppia indicazione che in M_0 non compaiono onde elevate; inoltre la linearità di $H(\xi)$ può interpretarsi come una conferma dell'ipotesi di analicità dell'ampiezza di produzione, che sebbene non sia stato detto esplicitamente è alla base del procedimento con cui abbiamo ricavato la (6).

In fig. 9 sono riportati i valori dei coefficienti α, σ , in funzione dell'energia; i coefficienti A_1, B_1, C_1 , sono riportati in (7) e (8).

I risultati qui riportati devono ritenersi puramente indicativi e non vengono qui discussi; lo scopo di questa nota è solo di descrivere il metodo di analisi che si intende adoperare.

4 - DETERMINAZIONE DELLE AMPIEZZE DI MULTIPOLO -

I coefficienti $A_1 \dots \sigma$, ricavati dalle misure di distribuzioni angolari di π^+ con σ polarizzati, possono servire come base per la determinazione delle ampiezze di multipolo attraverso le equazioni (18) e (22). Osserviamo che, dal momento che le ampiezze $M_{\ell J}$ sono quantità complesse, anche nel caso più semplice in cui M_0 non contiene onde elevate, il numero di equazioni non è sufficiente per tale determinazione. Si presentano pertanto due alternative: o introdurre alcune ragionevoli approssimazioni, che riducano il numero delle ampiezze incognite o analizzare globalmente i dati di fotoproduzione di π^+ e π^0 in maniera da disporre di un numero di equazioni sufficienti.

Per la prima alternativa si possono usare come guida i modelli teorici, estraendo da questi le proprietà presumibilmente più generali; ad esempio se si fa l'ipotesi che a bassa energia, come previsto senza alcuna eccezione da tutti i modelli proposti, tutte le ampiezze eccetto la M_{1+} riso- nante siano reali, le incognite del problema si riducono a 5. Notiamo che questa proprietà dei modelli è una semplice conseguenza del teorema di Watson.

Decomponiamo le ampiezze $M_{\ell J}$ in ampiezze di transizione fra stati di isospin definito $M_{\ell J}^{2T}$:

$$(26) \quad M_{\ell J} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ M_{\ell J}^1 - M_{\ell J}^3 \right\}$$

In virtù di tale teorema le fasi della $M_{\ell J}^{2T}$ sono identiche alle fasi dello scattering $\delta_{2T, 2J}$. Pertanto dal momento che nelle espressioni di $A_1 \dots \sigma$ le ampiezze compaiono solo in espressioni del tipo:

$$\text{Re } M_{\ell J}^x M_{\ell' J'} = |M_{\ell J}| |M_{\ell' J'}| \cos(\delta_{2T, 2J} - \delta_{2T, 2J'}) + \text{termini analoghi}$$

per valori delle fasi minori di 20° , le ampiezze possono essere considerate reali senza introdurre apprezzabili errori nella valutazione dei coefficienti.

Poichè d'altra parte le fasi non risonanti dello scattering^(10, 11) hanno valori minori di 16° per energie minori di $T_\pi = 250 \text{ MeV}$ ^(x) l'ipotesi della realtà delle ampiezze, almeno per quanto riguarda E_{0+} , M_{1-} , ci sembra ampiamente giustificata. La realtà di E_{1+} , comune a tutte le teorie, viene spiegata da C. G. L. N.⁽¹⁾ come conseguenza del fatto che la N_{33}^* viene eccitata preferenzialmente attraverso il canale magnetico. Queste ipotesi semplificatrici permettono di valutare come si è detto le ampiezze utilizzando solamente i coefficienti dedotti dall'analisi di fotoproduzione di π^+ . Quando sia necessario o si voglia tener conto delle componenti immaginarie delle ampiezze, queste possono essere determinate soltanto analizzando globalmente le sezioni d'urto del π^0 e del π^+ . Sempre utilizzando il teorema di Watson, e quindi decomponendo l'ampiezza secondo la (26), i coefficienti $A \dots \mathcal{J}$ dipendono ora ad 8 numeri reali indipendenti $M_{\mathcal{J}}^{2T}$; ora però l'analisi dei π^0 fornisce 4 coefficienti $A^0 B^0 C^0, \alpha^0$,^(x) funzioni delle stesse ampiezze $M_{\mathcal{J}}^{2T}$.

Quindi analizzando globalmente i risultati del π^0 e π^+ si ottiene, nella ipotesi di validità del teorema di Watson, un sistema di 9 equazioni in 8 incognite da cui, almeno in linea di principio, dedurre le ampiezze in questione.

C'è da dire che la complessità del sistema, veramente notevole, suggerisce almeno in un primo stadio delle analisi di assumere l'ipotesi più semplice: limitarsi all'analisi dei dati del π^+ , introducendo nelle equazioni dei coefficienti valori reali per E_{0+} , M_{1-} , E_{1+} e facendo uso della (26) solamente per M_{1+} .

Finalmente concludiamo osservando che la validità del teorema di Watson non potrà sicuramente essere verificata da sole analisi di sezioni d'urto poichè tali grandezze dipendono in maniera estremamente debole dalle fasi; per esempio Dietz e V. Gehlen⁽¹²⁾ hanno verificato che la fase di M_{1+}^{2T} può essere variata entro larghi limiti rispetto alla corrispondente fase dello scattering δ_{33} , ottenendo delle variazioni di sezioni d'urto largamente contenute entro gli errori sperimentali. Una valutazione delle fasi può ottenersi solamente attraverso misure di polarizzazione del neutrone di rinculo in quanto, come si può osservare, tale quantità contenendo espressioni del tipo:

(x) - Le fasi $\delta_{2T, 2j}$ sono chiaramente funzione dell'energia totale W . Poichè la differenza fra la energia $E_{\mathcal{J}}$ del \mathcal{J} e cinetica T_π del π , che formano un sistema πN con la stessa energia W rispettivamente nei processi $\mathcal{J} + p = \pi + N$ e $\pi + N = \mathcal{J} + N$ è data dalla relazione cinematica $E_{\mathcal{J}} - T_\pi = 150 \text{ MeV}$, $T_\pi = 250 \text{ MeV}$ corrisponde a $E_{\mathcal{J}} = 400 \text{ MeV}$.

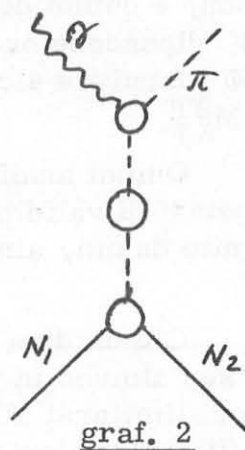
(x) - Vedi par. 5.4.

16.

$\text{Im} M_{\ell J}^* M_{\ell' J'} = |M_{\ell J}| |M_{\ell' J'}| \sin(\delta_{2T, 2J} - \delta_{2T', 2J'}) + \text{termini analoghi}$ è particolarmente sensibile a variazioni delle fasi $\delta_{2T, 2J}$ dello scattering.

5 - ALCUNE OSSERVAZIONI -

5.1. - Notiamo che il grafico (1) è il più generale dei grafici di emissione periferica di un pione, che si possano considerare. Infatti si può dimostrare che il grafico (2), nel quale si considera anche il fattore di forma del vertice $\sigma\pi\pi$ e quello del propagatore pionico si riduce al primo poichè i contributi di questi due ultimi fattori si compensano. La dimostrazione di tale "riducibilità" si basa su argomenti generali di teoria dei campi, più precisamente sulla validità della identità di Ward⁽¹³⁾. Abbiamo voluto considerare il caso più generale di un grafico periferico con fattore di forma incluso, per poter eventualmente indagare l'influenza di tale fattore nelle quantità misurate, che vengono analizzate con il nostro metodo. In seguito useremo l'approssimazione di Born del grafico (1), che consiste nel porre $F_{NN\pi}(t) = f$, con f costante d'accoppiamento $NN\pi$.



5.2. - Si deve osservare che le espressioni di M_S e M_O non sono separatamente gauge invarianti; infatti l'espressione da noi considerata per il grafico fotoelettrico (10) è valida soltanto per la particolare scelta della condizione di gauge $\xi_0 = 0$, per la quale appunto $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \xi \cdot q$.

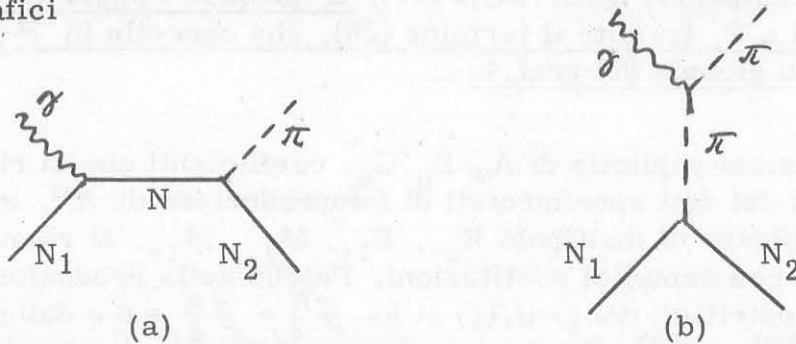
Questo fatto porta che l'assunzione che in M_O compaiono solo onde S e P non è gauge invariante; si potrebbe anzi, con una particolare scelta di tale condizione, introdurre tutto il contributo del graf. (1) in M_O .

Tuttavia, poichè l'ampiezza totale $M = M_O + M_S$ è necessariamente gauge invariante, è lecito ugualmente calcolare le sezioni d'urto con una scelta arbitraria di tale condizione; abbiamo usato la condizione $\xi_0 = 0$ con la quale, almeno in approssimazione di Born, il contributo delle onde elevate è praticamente tutto in M_S .

D'altra parte in tutti i modelli della fotoproduzione si ritiene di descrivere l'ampiezza con i seguenti contributi:

- 1) - termine di Born
- 2) - correzioni (grosse) ai multipoli di onda P risonanti
- 3) - correzioni (piccole) soltanto ai multipoli S e P, e quindi in questo schema l'assunzione che M_0 contenga solo onde S e P, valida in approssimazione di Born, rimane valida in generale.

Sfortunatamente ciò non è più vero se si introduce nel graf. (1) un fattore di forma $F_{NN\pi}$ diverso da f ; infatti soltanto la somma dei grafici



è gauge invariante e se si modifica il vertice $NN\pi$ del graf. (b) è necessario modificare corrispondentemente anche i vertici del graf. (a). Ciò significa introdurre una dipendenza dai momenti trasferiti della ampiezza del graf. (a) e quindi alterare, in maniera non facilmente prevedibile, la bontà dell'assunzione sul numero di onde parziali presenti in M_0 .

Pertanto, poichè occorre procedere con cautela qualora si voglia analizzare l'effetto della funzione di vertice $NN\pi$ nel graf. (1) da noi introdotta solo per completezza di trattazione, ci siamo limitati ad una prima trattazione con $F_{NN\pi} = f$. Una analisi più approfondita meriterebbe attenzione soltanto nel caso che i risultati sperimentali mostrassero sensibili deviazioni della $H(\xi)$ dalla linearità.

5.3.- Vogliamo sottolineare che i termini che compaiono nelle parentesi quadre nelle prime due equazioni della (13) rappresentano, come definito dalla (12), il termine:

$$(26) \quad (\mathcal{F}_i^R - \sum_{\ell=0}^1 O_\ell \mathcal{F}_\ell^R) (i=1,2)$$

cioè il contributo delle onde superiori a P introdotte dal termine fotoelettrico. Sarebbe erroneo in un'analisi in onde S e P trascurare tale contributo, pensando che dal momento che le ampiezze \mathcal{F}_1^R e \mathcal{F}_2^R sono nulle, le decomposizioni:

$$(27) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= E_{0+} + 3(M_{1+} + E_{1+}) \cos\theta \\ \mathcal{F}_2 &= 2M_{1+} + M_{1-} \end{aligned}$$

non contengano contributo dell'ampiezza fotoelettrica. Come si vede chiaramente dalla fig. 1 le ampiezze di multipolo di tale termine sono diverse da zero e quindi portano un contributo non nullo ai multipoli totali che compaiono nella (27) e (13). E' proprio l'aggiunta delle onde superiori a P, tramite il termine (26), che cancella in \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 il contributo globale del graf. 1.

5. 4. - L'espressioni esplicite di A_0, B_0, C_0 , coefficienti che si ricavano dalle analisi dei dati sperimentali di fotoproduzione di π^0 , in funzione delle ampiezze di multipolo $E_{0+}, E_{1+}, M_{1-}, M_{1+}$, si ricavano da $A_{\perp}, B_{\perp}, C_{\perp}$ con semplici sostituzioni. Poichè nella produzione di π^0 è nullo il contributo del graf. (1) si ha $\mathcal{F}_3^R = \mathcal{F}_4^R = 0$ e dalla (16) quindi $\mathcal{F}_{11}^{\pi^0} = \mathcal{F}_{12}^{\pi^0} = \mathcal{F}_3^{\pi^0} = 0$. Con queste semplificazioni e con la sostituzione $E_{\ell J} \rightarrow E_{\ell J}^{\pi^0}; M_{\ell J} \rightarrow M_{\ell J}^{\pi^0}$ dalla (18) si ottengono le equazioni esplicite $A_0 = A_0(M_{\ell J}^{\pi^0}, E_{\ell J}^{\pi^0}) \dots$ ecc.
Dalla (22) essendo $R_3 = 0$ si ricava $\delta\pi^0 = \gamma\pi^0 = 0$; dalla (21) quindi:

$$(28) \quad -\frac{K}{q} \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{d\epsilon_{\perp}}{d\Omega} - \frac{d\epsilon_{\parallel}}{d\Omega} \right) = \alpha^0$$

$\alpha^0 = \alpha^0(M_{\ell J}^{\pi^0}, E_{\ell J}^{\pi^0})$ si ottiene dalla (22) con le stesse posizioni che hanno portato a dedurre A_0, B_0, C_0 .

La (28) mostra che α^0 non dipende dall'angolo di emissione del π^0 e si deduce da misure di asimmetria $A = (\epsilon_{\perp} - \epsilon_{\parallel}) / (\epsilon_{\perp} + \epsilon_{\parallel})$ e di sezioni d'urto ordinarie⁽⁹⁾; misurando entrambe queste quantità a 90° si ha:

$$(29) \quad \alpha^0(E_{\gamma}) = -\frac{2K}{q} A(\theta = 90^\circ, E_{\gamma}) \left(\frac{d\epsilon}{d\Omega} \right)_{\pi^0}(\theta = 90^\circ, E_{\gamma})$$

L'ampiezza $M_{\ell J}^{\pi^0}$ possono essere decomposte in ampiezze di transizione con valori definiti di isospin $M_{\ell J}^{2T}$, analogamente alla (26)

$$M_{\ell J}^{\pi^0} = \frac{1}{3} (M_{\ell J}^1 + 2M_{\ell J}^3)$$

RINGRAZIAMENTI. -

Desideriamo ringraziare il prof. Mario Grilli per le discussioni avute sull'argomento e i dott. P. Spillantini e V. Valente per la loro collaborazione in fase di analisi dei risultati. Ringraziamo inoltre il dott. W. Schmidt⁽¹⁷⁾ per averci fornito i dati preliminari degli ultimi calcoli, basati sulla sua teoria.

BIBLIOGRAFIA. -

- (1) - G. Chew, M. L. Goldberger, F. E. Low and Y. Nambu, Phys. Rev. 106, 1345 (1957).
- (2) - J. Ball, Phys. Rev. 124, 2014 (1963).
- (3) - D. Freytag, W. J. Schuille and R. J. Wedemeyer: Physik 186, 1 (1965).
- (4) - R. Giantin, M. Grilli, M. Nigro, E. Schiavuta, F. Soso, P. Spillantini e V. Valente, LNF-66/68 (1966).
- (5) - E. A. Knapp, R. A. Kenney and V. Perez-Mendez, Phys. Rev. 114, 605 (1959).
- (6) - J. C. Bizot, J. Perez y Jorba and D. Treille, Proc. Intern. Symp. on Electron and Photons Interactions at High Energies, Hamburg 1965, vol. II, pag. 227.
- (7) - M. Grilli, M. Nigro, E. Schiavuta, F. Soso, P. Spillantini and V. Valente, Recent measurements of π^+ photoproduction with coherent bremsstrahlung, Intern. Conf. on Electromagnetic Interactions at Low and Intermediate Energies, Dubna, 1967.
- (8) - M. Grilli, M. Nigro, E. Schiavuta, F. Soso, P. Spillantini and V. Valente, Recent measurements of π^+ photoproduction with coherent bremsstrahlung ($E_\gamma = 200-450$ MeV), LNF-67/18 (1967).
- (9) - A. Donnachie and G. Shaw, Ann. Phys. 37, 333 (1966).
- (10) - P. Auvil, C. Lovelace, A. Donnachie and A. T. Lea, Phys. Letters 12, 76 (1964).
- (11) - L. D. Roper, Phys. Rev. Letters 12, 340 (1964).
- (12) - Dietz and V. Gehlen, Nuovo Cimento 42A, 537 (1966); comunicazione privata.
- (13) - S. S. Schweber, Relativistic quantum field theory.
- (14) - R. C. Smith and R. F. Mozley, Phys. Rev. 130, 2429 (1963).
- (15) - G. Barbiellini, G. Bologna, J. De Wire, G. Diambri and G. P. Murtas, Proc. Intern. Sienna Conf., 1964, pag. 516.
- (16) - D. J. Drickey and R. F. Mozley, Phys. Rev. 136, B543 (1964).
- (17) - W. Schmidt, Physik 182, 76 (1964); comunicazione privata.