Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Sezione di Pisa

INFN/AE-63/2
25 Marzo 1963

A. Bigi: DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DEGLI ERRORI PER I PARAMETRI GEOMETRICI DELLE TRACCE IN CAMERA A BOLLE.

INTRODUZIONE.

La ricostruzione stereoscopica di tracce in camera a bolle viene ottenuta elaborando i risultati di misure eseguite su due o più immagini delle tracce stesse. Tale elaborazione è relativamente complessa ed involve metodi iterativi; riesce così molto difficile determinare gli errori sui risultati finali a partire da quelli di misura. Per i metodi di ricostruzione che danno, come risultato parziale, le coordinate di punti appartenenti alla traccia, si è soliti procedere ad una valutazione sperimentale degli errori da attribuire a queste misure di coordinate. Questi errori si intendono noti; ad essi vanno aggiunti gli errori di scattering, cioè gli spostamenti dalle posizioni che detti punti avrebbero in assenza di scattering.

In quello che segue vengono calcolate le matrici degli errori complessivi $\overline{\Delta y_i \, \Delta y_k}$, $\overline{\Delta z_i \, \Delta z_k}$, $\overline{\Delta(z_i - z_{i-1}) \, \Delta(z_k - z_{k-1})}$, sotto ipotesi ordinariamente soddisfatte; si assume quindi che il metodo di ricostruzione proceda al calcolo dei parametri geometrici della traccia, approssimandone la proiezione xy con un arco di parabola e ponendo la variazione di quota z proporzionale alla lunghezza della traccia stessa, approssimata a sua volta dalla spezzata dei punti ricostruiti.

Realizzando il calcolo dei suddetti parametri con il metodo dei minimi quadrati, la richiesta matrice degli errori viene determinata a partire dalle matrici precedentemente calcolate.

ERRORI DI SCATTERING ED ERRORI COMPLESSIVI SU SINGOLI PUNTI.

Descriviamo lo scattering multiplo di una particella che abbia attraversato un tratto ξ di materiale con lunghezza di scattering λ mediante i parametri τ e η.

τ è lo spostamento in una direzione ortogonale alla traiettoria ξ ; η è la variazione di direzione nel piano $\tau\xi$.

Assumiamo la funzione (1)

$$W(\tau, \eta) = \frac{\lambda\sqrt{3}}{2\pi\xi^2} \exp\left(-\frac{\lambda}{\xi}\left(\eta^2 - 3\eta\frac{\tau}{\xi} + 3\frac{\tau^2}{\xi^2}\right)\right)$$

quale funzione di distribuzione per le variabili τ e η.

Si riconosce immediatamente che τ e η non sono variabili indipendenti. Infatti:

$$W(\tau, \eta) \neq \left(\int W(\tau, \eta)d\tau\right)\left(\int W(\tau, \eta)d\eta\right)$$

I due integrali a secondo membro rappresentano le funzioni di distribuzione per η e τ separatamente ed il loro prodotto darebbe $W(\tau, \eta)$ se tali variabili fossero indipendenti.

Operando la sostituzione $u = \eta - \frac{3}{2}\frac{\tau}{\xi}$, $\tau = \tau$, si ottiene

$$W(\tau, \eta)d\tau\, d\eta = W(\tau, u)J(\tau, \eta, \tau, u)d\tau du =$$

$$= \frac{\lambda\sqrt{3}}{2\pi\xi^2} \exp\left(-\frac{\lambda}{\xi}\left(u^2 + \frac{3\tau^2}{4\xi^2}\right)\right) d\tau du =$$

$$= \sqrt{\frac{3\lambda}{4\pi\xi^3}} \exp\left(-\frac{3\lambda}{4\xi^3}\tau^2\right)d\tau \sqrt{\frac{\lambda}{\pi\xi}} \exp\left(-\frac{\lambda}{\xi}u^2\right) du.$$

Le variabili τ e u sono chiaramente indipendenti ed in particolare le loro funzioni di distribuzione sono di tipo gaussiano.

Procediamo ora alla determinazione degli errori di scattering ys_j e zs_j sulle coordinate y_j e z_j di punti di una traccia rettilinea. Il problema riesce semplificato dalle seguenti ipotesi:

- le misure delle coordinate dei punti in questione siano state eseguite in modo tale che per un dato valore di x_j siano stati determinati i corrispondenti valori di y_j e z_j con errori di misura ε_y e ε_z indipendenti dall'indice j;
- la direzione della traccia proiettata sul piano xy coincida con quella la dell'asse x;
- le lunghezze $\xi_j = ((x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_j - z_{j-1})^2)^{1/2}$ abbiano tutte lo stesso valore ξ.

La figura 1 dà una rappresentazione degli errori ys_j in termini delle grandezze τ_j e η_j di immediato significato.

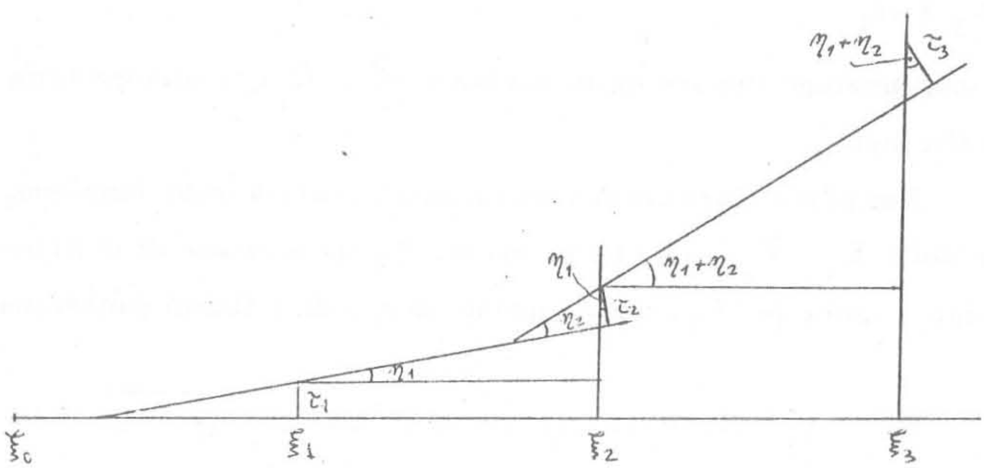

FIG. 1

risulta

$ys_o = 0, \qquad ys_1 = \tau_1, \qquad ys2 = ys_1 + \xi \operatorname{tg} \eta_1 + \tau_2/\cos \eta_1$

. . . .

$$ys_i = ys_{i-1} + \xi\,\mathrm{tg}\Big(\sum_{1}^{i-1}{}_j\ \eta_j\Big) + \tau_i/\cos\Big(\sum_{1}^{i-1}{}_j\ \eta_j\Big)$$

Per valori di η_j tali che si possa porre

$$\mathrm{tg}\big(\textstyle\sum_j\ \eta_j\big) = \sum_j \eta_j \qquad\qquad \cos\big(\sum_j\ \eta_j\big) = 1$$

sostituendo

$$\eta_j = u_j + \frac{3}{2}\ \frac{\tau_j}{\xi}$$

otteniamo la formula

$$ys_i = ys_{i-1} + \xi \sum_{1}^{i-1}{}_j\, u_j + \frac{3}{2} \sum_{1}^{i-1}{}_j\ \tau_j + \tau_i =$$

$$= \sum_{1}^{i}{}_j \Big(\big(\frac{3}{2}(i - j) + 1\big)\,\tau_j + \xi\,(i-j)u_j\Big) = \sum_{1}^{i}{}_j \big(A_i^j\,\tau_j + \xi B_i^j u_j\big).$$

L'errore complessivo su y_i

$$\Delta y_i = \varepsilon_y + ys_i$$

è quindi una funzione lineare delle variabili ε_y τ_j u_j che sono tutte indipendenti tra loro.

Una particolare conseguenza della linearità della funzione Δy_i nelle variabili ε_y, τ_j, u_j è che se anche ε_y ha funzione di distribuzione gaussiana, come le τ_j e le u_j, anche Δy_i è distribuito gaussianamente (2).

Per il calcolo della matrice degli errori $\overline{\Delta y_i\ \Delta y_k}$, dalla definizione

$$\overline{\Delta y_i\,\Delta y_k} = \int \Delta y_i\ \Delta y_k\ \ f(\varepsilon_{yi})f(\varepsilon_{yk})\ \prod_{1}^{i \geq k}{}_j\ \ g_j(\tau_j)h_j(u_j)dp$$

dove f, g, h, sono le funzioni di distribuzione dei corrispondenti argomenti e dp è l'elemento di volume delle ε_y, τ_j, u_j.

Riesce immediato che, per la linearità di Δy_i e di Δy_k nelle variabili di integrazione e per la reciproca indipendenza di queste ultime, l'integrale di cui sopra si scompone nella somma di integrali in $\varepsilon\varepsilon$, $\varepsilon\tau$, εu, $\tau\tau$, τu, uu, dei quali quelli contenenti il prodotto di due variabili diverse sono nulli.

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_k} = \overline{\varepsilon_y^2}\, \delta_{ik} + \sum_{1}^{k \leq i}{}_j \left(A_i^j A_k^j \overline{\tau_j^2} + \xi^2 B_i^j B_k^j \overline{u_j^2}\right)$$

Risulta poi, qualunque sia j:

$$\overline{\tau_j^2} = \frac{2}{3} \frac{\xi^3}{\lambda} ; \overline{u_j^2} = \frac{\xi}{2\lambda}$$

Infatti le funzioni di distribuzione $W_j(\tau_j, u_j)$ sono tutte formalmente uguali in quanto lo scattering in ogni tratto di traccia è stato considerato indipendente dai precedenti (fig. 1).

Concludendo:

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_k} = \overline{\varepsilon_y^2}\, \delta_{ik} + \sum_{1}^{k \leq i}{}_j \left(\frac{4}{3} A_i^j A_k^j + B_i^j B_k^j\right) \frac{\xi^3}{2\lambda}$$

con

$$A_i^j = \frac{3}{2}(i - j) + 1 \qquad B_i^j = (i - j).$$

Per il calcolo analogo di zs_i e di $\overline{\Delta z_i \;\Delta z_k}$ occorre tener presente che l'asse z non è in generale perpendicolare alla traccia, ma forma con questa un angolo ϕ. Applicando il metodo precedente si possono ottenere le espressioni formalmente identiche per degli errori ts_i se t è l'asse perpendicolare alla traccia e all'asse y.

E' immediato che $zs_i = ts_i \sin\phi$. Quindi:

$$zs_i = \sum_{1}^{i}{}_j \left(A_i^j \tau_j + \xi B_i^j u_j\right) \sin\phi$$

$$\overline{\Delta z_i \Delta z_k} = \overline{\varepsilon_z^2}\, \delta_{ik} + \sum_{1}^{k \leq i}{}_j \left(\frac{4}{3} A_i^j A_k^j + B_i^j B_k^j\right) \sin^2\phi \; \frac{\xi^3}{2\lambda}$$

Interesserà nel seguito la seguente matrice $\overline{\Delta(z_i - z_{i-1})\;\Delta(z_k - z_{k-1})}$.

Riesce evidente dalla fig. 1 che

$$(y_i - y_{i-1})s = \xi \sum_{1}^{i-1} {}_j u_j + \frac{3}{2} \sum_{1}^{i-1} {}_j \tau_j + \tau_i = \sum_{1}^{i} (C_i^j \tau_j + \xi D_i^j u_j)$$

Tornando alle z:

$$\Delta(z_i - z_{i-1}) = \varepsilon_{zi} + \varepsilon_{zi-1} + \sum_{1}^{i} {}_j (C_i^j \tau_j + \xi D_i^j u_j) \sin \phi$$

$$\overline{\Delta(z_i - z_{i-1}) \, \Delta(z_k - z_{k-1})} = \overline{\varepsilon}_z^2 (\delta_{i,k} + \delta_{i-1,k} + \delta_{i,k-1} + \delta_{i-1,k-1}) +$$

$$+ \sum_{1}^{k \leq i} {}_j (\tfrac{4}{3} C_i^j C_k^j + D_i^j D_k^j) \sin^2 \phi \, \frac{\xi^3}{2\lambda}$$

con $C_i^j = \frac{3}{2}(1 - \delta_{ij}) + \delta_{ij}$ $\qquad D_i^j = 1 - \delta_{ij}$

MATRICE DEGLI ERRORI DEI PARAMETRI GEOMETRICI DELLE TRACCE.

Assumiamo che il metodo di ricostruzione stereoscopica della traccia proceda al calcolo dei suoi parametri geometrici approssimando la proiezione xy della traccia stessa con un arco di parabola e ponendo la variazione di quota z proporzionale alla lunghezza della spezzata dei punti ricostruiti.

Il fit parabolico delle coppie $x_j y_j$ ed il fit lineare delle coppie $(z_j - z_{j-1})((x_j - x_{j-1})^2 + (y_j^o - y_{j-1}^o)^2)^{1/2}$, dove y_j^o è il valore che il fit parabolico fa corrispondere a x_j, siano realizzati con il metodo dei minimi quadrati.

Dai coefficienti $a_0 a_1 a_2$ della parabola-fit si ricavano:

$$r_j = (1 + (2a_2 x_j + a_1)^2)^{3/2} / 2a_2$$

$$tg\theta = 2a_2 x_0 + a_0$$

rispettivamente raggio di curvatura nel punto x_j e tg dell'angolo azimutale della tangente alla parabola nel primo punto; infine c, coefficiente di proporzionalità proveniente dal fit lineare sopra accennato, dà la tg dell'angolo di inclinazione della traccia.

Nota la matrice $\overline{\Delta y_i \, \Delta y_k}$, con il metodo dei minimi quadrati si ottengono $a_0 a_1 a_2$ ed i loro errori; in base alle formule precedenti e alle leggi di propagazione degli errori si ricavano i valori di r_j e tgθ ed i loro errori.

Nota la matrice $\overline{\Delta(z_i - z_{i-1}) \; \Delta(z_k - z_{k-1})}$, ancora con il metodo dei minimi quadrati, si ricavano i valori di c e di $\overline{\Delta c^2}$.

Diamo qualche dettaglio sul procedimento:

Calcolo di $a_0 a_1 a_2$:

L'espressione da minimizzare è la seguente:

$$\chi^2 = \sum_{ik} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)\,(y_k - a_0 - a_1 x_k - a_2 x_k^2)\, H_{ik}$$

dove H_{ik} è la matrice inversa della matrice $\overline{\Delta y_i \; \Delta y_k}$.

Tali valori si ottengono come soluzione del sistema:

$$\partial \chi^2 / \partial a_0 = 0 \qquad \partial \chi^2 / \partial a_1 = 0 \qquad \partial \chi^2 / \partial a_2 = 0$$

che ha la forma:

$$\sum_n M_{0n} a_n = \sum_{ik} (y_i x_k^2 + y_k x_i^2)\, H_{ik}$$

$$\sum_n M_{1n} a_n = \sum_{ik} (y_i x_k + y_k x_i)\, H_{ik}$$

$$\sum_n M_{2n} a_n = \sum_{ik} (y_i + y_k)\, H_{ik}$$

$$M_{mn} = \sum_{ik} \begin{vmatrix} (2x_i^2 x_k^2) & (x_i^2 x_k + x_k^2 x_i) & (x_i^2 + x_k^2) \\ & (2x_i x_k) & (x_i + x_k) \\ \text{simm.} & & 2 \end{vmatrix} H_{ik}$$

Per calcolare la matrice degli errori delle a_n, sviluppiamo χ^2 in serie di potenze attorno al punto di minimo; si ha:

$$\chi^2 = \chi^2_{min} + \frac{1}{2} \sum_{mn} (\partial^2 \chi^2 / \partial a_m \partial a_n) \Delta a_m \Delta a_n$$

i termini del primo ordine sono nulli per definizione delle a_n e quelli di ordine superiore al secondo sono nulli perchè χ^2 è di secondo grado nelle a_n.

La funzione $\mathcal{L} = K \exp(-\chi^2)$ ha le seguenti proprietà:

- è massima per χ^2_{min}
- ha la forma di una gaussiana nelle a_n.

Se si presume che i valori delle a_n siano distribuiti con legge gaussiana attorno ai valori che minimizzano χ^2, $\mathcal{L}$ può essere intesa come funzione di distribuzione delle a_n. La matrice degli errori per le a_n è quindi l'inversa della M_{mn}.

Per la matrice degli errori di r_j e tgθ si ottiene:

$$\overline{\Delta r_j^2} = \sum_{mn} (\partial r_j / \partial a_m)(\partial r_j / \partial a_n) \overline{\Delta a_m \Delta a_n}$$

$$\overline{\Delta r_j \Delta \mathrm{tg}\theta} = \sum_{mn} (\partial r_j / \partial a_m)(\partial \mathrm{tg}\theta / \partial a_n) \overline{\Delta a_m \Delta a_n}$$

$$\overline{\Delta \mathrm{tg}\theta^2} = \sum_{mn} (\partial \mathrm{tg}\theta / \partial a_m)(\partial \mathrm{tg}\theta / \partial a_n) \overline{\Delta a_m \Delta a_n}$$

Willis ha trattato per altra via il caso particolare di 3 punti situati sul piano xy.(3) Da quanto precede otteniamo:

$$\overline{\Delta y_i \Delta y_k} = \begin{vmatrix} \bar{\varepsilon}^2_y & 0 & 0 \\ & \bar{\varepsilon}^2_y + \frac{2}{3}\frac{\xi^3}{\lambda} & \frac{5}{3}\frac{\xi^3}{\lambda} \\ \text{simm.} & & \bar{\varepsilon}^2_y + \frac{16}{3}\frac{\xi^3}{\lambda} \end{vmatrix}$$

Posto per semplicità che i tre punti siano sulla retta $y = 0$ e che $x_0 = 0$, $x_1 = x$, $x_2 = 2x$, il metodo del χ^2 dà ovviamente $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, r_j infinito, $tg\theta = 0$ e per $(M_{mn})^{-1}$ quanto segue:

$$\begin{vmatrix} \frac{6}{4}\frac{\overline{\varepsilon_y^2}}{x^4} + \frac{1}{3x\lambda} & -\frac{3\overline{\varepsilon_y^2}}{x^3} - \frac{1}{6\lambda} & \frac{1}{2}\overline{\varepsilon_y^2} \\ & \frac{13}{2}\frac{\overline{\varepsilon_y^2}}{x^2} + \frac{2x}{3\lambda} & \frac{3}{2}\overline{\varepsilon_y^2} \\ \text{simm.} & & \overline{\varepsilon_y^2} \end{vmatrix}$$

Willis ricava appunto le due precedenti matrici.

Calcolo di c:

L'espressione da minimizzare è la seguente:

$$\chi^2 = \Sigma_{ik}(z_i - z_{i-1} - c\,L_i)(z_k - z_{k-1} - c\,L_k)\,T_{ik}$$

$$L_i = ((x_i - x_{i-1})^2 + (a_2(x_i^2 - x_{i-1}^2) + a_1(x_i - x_{i-1})))^{1/2}$$

T_{ik} matrice inversa della $\overline{\Delta(z_i - z_{i-1})\Delta(z_k - z_{k-1})}$

$\partial\chi^2/\partial c = 0$ dà:

$$c = (\Sigma_{ik}((z_i - z_{i-1})L_k + (z_k - z_{k-1})L_i)\,T_{ik})/2\,\Sigma_{ik}L_iL_kT_{ik}$$

Ancora

$\chi^2 = \chi^2_{min} + \frac{1}{2}\partial^2\chi^2/\partial c^2\,\Delta c^2$

$\mathcal{L} = K'\exp(-\chi^2)$ risulta la funzione di distribuzione per c, supposto che detta funzione debba essere gaussiana:

$$\overline{\Delta c^2} = 1/\partial^2\chi^2/\partial c^2 = 1/(\Sigma_{ik}2\,L_i\,L_k\,T_{ik}).$$

Riesce così costruita la matrice degli errori per le grandez ze r_j, tgθ e c. I termini misti contenenti c sono nulli; infatti c è stato ottenuto da un χ^2 in cui le a_n sono considerate costanti.

Va notato infine che gli elementi della matrice T_{ik} sono funzioni dell'angolo ϕ di cui c è la cotg; occorre quindi valutare approssimativamente, in qualche modo, ϕ per costruire il χ^2 relativo a c.

BIBLIOGRAFIA.

(1) - Scott W.T. - Correlated probabilities in multiple scattering, Phys. Rev. 76, 212 (1949).

(2) - Cramer H. - Mathematical method of statistics, (Princeton University Press - Princeton,1958) pg. 212.

(3) - Willis W. J. - Error matrix for bubble chamber track measurements - Brookhaven National Laboratory, internal report 8. 3. 59.