



**ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE**

Laboratori Nazionali di Frascati

---

**INFN-12-19/LNF**  
**26<sup>th</sup> november 2012**

**Fondamenti Matematici Della Fisica Macroscopica  
(un percorso geometrico), Parte III**

Camillo Lo Surdo

*INFN, Laboratori Nazionali di Frascati, P.O. Box 13, I-00044 Frascati, Italy*

*Published*

*Published by SIDS-Pubblicazioni  
Laboratori Nazionali di Frascati*

FONDAMENTI MATEMATICI DELLA FISICA  
MACROSCOPICA  
(UN PERCORSO GEOMETRICO)

C. LO SURDO

## INDICE

- 0.0 PRESENTAZIONE
  - 0.0.1 CONSIDERAZIONI GENERALI E PIANO DI LAVORO
  - 0.0.2 I CONTENUTI CAPITOLO PER CAPITOLO: SINTESI E COMMENTI
  - 0.0.3 “ISTRUZIONI PER L’USO”
- 0.1 INTRODUZIONE: ALCUNE RIFLESSIONI SULLE TEORIE FISICO-MATEMATICHE
  - 0.1.1 PREMessa
  - 0.1.2 RAGIONAMENTO ASSIOMATICO-DEDUTTIVO VS. RAGIONAMENTO INDUTTIVO
  - 0.1.3 MATEMATICA SIGNIFICANTE VS. MATEMATICA NON SIGNIFICANTE
  - 0.1.4 SCIENZE MATEMATIZZABILI VS. SCIENZE NON MATEMATIZZABILI, E ALTRI COMMENTI

## PARTE PRIMA

### GEOMETRIA EUCLIDEA E PSEUDOEUCLEIDEA

#### CAP.1 LA GEOMETRIA EUCLIDEA

- 1.1 LA GEOMETRIA COME PROTOTIPO DI TEORIA FISICO-MATEMATICA
  - 1.1.1 GENERALITÀ E INQUADRAMENTO STORICO
  - 1.1.2 GEOMETRIA EUCLIDEA SINTETICA E ANALITICA
- 1.2 UNA FORMALIZZAZIONE METRICA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA
  - 1.2.1 INTRODUZIONE
  - 1.2.2 I PRIMI NOVE ASSIOMI E LA GEOMETRIA “SPECIALE” DELLA RETTA
  - 1.2.3 I SUCCESSIVI OTTO ASSIOMI E LE GEOMETRIE DIADICHE DEL PIANO E DELLO SPAZIO
  - 1.2.4 GLI ULTIMI DUE ASSIOMI: LA GEOMETRIA ASSOLUTA E LA GEOMETRIA EUCLIDEA
- 1.3 L’ISOMORFISMO TRA  $H_n$  E LO SPAZIO CARTESIANO REALE N DIMENSIONALE  $\mathbf{R}^n$ 
  - 1.3.1  $\mathbf{R}^n$  COME MODELLO NORMALE DI  $H_n$ : PARTE PRIMA
  - 1.3.2  $\mathbf{R}^n$  COME MODELLO NORMALE DI  $H_n$ : PARTE SECONDA
- 1.4 QUESTIONI DI ESTENSIONE E ORIENTAMENTO, CONCLUSIONI
  - 1.4.1 ESTENSIONE
  - 1.4.2 ORIENTAMENTO
  - 1.4.3 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

#### APP. SPEC. CAP. 1

- 1.A LE RELAZIONI D'ORDINE
- 1.B LE FUNZIONI Cos E Sin

## CAP. 2 LA GEOMETRIA PSEUDOLUCLIDEA

- 2.1 PREMESSA: LO SPAZIO-TEMPO DI EUCLIDE-NEWTON
  - 2.1.1 ELEMENTI DI CINEMATICA EUCLIDEA-NEWTONIANA
  - 2.1.2 ELEMENTI DI DINAMICA NEWTONIANA
- 2.2 INTRODUZIONE ALLA CINEMATICA E ALLA DINAMICA RELATIVISTICHE SPECIALI
  - 2.2.1 CINEMATICA RELATIVISTICA SPECIALE E TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
  - 2.2.2 RUDIMENTI DI DINAMICA RELATIVISTICA SPECIALE
- 2.3 INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA PSEUDOEUCLEIDEA
  - 2.3.1 GLI SPAZI PSEUDOEUCLEIDEI (NOZIONI DI BASE)
  - 2.3.2 LO SPAZIO DI MINKOWSKI (NOZIONI DI BASE)
- 2.4 ALGEBRA E GEOMETRIA DELLO SPAZIO DI MINKOWSKI
  - 2.4.1 PARTE PRIMA
  - 2.4.2 PARTE SECONDA
- 2.5 INTRODUZIONE ALL'ELETTROMAGNETISMO MAXWELLIANO
  - 2.5.1 LE EQUAZIONI DI MAXWELL-LORENTZ
  - 2.5.2 LA TEORIA EM NEL LINGUAGGIO DEL CALCOLO TENSORIALE
  - 2.5.3 L'ELETTROMAGNETISMO NEI CONTINUI MATERIALI

### APP. SPEC. CAP. 2

- 2.A SPOSTAMENTI RIGIDI E CINEMATICA CLASSICA
- 2.B PROCEDURE DI SINCRONIZZAZIONE
- 2.C COMPLEMENTI SULLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
- 2.D LE FORMULE DI TRASFORMAZIONE DI LORENTZ PARALLELA
- 2.E INDUZIONE DI LEGGI DI CONSERVAZIONE IN MECCANICA RELATIVISTICA SPECIALE (SECONDO LEWIS E TOLMAN)
- 2.F ANCORA SULLA RELAZIONE TRA MASSA DI QUIETE E MASSA DI MOTO
- 2.G DESCRIZIONE LAGRANGIANA E DESCRIZIONE EULERIANA DEL MOTO DI UN CONTINUO
- 2.H ELEMENTI DI DINAMICA CLASSICA E RELATIVISTICA DEI MEZZI MATERIALI CONTINUI
- 2.I I PARADOSSI DELLE VELOCITÀ SUPERLUMINALI IN RELATIVITÀ SPECIALE

## PARTE SECONDA

### STRUMENTI MATEMATICI DI BASE

#### CAP. 3 STRUMENTI MATEMATICI I

##### 3.1 ELEMENTI DI ALGEBRA MULTILINEARE E TENSORIALE IN SPAZI PSEUDOEUCLEIDEI

###### 3.1.1 FORME $\kappa$ -LINEARI

###### 3.1.2 $\kappa$ -TENSORI

###### 3.1.3 FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

##### 3.2 SVILUPPI E APPLICAZIONI DELL'ALGEBRA TENSORIALE

###### 3.2.1 SULLE TRASFORMAZIONI ORTOGONALI E PSEUDORTOGONALI

###### 3.2.2 PSEUDOTENSORE DI LEVI-CIVITA

###### 3.2.3 ALCUNE APPLICAZIONI ALLA FISICA

###### 3.2.4 $B$ -ORTOGONALITÀ E SOTTOSPAZI

###### 3.2.5 GRAMIANI E PROIETTORI ORTOGONALI

###### 3.2.6 OPERATORI LINEARI SIMMETRICI E HERMITIANI, AUTOPROBLEMI

###### 3.2.7 INVARIANTI SCALARI

##### 3.3 ANALISI TENSORIALE LOCALE IN SPAZI PSEUDOEUCLEIDEI E IN LORO VARIETÀ IMMERSE I

###### 3.3.1 CAMPI TENSORIALI, BASI CARTESIANE E BASI LOCALI

###### 3.3.2 DERIVAZIONE DI UN CAMPO TENSORIALE IN UNA BASE LOCALE

##### 3.4 ANALISI TENSORIALE LOCALE IN SPAZI PSEUDOEUCLEIDEI E IN LORO VARIETÀ IMMERSE II

###### 3.4.1 DERIVAZIONE DI CAMPI TENSORIALI INTERNA A VARIETÀ IMMERSE

###### 3.4.2 IL TENSORE DI RIEMANN IN VARIETÀ IMMERSE

##### 3.5 TEORIA DELLA CURVATURA PER VARIETÀ EMBEDDED IN UNO SPAZIO EUCLIDEO $m$ -DIMENSIONALE

###### 3.5.1 INTRODUZIONE

###### 3.5.2 CASO DELLE CURVE, $n = 1$

###### 3.5.3 CASO DELLE (IPER)SUPERFICI, $2 \leq n = m-1$

###### 3.5.4 CASO DELLE VARIETÀ, $2 \leq n < m-1$

#### APP. SPEC. CAP. 3

##### 3.A NOTA SUL TENSORE FONDAMENTALE IN RELATIVITÀ SPECIALE

##### 3.B ALCUNI ASPETTI DELLA GEOMETRIA DIFFERENZIALE DI UNA SUPERFICIE IMMERSA IN $\mathbb{R}^3$

## CAP 4 STRUMENTI MATEMATICI II

### 4.1 VARIETÀ TOPOLOGICHE E DIFFERENZIABILI

- 4.1.1 NOZIONI DI BASE I
- 4.1.2 NOZIONI DI BASE II
- 4.1.3 ESEMPI E COMMENTI

### 4.2 CALCOLO DIFFERENZIALE SU VARIETÀ

- 4.2.1 APPLICAZIONI DI UNA VARIETÀ IN UNA VARIETÀ
- 4.2.2 CALCOLO DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE SU O TRA VARIETÀ
- 4.2.3 APPROCCI ALTERNATIVI AL CALCOLO DIFFERENZIALE SU O TRA VARIETÀ

### 4.3 ALGEBRA E ANALISI DIFFERENZIALE DI CAMPI $\langle a, b \rangle$ -TENSORIALI SU VARIETÀ ASTRATTE

- 4.3.1 ALGEBRA DEI  $\langle a, b \rangle$ -TENSORI
- 4.3.2 CAMPI TENSORIALI IN VARIETÀ A CONNESSIONE AFFINE
- 4.3.3 CAMPI TENSORIALI RELATIVI E CAMPI PSEUDOTENSORIALI

### 4.4 ALGEBRE DELLE FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

- 4.4.1 INTRODUZIONE
- 4.4.2 FORME (COMPLETAMENTE) SIMMETRICHE ED ANTISIMMETRICHE
- 4.4.3 ALGEBRE DI GRASSMANN

### 4.5 INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE ESTERNO

- 4.5.1 DALLE FORME DIFFERENZIALI ESTERNE AL LEMMA DI POINCARÉ INVERSO
- 4.5.2 TEOREMI DEL TIPO “FROBENIUS”
- 4.5.3 IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET

### APP. SPEC. CAP. 4

- 4.A ESTENSIONE DELLE FORMULE DI FRENET-SERRET A UNA VARIETÀ PSEUDORIEMANNIANA
- 4.B COMPLEMENTI: OLTRE IL PULL-BACK
- 4.C LE GEOMETRIE A CONNESSIONE AFFINE CON TENSORE FONDAMENTALE. CENNI ALLE TEORIE FISICHE UNITARIE

## CAP 5 STRUMENTI MATEMATICI III

### 5.1 INTEGRAZIONE

- 5.1.1 INTEGRAZIONE SU SPAZI CARICHI
- 5.1.2 J-MISURA DI SOTTOINSIEMI NOTEVOLI DI  $\mathbf{R}^n$
- 5.1.3 INTEGRAZIONE SU SOTTOVARIETÀ DI  $\mathbf{R}^n$
- 5.1.4 ESTENSIONI AGLI L-INTEGRALI

### 5.2 IL RAPPORTO DIFFERENZIAZIONE-INTEGRAZIONE I

- 5.2.1 IL TEOREMA DI GAUSS-OSTROGRADSKIJ
- 5.2.2 ESEMPI ED APPLICAZIONI I

- 5.2.3 ESEMPI ED APPLICAZIONI II (TEORIA DEL POTENZIALE NEWTONIANO)
- 5.2.4 ESEMPI ED APPLICAZIONI III (TEORIA DEI POTENZIALI ELETTROMAGNETICI)

### 5.3 IL RAPPORTO DIFFERENZIAZIONE-INTEGRAZIONE II:

- 5.3.1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI E LORO SISTEMI: GENERALITÀ
- 5.3.2 IL PROBLEMA DI CAUCHY NORMALE NELLA TEORIA DEI SDP
- 5.3.3 IL PROBLEMA DI CAUCHY GENERALIZZATO NELLA TEORIA DEI SDP

### 5.4 L'EQUAZIONE DIFFERENZIALPARZIALE DEL 1° ORDINE:

- 5.4.1 IL CASO PROTOTIPO CON 2 VARIABILI INDIPENDENTI
- 5.4.2 IL CASO GENERALE CON  $n \geq 2$  VARIABILI INDIPENDENTI
- 5.4.3 L'INTEGRALE COMPLETO

### APP. SPEC. CAP. 5

- 5.A I PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN, INTERNI ED ESTERNI

## CAP. 6 STRUMENTI MATEMATICI IV

### 6.1 ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI I

- 6.1.1 GENERALITÀ
- 6.1.2 LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE NEL CASO UNIDIM
- 6.1.3 PROBLEMI VARIAZIONALI UNIDIM CONDIZIONATI

### 6.2 APPLICAZIONI DEL CDV UNIDIM

- 6.2.1 RASSEGNA DI PROBLEMI CLASSICI
- 6.2.2 GEODETICHE DI UNA VARIETÀ RIEMANNIANA

### 6.3 DINAMICA ANALITICA CLASSICA I

- 6.3.1 DALLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI ALLA DINAMICA LAGRANGIANA
- 6.3.2 LE BASI CONCETTUALI DELLA DINAMICA HAMILTONIANA
- 6.3.3 TRASFORMAZIONI CANONICHE I
- 6.3.4 TRASFORMAZIONI CANONICHE II (PARENTESI DI LAGRANGE E DI POISSON)

### 6.4 DINAMICA ANALITICA CLASSICA II

- 6.4.1 L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI
- 6.4.2 APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI
- 6.4.3 ELEMENTI DI DINAMICA CELESTE I
- 6.4.4 ELEMENTI DI DINAMICA CELESTE II

### APP. SPEC. CAP. 6

- 6.A SULLA RAPPRESENTAZIONE POLARE DELLE CONICHE
- 6.B FORMULAZIONE LAGRANGIANA/HAMILTONIANA DELLA DINAMICA RELATIVISTICA SPECIALE DI UN PUNTO MATERIALE CARICO

## CAP. 7 STRUMENTI MATEMATICI V

- 7.1 ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI II
    - 7.1.1 FONDAMENTI DEL CDV MULTIDIMENSIONALE
    - 7.1.2 ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CDV MULTIDIMENSIONALE I
    - 7.1.3 ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CDV MULTIDIMENSIONALE II
  - 7.2 ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI III
    - 7.2.1 COMPLEMENTI DI CDV
    - 7.2.2 SUL TEOREMA DI NOETHER
  - 7.3 PROBLEMI VARIAZIONALI OMOGENEI DEL 1° ORDINE
    - 7.3.1 PROBLEMI OMOGENEI UNIDIMENSIONALI
    - 7.3.2 PROBLEMI OMOGENEI MULTIDIMENSIONALI (CENNI)
- APP. SPEC. CAP. 7
- 7.A DISCONTINUITÀ DI SOLUZIONI DI SDP QUASI-LINEARI

## PARTE TERZA

### COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE E DI RELATIVITÀ SPECIALE, RELATIVITÀ GENERALE

## CAP. 8 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

- 8.1 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE I
  - 8.1.1  $n$ -SUPERFICI IMMERSE IN UNO SPAZIO EUCLIDEO: UNA RIVISITAZIONE ALTERNATIVA
  - 8.1.2 PARALLELISMO GEODETICO E COORDINATE SEMIGEODETICHE
  - 8.1.3 SUL TRASPORTO PARALLELO (DI UN VETTORE LUNGO UNA CURVA SU UNA SUPERFICIE)
  - 8.1.4 2-SUPERFICI IMMERSE IN UNO SPAZIO MINKOWSKIANO 3-DIM
- 8.2 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE II
  - 8.2.1 GEOMETRIA DELLE VARIETÀ ELEMENTARI PSEUDORIEMANNIANE
  - 8.2.2 GEOMETRIA DELLE VARIETÀ ELEMENTARI A CONNESSIONE AFFINE
- 8.3 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE III
  - 8.3.1 ALGEBRA DEI CAMPI TENSORIALI SU VARIETÀ
  - 8.3.2 DERIVAZIONE DI CAMPI TENSORIALI SU VARIETÀ ORDINARIE. DERIVATA DI LIE



## 8.4 ELEMENTI DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SU VARIETÀ ELEMENTARI

### 8.4.1 PROPEDEUTICA

### 8.4.2 IL TEOREMA DI POINCARÉ-STOKES

### 8.4.3 ESEMPI ED APPLICAZIONI

## 8.5 INTEGRAZIONE DI FORME DIFFERENZIALI ESTERNE SU VARIETÀ: COMPLEMENTI

### 8.5.1 $\kappa$ -FORME E DUALITÀ DI HODGE

### 8.5.2 CODIFFERENZIAZIONE

### 8.5.3 IL "PROBLEMA $\partial$ - $\delta$ "

### 8.5.4 I TEOREMI DI DE RHAM

## APP. SPEC. CAP. 8

### 8.A SUI MODELLI CANONICI DEL PIANO ELLITTICO E DI QUELLO IPERBOLICO

## CAP. 9 COMPLEMENTI DI RELATIVITÀ SPECIALE, RELATIVITÀ GENERALE

### 9.1 NOTA STORICA: DA GAUSS A EINSTEIN

#### 9.1.1 VERSO LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

#### 9.1.2 LA RELATIVITÀ SPECIALE

#### 9.1.3 LA RELATIVITÀ GENERALE

#### 9.1.4 LA RELATIVITÀ E I FATTI OSSERVATIVI

### 9.2 SULLA GEOMETRIA DI UNA VARIETÀ LORENTZIANA

#### 9.2.1 PARTE PRIMA: APPROFONDIMENTI ALGEBRICI

#### 9.2.2 PARTE SECONDA: APPROFONDIMENTI ANALITICI

#### 9.2.3 TETRADI E MATRICI LORENTZIANE, TRASPORTO ALLA FERMI-WALKER

#### 9.2.4 COMPLEMENTI SUL TENSORE DI RIEMANN

### 9.3 LA TEORIA RELATIVISTICA GENERALE

#### 9.3.1 PRELIMINARI

#### 9.3.2 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE PRIMA

#### 9.3.3 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE SECONDA

#### 9.3.4 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE TERZA

#### 9.3.5 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE QUARTA

### 9.4 APPLICAZIONI E COMPLEMENTI I

#### 9.4.1 ANALISI GEODETICA IN RIFERIMENTI NON INERZIALI

#### 9.4.2 IL PARADOSSO DEI GEMELLI E LA SUA SOLUZIONE MEDIANTE LA TRASFORMAZIONE DI MØLLER

#### 9.4.3 SUL TENSORE ENERGETICO TOTALE

#### 9.4.4 MEZZO MATERIALE CONTINUO CON SFORZI "DI CONTIGUITÀ"

### 9.5 APPLICAZIONI E COMPLEMENTI II

#### 9.5.1 LE METRICHE, ESTERNA ED INTERNA, DI SCHWARZSCHILD

#### 9.5.2 CAMPI VETTORIALI DI KILLING, K-SIMMETRIE

- 9.5.3 IL TEOREMA DI BIRKHOFF
- 9.5.4 DINAMICA RELATIVISTICA GENERALE DEL PUNTO MATERIALE E DEL FOTONE

## APP. SPEC. CAP. 9

- 9.A SULLA DEDUZIONE EINSTEINIANA DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SPECIALI
- 9.B TRASFORMAZIONI DI LORENTZ PARALLELE DI  $\kappa$ -TENSORI 4-DIMENSIONALI
- 9.C TRASFORMAZIONE DI LORENTZ PARALLELA DEL 2-TENSORE DEGLI SFORZI MECCANICI
- 9.D L-TRASFORMAZIONI E L-BOOSTS
- 9.E MOTI RADIALI E CIRCOLARI DI PUNTI MATERIALI O DI FOTONI IN UNA VARIETÀ DI SCHWARTZSCHILD ESTERNA
- 9.F SULLE VARIETÀ CARATTERISTICHE DELLE EQUAZIONI DI EH
- 9.G NOTA SULLE COORDINATE PSEUDOARMONICHE

## APPENDICI GENERALI

### APP. GEN. A NOZIONI ELEMENTARI DI LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

- A.0 PREMESSA
- A.1 LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI: NOTAZIONI, MORFOLOGIA, INTERPRETAZIONE INTUITIVA
- A.2 GENERALITÀ SULLA TEORIA DELLA DEDUZIONE
- A.3 GLI ASSIOMI E SCHEMI DI ASSIOMI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI, E ALCUNE DELLE LORO CONSEGUENZE
- A.4 ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA FONDAZIONE E LA FORMALIZZAZIONE DELLE TEORIE MATEMATICHE
- A.5 SEMANTICA DEI SISTEMI FORMALI E TEORIA DEI MODELLI (CENNI)

### APP. GEN. B GLOSSARIO RAGIONATO DI TOPOLOGIA

- B.0 PREMESSA
- B.1 DEFINIZIONI FONDAMENTALI
- B.2 CONTINUITÀ, CONNESSIONE, COMPATTEZZA, CICLI, GRUPPO FONDAMENTALE, ECC.

### APP. GEN. C STRUTTURE DI MISURA

- C.0 PREMESSA
- C.1 MISURA DI LEBESGUE SUL QUADRATO UNITARIO
- C.2 STRUTTURE DI PRE-MISURA
- C.3 L-MISURE E J-MISURE ASTRATTE

### APP. GEN. D INTRODUZIONE ALLA SCIENZA COMPUTAZIONALE

- D.1 RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI
- D.2 RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI: ESEMPI ED APPLICAZIONI
- D.3 GENERALITÀ SULL'ANALISI FUNZIONALE-NUMERICA
- D.4 ESEMPI DI METODI COSTRUTTIVI PER LA SOLUZIONE DI EQUAZIONI ASTRATTE
- D.5 I SISTEMI DINAMICI E IL CAOS DETERMINISTICO (CENNI)

## APP. GEN. E BREVE STORIA RAGIONATA DEI FONDAMENTI DELLA TERMODINAMICA CLASSICA

- E.1 IL 1° PRINCIPIO
- E.2 LA TESI DI CARNOT E LA TEMPERATURA ASSOLUTA
- E.3 IL 2° PRINCIPIO, L'ENTROPIA E I POTENZIALI TERMODINAMICI
- E.4 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE (DAL PUNTO DI VISTA FISICO-MATEMATICO)

## APP. GEN. F ELEMENTI DI TEORIA COSMOLOGICA MACROSCOPICA

- F.1 CENNI STORICI
- F.2 I MODELLI COSMOLOGICI DI EINSTEIN E DI DE SITTER
- F.3 IL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD
- F.4 APPLICAZIONI DEL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD: FRIEDMANN E LEMAITRE

## BIBLIOGRAFIA GENERALE

## GLOSSARI

## INDICE DEI NOMI

## INDICE GENERALE

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF  
MACROSCOPIC PHYSICS  
(A GEOMETRICAL ROUTE)

C. LO SURDO

# CONTENTS

- 0.0 INTRODUCTION
  - 0.0.1 GENERAL CONSIDERATIONS, PLAN OF THE WORK
  - 0.0.2 CONTENTS AND COMMENTS
  - 0.0.3 “DIRECTIONS FOR USE”
- 0.1 SOME CONSIDERATIONS ABOUT THE PHYSICO-MATHEMATICAL THEORIES
  - 0.1.1 PRELIMINARIES
  - 0.1.2 AXIOMATIC-DEDUCTIVE VS. INDUCTIVE REASONING
  - 0.1.3 SIGNIFICANT VS. NON-SIGNIFICANT MATHEMATICS
  - 0.1.4 MATHEMATIZABLE VS. NON-MATHEMATIZABLE SCIENCES

## PART ONE

### EUCLIDEAN AND PSEUDOEUCLEIDEAN GEOMETRY

#### CHPT. 1 EUCLIDEAN GEOMETRY

- 1.1 GEOMETRY AS A PROTOTYPE OF THE PHYSICO-MATHEMATICAL THEORIES
  - 1.1.1 OUTLINE AND HISTORICAL FRAMING
  - 1.1.2 SYNTHETIC VS. ANALYTICAL EUCLIDEAN GEOMETRY
- 1.2 A METRIC FORMALIZATION OF EUCLIDEAN GEOMETRY
  - 1.2.1 INTRODUCTION
  - 1.2.2 THE FIRST NINE AXIOMS AND THE “SPECIAL” GEOMETRY OF THE STRAIGHT-LINE
  - 1.2.3 THE SUBSEQUENT EIGHT AXIOMS AND THE DYADIC PLANE/SPACE GEOMETRIES
  - 1.2.4 THE LAST TWO AXIOMS: ABSOLUTE VS. EUCLIDEAN GEOMETRY
- 1.3 ISOMORPHISM BETWEEN  $H_n$  AND THE REAL CARTESIAN SPACE  $\mathbf{R}^n$ 
  - 1.3.1  $\mathbf{R}^n$  AS A NORMAL MODEL OF  $H_n$ : PART 1
  - 1.3.2  $\mathbf{R}^n$  AS A NORMAL MODEL OF  $H_n$ : PART 2
- 1.4 EXTENSION AND ORIENTATION, CONCLUDING REMARKS
  - 1.4.1 EXTENSION
  - 1.4.2 ORIENTATION
  - 1.4.2 CONCLUDING REMARKS

## SPEC. APP.S TO CHPT. 1

- 1.A ORDER RELATIONS
- 1.B THE SPECIAL FUNCTIONS Cos AND Sin

## CHPT. 2 PSEUDOEUCCLIDEAN GEOMETRY

- 2.1 PRELIMINARIES: THE EUCLID-NEWTON SPACE-TIME
  - 2.1.1 ELEMENTS OF CLASSICAL KINEMATICS
  - 2.1.2 ELEMENTS OF CLASSICAL DYNAMICS
- 2.2 INTRODUCTION TO SPECIAL-RELATIVISTIC KINEMATICS AND DYNAMICS
  - 2.2.1 SPECIAL-RELATIVISTIC KINEMATICS, SPECIAL LORENTZ'S TRANSFORMATIONS
  - 2.2.2 RUDIMENTS OF SPECIAL-RELATIVISTIC DYNAMICS
- 2.3 INTRODUCTION TO PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES
  - 2.3.1 PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES (BASIC CONCEPTS)
  - 2.3.2 MINKOWSKI'S SPACE (BASIC CONCEPTS)
- 2.4 ALGEBRA AND GEOMETRY OF THE MINKOWSKI SPACE
  - 2.4.1 PART 1
  - 2.4.2 PART 2
- 2.5 INTRODUCTION TO CLASSICAL ELECTROMAGNETISM
  - 2.5.1 THE MAXWELL-LORENTZ EQUATIONS
  - 2.5.2 ELECTROMAGNETIC THEORY IN TENSOR LANGUAGE
  - 2.5.3 ELECTROMAGNETIC THEORY IN MATERIAL CONTINUOUS MEDIA

## SPEC. APP.S TO CHPT. 2

- 2.A RIGID DISPLACEMENTS AND CLASSICAL KINEMATICS
- 2.B SYNCHRONIZATION PROCEDURES
- 2.C COMPLEMENTS ON LORENTZ'S TRANSFORMATIONS
- 2.D PARALLEL LORENTZ TRANSFORMATIONS
- 2.E INDUCTION OF THE CONSERVATION LAWS IN SPECIAL RELATIVISTIC MECHANICS
- 2.F MORE ON THE RELATIONSHIP BETWEEN "REST" AND "MOTION" MASS
- 2.G LAGRANGE VS. EULER DESCRIPTION OF THE MOTION OF A CONTINUOUS MEDIUM
- 2.H CLASSICAL AND RELATIVISTIC DYNAMICS OF A CONTINUOUS MATERIAL MEDIUM
- 2.I THE PARADOXES ARISING FROM SUPERLUMINAL VELOCITIES IN SPECIAL RELATIVITY

## PART TWO

### BASIC MATHEMATICAL TOOLS

#### CHPT. 3 MATHEMATICAL TOOLS I

##### 3.1 MULTILINEAR AND TENSOR ALGEBRA IN PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES

###### 3.1.1 $\kappa$ -LINEAR FORMS

###### 3.1.2 $\kappa$ -TENSORS

###### 3.1.3 SYMMETRIC AND ANTISYMMETRIC FORMS

##### 3.2 TENSOR ALGEBRA AND APPLICATIONS

###### 3.2.1 ORTHOGONAL AND PSEUDORTHOGONAL TRANSFORMATIONS

###### 3.2.2 LEVI-CIVITA'S PSEUDOTENSOR

###### 3.2.3 SOME PHYSICAL APPLICATIONS

###### 3.2.4 $B$ -ORTHOGONALITY AND SUBSPACES

###### 3.2.5 GRAMIANS AND ORTHOGONAL PROJECTORS

###### 3.2.6 SYMMETRIC AND HERMITIAN OPERATORS, EIGENPROBLEMS

###### 3.2.7 SCALAR INVARIANTS

##### 3.3 TENSOR ANALYSIS IN PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES AND IMMERSED MANIFOLDS I

###### 3.3.1 TENSOR FIELDS, CARTESIAN AND LOCAL BASES

###### 3.3.2 DERIVATION OF A TENSOR FIELD IN A LOCAL BASE

##### 3.4 TENSOR ANALYSIS IN PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES AND IMMERSED MANIFOLDS II

###### 3.4.1 "INNER" DERIVATION OF A TENSOR FIELD (IN AN IMMERSSED MANIFOLD)

###### 3.4.2 RIEMANN TENSOR (IN AN IMMERSSED MANIFOLD)

##### 3.5 CURVATURE THEORY IN A MANIFOLD EMBEDDED IN A $m$ -DIM EUCLIDEAN SPACE

###### 3.5.1 INTRODUCTION

###### 3.5.2 CASE OF A CURVE, $n = 1$

###### 3.5.3 CASE OF A (HYPER)-SURFACE, $2 \leq n = m-1$

###### 3.5.3 CASE OF A MANIFOLD, $2 \leq n < m-1$

#### SPEC. APP.S TO CHPT. 3

##### 3.A A NOTE ON THE FUNDAMENTAL TENSOR IN SPECIAL RELATIVITY

##### 3.B SOME ASPECTS OF THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF A SURFACE IMMERSSED IN $\mathbb{R}^3$

#### CHPT. 4 MATHEMATICAL TOOLS II

- 4.1 TOPOLOGICAL AND DIFFERENTIABLE MANIFOLDS
  - 4.1.1 BASIC CONCEPTS I
  - 4.1.2 BASIC CONCEPTS II
  - 4.1.2 EXAMPLES AND COMMENTS
- 4.2 DIFFERENTIAL CALCULUS ON MANIFOLDS
  - 4.2.1 APPLICATIONS OF A MANIFOLD INTO A MANIFOLD
  - 4.2.2 1<sup>ST</sup>-ORDER DIFFERENTIAL CALCULUS ON, OR BETWEEN, MANIFOLDS
  - 4.2.3 ALTERNATIVE APPROACHES TO DIFFERENTIAL CALCULUS ON, OR BETWEEN, MANIFOLDS
- 4.3 ALGEBRAIC AND DIFFERENTIAL ANALYSIS OF  $\langle a, b \rangle$ -TENSOR FIELDS ON MANIFOLDS
  - 4.3.1  $\langle a, b \rangle$ -TENSOR ALGEBRA
  - 4.3.2 MANIFOLDS WITH AN AFFINE CONNECTION AND TENSOR FIELDS ON THEM
  - 4.3.3 RELATIVE TENSOR FIELDS AND PSEUDOTENSOR FIELDS
- 4.4 ALGEBRAS OF THE SYMMETRIC/ANTISYMMETRIC FORMS
  - 4.4.1 PRELIMINARIES
  - 4.4.2 (COMPLETELY) SYMMETRIC/ANTISYMMETRIC FORMS
  - 4.4.3 GRASSMANN'S ALGEBRAS
- 4.5 INTRODUCTION TO EXTERIOR DIFFERENTIAL CALCULUS
  - 4.5.1 FROM THE EXTERIOR DIFFERENTIAL FORMS TO THE INVERSE POINCARÉ'S LEMMA
  - 4.5.2 THEOREMS OF THE FROBENIUS TYPE
  - 4.5.3 THE GAUSS-BONNET THEOREM
- SPEC. APP.S TO CHPT. 4
  - 4.A EXTENSION OF FRENET-SERRET'S FORMULAS TO A PSEUDORIEMANNIAN MANIFOLD
  - 4.B COMPLEMENTS: BEYOND THE PULL-BACK
  - 4.C AFFINELY CONNECTED GEOMETRIES WITH A FUNDAMENTAL TENSOR. UNITARY PHYSICAL THEORIES (SHORT ACCOUNT)

## CHPT. 5 MATHEMATICAL TOOLS III

- 5.1 INTEGRATION
  - 5.1.1 INTEGRATION IN "CHARGED" SPACES
  - 5.1.2 J-MEASURE OF TYPICAL SUBSETS OF  $\mathbf{R}^n$
  - 5.1.3 INTEGRATION ON SUBMANIFOLDS OF  $\mathbf{R}^n$
  - 5.1.4 EXTENSIONS TO L-INTEGRALS
- 5.2 THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENTIATION AND INTEGRATION I
  - 5.2.1 THE GAUSS-OSTROGRADSKIJ THEOREM
  - 5.2.2 EXAMPLES AND APPLICATIONS I
  - 5.2.3 EXAMPLES AND APPLICATIONS II (NEWTONIAN POTENTIAL THEORY)
  - 5.2.4 EXAMPLES AND APPLICATIONS III (ELECTROMAGNETIC POTENTIAL THEORY)



## 5.3 THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENTIATION AND INTEGRATION II

- 5.3.1 DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SYSTEMS: AN OUTLINE
- 5.3.2 THE NORMAL CAUCHY PROBLEM IN PDS THEORY
- 5.3.3 THE GENERALIZED CAUCHY PROBLEM IN PDS THEORY

## 5.4 THE 1<sup>ST</sup>-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

- 5.4.1 SIMPLEST CASE WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES
- 5.4.2 GENERAL CASE WITH  $n \geq 2$  INDEPENDENT VARIABLES
- 5.4.3 THE COMPLETE INTEGRAL

### SPEC. APP.S TO CHPT. 5

#### 5.A INTERIOR/EXTERIOR DIRICHLET/NEUMANN PROBLEMS

## CHPT. 6 MATHEMATICAL TOOLS IV

### 6.1 CALCULUS OF VARIATIONS I

- 6.1.1 PRELIMINARIES
- 6.1.2 EULER-LAGRANGE EQUATIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL CASE
- 6.1.3 CONDITIONED VARIATIONAL ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

### 6.2 APPLICATIONS OF THE ONE-DIMENSIONAL COV

- 6.2.1 SOME CLASSICAL PROBLEMS
- 6.2.2 GEODETICS OF A RIEMANN MANIFOLD

### 6.3 CLASSICAL ANALYTICAL DYNAMICS I

- 6.3.1 FROM THE DYNAMICS OF A SYSTEM OF MATERIAL POINTS TO LAGRANGE'S FORMALISM
- 6.3.2 FUNDAMENTALS OF HAMILTON'S DYNAMICS
- 6.3.3 CANONICAL TRANSFORMATIONS I
- 6.3.4 CANONICAL TRANSFORMATIONS II (POISSON AND LAGRANGE BRACKETS)

### 6.4 CLASSICAL ANALYTICAL DYNAMICS II

- 6.4.1 THE HAMILTON-JACOBI EQUATION
- 6.4.2 APPLICATIONS OF THE HAMILTON-JACOBI EQUATION
- 6.4.3 ELEMENTS OF CELESTIAL DYNAMICS I
- 6.4.4 ELEMENTS OF CELESTIAL DYNAMICS II

### SPEC. APP.S TO CHPT. 6

- 6.A POLAR REPRESENTATION OF THE CONIC CURVES
- 6.B THE LAGRANGE/HAMILTON FORMULATION OF THE SPECIAL-RELATIVISTIC DYNAMICS FOR A MATERIAL, CHARGED POINT

## CHPT. 7 MATHEMATICAL TOOLS V

- 7.1 CALCULUS OF VARIATIONS II
  - 7.1.1 FUNDAMENTALS OF THE TO MULTI-DIM COV
  - 7.1.2 SOME APPLICATIONS OF MULTI-DIM COV I
  - 7.1.3 SOME APPLICATIONS OF MULTI-DIM COV II
- 7.2 CALCULUS OF VARIATIONS III
  - 7.2.1 COMPLEMENTS OF COV
  - 7.2.2 NOETHER'S THEOREM
- 7.3 HOMOGENEOUS VARIATIONAL PROBLEMS OF THE 1<sup>ST</sup> ORDER
  - 7.3.1 ONE-DIMENSIONAL CASE
  - 7.3.2 HOMOGENEOUS MULTI-DIMENSIONAL PROBLEMS (SHORT ACCOUNT)
- SPEC. APP.S TO CHPT. 7
  - 7.A DISCONTINUITIES OF SOLUTIONS OF QUASI-LINEAR PDS

## PART THREE

### COMPLEMENTS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY AND SPECIAL RELATIVITY. GENERAL RELATIVITY

#### CHPT. 8 COMPLEMENTS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY

- 8.1 COMPLEMENTS OF LOCAL DIFFERENTIAL GEOMETRY I
  - 8.1.1 IMMERSED  $n$ -SURFACES: A DIFFERENT APPROACH TO SOME BASIC CONCEPTS
  - 8.1.2 GEODETIC PARALLELISM AND SEMIGEODETIC COORDINATES
  - 8.1.3 PARALLEL TRANSPORT OF A VECTOR ALONG A CURVE OF AN IMMERSED SURFACE
  - 8.1.4 2-SURFACES IMMERSED IN A PSEUDOEUCLEIDEAN MINKOWSKI 3-DIM SPACE
- 8.2 COMPLEMENTS OF LOCAL DIFFERENTIAL GEOMETRY II
  - 8.2.1 GEOMETRY OF ELEMENTARY PSEUDORIEMANNIAN MANIFOLDS
  - 8.2.2 GEOMETRY OF ELEMENTARY MANIFOLDS WITH AN AFFINE CONNECTION
- 8.3 COMPLEMENTS OF LOCAL DIFFERENTIAL GEOMETRY III
  - 8.3.1 ALGEBRA OF TENSOR FIELDS ON MANIFOLDS
  - 8.3.2 DERIVATION OF TENSOR FIELDS ON ORDINARY MANIFOLDS. LIE DERIVATIVE
- 8.4 ELEMENTS OF INTEGRATION THEORY ON ELEMENTARY MANIFOLDS

- 8.4.1 PRELIMINARIES
- 8.4.2 THE THEOREM OF POINCARÉ-STOKES
- 8.4.3 EXAMPLES AND APPLICATIONS

## 8.5 EXTERIOR DIFFERENTIAL FORMS ON MANIFOLDS: COMPLEMENTS

- 8.5.1  $\kappa$ -FORMS AND HODGE DUALITY
- 8.5.2 CODIFFERENTIATION
- 8.5.3 THE  $\partial$ - $\delta$  PROBLEM
- 8.5.4 DE RHAM'S THEOREMS

## SPEC. APP.S TO CHPT. 8

- 8.A CANONICAL MODELS OF THE ELLIPTIC AND HYPERBOLIC PLANES

# CHPT. 9 COMPLEMENTS OF SPECIAL RELATIVITY, GENERAL RELATIVITY

## 9.1 FROM GAUSS TO EINSTEIN: A HISTORICAL NOTE

- 9.1.1 TOWARDS THE NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES
- 9.1.2 SPECIAL RELATIVITY
- 9.1.3 GENERAL RELATIVITY
- 9.1.4 RELATIVITY AND OBSERVATIONAL FACTS

## 9.2 ON THE GEOMETRY OF A LORENTZ MANIFOLD

- 9.2.1 PART ONE: ALGEBRAIC ASPECTS
- 9.2.2 PART TWO: ANALYTICAL ASPECTS

## 9.3 MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY

- 9.3.1 PRELIMINARIES
- 9.3.2 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY I
- 9.3.3 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY II
- 9.3.4 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY III
- 9.3.5 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY IV

## 9.4 APPLICATIONS AND COMPLEMENTS I

- 9.4.1 GEODETIC ANALYSIS IN NON-INERTIAL FRAMES
- 9.4.2 THE TWIN PARADOX AND ITS SOLUTION ACCORDING TO MØLLER
- 9.4.3 ABOUT THE TOTAL ENERGY TENSOR
- 9.4.4 CONTINUOUS MATERIAL MEDIUM WITH "CONTIGUITY" STRESSES

## 9.5 APPLICATIONS AND COMPLEMENTS II

- 9.5.1 SCHWARZSCHILD'S METRICS, EXTERIOR AND INTERIOR
- 9.5.2 KILLING'S VECTORS, K-SYMMETRIES
- 9.5.3 BIRKHOFF'S THEOREM
- 9.5.4 ON THE RELATIVISTIC DYNAMICS OF A MATERIAL POINT (PRECESSION OF MERCURY, BENDING OF LIGHT, ETC.)

## SPEC. APP.S TO CHPT 9

- 9.A EINSTEIN'S DEDUCTION OF THE SPECIAL LORENTZ TRANSFORMATIONS
- 9.B PARALLEL LORENTZ'S TRANSFORMATIONS FOR 4-DIM  $\kappa$ -TENSORS
- 9.C PARALLEL LORENTZ'S TRANSFORMATION OF THE ENERGY 2-TENSOR
- 9.D L-TRANSFORMATIONS AND L-BOOSTS
- 9.E ON THE GEODETICS ON SCHWARZSCHILD'S MANIFOLD: RADIAL AND CIRCULAR MOTIONS OF MATERIAL POINTS OR PHOTONS
- 9.F A NOTE ON THE GRAVITATIONAL WAVES
- 9.G PSEUDOHARMONIC COORDINATES

## GENERAL APPENDICES

### GEN APP. A ELEMENTS OF LOGIC AND SET THEORY

- A.0 PRELIMINARIES
- A.1 LOGIC AND SET THEORY: NOTATIONS, MORPHOLOGY, INTUITIVE INTERPRETATION
- A.2 ELEMENTS OF DEDUCTION THEORY
- A.3 AXIOMS AND AXIOM SCHEMATA OF THE SET THEORY, AND SOME OF THEIR CONSEQUENCES
- A.4 FOUNDATION AND FORMALIZATION OF MATHEMATICAL THEORIES
- A.5 SEMANTICS OF THE FORMAL SYSTEMS, AND MODEL THEORY (SHORT ACCOUNT)

### GEN APP. B TOPOLOGY: A REASONED GLOSSARY

- B.0 PRELIMINARIES
- B.1 BASIC DEFINITIONS
- B.2 CONTINUITY, CONNECTEDNESS, COMPACTNESS, LOOPS, ETC

### GEN. APP. C MEASURE STRUCTURES

- C.0 PRELIMINARIES
- C.1 INTRODUCTION
- C.2 PRE-MEASURE STRUCTURES
- C.3 ABSTRACT L-MEASURE AND J-MEASURE

### GEN. APP. D INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL SCIENCE

- D.1 APPROXIMATE SOLUTION OF EQUATIONS
- D.2 EXAMPLES AND APPLICATIONS
- D.3 ON NUMERICAL-FUNCTIONAL ANALYSIS
- D.4 CONSTRUCTIVE METHODS TO SOLVE ABSTRACT EQUATIONS (EXAMPLES)
- D.5 DYNAMICAL SYSTEMS AND DETERMINISTIC CHAOS (SHORT ACCOUNT)

### GEN. APP. E A SHORT HISTORY OF CLASSICAL THERMODYNAMICS

- E.1 FIRST PRINCIPLE
- E.2 CARNOT'S THESIS AND ABSOLUTE TEMPERATURE
- E.3 SECOND PRINCIPLE, ENTROPY AND THERMODYNAMIC POTENTIALS
- E.4 CONCLUDING REMARKS (FROM THE PHYSICO-MATHEMATICAL STANDPOINT)

### GEN. APP. F ELEMENTS OF MACROSCOPIC COSMOLOGY

- F.1 HISTORICAL NOTE
- F.2 EINSTEIN'S AND DE SITTER'S COSMOLOGICAL MODELS
- F.3 THE STANDARD COSMOLOGICAL MODEL
- F.4 APPLICATIONS OF THE STANDARD COSMOLOGICAL MODEL: FRIEDMANN AND LEMAITRE

GENERAL BIBLIOGRAPHY

SUBJECT INDICES (1÷4)

AUTHOR INDEX

CONTENTS

## CAP 8

### COMPLEMENTI <sup>1</sup> DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

Questo Cap. 8, con cui inizia la terza parte del nostro libro, illustra questioni/applicazioni di geometria differenziale che dal punto di vista della pertinenza spesso avrebbero potuto trovar posto già nella sua seconda parte (dopo il Cap. 7). Abbiamo tuttavia preferito spostarle qui per non accrescere oltre misura la mole di quest'ultima, che è accettabilmente compiuta così come è. Inoltre con esse ci avviciniamo ulteriormente alle applicazioni relativistiche del Cap. 9. Abbiamo anche stimato didatticamente efficace interpolare i nuovi concetti/sviluppi in una parziale rivisitazione della teoria delle 2-superfici immerse nello spazio euclideo 3-dim (o più in generale delle  $n$ -superfici immerse nello spazio euclideo  $(n+1)$ -dim), riferito a coordinate *cartesiane ortogonali*. Nel così fare, si è seguita una linea logica alternativa, più vicina allo sviluppo storico della teoria e *diversa* da quella dei capitoli precedenti. Confidiamo che questo possa favorire una migliore assimilazione della materia.

#### 8.1) COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE I

##### 8.1.1) $n$ -SUPERFICI IMMERSE IN UNO SPAZIO EUCLIDEO: UNA RIVISITAZIONE ALTERNATIVA

Iniziata da Eulero e poi da Monge nel XVIII secolo, la geometria differenziale si avvia ad affermarsi come uno dei capitoli fondamentali della matematica moderna con la storica memoria di K.F. Gauss del 1828 <sup>2</sup>. L'approccio che seguiremo ora, nel presentare la teoria delle 2-superfici

---

<sup>1</sup> Come in altre simili occasioni, meno che mai il termine "complementi" è qui da intendere nel suo stretto significato di "parte residua di una (presunta) totalità". L'odierna estensione della geometria differenziale ci è parsa efficacemente suggerita dal seguente commento di M. Spivak (vedi Bibl. Gen. A, 1975). «Leafing through "Mathematical Reviews" for the past thirty years, and gazing at the dignified tomes which represent the glories of the classical era, one quickly senses that Differential Geometry is a field of overwhelming extent, beyond the comprehension of any mortal. I suppose such lucubrations ought to buoy up one's spirit with admiration for the achievements of man, but I must confess that they usually lead me instead to a state of brooding melancholy.»

<sup>2</sup> C.F. Gauss, "Disquisitiones generales circa superficies curvas", in Comm. Soc. Gött., V (1828), 99-146; anche in Werke, IV, 217-258. Di questo fondamentale lavoro segnaliamo una traduzione inglese (molto più recente di quanto avrebbe meritato) curata da A. Heitebeitel e J. Morehead e pubblicata con il titolo "General Investigations on Curved Surfaces" (Raven Press, 1965).

immerse nello spazio euclideo standard  $E_3$ , è appunto quello locale di Gauss. Molti aspetti della teoria gaussiana si generalizzano in modo naturale alle  $(n \geq 1)$ -superfici immerse nello spazio euclideo  $E_{n+1}$ , e in alcuni casi in  $E_{m>n+1}$ . (Nel presente contesto, è leggermente più comodo riservare a  $n$ , piuttosto che a  $n - 1$ , il significato di dimensione della superficie.)

Cominceremo col ricordare che una data  $r$ -immersione  $\iota$  dell'aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^{m \geq n}$  garantisce l'esistenza di un  **$r$ -diffeomorfismo locale di  $U$  su  $\iota(U) \subset \mathbb{R}^m$**  univocamente determinato da  $\iota$ . Per meglio spiegarci, poniamoci nel caso elementare in cui  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $r = 1$ ,  $U \equiv (0,1)$ ,  $t \in U$  e  $(^+) x = {}^1\iota(t)$ ,  $y = {}^2\iota(t)$ . Per la definizione di  $r$ -immersione, le funzioni  $(^+)$  sono  $C^1$  in  $U$ , e, se  $\underline{t} \in U$  è un punto di riferimento prescelto, una almeno delle derivate  $d_t x$ ,  $d_t y$ , diciamo  $d_t x$ , è  $\neq 0$  in  $\underline{t}$ . Il teorema della funzione inversa, che è allora immediatamente intuitivo, asserisce che (ad es.) la prima delle  $(^+)$  è invertibile in un intorno  $\omega$  di  $\underline{t}$ , e che la funzione inversa  $t = ({}^1\iota)^{-1}(x) = t(x)$  è  $C^1$  nell'intorno  ${}^1\iota(\omega)$  di  $\underline{x} = {}^1\iota(\underline{t})$ . Quanto alla  $y$ , essa è data da  $y = {}^2\iota(t(x))$ , ed è automaticamente  $C^1$  per  $x$  in  ${}^1\iota(\omega)$ . Questa situazione, se la si assume valere per ogni  $\underline{t}$  in  $U$ , si descrive dicendo che “*esiste un 1-diffeomorfismo locale di  $U$  su  $\iota(U)$ , unicamente determinato da  $\iota$* ”. Nel caso elementare considerato,  $\iota(U)$  è una curva di classe  $C^1$  (senza estremi) immersa in  $\mathbb{R}^2$ . L'estensione al caso generale  $r \geq 1$ ,  $m > n > 1$ ,  $U =$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ , si formula in modo ovvio. La dimostrazione del teorema della funzione inversa nel caso generale è riportata in molti manuali istituzionali di Analisi. Questo punto di vista “locale” è più debole di quello introdotto nella Sez. 4.1, ma è sufficiente agli scopi presenti.<sup>3, 4</sup>

Denoteremo qui con  $X \equiv \{{}^1X, \dots, {}^{n+1}X\}$  l' $(n+1)$ -pla ordinata delle coordinate cartesiane *ortogonali* di  $E_{n+1}$ <sup>5</sup>. Un pezzo di  $n$ -superficie (nel seguito, semplicemente una  $n$ -superficie)  ${}_nS \equiv S$  immersa in  $E_{n+1}$  è allora descritto dalla funzione  $X = X(q)$ ,  $q \equiv \{q^1, \dots, q^n\}$ , definita e abbastanza regolare<sup>6</sup> per  $q \in U \equiv$  un aperto connesso di  $E_n$ . La  $(n+1) \times n$ -matrice jacobiana  $\{\partial^\mu X / \partial q^i\}_{\mu=1 \rightarrow n+1, i=1 \rightarrow n}$  verrà supposta di rango massimale in  $U$ , e quindi l'applicazione  $q \mapsto X$  *localmente* biiettiva. Scrivendo  $X_i$  per  $\partial X / \partial q^i$ , ciò comporta che la famiglia di vettori  $\{X_i\}$  sia una base dell' $n$ -piano tangente  ${}_n\Pi \equiv \Pi$  di  $S$ .

<sup>3</sup> Un noto esempio di applicazione addirittura analitica di un aperto su se stesso, *localmente biiettiva ma non biiettiva*, è quello della  $\varphi: U \rightarrow U$ , dove  $U \subset \mathbb{R}^2$  è la corona circolare  $1 < x^2 + y^2 < 2$  e  $\varphi(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ : l'immagine  $\varphi(U)$  è effettivamente  $U$ , ma è percorsa due volte.

<sup>4</sup> La definizione di alcuni “oggetti intermedi” negli sviluppi che seguono richiede che tanto  $E_n$  quanto  $E_{n+1}$  (o  $E_m$ ) siano orientati. Tuttavia il nostro prevalente interesse andrà alla fine ad oggetti, come ad es. la curvatura gaussiana, che sono indipendenti dall'orientamento. Per brevità, abbiamo quindi preferito menzionare tali spazi come non orientati, anche se le  $n$ -ple o  $(n+1)$ -ple di loro elementi andranno di norma pensate come ordinate.

<sup>5</sup> In luogo di  $X \equiv \langle {}^\mu X \rangle_{\mu=1 \rightarrow n+1}$ , nella S.sez. 3.4.1 si è usato il *vettore*  $\mathbf{X} = {}^\mu \mathbf{X} \mathbf{F}_\mu$  (somma su  $\mu$  da 1 a  $n+1$ ), dove  $\langle \mathbf{F}_\mu \rangle$  era una base cartesiana generica, non necessariamente ortonormale. Più specificamente, questa base  $\langle \mathbf{F}_\mu \rangle$  viene ora assunta ortonormale.

<sup>6</sup> Ormai non ci preoccuperemo di indicare *sempre* la classe di continuità delle funzioni di interesse presupposta nelle nostre argomentazioni.

Sia  $L$  un pezzo aperto ( $\equiv$  senza estremi) di curva (nel seguito, semplicemente una curva aperta) di  $S$ , cioè una funzione  $q = q(t)$ , per  $t$  in un intervallo-base  $(a,b)$ ,  $a < b$ , con valori in  $U$  e matrice jacobiana ( $n$ -colonna) di rango massimale. Allora  $X = X(q(t))$ , e  $d_t X = X_i d_t q^i$  (somma su  $i$  da 1 a  $n$ ) è la rappresentazione del vettore tangente a  $L$  nella base  $\{X_i\}$ . La lunghezza di  $L$  tra  $a$  e  $t \in (a,b)$  è  $\sigma(t) = \int_{t'=a}^t |d_t X|(t') dt'$ , dove  $| \cdot |$  è il modulo standard (radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti) in  $E_{n+1}$ . Segue che

$$(1) \quad (d_t \sigma)^2 = g_{ik} d_t q^i d_t q^k,$$

ove

$$(2) \quad g_{ik} =: X_i \cdot X_k \equiv g_{ki}$$

e  $(\cdot)$  è il prodotto interno standard (somma dei prodotti delle componenti omologhe) in  $E_{n+1}$ , o possibilmente in  $E_{m>n+1}$ . I coefficienti  $g_{ik}$  sono le componenti covarianti di indici  $(ik)$  del 1° tensore fondamentale  $g_{(2)}$  di  $S$  nella base  $\{X_i\}$ . In forza delle definizioni, la forma quadratica di coefficienti  $g_{ik}$  è definita positiva, e quindi, in particolare,  $g (\equiv \det\{g_{ik}\}_{i,k=1 \div n}) > 0$ . La metrica (2) si dice **metrica naturale**.

Se  $u, v$  sono due vettori arbitrari di  $\Pi$ , è immediato verificare che la forma bilineare in  $(u,v)$   $g_{ik} u^i v^k$  coincide con il prodotto interno  $u \cdot v$  in  $E_{n+1}$ . Ciò premesso, siano  $L_1, L_2$  due curve di  $S$  come la precedente  $L$ , riferite a parametri  $t$  e rispettivamente  $s$  generalmente distinti, e sia  $X^*$  un loro punto comune, diciamo  $X^* = X_{(1)}(t_1) = X_{(2)}(s_2)$ . L'angolo  $0 \leq \omega \leq \pi$  che esse fanno tra loro in  $X^*$  ha quindi coseno uguale a  $d_t X_{(1)} \cdot d_s X_{(2)}$  diviso per il prodotto dei moduli degli stessi vettori, cioè uguale a  $g_{ik} d_t X_{(1)}^i d_s X_{(2)}^k$  diviso per  $[g_{ik} d_t X_{(1)}^i d_t X_{(1)}^k]^{1/2} [g_{ik} d_s X_{(2)}^i d_s X_{(2)}^k]^{1/2}$ , intendendosi che  $g_{ik}$  sia calcolato nel  $q^*$  corrispondente a  $X^*$ , e quindi  $d_t X_{(1)}$  in  $t_1$  e  $d_s X_{(2)}$  in  $s_2$ .

Due superfici equidimensionali  $S_{(1)}, S_{(2)}$  immerse in uno stesso spazio euclideo e parametrizzate con le stesse  $q \in U$  siano in corrispondenza biunivoca (abbastanza regolare) nel senso che  $X_{(1)} \leftrightarrow q \leftrightarrow X_{(2)}$ .<sup>7</sup> Esse si dicono **isometriche** se le lunghezze di loro curve corrispondenti sotto  $X_{(1)} \leftrightarrow X_{(2)}$  sono uguali. Si vede facilmente che questo succede sse  $g_{ik(1)}(q) = g_{ik(2)}(q) \forall q \in U$ , cioè se i relativi primi tensori fondamentali coincidono in  $U$ . Le proprietà di  $S$  che si descrivono in termini di tensore fondamentale  $g_{(2)}$  si dicono **intrinseche**, e ovviamente non variano per cambiamenti di  $S$  che non alterino  $g_{(2)}$ . Ad esempio, il coseno dell'angolo tra coppie di curve intersecantisi delle superfici  $S_{(1)}$  e  $S_{(2)}$  (supposte isometriche), che si corrispondono sotto la biiezione regolare  $X_{(1)} \leftrightarrow X_{(2)}$ , è lo stesso. Una tale definizione di isometria estende alle superfici

<sup>7</sup> In realtà non è necessario che  $S_{(1)}$  e  $S_{(2)}$  siano descritte dagli stessi parametri  $q \in U$ , bastando che lo siano da certi  $q_{(1)} \in U_{(2)}$  e rispettivamente  $q_{(2)} \in U_{(1)}$  tra loro in corrispondenza biunivoca. Allora la condizione di isometria è che sia  $g_{ik(1)}(q_{(1)}) = g_{ik(2)}(q_{(2)}(q_{(1)})) \forall q_{(1)} \in U_{(1)}$  o viceversa scambiando (1) con (2). È proprio a questo caso più generale che riferiremo l'esempio di isometria tra la catenoide e l'elicoide più avanti illustrato.



equidimensionali immerse nello stesso spazio euclideo la nozione di isometria valida per due generici spazi metrici (due spazi metrici  $X, X'$ , con distanze  $d$  e  $d'$ , sono isometrici se esiste una biiezione  $f: X \rightarrow X'$  per cui  $d'(f(x), f(y)) = d(x, y) \forall (x, y) \in X$ ).

Sia  $S = X(U)$  una  $n$ -superficie immersa in  $E_{n+1}$  con la metrica naturale, e si consideri la *direzione*  $\omega$  di  $E_{n+1}$ , definita  $\forall q \in U$ , la cui componente  $\omega_{1 \leq \mu \leq n+1}$  è proporzionale al minore  $D_\mu$  della matrice jacobiana  $\partial(X)/\partial(q)$  che si ottiene cancellandone la riga  $\mu$ -ma, e preso con il segno  $(-1)^\mu$  (non tutti tali determinanti sono nulli in forza dell'assunta massimalità del rango di  $\partial(X)/\partial(q)$ ). Questa direzione  $\omega$  è evidentemente ortogonale a ciascuno dei vettori  $X_{1 \leq i \leq n}$  (nel senso che  $\sum_{\mu=1}^{n+1} \omega_\mu^\mu X_i = 0 \forall i$ ) e quindi all' $n$ -piano tangente  $\Pi$  (cioè è "normale a  $S$ "). Una definizione più specifica di  $\omega$  è stata data in S.sez. 5.1.3, §3 (con  $n-1$  al posto dell'attuale  $n$ ), dove si è introdotto il vettore  $N^*$  definito a meno del segno, non avendo stabilito la posizione della riga  $F_1, \dots, F_{n+1}$  (base ortonormale di  $E_{n+1}$ ) aggiunta alla matrice jacobiana. È facile verificare che se la riga aggiunta è, come ora converremo, la prima, allora  $N^*$  è il prodotto vettore di  $X_1, \dots, X_n$  presi in quest'ordine, e che risulta  $N^* = \sum_{\mu=1}^{n+1} (-1)^{\mu-1} D_\mu F_\mu$ . Diviso per il modulo  $|N^*| \equiv |D|$ ,  $N^*/|N^*| \equiv N$  è il **versore normale** a  $S$ , così definito anche in segno. Il versore normale (a  $S$ )  $\mathbf{n}$  introdotto nella S.sez. 3.5.3, e definito a meno del segno, può in particolare identificarsi con  $N$ .<sup>8</sup>

Sia ancora  $L$  una curva di  $S$  come sopra descritta, parametrizzata con la sua lunghezza con segno  $\sigma$  a partire dal suo estremo "sinistro", quindi di equazione parametrica  $X = X(q(\sigma)) \equiv X(\sigma)$ . Il versore tangente a  $L$  (v. S.sez. 3.5.2) orientato nel verso di  $\sigma$  crescente è  $d_\sigma X$ , e il versore normale principale a  $L$  (v. S.sez. 3.5.2),  $\underline{\nu}$ , definito se  $d_\sigma^2 X \neq 0$ , è parallelo equiverso a quest'ultimo vettore, con fattore di proporzionalità pari alla curvatura assoluta  $\kappa > 0$  della  $L$  stessa (vedi la (3.5.2, 2)), scrivendovi  $\underline{\nu}$  in luogo di  $\mathbf{n}$ . Ora  $d_\sigma^2 X = d_\sigma(X_i d_\sigma q^i) = X_{ik} d_\sigma q^i d_\sigma q^k + X_i d_\sigma^2 q^i$ , dove  $X_{ik}$  sta per  $\partial^2 X / \partial q^i \partial q^k$ ; e quindi, moltiplicando internamente questa per  $N$ , si ha  $N \cdot d_\sigma^2 X = N \cdot X_{ik} d_\sigma q^i d_\sigma q^k$  (perché  $X_i \cdot N = 0$ ). Ciò identifica  $N \cdot X_{ik}$  con i coefficienti  $h_{ik}$  della 2ª forma fondamentale (o componenti covarianti dell'associato tensore) introdotta nella S.sez. 3.5.3. Infatti, moltiplicando internamente per  $\mathbf{n}$  la (3.5.3, 2) abbiamo  $h_{ik} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}_{i/k} \equiv \mathbf{n} \cdot \partial \mathbf{f}_i / \partial q^k$ , poiché è ora  $\mathbf{f}_i = \partial^\mu X / \partial q^i F_\mu$  (somma da 1 a  $n+1$  su  $\mu$ ),  $\partial \mathbf{f}_i / \partial q^k = {}^\mu X_{ik} F_\mu$  e  $\mathbf{n} = N^\nu F_\nu$ , risulta:

$$(3) \quad h_{ik} = N^\nu F_\nu \cdot F_\mu {}^\mu X_{ik} = N \cdot X_{ik}$$

in forza della assunta ortonormalità della base  $\{F_\mu\}$ ; ovvero,

$$(4) \quad N \cdot d_\sigma^2 X = h_{ik} d_\sigma q^i d_\sigma q^k.$$

<sup>8</sup> Si ricordi che non sempre il versore continuo  $\mathbf{n} \equiv N$  punta ovunque dalla stessa parte rispetto a  $S$  quando questa sia abbastanza estesa (l'esempio canonico è quello di  $S \equiv$  nastro di Möbius, per il quale  $U = (x \in (0,1), y \in (0,1))$  e  $X(x, y=0+) \equiv X(1-x, y=1-)$ ).

Evidentemente, le  $h_{ik}$  sono dispari rispetto a  $N$ , come lo erano rispetto a  $\mathbf{n}$ .

Se è diverso da zero,  $d_\sigma^2 X = \kappa \underline{v}$ ; e quindi  $h_{ik} d_\sigma q^i d_\sigma q^k = \kappa \cos \varphi$ , ove  $\varphi$  è l'angolo tra  $\underline{v}$  e  $\mathbf{n}$ . Questa è la formula di Meusnier (3.5.3, 21) se si sostituisce, come si deve,  $\kappa_\Gamma$  (curvatura "secondo  $\Gamma$ ", v. S.sez. (3.5.3)) con  $\kappa \cos \varphi$ .<sup>9</sup> Essa equivale al **teorema di Meusnier**, che afferma: «se  $S$  è immersa in  $E_{n+1}$ , il centro di curvatura ( $\in E_{n+1}$ ) di una sua curva  $L$  nel punto  $Y \in L$  è la proiezione sul piano osculatore di  $L$  (in  $Y$ ) del centro di curvatura ( $\in E_{n+1}$ ) della sezione normale di  $S$  tangente a  $L$  in  $Y$ .» La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

Come sappiamo, se la 2<sup>a</sup> forma si annulla per una direzione di  $\Pi$ , quella direzione è detta asintotica (v. S.sez. 3.5.3). Se  $L$  passa per  $Y \in S$  in direzione asintotica, abbiamo così l'alternativa: «o la curvatura (assoluta)  $\kappa$  di  $L$  è nulla, o  $\kappa \underline{v}$  è in  $\Pi$ ». Poiché il piano osculatore di  $L$  è il piano dei versori tangente e normale principale di  $L$ , esso deve appartenere a  $\Pi$ . Si vede così che una curva piana di  $S$ , di direzione asintotica e *non* appartenente a  $\Pi$  (come ad es. una sezione normale di direzione asintotica), deve avere curvatura  $\kappa$  nulla.

Sempre nella S.sez. 3.5.3, abbiamo dato una interpretazione intuitiva della 2<sup>a</sup> forma. Ne proponiamo qui appresso una un po' diversa e altrettanto efficace. A seguito di una piccola variazione  $\Delta q$  di  $q$ , il punto  $X$  subisce uno spostamento  $\Delta X = X_i \Delta q^i + X_{ik} \Delta q^i \Delta q^k / 2 + o(\Delta q^2)$ , la cui componente su  $N$  è  $\Delta X \cdot N = h_{ik} \Delta q^i \Delta q^k / 2 + o(\Delta q^2)$  (abbiamo qui sottinteso la dipendenza da  $q$  ovunque occorra, cioè in  $\Delta X$ ,  $X_i$ ,  $X_{ik}$ ,  $N$  e  $h_{ik}$ ). Il primo termine a 2° membro di questa è lo scostamento normale di  $S$  da  $\Pi$  (positivo nel verso di  $N$ ) in un intorno del 2° ordine  $U^{(2)}$  del punto di tangenza  $X(q)$ . Per  $n \geq 2$ , se la 2<sup>a</sup> forma è definita (nel senso che è definita positiva o definita negativa) in  $q$ , e quindi in  $U^{(2)}$  (o in un intorno più piccolo di  $X(q)$ ),  $S$  giace ivi tutta dalla stessa parte rispetto a  $\Pi$ ; mentre se è indefinita giace dall'una e dall'altra parte. In questo secondo caso, le rette di  $\Pi$  lungo le quali  $h_{ik} \Delta q^i \Delta q^k$  cambia segno sono tangenti a curve asintotiche passanti per  $X(q)$ . Se poi  $h = \det\{h_{ik}\}$  è nullo (degenerazione della 2<sup>a</sup> forma),  $S$  e  $\Pi$  si toccano, sempre in  $U^{(2)}$ , lungo un piano  $m$ -dim, dove  $n - m$  è il rango della matrice  $\{h_{ik}\}$  (quindi  $m$  può andare da 1 a  $n$ ). Nel caso  $m = n$ ,  $S$  e  $\Pi$  coincidono in  $U^{(2)}$ , cioè hanno in  $X(q)$  un contatto di ordine superiore. Lasciamo al lettore gli adattamenti da fare ad alcuni di questi asserti nel caso  $n = 1$ .

Come insegna l'algebra delle forme quadratiche, in  $\Pi$  esiste una base ortonormale  $\{e_i\}$  nella quale  $h_{ik}$  ha la forma diagonale  $\lambda_i \delta_{ik}$  per certi reali  $\lambda_i$ . Per un arbitrario vettore  $u$  di  $\Pi$ , l'invariante  $h_{ik} u^i u^k$  assume allora la forma canonica  $\sum \lambda_i (u_i')^2$ , dove  $u_i'$  è la componente ( $i$ ) di  $u$  nella base  $\{e_i\}$ . Se  $u$  è unitario, è  $\sum (u_i')^2 = 1$ ; le  $u_i'$  sono quindi dei coseni direttori, e precisamente i prodotti interni

<sup>9</sup> Talvolta  $\kappa_\Gamma$  è detta "curvatura normale" di  $S$  nella direzione di  $\Gamma$ , perché se  $\Gamma$  è una sezione *normale* di  $S$  (cioè la sezione di  $S$  con un 2-piano contenente  $\mathbf{n}$ ),  $|\kappa_\Gamma|$  è uguale alla curvatura assoluta  $\kappa$  di  $\Gamma$ .

(in  $\Pi$ )  $u \cdot e_i$ . Questo dimostra il teorema di Eulero ricordato nella S.sez. 3.2.6. Risulta così, in particolare,

$$(5) \quad \kappa_\Gamma = \sum \lambda_i (\cos \psi_i)^2,$$

dove  $\cos \psi_i =: d_\sigma X \cdot e_i$ , e  $\kappa_\Gamma$  è la curvatura secondo  $\Gamma$  per una curva  $\Gamma$  di  $S$  tangente a  $u$ . La (5) permette una semplice e ben nota classificazione dei punti di  $S$ . Sempre per  $n \geq 2$ , se i coefficienti  $\lambda_i$  sono tutti  $> 0$ , o tutti  $< 0$ , siamo nel caso “definito”, e il punto  $X(q)$  al quale ci si riferisce è detto **ellittico**; se sono tutti  $\neq 0$ , ma non tutti dello stesso segno, siamo nel caso “indefinito”, e  $X(q)$  è detto un punto **iperbolico**. Se  $1 \leq s \leq n$  dei  $\lambda_i$  sono nulli, la 2<sup>a</sup> forma è degenera, il contatto tra  $S$  e  $\Pi$  in  $U^{(2)}$  avviene lungo un piano  $s$ -dim, e  $X(q)$  è detto un punto **parabolico**. Nel caso di degenerazione completa ( $s = n$ ), il punto parabolico  $X(q)$  è detto (un punto) **di planeità**, e si ha un contatto di ordine superiore tra  $S$  e  $\Pi$ . Ancora occorre modificare leggermente questi asserti nel caso  $n = 1$  (ad es. nel senso che per  $n = 1$  non possono esistere punti iperbolici).

Il significato geometrico di  $\lambda_i$  è quello di curvatura secondo  $\Gamma$  se la tangente alla curva  $\Gamma$ , nel punto considerato, è parallela a  $e_i$  (infatti è ivi  $\cos \psi_i = \pm 1$  in questo caso); quindi quello di curvatura assoluta della sezione normale di  $S$  contenente  $e_i$ , presa con il segno  $+$  se  $\mathbf{n}$  e  $\underline{v}$  fanno un angolo acuto e con il segno  $-$  se fanno un angolo ottuso. Se poi  $\mathbf{n}$  e  $\underline{v}$  sono ortogonali,  $\kappa_\Gamma = 0$  in forza della formula di Meusnier. Queste curvature  $\lambda_{1 \leq i \leq n}$  sono state dette “principali” nella S.sez. 3.5.3.

Sempre riferendoci ad un certo  $X(q) \in S$ , ricordiamo (v. ancora S.sez. 3.5.3) che  $K =: \prod \lambda_i$  (ove  $\prod$  è simbolo di produttoria) è la curvatura gaussiana (o totale) e  $H =: (1/n) \sum \lambda_i$  è la curvatura principale media di  $S$  in  $X$ . Per  $n = 2$ , se  $K(q) > 0$   $X(q)$  è un punto ellittico, se  $K(q) < 0$   $X(q)$  è un punto iperbolico, e se  $K(q) = 0$   $X(q)$  è un punto parabolico. Ricordiamo ancora (v. S.sez. 3.5.3), che le  $n$  curvature principali sono le radici della equazione (caratteristica) di grado  $n$  in  $\lambda$ :

$$(6) \quad \det \{ h_{ik} - \lambda g_{ik} \}_{i,k=1 \div n} = 0,$$

che sono tutte reali; e che le curvature principali fornite dalla (6) sono positive se i relativi centri di curvatura giacciono sulla semiretta equiversa alla normale usata per la definizione di  $h_{(2)}$ , secondo la (3.5.3, 6). Per  $n = 2$ , seguendo Gauss si adottano comunemente le notazioni  $E, F$ , e  $G$  per  $g_{11}$ , risp.  $g_{12} = g_{21}$  e risp.  $g_{22}$ , e  $L, M$  e  $N$  per  $h_{11}$ , risp.  $h_{12} = h_{21}$  e risp.  $h_{22}$ . Si confida che il lettore non confonda il simbolo gaussiano  $N$  con il versore normale  $\mathbf{N}$ ; ma se opportuno, scriveremo il primo come  $N_*$ .

§1. *Superfici assisimmetriche: toro (circolare e non), catenoide, pseudosfera di Beltrami. L'isometria catenoide-elicoide.* Seguono alcuni esempi di applicazioni (per le quali i calcoli lasciati al lettore non presentano difficoltà). Determiniamo per cominciare le due forme fondamentali e la curvatura gaussiana di un **2-toro circolare** di asse  $z$ , centro  $O$ , grande raggio  $A$  e piccolo raggio

$a < A$ , nelle coordinate  $\theta$  (**angolo poloidale** <sup>10</sup>, da pensare come coordinata (1)) e  $\varphi$  (longitudine, coordinata (2)). L'equazione del cerchio direttore, nel piano meridiano, è  $\rho = \rho(\theta) = A + a \cos\theta > 0$ , per cui  $X \equiv \{x, y, z\} = \{\rho(\theta)\cos\varphi, \rho(\theta)\sin\varphi, a\sin\theta\}$ . Si possono così calcolare  $X_\theta$  e  $X_\varphi$ , e risulta  $E = g_{\theta\theta} = X_\theta \cdot X_\theta = a^2$ ,  $F = g_{\theta\varphi} = X_\theta \cdot X_\varphi = 0$ ,  $G = g_{\varphi\varphi} = X_\varphi \cdot X_\varphi = (A + a \cos\theta)^2$ , e  $g = EG - F^2 = a^2(A + a \cos\theta)^2$ . Similmente si determinano  $X_{\theta\theta}$ ,  $X_{\theta\varphi}$  e  $X_{\varphi\varphi}$ , nonché  $N = -\{\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\}$ , orientato verso l'interno del toro. Segue che  $L = h_{\theta\theta} = N \cdot X_{\theta\theta} = a$ ,  $M = h_{\theta\varphi} = N \cdot X_{\theta\varphi} = 0$ ,  $N^* = h_{\varphi\varphi} = N \cdot X_{\varphi\varphi} = \cos\theta(A + a \cos\theta)$  e  $h = LN^* = a \cos\theta(A + a \cos\theta)$ . Quindi la curvatura gaussiana è  $K = h/g = a^{-1} \cos\theta / (A + a \cos\theta)$ , e si annulla per  $\theta = \pm \pi/2$ . Inoltre l'equazione caratteristica (6) è  $(1 - \lambda a)[\cos\theta - \lambda(A + a \cos\theta)] = 0$ , e le sue radici, curvatures principali del toro, sono  $\lambda_1 = a^{-1}$  e  $\lambda_2 = \cos\theta / (A + a \cos\theta)$ ; confermando così che il loro prodotto è  $K$ , e che  $K$  si annulla dove si annulla la curvatura principale  $\lambda_2$ , cioè lungo i cerchi  $\rho = A$ ,  $z = \pm a$ . <sup>11</sup>

Come applicazione più generale, calcoleremo ora  $K$  e  $H$  per una generica superficie di rotazione attorno all'asse  $z$  – o superficie assisimmetrica di asse  $z$  –, data in coordinate cilindriche  $\{\rho, \varphi, z\}$  da  $X = X(\rho(z), \varphi, z) = \{\rho(z)\cos\varphi, \rho(z)\sin\varphi, z\}$ . Il versore normale orientato verso l'asse  $z$  è  $N = N(z, \varphi) = \{-\cos\varphi, -\sin\varphi, \rho_z(z)\} / \alpha$ , dove  $\rho_z \equiv d_z \rho$  e per brevità si è posto  $\alpha =: (1 + \rho_z^2)^{1/2}$ . I coefficienti della metrica, trattando  $z$  come coordinata (1) e  $\varphi$  come coordinata (2), sono  $E = \alpha^2$ ,  $F = 0$ ,  $G = \rho^2$ , mentre quelli della 2<sup>a</sup> forma sono  $L = -\rho_{zz} / \alpha$  (con  $\rho_{zz} \equiv d_z^2 \rho$ ),  $M = 0$ ,  $N^* = \rho / \alpha$ . L'equazione (6) è così  $(-\rho_{zz} / \alpha - \lambda \alpha^2)(\rho / \alpha - \lambda \rho^2) = 0$ , ed ha le due radici  $\lambda_1 = -\rho_{zz} / \alpha^3$  e  $\lambda_2 = 1 / (\alpha \rho)$ . Si ha dunque  $K = -\rho_{zz} / (\rho \alpha^4)$  e  $H = (-\rho \rho_{zz} + \alpha^2) / (2 \rho \alpha^3)$ . Secondo la prima,  $K$  è identicamente zero sse  $\rho_{zz} = 0$ : cioè, sse  $\rho = a|z - z_0|$ , dove  $a > 0$  e  $z_0$  sono due costanti, oppure  $\rho = b = \text{cost} > 0$ . La più generale superficie di rotazione con  $K = 0$  è quindi un doppio cono (circolare) di asse  $z$ , vertice in  $z_0$  e apertura  $\beta$  data da  $\text{tg}\beta = a > 0$ , oppure un cilindro di asse  $z$  e raggio  $b$ . Similmente,  $H$  è identicamente zero sse  $\rho$  è soluzione della ODE del 2° ordine  $\rho \rho_{zz} = \alpha^2$ , cioè sse  $\rho = c \text{Ch}((z - z_0)/c)$ , dove  $c > 0$  e  $z_0$  sono due costanti. La più generale superficie di rotazione con  $H = 0$  è quindi una **catenoide** (superficie generata dalla rotazione di una catenaria attorno ad un asse, perpendicolare al suo asse di simmetria, del suo piano) di asse  $z$  e centro  $z_0$  e di “parametro”  $c > 0$ . Essendo le due curvatures principali della catenoide diverse da zero e avendo somma zero, va da sé che su di essa è ovunque  $K < 0$ . Ciò vale del resto in tutti quei punti di una superficie di rotazione ove il meridiano che vi passa è concavo verso l'esterno (come avviene ovunque nella

<sup>10</sup> Riferendo il generico semipiano meridiano al semiasse  $\rho$  (di origine  $O$ ) e all'asse  $z$ , se nel detto semipiano  $\underline{0}$  è il centro del cerchio direttore (cioè  $\underline{0} = \langle \rho = A, z = 0 \rangle$ ), l'angolo poloidale  $\theta$  è l'angolo che il vettore meridiano  $X - \underline{0}$  fa con il semiasse  $\rho$ , positivo in verso sinistrorso.

<sup>11</sup> La geometria delle superfici “toroidali” ( $\equiv$  omeomorfe al 2-toro circolare), specialmente se assisimmetriche e con sezione meridiana ovunque convessa, ha ritrovato qualche blando e relativamente recente interesse nell'ingegneria delle macchine toroidali per la fusione controllata (Tokamak).

catenoide). Completiamo l'esame di questa superficie calcolando le sue forme fondamentali. Facendo  $z_0 = 0$  (questo non comporta ovviamente limitazioni di generalità), la catenoide è rappresentata parametricamente da  $X = X(z, \varphi) = \{c\text{Ch}(z/c)\cos\varphi, c\text{Ch}(z/c)\sin\varphi, z\}$ , e quindi  $E = \text{Ch}^2(z/c)$ ,  $F = 0$ ,  $G = c^2\text{Ch}^2(z/c)$  (al solito, qui  $\text{Ch}^2(\ )$  sta per  $(\text{Ch}(\ ))^2$ , et sim.). Il versore normale orientato verso l'esterno è  $N = \{\cos\varphi, \sin\varphi, -\text{Sh}(z/c)\}/\text{Ch}(z/c)$ ; da questa e dalle espressioni delle tre derivate seconde di  $X$ , si trae  $L = 1/c$ ,  $M = 0$ ,  $N_* = -c$ . L'equazione (6) è  $(1+c\lambda\text{Ch}(z/c))(1-c\lambda\text{Ch}(z/c)) = 0$ , e le sue due radici sono  $\pm (c\text{Ch}(z/c))^{-1}$ , uguali e opposte come devono essere per costruzione. Da ciò scende anche che  $K = -(c\text{Ch}(z/c))^{-2} (< 0$  in accordo con la precedente affermazione).

Diamo ora un esempio di coppia di superfici isometriche. Per cominciare, consideriamo la superficie generata da una semiretta, con origine  $O$  sull'asse  $z$  e ad esso perpendicolare, che ruota attorno a tale asse mentre  $O_z$  trasla lungo di esso proporzionalmente all'angolo di rotazione  $\psi$ ; cioè secondo la  $dO_z = a d\psi$  con  $a$  costante arbitraria. La superficie è un piano perpendicolare all'asse  $z$  se  $a = 0$ . Se invece  $a \neq 0$ , la superficie è un'elicoide (il nome deriva dall'essere la sua sezione con un cilindro circolare di asse  $z$  un'elica; elica destra se, avendo  $z$  e  $\psi$  l'orientamento standard è  $a > 0$ , e sinistra se  $a < 0$ ). La sua rappresentazione nelle coordinate cilindriche  $(\rho, \psi)$  è  $X = X(\rho, \psi) = \{\rho\cos\psi, \rho\sin\psi, a\psi\}$ . Da questa si calcola facilmente la 1ª forma, che è  $E = 1$ ,  $F = 0$ ,  $G = a^2 + \rho^2$ . Orientando il versore normale in modo che sia  $N_z > 0$ , abbiamo  $N = (a^2 + \rho^2)^{-1/2}\{a\sin\psi, -a\cos\psi, \rho\}$ , e quindi  $L = 0$ ,  $M = -a(a^2 + \rho^2)^{-1/2}$ ,  $N_* = 0$ . L'equazione (6) è  $\lambda^2 - a^2/(a^2 + \rho^2)^2 = 0$ , con le due radici  $\lambda = \pm a/(a^2 + \rho^2)$ ; quindi anche l'elicoide ha  $H = 0$ , mentre  $K = -a^2/(a^2 + \rho^2)^2 < 0$ . Affermiamo che l'elicoide e la catenoide sono isometriche. Evidentemente, vi è una corrispondenza biunivoca, con parametro  $c > 0$ , tra  $(z \in (-\infty, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi))$  e il punto della catenoide  $X_{\text{cat}}(z, \varphi)$ ; e similmente vi è una corrispondenza biunivoca, con parametro  $a \neq 0$ , tra  $(\rho \in [0, +\infty), \psi \in (-\infty, +\infty))$  e il punto dell'elicoide  $X_{\text{eli}}(\rho, \psi)$ . Stabiliamo ora una corrispondenza biunivoca tra  $(z, \varphi)$  e  $(\rho, \psi)$ . Supponiamo dapprima che l'elicoide sia destra ( $a > 0$ ) e identifichiamo  $a$  con  $c$ . Poniamo poi

$$(7_1) \quad \rho = c \text{sign}(z)\text{Sh}(z/c)$$

$$(7_2) \quad \psi = z/c$$

$$(7_3) \quad \psi = \varphi \text{ mod}(2\pi).$$

In base alle  $(7_1, 7_2)$  abbiamo  $z \mapsto (\rho, \psi)$ ; viceversa, in base alla  $(7_1)$   $z$  è determinata da  $\rho$  a meno del segno, ma questo è fornito dalla  $(7_2)$ . Quanto all'angolo  $\varphi$ , esso è determinato dalla  $(7_3)$  tenendo conto della  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Le  $(7)$  definiscono quindi una biiezione analitica  $X_{\text{cat}} \leftrightarrow X_{\text{eli}}$  tra la catenoide e l'elicoide destra di uguale parametro. Mostriamo adesso che le relative metriche sono le stesse. Con i valori determinati di  $E$ ,  $F$  e  $G$ , la metrica  $ds^2$  della catenoide è  $\text{Ch}^2(z/c)(dz^2 + c^2d\varphi^2)$ .

Similmente, con i valori determinati di E, F e G, la metrica dell'elicoide è  $d\rho^2 + (a^2 + \rho^2)d\psi^2 = d\rho^2 + (c^2 + \rho^2)d\psi^2$ . In forza della (7<sub>1</sub>) risulta  $d\rho = \text{sign}(z)\text{Ch}(z/c)dz$ ,<sup>12</sup> quindi  $d\rho^2 = \text{Ch}^2(z/c)dz^2$ ; e sempre per la (7<sub>1</sub>),  $c^2 + \rho^2 = c^2[1 + \text{Sh}^2(z/c)] \equiv c^2\text{Ch}^2(z/c)$ , e (per la (7<sub>3</sub>))  $d\psi^2 = d\phi^2$ . In definitiva, sotto la biiezione descritta dalle (7) la metrica dell'elicoide diventa  $\text{Ch}^2(z/c)(dz^2 + c^2d\phi^2)$ , identica a quella della catenoide. Si noti che nella dimostrazione di questa uguaglianza non si è usata la  $a = c$ , ma soltanto la  $a^2 = c^2$ . Se poi l'elicoide fosse sinistra ( $a < 0$ ), essa sarebbe ovviamente in relazione biunivoca con la sua partner destra di parametro uguale ed opposto, e quindi sarebbe ancora uno-ad-uno con la catenoide. Ponendo allora  $-a = c$ , l'uguaglianza delle due metriche continuerebbe a valere, essendo fondata sulla  $a^2 = c^2$ , qed.

Diamo infine un esempio storicamente importante di superficie assisimmetrica di asse z (in  $E_3$ ) con curvatura gaussiana costante e negativa, diciamo  $K = -A < 0$  (quella con curvatura costante e positiva è ovviamente la sfera). Sempre con  $\alpha = (1 + \rho_z^2)^{1/2}$ , abbiamo la ODE  $\rho_{zz} = A\rho\alpha^4$ . Una prima integrazione per separazione di variabili dà  $\alpha^{-2} = B - A\rho^2$ , dove B è una costante arbitraria. Limitandoci alle soluzioni per cui  $B = 1$ , otteniamo

$$(8) \quad \rho_z = \pm \rho[A/(1 - A\rho^2)]^{1/2},$$

ovvero

$$(8\text{bis}) \quad z = z(\rho) = \pm \int_{\rho \leq 1/\sqrt{A}}^{1/\sqrt{A}} [(1 - At^2)/A]^{1/2} dt/t. \text{ Per calcolare l'integrale, la sostituzione } \rho\sqrt{A} = \sin\theta \text{ (con } 0 < \theta \leq \pi/2, \text{ perché } 0 < \rho\sqrt{A} \leq 1), \text{ quindi (*) } dz = \pm (1/\sqrt{A})(\cos^2\theta/\sin\theta)d\theta, \text{ dà}$$

$$(8\text{ter}) \quad z - z_0 = \pm (1/\sqrt{A}) [|\ln(\text{tg}(\theta/2))| + \cos\theta],$$

dove  $z_0$  è una costante che può essere assunta nulla. Poiché  $\rho \leq (1/\sqrt{A})$ , la superficie è interna al cilindro di asse z e raggio  $(1/\sqrt{A})$ . Essa consta di due parti simmetriche rispetto al piano  $z = z_0 = 0$ , e può essere rappresentata, usando l'angolo  $\theta$  come parametro, dalla coppia di equazioni "meridiane"  $\rho = \rho(\theta) = (1/\sqrt{A})\sin\theta$  e  $z = z(\theta) = 2^\circ$  membro della (8ter). Il massimo  $\rho$ , uguale a  $(1/\sqrt{A})$ , si ha per  $\theta = \pi/2$ , dove  $z = 0$  e  $d_\rho z = 0$ .<sup>13</sup> Il meridiano ha dunque una cuspidine ad angolo nullo per  $z = 0$ ,  $\rho = (1/\sqrt{A})$ , dove è tangente al semiasse  $\rho$ , e consta di due **trattrici**<sup>14</sup> simmetriche rispetto al detto semiasse, con un comune estremo nella cuspidine ed asintotiche all'asse z per  $\theta \rightarrow 0$ . La associata

<sup>12</sup> Secondo la (7<sub>1</sub>), la  $\rho = \rho(z)$  è analitica per  $z \neq 0$ , ma soltanto continua per  $z = 0$ . La sua derivata  $d_z\rho(z)$  è anch'essa analitica per  $z \neq 0$ , mentre il suo  $\lim_{z \rightarrow 0^\pm}$  è  $\pm 1$ . Quindi  $d_z\rho(z) = \text{sign}(z)\text{Ch}(z/c)$ .

<sup>13</sup> Derivando rispetto a z la  $\rho = A^{-1/2}\sin\theta$  si ha  $d_z\rho = A^{-1/2}\cos\theta d_\theta\theta$ . Qui  $d_\theta\theta$  si elimina mediante la (\*), dal che si trae  $\cos\theta d_\theta\theta = \pm A^{1/2}\text{tg}\theta$ ; dunque  $d_z\rho = \pm \text{tg}\theta$ , ovvero  $d_\rho z = \pm \text{ctg}\theta$ , che tende a  $0^\pm$  per  $\theta \rightarrow \pi/2$ .

<sup>14</sup> Si consideri un'asta di lunghezza L posta nel piano (x,y), e inizialmente con un estremo (diciamolo P) nell'origine O e l'altro estremo (diciamolo Q) in (L,0); e si immagini che nell'estremo Q l'asta abbia una rotella ad essa parallela che impedisce a Q di spostarsi perpendicolarmente all'asta stessa. La trattrice è la curva percorsa da Q, così trascinato o "tratto" da P, quando quest'ultimo si sposta lungo l'asse y, ad es. in senso positivo, partendo da O. Come si intuisce subito, durante il suo moto Q si avvicina asintoticamente al semiasse positivo y. Nel caso considerato nel testo è  $L = A^{-1/2}$ .

superficie di rotazione è la **pseudosfera di Beltrami**. Su questa pseudosfera si realizza la geometria iperbolica di Bolyai e Lobatchewsky, perché le rette di quella geometria corrispondono (localmente) alle geodetiche della sopraddetta pseudosfera (v. App. Spec. 8.A). Un teorema di Hilbert afferma che non può esistere una superficie analitica (dello spazio 3-dim euclideo) che sia un modello globale del piano iperbolico. Alla luce di quanto appena illustrato, tale teorema si può ormai parafrasare negando che nel 3-spazio euclideo esista una superficie a curvatura costante negativa senza bordi e senza singolarità; e in effetti la pseudosfera è manifestamente singolare lungo la sua sezione con il piano equatoriale  $z = 0$ , e per  $|z| \rightarrow \infty$ . §

§2. *L'iniezione sferica di Gauss*. Tornando al caso generale delle ( $n \geq 1$ )-superfici immerse in  $E_{n+1}$ , illustreremo ora una importante interpretazione della curvatura  $K$ , originariamente dovuta a Gauss per  $n = 2$ . Sia  $\Delta S \subset S$  un intorno (abbastanza piccolo) di  $\underline{X} =: X(\underline{q})$ , immagine  $X(\Delta U)$  di un corrispondente intorno  $\Delta U \subset U$  di  $\underline{q}$ . Al variare di  $\underline{q}$  in  $\Delta U$ , quindi di  $X$  in  $\Delta S$ , il versore normale  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\underline{q})$ , riportato nell'origine  $O$  di  $E_{n+1}$ , applica uno-ad-uno  $\Delta S$  sulla sfera unitaria di centro  $O$ . Noteremo con  $\mathbf{s}$  l'iniezione associata, che si dice **iniezione sferica** (o **gaussiana**). Denotando al solito con  $|\cdot|$  la  $J$ -misura, consideriamo il limite del rapporto  $|\mathbf{s}(\Delta S)|/|\Delta S|$  quando  $\Delta S$  collassa in  $X_0$ . Sappiamo che  $|\Delta S|$  è l'integrale di  $|[X_1, \dots, X_n]_{n+1}|$  (vedi la (5.1.2, 5ter)) su  $\Delta U$ ,  $|\Delta S| = \int_{\Delta U} |[X_1, \dots, X_n]_{n+1}| d\mathbf{q}$ , con  $d\mathbf{q} = \prod d\mathbf{q}^i$ . Similmente,  $|\mathbf{s}(\Delta S)|$  è l'integrale  $\int_{\Delta U} |[N_1, \dots, N_n]_{n+1}| d\mathbf{q}$ , dove si è scritto  $N_i$  per  $\partial N/\partial \mathbf{q}^i$ . Definiremo tale limite come **curvatura\*** ("curvatura star", assoluta) di  $S$  in  $\underline{X}$ ,  $\kappa^*(\underline{X})$ ; esso è quindi pari al rapporto  $|[N_1, \dots, N_n]_{n+1}|/|[X_1, \dots, X_n]_{n+1}|$  tra le precedenti integrande (calcolate in  $\underline{X}$ ).  $\kappa^*(\underline{X})$  costituisce la generalizzazione naturale a  $n > 1$  dimensioni del valore assoluto della curvatura di una curva piana introdotta con la (3.5.1, 2bis), cioè di  $|y''|/(1+y'^2)^{3/2}$  per una curva  $y = y(x)$  di CdC 2 del piano  $(x,y)$ .

Nel resto del §, sottintenderemo il pedice  $_{n+1}$  in  $[\ ]$ , nonché  $\underline{X}$  ove occorra. Dobbiamo valutare i valori assoluti di  $[N_1, \dots, N_n]$  e  $[X_1, \dots, X_n]$ . Poiché  $N$  è unitario,  $N_i$  è un vettore tangenziale, e pertanto esprimibile come una combinazione lineare dei vettori  $X_i$  che scriviamo

$$(9) \quad N_j = c_j^k X_k.$$

Sostituendo le (9) in  $[N_1, \dots, N_n]$ , troviamo  $c_1^{j_1} \dots c_n^{j_n} [X_{j_1}, \dots, X_{j_n}]$ . Ma  $[X_{j_1}, \dots, X_{j_n}]$  è completamente antisimmetrico negli indici  $j_1, \dots, j_n$ , e si può quindi scriverlo come  $\Upsilon_{j_1 \dots j_n} [X_1, \dots, X_n]$ , dove  $\Upsilon_{j_1 \dots j_n}$  è il simbolo completamente antisimmetrico unitario introdotto nella S.sez. 1.4.2. Si conclude che  $[N_1, \dots, N_n] = \det\{c_i^j\} [X_1, \dots, X_n]$ , e perciò che  $\kappa^* = |\det\{c_i^j\}|$ . È immediato calcolare i coefficienti  $c_i^j$ : basta derivare rispetto a  $\mathbf{q}^j$  l'identità  $N \cdot X_i = 0$ , ottenendo  $0 = N_j \cdot X_i + N \cdot X_{ij} = c_j^k g_{ik} + h_{ij}$  in forza delle (2,3). Segue che  $-c_i^j$  sono le componenti miste  $h_i^j$  del 2° tensore fondamentale,  $-c_i^j = h_{ik} g^{kj}$  (dove al

solito  $\{g^{ij}\}$  è la matrice reciproca della  $\{g_{ij}\}$ ).<sup>15</sup> Segue ancora che  $\det\{c_i^j\} = (-1)^n h/g$ , e quindi che  $\kappa^* = |h|/g$ . D'altra parte sappiamo che  $K =$  produttoria delle curvatures principali  $= h/g$  (vedi l'ultimo teorema della S.sez. 3.2.6), e concludiamo che

$$(10) \quad |K(\underline{X})| = \kappa^*(\underline{X}).$$

Evidentemente, questa vale in ogni punto  $X$  di  $S$  dove sono soddisfatte le condizioni presupposte per  $\underline{X}$ . Il valore assoluto della curvatura gaussiana uguaglia dunque la curvatura\* definita come  $\lim_{|\Delta S| \rightarrow 0} |S(\Delta S)|/|\Delta S|$ . È questa l'**interpretazione gaussiana**, di immediata e profonda suggestione geometrica, di  $K$ .<sup>16</sup> §

§3. *Rivisitazione di alcuni risultati della teoria di Riemann (per superfici immerse)*. Riscrivendo le (9) in termini di  $h_{(2)}$ , cioè come

$$(9bis) \quad N_j = -h_j^k X_k,$$

riproduciamo le equazioni di Weingarten (3.5.3, 8). Anche le equazioni di Gauss (3.5.3, 12) si possono riottenere in modo diretto seguendo la presente linea logica. Poiché  $X_{ij} = X_{ji}$  sono vettori dello spazio  $E_{n+1}$ , senza limitazioni di generalità possiamo rappresentarli come combinazioni lineari delle  $X_i$  e di  $N$ , diciamo secondo le

$$(11) \quad X_{ij} = \Gamma_{ij}^{*k} X_k + h_{ij}^* N,$$

dove  $\Gamma_{ij}^{*k}$  e  $h_{ij}^*$  sono certi coefficienti, simmetrici negli indici  $(ij)$ , che ci ripromettiamo di determinare. Moltiplicando internamente le (11) per  $N$ , in virtù della (3) troviamo subito  $h_{ij}^* = h_{ij}$ . Per determinare i coefficienti  $\Gamma_{ij}^{*k}$ , moltiplichiamo internamente le stesse (11) per  $X_s$ , ottenendo

$$(12) \quad \Gamma_{isj}^* = X_{ij} \cdot X_s = \Gamma_{ij}^{*k} g_{ks},$$

perché  $N \cdot X_s = 0$ . D'altra parte la derivata rispetto a  $q^j$  di  $g_{is} = X_i \cdot X_s$  è  $\partial g_{is} / \partial q^j = \Gamma_{isj}^* + \Gamma_{sij}^*$ . Confrontando queste relazioni con le (3.3.2, 12bis), si vede subito che  $\Gamma_{isj}^* = \Gamma_{isj} \equiv$  simboli di Christoffel di 1<sup>a</sup> specie, o Chr1; e quindi, in forza della (12), che  $\Gamma_{ij}^{*k} = \Gamma_{ij}^k \equiv$  simboli di Christoffel di 2<sup>a</sup> specie, o Chr2. Se dunque le (11) si riscrivono abolendovi gli asterischi come

$$(11bis) \quad X_{ij} = \Gamma_{ij}^k X_k + h_{ij} N,$$

a parte le notazioni si ritrovano le (3.5.3, 12).

Deriviamo ora le (11bis) rispetto a  $q^h$ . Scrivendo al solito modo  $X_{ijh}$  per  $\partial X_{ij} / \partial q^h$ , e utilizzando la simmetria di  $X_{ijh}$  rispetto ai suoi indici (per questo basta supporre  $X$  di CdC 3),

<sup>15</sup> Che i coefficienti  $g_{ik}$  e  $h_{ik}$  si comportino come componenti doppiamente covarianti di certi 2-tensori simmetrici  $g_{(2)}$  e  $h_{(2)}$  a fronte di un 1-diffeomorfismo  $q \leftrightarrow q'$  scende immediatamente dalla loro definizione.

<sup>16</sup> Come deve, il risultato vale anche nel caso della curva piana ricordato nel testo, e deve riprodurre la definizione di curvatura (con segno) data dalla (3.5.1, 2bis). Verifichiamolo. Sia  $y = y(x)$  l'equazione della curva, quindi  $X = \langle x, y \rangle$ ,  $X_x = \langle 1, y' \rangle$ ,  $X_{xx} = \langle 0, y'' \rangle$ ,  $N = (1+y'^2)^{-1/2} \langle -1, y' \rangle$  (il segno di quest'ultima può essere invertito; secondo quello attualmente scelto,  $N$  punta verso la concavità della curva),  $h_{xx} = y''/(1+y'^2)^{1/2}$ ,  $g_{xx} = X_x \cdot X_x = 1+y'^2$ , quindi  $K = h/g = h_{xx}/g_{xx} = y''/(1+y'^2)^{3/2}$ , e  $\kappa^* = |h_{xx}|/g_{xx} = |d_s \alpha|$  (dove  $d_s \alpha$  è la curvatura con segno della (3.5.1, 2bis)). In definitiva  $|K| = \kappa^*$ , qed.



vediamo che l'espressione  $\partial\Gamma_{ij}^s/\partial q^h X_s + \Gamma_{ij}^p X_{ph} + \partial h_{ij}/\partial q^h N + h_{ij} N_h$  deve essere simmetrica rispetto a  $(i,j,h)$ , e in particolare rispetto a  $(i,h)$ . In questa espressione si possono sostituire le  $X_{ph}$  e le  $N_h$  mediante le (11bis) e rispettivamente le (9bis). L'indipendenza lineare dei vettori  $X_s$  e  $N$  implica allora che

$$(13_1) \quad \partial\Gamma_{ij}^s/\partial q^h + \Gamma_{ij}^p \Gamma_{ph}^s - h_{ij} h_h^s = \text{sim}(i,h),$$

$$(13_2) \quad \Gamma_{ij}^p h_{ph} + \partial h_{ij}/\partial q^h = \text{sim}(i,h).$$

Le (13<sub>1</sub>) sono le simmetrie di Gauss (v. S.sez. 3.5.3), mentre le (13<sub>2</sub>) riproducono le equazioni di Mainardi-Codazzi (v. ancora S.sez. 3.5.3). La conclusione è che sia le equazioni di Gauss (3.5.3, 12) che quelle di Mainardi-Codazzi (3.5.3, 11) si possono ricavare, per una  $n$ -superficie immersa in  $E_{n+1}$ , prescindendo dalla nozione di derivata covariante  $_{/d}$  di un vettore superficiale (vedi la (3.3.2, 8)), e a maggior ragione da quella di 4-tensore di Riemann  $\rho_{(4)}$  (vedi la (3.4.2, 3)). È infine ovvio che ciò vale anche per le equazioni di Weingarten (9bis).

Anche l'introduzione del 4-tensore  $\rho_{(4)}$  può vedersi come una conseguenza naturale delle (13<sub>1</sub>). Precisamente, scrivendo la (13<sub>1</sub>) come  $h_{ij} h_k^s - \text{alt}(i,k) = (\partial\Gamma_{ij}^s/\partial q^k + \Gamma_{ij}^t \Gamma_{tk}^s) - \text{alt}(i,k) =$  (per la simmetria dei Chr2 rispetto agli indici inferiori)  $(\partial\Gamma_{ij}^s/\partial q^k - \Gamma_{it}^s \Gamma_{kj}^t) - \text{alt}(i,k)$ , ravvisiamo subito nel suo 2° o 3° membro la componente mista  $\rho_{jik}^s$  di  $\rho_{(4)}$  come definita dalla (3.4.2, 3). Contraendo questo risultato con  $g_{sp}$ , concludiamo che

$$(14) \quad h_{ij} h_{kp} - h_{kj} h_{ip} = \rho_{jpik},$$

secondo le formule di Gauss (3.5.3, 4).

Tenendo conto della simmetria di  $h_{(2)}$ , dalle (14) si ottengono immediatamente la simmetria e le due antisimmetrie (3.4.2, 10<sub>1</sub>, 10<sub>2</sub>, 10<sub>4</sub>), nonché la simmetria (3.4.2, 10<sub>3</sub>), di  $\rho_{(4)}$ . Per  $n = 2$ , le (14) si riducono all'unica  $h = \rho_{1212} = Kg$ . Il determinante  $h(q)$  è dunque completamente esprimibile in termini di  $g_{(2)}(q)$  e delle sue derivate prime e seconde (un fatto nominato da Gauss come "Theorema egregium", vedi anche la S.sez. 9.1.1), e la curvatura gaussiana  $\rho_{1212}/g$  è invariante per una trasformazione isometrica ( $\equiv$  che lascia invariato  $g_{(2)}$ ) della 2-superficie (**teorema di Gauss**, tra i molti omonimi).<sup>17</sup> Rimarchiamo che le (14) sono state qui ricavate facendo uso della metrica naturale indotta in  $S$  dallo spazio euclideo sommergente,  $g_{ik} = X_i \cdot X_k$ .

Secondo il teorema di Gauss-Bonnet (v. S.sez. 4.5.3), se sono assegnate due funzioni  $n \times n$ -matriciali ( $n \geq 2$ ) simmetriche  $g_{(2)}(q)$  e  $h_{(2)}(q)$  di  $CdC^2$ <sup>18</sup> di  $q \in U$  (aperto connesso di  $E_n$ ), con  $g_{(2)}$  positiva definita e sotto i vincoli (14) (le  $n^2(n^2-1)/12$  formule di Gauss) e

<sup>17</sup> Si potrebbe a questo punto pensare che l'altra e simile simmetria  $N_{ik} =: \partial^2 N / \partial q^i \partial q^k = N_{ki}$  conduca a qualche nuova interessante relazione. Ma non è così: come facili manipolazioni permettono di accertare, ciò che si trova è soltanto una versione equivalente delle equazioni di Mainardi-Codazzi.

<sup>18</sup> Ricordiamo che per definire il tensore di curvatura di una varietà bisogna supporla di classe  $C^3$ .

$$(15) \quad (\partial h_{ij}/\partial q^k + \Gamma_{ij}^p h_{pk}) - \text{alt}(i,k) = 0$$

(le  $n^2(n-1)/2$  equazioni di Mainardi-Codazzi (13<sub>2</sub>), scritte in modo equivalente) allora la  $n$ -superficie della quale  $g_{(2)}(q)$  e  $h_{(2)}(q)$  sono la 1<sup>a</sup> e risp. la 2<sup>a</sup> forma fondamentale *esiste*, ed è unicamente definita a meno di una rototraslazione propria o impropria, in un intorno  $\subset U$  di ogni  $q \in U$ .

È interessante, in particolare, stabilire quanti degli  $n(n+1)/2$  elementi di  $h_{(2)}$  possono essere assunti liberamente (in un dato punto  $q$ ) in forza dei vincoli (14) (come è ovvio, a meno di un segno comune), quando in  $q$  siano dati  $g_{(2)}$  e le sue derivate prime e seconde, cioè  $\rho_{(4)}$ . La differenza tra  $n(n+1)/2$  (numero delle componenti algebricamente indipendenti di  $h_{(2)}$ ) e  $n^2(n^2-1)/12$  (numero delle componenti algebricamente indipendenti di  $\rho_{(4)}$ ) vale 2 per  $n = 2$ , 0 per  $n = 3$ , ed è addirittura negativa per  $n > 3$ . Questo fatto suggerisce che per  $n \geq 3$  *tutte* le componenti di  $h_{(2)}$  siano determinate come funzioni di  $q$  (a meno del segno comune) in termini della metrica e delle sue derivate prime e seconde calcolate in  $q$ . In effetti, esiste un teorema di natura algebrica, e sulla cui dimostrazione sorvoliamo, che afferma proprio questo fatto sotto la condizione che  $h_{(2)}(q)$  abbia rango  $\geq 3$ ; ovvero, sotto la condizione che in  $q$  *almeno tre curvature principali siano diverse da zero*. Tuttavia non è detto che una  $n$ -superficie immersa in  $E_{n+1}$  con la 1<sup>a</sup> forma (definita positiva) assegnata arbitrariamente e con la 2<sup>a</sup> forma così determinata in termini della 1<sup>a</sup> esista; infatti non è detto che tali forme soddisfino le equazioni di Mainardi-Codazzi, che sono parte integrante delle ipotesi del teorema di Gauss-Bonnet.<sup>19</sup> D'altra parte, assegnando gli  $n(n+1)/2$  coefficienti della 1<sup>a</sup> forma fondamentale di una  $n$ -superficie  $X = X(q)$  immersa in  $E_{m \geq n+1}$ , si richiede implicitamente che esista una soluzione del sistema di altrettante EDP bilineari del 1° ordine indipendenti  $\partial X/\partial q^i \cdot \partial X/\partial q^k = g_{ik}$  nelle  $m$  incognite  $X$ . Come abbiamo già osservato (vedi S.sez. 3.4.1), il semplice bilancio “equazioni vs. incognite” suggerisce quindi che la dimensione  $m$  di  $E_m$  debba essere almeno uguale a  $n(n+1)/2$  per assicurare l'esistenza di una soluzione  $X = X(q)$ .<sup>20</sup> Un teorema

<sup>19</sup> Se tale superficie esistesse, l'ambiguità del segno della 2<sup>a</sup> forma condurrebbe a due superfici distinte per il loro orientamento; ma questo sarebbe già compreso nell'ambiguità intrinseca della soluzione del problema di Bonnet, che è definita univocamente a meno, in particolare, di una riflessione (che è una rotazione impropria).

<sup>20</sup> Si noti che la richiesta  $n+1 = n(n+1)/2$  porta automaticamente a  $n = 2$ , e quindi alle 2-superfici immerse in  $E_3$ . È immediato, in questo caso  $n = 2$ , verificare che il bilancio “equazioni vs. incognite” è soddisfatto anche passando attraverso il teorema di Bonnet. Se infatti è data la 1<sup>a</sup> forma in  $U$ , la 2<sup>a</sup> forma (che come la 1<sup>a</sup> consta di tre funzioni) è vincolata alla 1<sup>a</sup> forma da tre equazioni: una (algebraica in  $h_{(2)}$ ) è la formula di Gauss, e le altre due (EDP lineari del 1° ordine in  $h_{(2)}$ ) sono le equazioni di Mainardi-Codazzi. Le tre  $h_{ik}(q)$  sono così determinate localmente *a meno di convenienti condizioni accessorie*. È proprio l'arbitrarietà di queste condizioni che rende conto della generale molteplicità, rototraslazioni a parte, delle superfici aventi 1<sup>a</sup> forma data in  $U$ . Questa molteplicità può tuttavia venire a mancare quando si considerino superfici chiuse ( $\equiv$  senza bordi), e il problema è quello di determinarle *globalmente* a partire dalla loro 1<sup>a</sup> forma soltanto. Ad esempio è ben noto che una superficie chiusa ovunque convessa è “rigida”, cioè non può essere deformata per continuità lasciandone invariata la metrica (Herglotz).

affermativo in tal senso, sotto l'ipotesi che  $g_{(2)}(q)$  sia *analitica*, è stato effettivamente provato (É. Cartan, 1927<sup>21</sup>).

### 8.1.2) PARALLELISMO GEODETICO E COORDINATE SEMIGEODETICHE

La geometria differenziale locale delle  $n$ -superfici  ${}_nS = S$  immerse in  $E_{n+1}$  può procedere a ulteriori sviluppi nell'ambito della semplice analisi delle funzioni di più variabili reali (come sostanzialmente si è fatto nella precedente sottosezione). Sia  $X = X(\sigma)$  una curva  $L$  di  $S$  riferita alla sua lunghezza con segno  $\sigma$ . Con le solite notazioni, e indipendentemente dal segno di  $\sigma$ , è  $d_\sigma^2 X = d_\sigma(X_i d_\sigma q^i) = X_i d_\sigma^2 q^i + X_{ij} d_\sigma q^i d_\sigma q^j = (d_\sigma^2 q^k + \Gamma_{ij}^k d_\sigma q^i d_\sigma q^j) X_k + h_{ij} N d_\sigma q^i d_\sigma q^j$  in virtù delle (8.1.1, 11bis). Il vettore  $d_\sigma^2 X$  risulta così decomposto in un componente tangenziale  $\omega_g$  e in un componente normale  $\omega_f$ , che si dicono (vettore di) **curvatura geodetica** e rispettivamente (vettore di) **curvatura forzata** di  $L$ .  $L$  si dice **geodetica di  $S$**  se in ogni suo punto  $\omega_g = 0$ . Poiché  $\{X_k\}$  è una base del  $n$ -piano tangente  $\Pi$  di  $S$ ,  $L$  è geodetica sse

$$(1) \quad d_\sigma^2 q^k + \Gamma_{ij}^k d_\sigma q^i d_\sigma q^j = 0$$

per ogni  $k = 1, \dots, n$ ; quindi se la curvatura  $\kappa$  di  $L$  (geodetica) è  $\neq 0$ , e  $N$  e la normale principale  $\underline{v}$  di  $L$  coincidono lungo  $L$ , possibilmente a meno del segno, vedi la (3.5.2, 2). Se invece  $\omega_f = 0$ , e sempre se  $\kappa \neq 0$ ,  $\underline{v}$  giace in  $\Pi$ , e  $\kappa \underline{v} = \omega_g$ . Notazioni a parte, conosciamo già le (1), a loro tempo ricavate come equazioni di Eulero-Lagrange di un fondamentale problema di calcolo delle variazioni (vedi la (6.2.2, 6)).

Se  $g_{(2)}(q)$  è di CdC 1, il sistema (1) di  $n$  EDO quasi-lineari del 2° ordine nelle altrettante  $q^k$  ha (localmente) una e una sola soluzione sotto le  $2n$  condizioni iniziali  $q^k(\sigma=0) = q_o^k$ ,  $d_\sigma q^k(\sigma=0) = q'_o{}^k$ , queste ultime assegnate sotto il vincolo  $g_{ij}(q_o) q'_o{}^i q'_o{}^j = 1$  (teorema di esistenza e unicità). Il problema geodetico che ne risulta è detto **del 1° tipo**. Potremo quindi affermare che (i) «per ogni punto di  $S$  passa una e una sola geodetica di data “direzione”  $q'_o{}^k$ » se avremo accertato che la funzione  $\Lambda = \Lambda(\sigma) =: g_{ij}(q(\sigma)) d_\sigma q^i(\sigma) d_\sigma q^j(\sigma)$  si conserva uguale a 1 per  $|\sigma| \neq 0$  e abbastanza piccolo; come deve essere se  $\sigma$  è effettivamente la lunghezza di  $L$ . Ciò si verifica facilmente calcolando  $d_\sigma \Lambda$  ed eliminandovi le  $d_\sigma^2 q^k$  mediante le (1) e le  $\partial g_{ij} / \partial q^h$  in termini dei Chr2 e della metrica stessa, secondo le  $\partial g_{ij} / \partial q^h = \Gamma_{ih}^p g_{pj} + \text{alt}(i,j)$ . Similmente, sempre sulla base dei teoremi di esistenza e unicità per SDO del 2° ordine, si può affermare che (ii) «per due punti distinti dati di  $S$  e non troppo lontani tra loro passa una e una sola geodetica» (problema geodetico agli estremi cosiddetto **del 2°**

<sup>21</sup> Vedi anche in É. Cartan, “Les systèmes différentiels extérieurs et leur applications géométriques”, Hermann 1945.

**tipo**) e (iii) «per un punto dato di  $S$  passa una e una sola geodetica che interseca ortogonalmente una data sottovarietà  $(n-1)$ -dim di CdC 1 immersa in  $S$  e non troppo lontana» (problema geodetico cosiddetto **del 3° tipo**). Rileviamo che non si è fin qui utilizzata né menzionata quella proprietà estrema delle geodetiche che ci ha portato alle (6.2.2, 6).

Introdurremo ora la (nuova) nozione di **parallelismo geodetico** tra due sottovarietà  $(n-1)$ -dim (di CdC 1) immerse in  $S$  (varietà elementare  $n$ -dim). Una sottovarietà del tipo appena descritto, diciamo  ${}_{n-1}W = W$ , è definita (localmente) esprimendo le  $n$  coordinate  $q$  come funzioni di CdC 1 di  $n-1$  parametri  $t^1, \dots, t^{n-1}$  in un aperto connesso  $T$  di  $E_{n-1}$ , e supponendo al solito che il rango della matrice jacobiana  $\partial(q)/\partial(t)$  sia massimale (cioè  $n-1$ ) in un certo  $\underline{t} \in T$  di riferimento; per fissare le idee, che sia ivi  $\neq 0$  il minore che si ottiene sopprimendo in essa la 1<sup>a</sup> colonna. A queste condizioni, per il teorema della funzione inversa  $q^1$  è una funzione di CdC 1 localmente determinata dalle rimanenti coordinate  $q^k$  (qui e nel seguito un indice *corsivo* varia tra 2 e  $n$ ), diciamo  $q^1 = \psi(q^2, \dots, q^n)$ .

Effettueremo poi due successive trasformazioni localmente 1-diffeomorfe di coordinate (cioè cambiamenti di carte 1-compatibili (v. S.sez. 4.1.1)). La prima trasformazione, diciamo  $p = p(q)$ , è definita da  $p^1 =: q^1 - \psi(q^2, \dots, q^n)$ ,  $p^k =: q^k$ ; essa è banalmente invertibile e  $C^1$  insieme alla sua inversa (il relativo determinante jacobiano vale identicamente 1), cioè  $q \leftrightarrow p$  è un 1-diffeomorfismo locale come convenuto. Nelle coordinate  $(p)$ ,  $W$  ha equazione  $p^1 = 0$ , e la nuova metrica si calcola subito in termini della vecchia e (delle derivate) di  $\psi$ . La seconda trasformazione localmente 1-diffeomorfa, diciamola  $v = v(p)$ , è un po' più delicata, e si definisce come segue. Si parta dalla biiezione  $p \leftrightarrow X \in S$ . Esiste una e una sola geodetica che passando per il punto  $X(p) \notin W$ , ma abbastanza vicino a  $W$ , interseca  $W$  ortogonalmente (problema del 3° tipo).<sup>22</sup> Sia  $\underline{X} = \underline{X}(p)$  la sua intersezione con  $W$ , o **piede geodetico su  $W$  di  $X(p)$** . Si pone allora  $v^1 =: \sigma(\underline{X}(p), X(p)) =$  (lunghezza della geodetica tra  $X(p)$  e il suo piede geodetico  $\underline{X}(p)$ )  $= v^1(p)$ , scegliendo il segno di  $v^1$  uguale a quello di  $p^1$ ; e inoltre  $v^k =: \underline{p}^k = \underline{p}^k(p)$ , avendo così denotato la coordinata  $(^k)$  di  $\underline{X}(p)$ . Se poi  $p^1 = 0$ , quindi se  $X(p) \in W$ , si pone  $v =: \{v^1=0, v^k=p^k\}$ . Si dimostra che  $v = v(p)$  è invertibile e  $C^1$  insieme alla sua inversa;<sup>23</sup> cioè che anche  $p \leftrightarrow v$  è un 1-diffeomorfismo

<sup>22</sup> Questo significa che il versore  $\tau$  tangente alla geodetica ha nulle le sue componenti *covarianti*  $(k)$  nella carta  $(p)$  per  $p^1 = 0$ . Infatti riferendoci a tale carta, per definizione di ortogonalità è  $0 = g_{ij}\tau^i dp^j = g_{ij}\tau^i dp^j$  (perché  $dp^1 \equiv 0$  su  $p^1 = 0$ )  $= \tau_j dp^j$ , e questo equivale a  $\tau_j = 0$  per l'indipendenza lineare delle  $dp^j$

<sup>23</sup> Ci limitiamo a dare una traccia della dimostrazione. Verifichiamo innanzitutto la biunivocità della corrispondenza tra  $p$  e  $v$ . L'univocità  $p \mapsto v$  è nella definizione di  $v$ . L'univocità  $v \mapsto p$  segue considerando che a dato  $v$  corrispondono esattamente due punti  $X$  sulla stessa geodetica di coordinate  $v^k$ , da parti opposte rispetto a  $W$ ; di questi, si sceglie quello che ha  $p^1$  dello stesso segno di  $v^1$ . A questo  $X$  corrisponde una e una sola  $p$  (perché  $X \leftrightarrow p$ ), e quindi anche  $v \mapsto p$ . La CdC 1 di  $v = v(p)$  e dell'inversa  $p = p(v)$  si ricavano poi dalle proprietà della soluzione del SDO geodetico rispetto ai dati accessori.

locale intorno a  $\underline{X}(p)$ . Le coordinate  $v$  così unicamente definite a partire dalle  $p$ , quindi dalle  $q$  per la data  $W$ , si dicono **semigeodetiche di base  $W$** . Importa qui evidenziare che la metrica nella carta semigeodetica ( $v$ ) (per semplicità, la denoteremo qui ancora  $g_{(2)}$ ) ha  $g_{11}(v) \equiv 1$  per  $|v^1|$  abbastanza piccolo, o “ $|v^1| < \varepsilon$ ”, e che  $g_{1k}(v^1=0) = 0$ .<sup>24</sup> La sottovarietà  $(n-1)$ -dim di equazione  $v^1 = C = \text{cost}$ , definita e  $C^1$  per  $|C| < \varepsilon$ , si dice **parallela geodetica di  $W$** , a distanza  $C$  (con segno) da  $W$ .

Affermiamo che la parallela geodetica di  $W$ , per  $|C| < \varepsilon$ , è ortogonale alle geodetiche ortogonali a  $W$  che la intersecano. Poiché tali geodetiche sono linee coordinate ( $v^1$ ), ciò equivale a dire che, nella carta  $v$ ,  $g_{1k}(v) \equiv 0$  per  $|v^1| < \varepsilon$ . L'equazione della geodetica passante per  $\{v^1=0, v^k = \underline{p}^k\}$ , in coordinate  $v$ , dà  $0 = \Gamma_{11}^j$ ; infatti,  $d_\sigma^2 v^j$  è comunque zero (se  $j = 1$ , perché  $v^1 = \sigma$  lungo la geodetica, e se  $j = k$ , perché  $v^k = \underline{p}^k = \text{cost}$ , sempre lungo la geodetica). Inoltre  $d_\sigma v^i = \delta_1^i$ , quindi  $0 = \Gamma_{hk}^j \delta_1^h \delta_1^k = \Gamma_{11}^j \forall j$ . La metrica è non degenera anche nella carta ( $v$ ), perché siamo passati da  $q$  a  $v$  mediante due 1-diffeomorfismi locali in successione, e il determinante del trasformato di un tensore doppio covariante è il prodotto del determinante del tensore doppio trasformando per il quadrato dello jacobiano della trasformazione; per cui anche  $\Gamma_{1j1} = 0 \forall j$ . Ora  $\Gamma_{1j1} = \partial g_{1j} / \partial v^1 - (1/2) \partial g_{11} / \partial v^j$ ; ed essendo  $g_{11} \equiv 1$  per  $|v^1| < \varepsilon$ , segue che è ivi  $\partial g_{1j} / \partial v^1 \equiv 0$ , cioè che  $g_{1j}$ , e in particolare  $g_{1j}$ , non dipende da  $v^1$ . Ma  $g_{1j} = 0$  per  $v^1 = 0$ , da cui la tesi. Per  $j = 1$ , il precedente asserto su  $g_{1j}$  dice poi che (come già sappiamo)  $g_{11}$  non varia lungo la geodetica.

Mostriamo che la proprietà estrema della geodetica  $\alpha$  tra due punti  $A$  e  $B$  (abbastanza vicini) di  $S$  consegue dalle precedenti definizioni. Sia  $W$  una sottovarietà  $(n-1)$ -dim di CdC 1 di  $S$ , passante (ad es.) per  $A$  e ortogonale a  $\alpha$  (questa può essere costruita in infiniti modi), e siano  $v$  le coordinate semigeodetiche di base  $W$  intorno a  $A$ , unicamente definite. Sia  $\beta$  una curva di CdC 1 tra  $A$  e  $B$ , abbastanza vicina alla  $\alpha$ , di equazioni  $v_\beta = v_\beta(t)$  per  $t \in (0,1)$ , quindi per cui  $v_\beta(t \rightarrow 0^+)$  siano le coordinate  $v(A)$  di  $A$  (che potremo assumere nulle) e  $v_\beta(t \rightarrow 1^-)$  siano le coordinate  $v(B)$  di  $B$ . La lunghezza  $\sigma(\beta)$  di  $\beta$  è uguale all'integrale di linea  $\int_0^{v(B)} [g_{ik}(v_\beta) dv_\beta^i dv_\beta^k]^{1/2} = \int_0^{v(B)} [(dv_\beta)^2 + g_{ik}(v_\beta) dv_\beta^i dv_\beta^k]^{1/2}$  perché stiamo usando coordinate semigeodetiche e siamo intorno a  $A$ . Se in particolare  $\beta \equiv \alpha$ , allora  $v_\alpha^1 \equiv v^1$  e  $v_\alpha^k = \text{cost}$ , per cui la lunghezza di  $\alpha$  è  $\sigma(\alpha) = \int_0^{v(B)} dv^1 \equiv v^1(B) \leq \sigma(\beta)$ . Infatti la  $(n-1)$ -forma quadratica di coefficienti  $g_{ik}$  è definita positiva se lo è quella di coefficienti  $g_{ik}$ , perché  $\{g_{ik}\}$  è il primo minore principale di  $\{g_{ik}\}$ . Concludiamo così che la geodetica  $\alpha$  tra  $A$  e  $B$  (abbastanza vicini) ha lunghezza minima tra quelle delle curve vicine tra gli

<sup>24</sup> In generale,  $g_{ik}$  coincide con il prodotto interno dei versori delle linee coordinate (orientate) ( $i$ ) e ( $k$ ), che per definizione hanno componenti controvarianti ( $j$ )  $\delta_i^j$  e rispettivamente  $\delta_k^j$ . Nel nostro caso, la linea coordinata ( $v^1$ ) ha versore tangente di componenti controvarianti ( $k$ ) identicamente nulle per  $|v^1| < \varepsilon$ , mentre la linea coordinata ( $v^k$ ) ha versore tangente di componente controvariante (1) nulla per  $v^1 = 0$ . Segue che  $1 = g_{rs} \delta_1^r \delta_1^s = g_{11}$  per  $|v^1| < \varepsilon$ , e che  $0 = g_{rs} \delta_1^r \delta_k^s = g_{1k}$  per  $v^1 = 0$ , qed.

stessi punti. Questa proprietà, che è ovviamente legata al carattere definito positivo della metrica  $g_{(2)}$ , può essere assunta come caratteristica delle geodetiche di una varietà elementare a metrica definita positiva; e infatti, le equazioni di una tale geodetica sono proprio le equazioni di Eulero-Lagrange conseguenti alla richiesta proprietà minimale del funzionale lunghezza.

Passiamo ora ad una importante applicazione dell'uso di coordinate semigeodetiche in una varietà 2-dim. Per  $n = 2$ , i coefficienti della metrica in coordinate semigeodetiche  $v = \{v^1, v^2\}$  sono (localmente)  $g_{1k} = \delta_{1k}$  (per  $k = 1, 2$ ), mentre  $g_{22}$ , che scriveremo  $G$  al modo di Gauss, è una generica funzione *positiva* e di CdC 1 di  $v$ . Per  $i$  e  $k$  non simultaneamente uguali a 1, possiamo esprimere tutti i Chr1 in termini di  $G$  e di sue derivate prime. Scrivendo per brevità  $\xi$  per  $v^1$  e  $\eta$  per  $v^2$ , si trova subito, infatti,

$$(2_1) \quad \Gamma_{\xi\xi\eta} = 0, \quad \Gamma_{\xi\eta\eta} = G_{\xi}/2, \quad \Gamma_{\eta\xi\eta} = -G_{\xi}/2, \quad \Gamma_{\eta\eta\eta} = G_{\eta}, \quad \Gamma_{\xi\eta\xi} = 0, \quad \Gamma_{\xi\xi\xi} = 0;$$

$$(2_2) \quad \Gamma_{\xi}^{\xi}{}_{\eta} = 0, \quad \Gamma_{\xi}^{\eta}{}_{\eta} = G_{\xi}/(2G), \quad \Gamma_{\eta}^{\xi}{}_{\eta} = -G_{\xi}/2, \quad \Gamma_{\eta}^{\eta}{}_{\eta} = G_{\eta}/(2G), \quad \Gamma_{\xi}^{\eta}{}_{\xi} = 0, \quad \Gamma_{\xi}^{\xi}{}_{\xi} = 0.$$

Se dunque fosse data una opportuna addizionale informazione sui Chr2 si potrebbe pensare di determinare  $G$  a meno di condizioni accessorie (se ad esempio si imponesse che  $\Gamma_{\eta}^{\xi}{}_{\eta} = 0$ , se ne desumerebbe l'indipendenza di  $G$  da  $\xi$ ). Un modo significativo di far questo consiste nel supporre data la curvatura gaussiana  $K = [\partial\Gamma_{\xi}^r{}_{\xi}/\partial\eta - \partial\Gamma_{\xi}^r{}_{\eta}/\partial\xi + \Gamma_{\xi}^q{}_{\xi}\Gamma_{\eta}^r{}_{q} - \Gamma_{\xi}^q{}_{\eta}\Gamma_{\xi}^r{}_{q}]g_{\eta\eta}/g$  (somma da 1 a 2 sugli indici  $(q,r)$  ripetuti in alto e in basso), naturalmente avendo anche supposto  $g_{(2)}$  di CdC 2. Con le operazioni indicate, alla luce delle (2<sub>2</sub>) si trova

$$(3') \quad K = -G_{\xi\xi}/(2G) + G_{\xi}^2/(4G^2) = -(\sqrt{G})_{\xi\xi}/\sqrt{G}.$$

$\sqrt{G}$  deve dunque soddisfare la EDO del 2° ordine lineare omogenea di tipo fuchsiano

$$(3) \quad (\sqrt{G})_{\xi\xi} + K\sqrt{G} = 0.$$

Per ottenere due condizioni accessorie con le quali  $\sqrt{G}$  è completamente determinata come funzione di  $(\xi, \eta)$ , conviene scegliere la base  ${}_1W \equiv W$  delle coordinate semigeodetiche (una curva di CdC 1) a *sua volta come una geodetica* (orientata), ed  $\eta$  come la lunghezza con segno su questa a partire da un suo punto dato (ad es. il punto-base di riferimento nell'intorno del quale stiamo lavorando, ove è  $\eta = 0$ ). Questo si può sempre fare in infiniti modi. Nelle nuove coordinate semigeodetiche così definite – le diremo coordinate geodetiche “speciali” e per brevità le continueremo a denotare con  $\xi, \eta$  –, tenendo conto del fatto che  $W$  è geodetica abbiamo innanzitutto  $0 = d_{\eta}^2 v^k + \Gamma_{ij}^k d_{\eta} v^i d_{\eta} v^j = d_{\eta}^2 v^k + \Gamma_{\eta}^k{}_{\eta}$ , quindi  $0 = 0 + \Gamma_{\eta}^{\xi}{}_{\eta}$  (per  $k \sim \xi$ ) e  $0 = 0 + \Gamma_{\eta}^{\eta}{}_{\eta}$  (per  $k \sim \eta$ ) lungo  $W$ , cioè per  $\xi = 0$  e  $\eta$  intorno a 0. Ma questi due Chr2 sono dati dalla 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> (2<sub>2</sub>), e dunque

$$(4_1) \quad G_{\xi}(\xi=0, \eta) \equiv 0,$$

$$(4_2) \quad G_{\eta}(\xi=0, \eta) \equiv 0,$$

per  $\eta$  intorno a 0. Di queste (4), la (4<sub>2</sub>) dice che  $G$  è indipendente da  $\eta$  lungo  $W$ . Inoltre si verifica direttamente che

$$(5) \quad G(\xi=0, \eta) \equiv 1,$$

sempre per  $\eta$  intorno a 0, e quindi quest'ultima dà il valore della costante di integrazione che origina dalla (4<sub>2</sub>). Invece la (4<sub>1</sub>) è una condizione iniziale indipendente dalla (5). Le (4, 5) si dicono condizioni iniziali “naturali” per la (3). La soluzione  $\sqrt{G}$  della (3) che ad esse corrisponde è così unicamente determinata in un intorno dell'origine  $\xi = 0, \eta = 0$ , per  $K = K(\xi, \eta)$  data in tale intorno (almeno, finché  $G$  si mantiene  $> 0$ ); e con essa, è unicamente determinata l'intera metrica. Naturalmente la  $\eta$  è presente in questa metrica come semplice parametro, regolato da  $K$ ; in particolare *non c'è* se  $K$  è costante. La metrica così unicamente determinata intorno all'origine si dice **metrica semigeodetica naturale**, per la data  $K(\xi, \eta)$ . Si può così affermare che «se due 2-varietà (che distingueremo con (1) e (2)) hanno coordinate semigeodetiche speciali  $\{\xi_1, \eta_1\}$  e  $\{\xi_2, \eta_2\}$  legate da un 1-diffeomorfismo locale, e  $K_1(\xi_1, \eta_1) = K_2(\xi_2, \eta_2)$  nei corrispondenti aperti di definizione, allora esse sono ivi isometriche.»

Come sappiamo, l'assegnazione dell'invariante  $ds^2(x) = g_{ik}(x)dx^i dx^k$  in un aperto di varietà differenziabile ( $n \geq 2$ )-dim vi determina univocamente una connessione p.riemanniana, e quindi l'invariante curvatura gaussiana  $K(x)$  (per una data giacitura se  $n > 2$ ) in quell'aperto. Viceversa, la (3) e le relative condizioni accessorie (4, 5) provano che l'assegnazione dell'invariante  $K(x)$  in un aperto abbastanza piccolo di una 2-superficie determina univocamente l'invariante metrico  $ds^2(x)$  in quell'aperto. Questo ribaltamento di prospettiva apre alcuni importanti “problemi inversi” più generali (sui quali non ci soffermiamo qui), che con le loro soluzioni offrono un cospicuo corpo di risultati. Tornando al caso  $n = 2$ , il fatto che esista una corrispondenza biunivoca (fondata sulla (3) e condizioni accessorie) tra l'invariante metrico  $ds^2(x)$  e l'invariante gaussiano  $K(x)$  – secondo la quale due aperti di varietà differenziabili 2-dim in corrispondenza biunivoca  $x \leftrightarrow x'$  sono isometrici in punti corrispondenti se e solo se hanno ivi la stessa curvatura – non significa che sia immediato esibire il diffeomorfismo  $x = x(x')$  che presiede a tale identificazione. Ad esempio si verifica subito che le metriche  $d\rho^2 + \text{Sh}^2 \rho d\varphi^2$  e  $d\rho'^2 + \text{Ch}^2 \rho' d\varphi'^2$  (cioè  $g_{\rho\rho} = g_{\rho'\rho'} = 1, g_{\rho\varphi} = g_{\rho'\varphi'} = 0, g_{\varphi\varphi} = \text{Sh}^2 \rho, g_{\varphi'\varphi'} = \text{Ch}^2 \rho'$ ) implicano sia  $K(\rho, \varphi) = -1$  che  $K(\rho', \varphi') = -1$  (quindi che  $K(\rho, \varphi) = K(\rho', \varphi')$ ); ma non è immediato determinare le funzioni (abbastanza regolari e invertibili)  $\rho = \rho(\rho', \varphi')$  e  $\varphi = \varphi(\rho', \varphi')$  per le quali le due precedenti metriche coincidono negli aperti corrispondenti. La soluzione delle (3, 4, 5) diventa banale se  $K = \text{cost}$ . Se (i)  $K = 0$ , è  $\sqrt{G} = 1$ , e quindi  $g_{ik} = \delta_{ik}$ ; se (ii)  $K > 0$ , è  $\sqrt{G} = \cos(\xi\sqrt{K})$ , quindi  $g_{ik} = \delta_{ik}$  se almeno uno dei due indici è  $\xi$ , mentre  $g_{\eta\eta} = \cos^2(\xi\sqrt{K})$ ; infine se (iii)  $K < 0$ , è  $\sqrt{G} = \text{Ch}(\xi\sqrt{-K})$ , quindi ancora  $g_{ik} = \delta_{ik}$  se almeno

uno dei due indici è  $\xi$ , mentre  $g_{\eta\eta} = Ch^2(\xi\sqrt{-K})$ . Tra le superfici immerse in  $E_3$ , il piano euclideo è prototipo del caso (i), la sfera di raggio  $1/\sqrt{K}$  lo è del caso (ii), e infine la pseudosfera di Beltrami di raggio  $1/\sqrt{-K}$  lo è del caso (iii).

Un'altra interessante applicazione delle coordinate semigeodetiche è quella alle superfici assisimmetriche, con meridiani di CdC 1, immerse in  $E_3$ . In (6.2.1, §3) abbiamo esaminato il problema delle geodetiche su queste superfici dal punto di vista variazionale, concludendo con il teorema di Clairaut. Lo riprendiamo adesso, considerando che la natura geodetica dei meridiani si può caratterizzare, in forza della assisimmetria, mediante la proprietà che la loro normale principale sia ortogonale al piano tangente alla superficie. Possiamo allora definire delle coordinate semigeodetiche scegliendone come base uno specifico parallelo  $\underline{\pi}$  e come geodetiche i meridiani (orientati), che sono appunto ad esso ortogonali. Vale a dire, sceglieremo  $\xi$  come lunghezza del meridiano a partire da  $\underline{\pi}$ ; ed  $\eta$ , lungo  $\underline{\pi}$ , ad esempio come la longitudine standard. Se  $\rho$  è l'usuale raggio cilindrico (distanza dall'asse di simmetria), la data superficie può essere descritta, ad esempio, assegnando  $\rho$  come funzione (che si supporrà di CdC 1) di  $\xi$ . Risulta così  $g_{\eta\eta} = G = \rho^2 = \rho^2(\xi)$ . Fruendo delle espressioni generali (2<sub>2</sub>) dei Chr2, e tenendo conto della condizione di assisimmetria  $\partial\rho/\partial\eta \equiv 0$ , le equazioni di una geodetica generica riferita alla sua lunghezza orientata  $\sigma$  a partire dalla sua intersezione con  $\underline{\pi}$ , risultano essere, nelle coordinate  $(\xi, \eta)$

$$(6_1) \quad \xi_{\sigma\sigma} = \rho d_\xi \rho \eta_\sigma^2,$$

$$(6_2) \quad \eta_{\sigma\sigma} = -2\rho^{-1} d_\xi \rho \xi_\sigma \eta_\sigma = -2\rho^{-1} d_\sigma \rho \eta_\sigma.$$

Nella (6<sub>2</sub>), la seconda uguaglianza segue dall'essere  $d_\xi \rho \xi_\sigma$  la derivata di  $\rho$  rispetto a  $\sigma$  *lungo la geodetica*, che abbiamo scritto come  $d_\sigma \rho$ . Sia poi  $\omega$  l'angolo introdotto in (6.2.1, §3) come  $\cos\omega = \rho \eta_\sigma$ ; si ha subito, in forza della (6<sub>2</sub>),

$$(7) \quad d_\sigma(\rho \cos\omega) = d_\sigma(\rho^2 \eta_\sigma) = \rho^2(\eta_{\sigma\sigma} + 2\rho^{-1} d_\sigma \rho \eta_\sigma) = 0.$$

Si ritrova così il teorema di Clairaut  $\rho \cos\omega = \text{cost}$ , in apparenza prescindendo da considerazioni variazionali.<sup>25</sup>

<sup>25</sup> Una dimostrazione "per direttissima" del teorema di Clairaut scende dal fatto già rilevato che, lungo una geodetica su una data superficie, la normale alla superficie coincide con la normale principale alla geodetica. Se  $P$  è il generico punto della geodetica e  $O$  la sua proiezione ortogonale sull'asse di rotazione di versore  $z^\wedge$  della superficie (supposta assisimmetrica), questo si traduce nella  $z^\wedge \times (P-O) \cdot dP/d\sigma = \text{cost}$ . Ora  $z^\wedge \times (P-O) = \rho \pi^\wedge$ , ove  $\pi^\wedge$  è il versore del corrispondente parallelo, per cui  $\rho \pi^\wedge \cdot dP/d\sigma = \text{cost}$ . Ma  $|dP/d\sigma| = 1$ , e  $\pi^\wedge \cdot dP/d\sigma = \cos\omega$ , cioè la tesi del teorema.



## 8.1.3) SUL TRASPORTO PARALLELO (DI UN VETTORE LUNGO UNA CURVA DATA SU UNA SUPERFICIE)

La nozione di derivata covariante di un vettore è facilmente recuperabile all'interno della precedente teoria delle  $n$ -superfici di CdC 1 immerse in  $E_{n+1}$  senza far uso (almeno, formalmente) dell'operatore di proiezione  $\wp$  introdotto nella S.sez. 3.4.1. Con le solite notazioni, sia  $X = X(q)$  la  $n$ -superficie  $S$  in oggetto; sia poi  $q = q(t)$  una curva di CdC 1 di  $U$  (aperto connesso di  $E_n$ , cui appartiene  $q$ ), e  $X = X(q(t))$  la sua immagine  $L$  in  $S$ . Sia  $f = f(q)$  una funzione di CdC 1 definita in  $U$ , e dunque lungo  $L$  come  $f(q(t))$ . La derivata rispetto a  $t$  di  $f$ ,  $d_t f$ , è  $d_t f = \partial f / \partial^{\mu} X \partial^{\mu} X / \partial q^k d_t q^k$  (ove  ${}^{\mu} X$  è la componente cartesiana ( ${}^{\mu}$ ) di  $X$ ). Se  $g$  è un'altra funzione come  $f$ , la regola di Leibniz per il loro prodotto  $fg$ :  $d_t(fg) = f d_t g + d_t f g$  consegue quindi dalla stessa regola applicata alle  $\partial(fg) / \partial^{\mu} X$ . Sia poi  $u = u^i X_i$  un campo vettoriale definito in  $S$ , nel senso che le sue componenti controvarianti  $u^i$  sono funzioni di CdC 1 di  $X$ , quindi di  $q$  come  $u^i(X(q))$  e infine lungo  $L$  come  $u^i(X(q(t)))$ . In virtù delle equazioni di Gauss (3.5.3, 12), la derivata rispetto a  $t$  di  $u$  è

$$(1) \quad d_t u = d_t u^i X_i + X_{k_j} u^k d_t q^j = (d_t u^i + \Gamma_{k_j}^i u^k d_t q^j) X_i + u^i h_{ij} d_t q^j N \equiv D_t u + d_t u$$

(qui  $d_t u^i$  sta evidentemente per  $\partial u^i / \partial^{\mu} X \partial^{\mu} X / \partial q^k d_t q^k$ ). Il primo addendo nel 3° membro della (1), che abbiamo denotato  $D_t u$ , è nel  $n$ -piano tangente  $\Pi$  di  $S$ , mentre il secondo, che abbiamo denotato  $d_t u$ , è ad esso ortogonale. Si noti la non-influenza su  $d_t u$  dell'orientamento di  $N$ , in base alla definizione della 2ª forma di  $S$ . Scriveremo  $(D_t u)^i$  per  $i$  contenuti delle ( ) nel 3° membro della (1), cioè  $D_t u = (D_t u)^i X_i$ . Si verifica che tali  $(D_t u)^i$  si trasformano come componenti controvarianti di un vettore a fronte della generica trasformazione localmente 1-diffeomorfa  $q \leftrightarrow q'$ <sup>26</sup>; e poiché le  $X_i$  si trasformano come componenti covarianti di un vettore nella stessa situazione, si ha che  $D_t u$  è invariante rispetto a quella trasformazione. Similmente invariante è il fattore di  $N$  in  $d_t u$ . Mutuando il linguaggio introdotto a proposito dei due vettori di curvatura (v. S.sez. 8.1.2), il vettore tangente  $D_t u$  [il vettore normale  $d_t u$ ] si dice **t-derivata geodetica** (o anche **assoluta**) **di**  $u$  [**t-derivata forzata di**  $u$ ] lungo  $L$ . Ovviamente,  $d_t u$  si dice poi **t-derivata totale di**  $u$  lungo  $L$ .

Se in particolare la curva  $L$  è la linea *coordinata* ( $q^k$ ) (con  $q^k$  come parametro) di  $S$ ,  $d_t q^j$  diventa  $\delta_k^j$ ,  $d_t u^i$  diventa  $\partial u^i / \partial q^k$ , e le  $(D_t u)^i$  si riconoscono immediatamente come le  $u^i_{/k}$  introdotte con le (3.3.2, 8bis), componenti miste di indici ( ${}^i_k$ ) del 2-tensore derivato di  $u$ . Similmente il fattore di  $N$  in  $d_t u$  diventa  $u^i h_{ik}$ , componente covariante di indice ( ${}_k$ ) del prodotto di  $u$  per il 2-tensore simmetrico  $h_{(2)}$ . Possiamo così riformulare la definizione di  $u^i_{/k}$  come componente ( ${}^i_k$ ), nella base

<sup>26</sup> La dimostrazione non presenta difficoltà. Per brevità, scriveremo  $\wp_i^{k'}$  per  $\partial q^{k'} / \partial q^i$  e  $\wp_i^k$  per  $\partial q^k / \partial q^i$ , e aboliremo il pedice  $t$  in  $d$  e  $D$ . Abbiamo così:  $(Du)^{k'} = du^{k'} + \Gamma_{i'j}^{k'} u^{i'} dq^{j'}$  e  $(Du)^k = du^k + \Gamma_{ij}^k u^i dq^j$ . Ora  $du^{k'} = \wp_k^{k'} du^k + \wp_k^s u^k dq^s$ , e  $\Gamma_{i'j}^{k'} u^{i'} dq^{j'} = \wp_k^{k'} (\Gamma_{ij}^k + \wp_i^{k'} \wp_j^{i'}) u^i dq^j$ . Sommando si trova  $du^{k'} + \Gamma_{i'j}^{k'} u^{i'} dq^{j'} = \wp_k^{k'} (du^k + \Gamma_{ij}^k u^i dq^j) + (\wp_i^{k'} + \wp_i^{k'} \wp_j^{k'} \wp_i^{i'} \wp_j^{j'}) u^i dq^j$ . Esprimendo le due derivate seconde che compaiono nell'ultima parentesi in termini dei Chr2 (come  $\wp_i^{k'} = \wp_s^k \Gamma_{ij}^s - \wp_i^{i'} \wp_j^{j'} \Gamma_{i'j}^{k'}$  e rispettivamente come  $\wp_i^{k'} \wp_j^{i'} = \wp_s^k \Gamma_{i's}^{i'} - \wp_i^{i'} \wp_j^{j'} \Gamma_{i'j}^k$ ) risulta che tale parentesi è nulla, e quindi che  $(Du)^{k'} = \wp_k^{k'} (Du)^k$ , qed.

$\{X_j\}$ , della t-derivata geodetica  $D_t u$  lungo la curva coordinata  $(q^k)$  (con parametro  $q^k$ ). Le  $u^i_{/k}$  si riducono alle derivate parziali standard  $\partial u^i/\partial q^k$  sse se tutti Chr2 sono nulli in  $q$  (cioè sse  $S$  ha metrica costante in un intorno del 1° ordine di  $X(q)$ ). Quanto sopra era ormai ben prevedibile.<sup>27</sup> Poiché  $(D_t u)^i$  è la componente controvariante (<sup>i</sup>) di  $D_t u$ ,  $g_{ih}(D_t u)^i$  (con  $g_{ih} = X_i \cdot X_h$ ) ne è la componente covariante (<sub>h</sub>),  $(D_t u)_h$ .  $(D_t u)_h$  può anche esprimersi come segue. Innanzitutto nella base  $\{X_i\}$  si ha  $(D_t u)^i = d_t(g^{ik} u_k) + u^k \Gamma_{kj}^i d_t q^j$ , e quindi, moltiplicando per  $g_{ih}$ , ed essendo  $g_{ih} d_t g^{ik} = -g^{ik} d_t g_{ih}$ ,  $(D_t u)_h = g_{ih}(D_t u)^i = d_t u_h - u^p d_t g_{ph} + u^p \Gamma_{phj} d_t q^j$ ; ma  $d_t g_{ph} = \partial g_{ph}/\partial q^j d_t q^j = (\Gamma_{phj} + \Gamma_{hpi}) d_t q^j$ , e così  $(D_t u)_h = d_t u_h - u_p \Gamma_{h^p j} d_t q^j = (\partial u_h/\partial q^j - u_p \Gamma_{h^p j}) d_t q^j \equiv u_{h/j} d_t q^j$ .

Se la derivata geodetica di  $u$  lungo  $L$  è nulla, diremo che  $u$  è **trasportato parallelamente** (o in breve, **traslato**) lungo  $L$ ; in tal caso  $d_t u$  (derivata totale di  $u$  lungo  $L$ ) si riduce alla sua parte forzata  $d_t u$ . Se dunque  $u$  è traslato lungo  $L$ , le sue componenti controvarianti soddisfano il SDO lineare omogeneo in forma normale

$$(2) \quad d_t u^i = -\Gamma_{kj}^i u^k d_t q^j,$$

mentre le sue componenti covarianti soddisfano il simile SDO

$$(2bis) \quad d_t u_h = \Gamma_{h^k j} u_k d_t q^j.$$

Qui i Chr2  $\Gamma_{kj}^i$  dipendono da  $t$  attraverso le  $q(t)$ . Il SDO (2) [Il SDO (2bis)] definisce univocamente le  $u^i$  [le  $u_h$ ] intorno ad un punto iniziale  $\underline{q}$ , dove esse si suppongono assegnate. Se in particolare riferiamo la (1) ad una curva geodetica  $\gamma$  (invece che alla generica  $L$ ) con parametro generico (invece che  $t$ ) e al suo versore tangente  $\lambda$  (invece che al generico  $u$ ), vediamo subito che  $\lambda$  è traslato lungo  $\gamma$  secondo le  $\lambda^i \lambda^j_{/i} = 0$ , o equivalentemente secondo le  $\lambda^i \lambda_{/i}^j = 0$ . Questo fatto è noto come **proprietà di autoparallelismo** delle geodetiche.

Siano ora  $u$  e  $v$  due vettori di CdC 1 di  $S$  dati lungo  $L$  al solito modo, e calcoliamo la  $d_t$  lungo  $L$  del loro prodotto scalare  $u^i v_i$ , o  $u \cdot v$ , nel piano tangente  $\Pi$ . Questo prodotto è un invariante, e applicando la regola di Leibniz alla sua  $d_t$  si ha  $d_t(u \cdot v) = u \cdot d_t v + d_t u \cdot v \equiv u \cdot D_t v + D_t u \cdot v$  (perché  $u$  e  $v$  sono per ipotesi in  $\Pi$ ). Se in particolare  $u$  e  $v$  sono entrambi traslati lungo  $L$ , il loro prodotto scalare è costante in un intorno del punto iniziale ove venga assegnato; e più in particolare, ciò vale per il modulo di  $u$  se  $u$  è traslato lungo  $L$ . Una conseguenza diretta di questi risultati è che si mantiene (localmente) costante lungo  $L$  anche l'angolo che  $u$  e  $v$  fanno tra loro se essi sono entrambi traslati lungo  $L$ . Se poi  $L$  è una geodetica  $\gamma$ , e  $v$  è traslato lungo di essa, si mantiene (localmente) costante lungo  $\gamma$  l'angolo che  $v$  fa con  $\gamma$ .

<sup>27</sup> L'alternativa riemanniana (vedi la prossima Sez. 8.2), nella quale non occorre immergere  $S$  in  $E_{n+1}$  e nemmeno in  $E_{m>n}$  (per un conveniente  $m$ ), consiste invece nel *definire*  $u^i_{/k}$  come  $\partial u_i/\partial q^k + u^j \Gamma_{jk}^i$ , per le date  $u^i(q)$ , e avendo assegnato una volta per tutte i Chr2 come funzioni di CdC 1 di  $q$  sotto le leggi di trasformazione (3.3.2, 16<sub>2</sub>). (In forza delle (3.3.2, 12ter), allo stesso fine sarebbe anche sufficiente, ma non necessario, assegnare la metrica  $g_{ik} = g_{ik}(q)$ , di CdC 2.)

Limitandoci per il momento al caso-base della superficie immersa in  $E_3$ , riferiamola a coordinate semigeodetiche  $\{\xi, \eta\}$  (non necessariamente speciali), per le quali sappiamo essere  $g_{\xi\xi} = 1$ ,  $g_{\xi\eta} = 0$  in un intorno del punto di riferimento, e diciamo  $O$  l'origine di coordinate  $\xi = \eta = 0$ . Poiché le curve coordinate sono orientate, converremo che le rotazioni, in  $S$ , siano positive nel senso che va dalla curva orientata  $(\xi)$  alla  $(\eta)$ . Sia  $C$  (corsivo) un *circuito* regolare semplice, orientato congruentemente a  $(\xi) \rightarrow (\eta)$ , abbastanza piccolo (con questa espressione si intende qui "non troppo grande"), contenente  $O$  e parametrizzato con un parametro  $t \in [0, 1)$ . Sia poi  $\underline{X}$  il suo punto iniziale  $X(t=0)$  (quindi  $X(t \rightarrow 1^-) = \underline{X}$ ). Consideriamo un *versore*  $\Omega$  *traslato lungo*  $C$  e definito dal suo valore iniziale ( $\equiv$  per  $t = 0$ ), che sceglieremo (ad es.) uguale al versore coordinato  $X_\xi(\underline{X})$ . Il prodotto scalare  $\Omega \cdot X_\xi$  è a questo punto una ben definita funzione di  $t$  che vale 1 per  $t = 0$ ; la sua  $t$ -derivata è  $d_t \Omega \cdot X_\xi + \Omega \cdot d_t X_\xi \equiv \Omega \cdot d_t X_\xi \equiv \Omega \cdot D_t X_\xi$ , perché per definizione  $d_t \Omega$  è forzato e  $\Omega$  è tangenziale. Le componenti di  $X_\xi$  sono 1 (quella di indice  $(\xi)$ ) e 0 (quella di indice  $(\eta)$ ). Il SDO (2) si riduce così a  $D_t X_\xi = \Gamma_{\xi}^j d_t q^j X_j$ , dove gli indici  $(i, j)$  corrono su  $(\xi, \eta)$ . Ma nel sistema semigeodetico è  $\Gamma_{\xi}^{\xi} = \Gamma_{\xi}^{\eta} = \Gamma_{\xi}^{\xi} = 0$ , e resta il solo contributo di  $\Gamma_{\xi}^{\eta} = G_{\xi}/(2G)$ , cfr. la (8.1.2, 2<sub>2</sub>), ossia  $D_t X_\xi = G_{\xi}/(2G) d_t \eta X_\eta$ . Si può così calcolare la  $d_t$  dell'angolo  $\omega$  da  $X_\xi$  a  $\Omega$ , positivo nel verso  $(\xi) \rightarrow (\eta)$ , mediante la  $d_t \cos \omega = \Omega \cdot D_t X_\xi = G_{\xi}/(2G) d_t \eta \Omega \cdot X_\eta$ . Con gli orientamenti convenuti,  $\Omega \cdot X_\eta = \sin \omega \sqrt{G}$ ; e in definitiva  $\sin \omega d_t \omega = \sin \omega \mathcal{F} d_t \eta$ , dove per brevità si è posto  $\mathcal{F} =: -G_{\xi}/(2\sqrt{G})$ . Questa si semplifica in

$$(3) \quad d_t \omega = \mathcal{F} d_t \eta$$

lungo *tutto*  $C$ , perché i punti ove  $\sin \omega = 0$  (ve ne è almeno uno oltre a  $\underline{X}$ ) si possono ignorare per l'assunta continuità di  $d_t \omega$  e di  $\mathcal{F}$ . La (3) va ora integrata lungo  $C$ . Il 1° membro dà la variazione di  $\omega$  dal suo valore iniziale 0 sino alla fine del percorso lungo  $C$ , che denoteremo  $[\omega]_C$ . Per similmente integrare lungo  $C$  il 2° membro, occorre tenere presente che la funzione  $\mathcal{F}$  dipende sia da  $\xi$  che da  $\eta$ , ed ha almeno due valori distinti (perché  $C$  è un circuito) per lo stesso  $\eta$ . In altre parole, l'integrale del 2° membro della (3) lungo  $C$  va scritto come  $\int_{\mathcal{A}} \partial \mathcal{F} / \partial \xi d\xi d\eta$  (formula di Green), dove  $\mathcal{A}$  è la porzione del piano  $(\xi, \eta)$  racchiusa dall'antimmagine  $X^{-1}(C)$  di  $C$ . Questa si può ancora modificare osservando che l'elemento di area di  $S$ ,  $dS$ , è  $d\xi d\eta \sqrt{G}$ . Denotando con  $[S]_C$  la regione di  $S$  racchiusa da  $C$ , abbiamo dunque

$$(3bis) \quad [\omega]_C = \int_{[S]_C} \partial_{\xi} \mathcal{F} \sqrt{G} dS.$$

L'integranda  $\partial \mathcal{F} / \partial \xi \sqrt{G}$  è uguale a  $-G_{\xi\xi}/(2G) + G_{\xi}^2/(4G^2)$ ; cioè, per la (8.1.2, 3), alla curvatura gaussiana  $K$ . La (3bis) assume con ciò la semplice forma

$$(3ter) \quad [\omega]_C = \int_{[S]_C} K dS,$$

l'importanza del cui significato geometrico è veramente difficile da sottovalutare. Essa mostra che la variazione  $[\omega]_C$  non dipende dalle particolari modalità con cui è stata qui calcolata, e può quindi dirsi a ragione **angolo di parallelismo del circuito C**.<sup>28</sup> Se in particolare la regione  $[S]_C$  è piana,  $K$  è ivi nulla, e si ritrova il trasporto parallelo standard, per il quale è  $[\omega]_C \equiv 0$  per qualsiasi  $C$ . Se infine  $C$  collassa in un punto  $X$  di  $S$ , il rapporto  $[\omega]_C/[S]_C$  tende al valore di  $K$  in quel punto, ciò che esprimeremo con la

$$(3\text{quater}) \lim_{C \rightarrow X}([\omega]_C/[S]_C) = K(X).$$

La (3ter), o la sua forma puntuale (3quater), riassumono la tesi del famoso **teorema di Levi-Civita** per le superfici (1917).<sup>29</sup>

La (3quater) può anche giustificarsi con un ragionamento asintotico diretto che vale la pena ricordare. Innanzitutto si dimostra che in  $S$  esistono “quasi-parallelogrammi” infinitesimi non degeneri ( $\equiv$  con area positiva), nel senso che segue. Siano  $dX$  e  $\delta X$  due archi infinitesimi (cioè  $O(\varepsilon)$ ) distinti spiccati da  $X \in S$ , e si trasli  $\delta X$  lungo  $dX$ . In virtù delle (2), la variazione delle componenti  $\delta q^i$  di  $\delta X$  per questa traslazione è data dalle  $d\delta q^i + \Gamma_{jh}^i \delta q^j dq^h$ . Scambiando  $\delta$  con  $d$  e sottraendo, si trova così, in virtù della simmetria dei Chr2 rispetto agli indici inferiori,

$$(4) \quad d\delta q^i - \delta dq^i = -\Gamma_{jh}^i \delta q^j dq^h + \Gamma_{jh}^i dq^j \delta q^h + o(d\delta) \equiv o(\varepsilon^2).$$

Supponendo per semplicità che  $X$  abbia coordinate  $q^i = 0$ , il punto cui si giunge con la prima traslazione ha coordinate  $\delta q^i + dq^i + d\delta q^i$ , e quello cui si giunge con la seconda traslazione coordinate  $dq^i + \delta q^i + \delta dq^i$ . Quindi i due punti *coincidono* a meno di termini  $o(\varepsilon^2)$ , e in tal senso abbiamo un circuito infinitesimo “chiuso” a meno di  $o(\varepsilon^2)$ , formato da quattro lati alternativamente paralleli l'uno all'altro, o “(quasi)-parallelogramma infinitesimo”. Dimostriamo ora la (3quater) quando  $C$  è un tale parallelogramma infinitesimo di vertici  $X$ ,  $Y = X + dX$ ,  $Z = X + \delta X$  e  $W$  (opposto a  $X$ ), percorso ad es. nel senso  $X \rightarrow Y \rightarrow W \rightarrow Z \rightarrow X$ . Il generico vettore  $u$ , traslato lungo tale parallelogramma orientato, passa dal valore  $u$  in  $X$  a  $u + du$  in  $Y$ , e a  $u + du + \delta(u + du) = u + du +$

<sup>28</sup> La (3ter) prova anche che, se in  $S$  esistesse un *circuito geodetico* di classe  $C^1$ , l'integrale a suo 2° membro sarebbe nullo. Questo non sarebbe più vero, tuttavia, se mancasse la regolarità del circuito, cioè se esso fosse costituito da segmenti geodetici (e quindi fosse  $C^1$  a tratti), vedi oltre (“teorema del p-poligono geodetico”).

<sup>29</sup> T. Levi-Civita, Rend. Circ. Mat. di Palermo, XLII, 173-205. La nozione di trasporto parallelo di un vettore lungo una curva  $L$  di una superficie  $S$  (immersa in  $E_3$ ) si può anche introdurre in modo “sintetico” come segue. In ogni punto di  $L$  vi è un piano tangente, e l'involuppo di questa famiglia di piani, in  $E_3$ , forma la cosiddetta (superficie) **sviluppabile circoscritta a S lungo L**,  $S_L$  ( $L$  si dice **spigolo di regresso** della sviluppabile  $S_L$ ). Il trasporto parallelo di un vettore lungo lo spigolo di regresso di una sviluppabile si definisce poi *distendendo* tale sviluppabile su di un piano, trasportando l'immagine del vettore nel piano lungo l'immagine dello spigolo nel modo standard, e ritornando infine alla superficie originale mediante la trasformazione inversa alla distensione. La distensione della sviluppabile si ottiene ruotando dell'angolo opportuno e intorno alla direzione tangente allo spigolo di regresso i piani tangenti alla superficie. Il problema originale è così ricondotto a quello del trasporto parallelo lungo una curva di una sviluppabile. È importante osservare che il trasporto parallelo di un vettore da un punto ad un altro della superficie  $S$  dipende dalla curva  $L$  lungo la quale si effettua il trasporto, e che tale dipendenza viene meno se e solo se la superficie è sviluppabile lungo  $L$ . Naturalmente si può verificare che, tradotta in termini analitici, la precedente definizione coincide con quella riassunta nel SDO (2), in questo caso di 2 equazioni in 2 incognite.

+  $\delta u + \delta du$  in  $W$ ; e similmente, scambiando  $\delta$  con  $d$ , dal valore  $u$  in  $X$  a  $u + \delta u$  in  $Z$  e a  $u + \delta u + du + d\delta u$  in  $W$ . La variazione di  $u$  lungo tutto il percorso nel senso convenuto è dunque  $(\delta d - d\delta)u$ . Calcoliamo le corrispondenti variazioni delle sue componenti controvarianti mediante le (2). Abbiamo  $\delta du^i = -\delta \Gamma_{jk}^i u^j dq^k - \Gamma_{jk}^i \delta u^j dq^k - \Gamma_{jk}^i u^j \delta dq^k = -\partial \Gamma_{jk}^i / \partial q^h \delta q^h u^j dq^k + \Gamma_{jk}^i \Gamma_{rh}^j u^r \delta q^h dq^k - \Gamma_{jk}^i u^j \delta dq^k$ , dove nel secondo passaggio si sono ancora usate le (2) per eliminare le  $\delta u^j$ . Le  $\delta du^i$  si ottengono dalla precedente con il solito scambio di  $\delta$  con  $d$ . Sottraendo i due risultati e tenendo conto della (4), si trova finalmente (per la definizione del 4-tensore di curvatura):

$$(5) \quad (\delta d - d\delta)u^i = -\rho_{jkh}^i u^j dq^k \delta q^h + o(\varepsilon^2)$$

Si noti che, in forza dell'antisimmetria di  $\rho_{(4)}$  rispetto al 3° e 4° indice, il 2° membro della (5) è dispari rispetto allo scambio di  $\delta$  con  $d$ , come deve essere perché ciò corrisponde alla inversione del senso di percorrenza del parallelogramma. Convienne dividere e moltiplicare il 2° membro della (5) per  $|dX|$  e  $|\delta X|$  (le lunghezze di  $dX$  e  $\delta X$ ) introducendo così i loro versori, che hanno componenti controvarianti  $[d]^k =: dq^k/|dX|$  e  $[\delta]^h =: \delta q^h/|\delta X|$ . Denotando con  $\theta$  l'angolo da  $dX$  a  $\delta X$ , positivo nel verso di rotazione del percorso, l'area (con segno) del parallelogramma è  $dA =: |dX||\delta X|\sin\theta$ <sup>30</sup> e la (5) può risciversi come

$$(6) \quad (\delta d - d\delta)u^i = -\rho_{jkh}^i [d]^j [\delta]^h dA / \sin\theta + o(\varepsilon^2)$$

dove  $dA/\sin\theta > 0$  per definizione. Per calcolare l'angolo di parallelismo (infinitesimo)  $\omega$  del parallelogramma possiamo usare la (6) con (ad esempio)  $[d]$  in luogo di  $u$  e moltiplicarla scalarmente per  $[\delta]$ , sapendo che  $([d] + (\delta d - d\delta)[d]) \cdot [\delta] = \cos(\theta + \omega) + o(\varepsilon^2)$ . Ma  $\cos(\theta + \omega) \approx \cos\theta - \omega \sin\theta$  al più basso ordine in  $\omega$ , e quindi

$$(7) \quad -\omega \sin\theta = -\rho_{jikh} [d]^j [d]^k [\delta]^h [\delta]^i dA / \sin\theta + o(\varepsilon^2).$$

La (7) ci dice che, come previsto,  $\omega$  è  $O(\varepsilon^2)$ . Sappiamo che in due dimensioni è  $\rho_{jikh} = K(g_{jk}g_{ih} - g_{jh}g_{ik})$ , e concludiamo così che, a meno di  $o(\varepsilon^2)$ ,

$$(8) \quad \omega = K(g_{jk}g_{ih} - g_{jh}g_{ik}) [d]^j [d]^k [\delta]^h [\delta]^i dA / \sin^2\theta = K(1 - \cos^2\theta) dA / \sin^2\theta = K dA.$$

Passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  nella (8) otteniamo la (3quater), avendo ormai scritto  $dA$  come  $dA$ , qed. Dal parallelogramma infinitesimo, in cui vale la (8) a meno di  $o(\varepsilon^2)$ , si può infine passare ad un circuito arbitrario di  $S$  (ragionevolmente piccolo, ma non infinitesimo) con la nota procedura che si usa (di solito, ma non di necessità, semi-intuitivamente) per dimostrare il teorema di Stokes classico: in cui cioè i contributi dovuti a lati di (mini)parallelogrammi adiacenti si elidono, e si resta con il contributo del contorno. Si ritrova così anche la (3ter).

Nulla vieta che il circuito  $C$  del teorema di Levi-Civita abbia dei punti angolosi, punti che il versore  $\Omega$  traslato lungo  $C$  attraversa "per continuità". Supponiamo dunque che  $C$  sia il perimetro  $\mathcal{T}$

<sup>30</sup> Abbiamo qui usato il simbolo arial  $d$  per evitare  $d$  e  $\delta$ , che hanno altri significati.

di un triangolo “geodetico” (cioè avente per lati tre segmenti geodetici) ragionevolmente piccolo, con vertici in A, B, e C e corrispondenti angoli opposti  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Per l'autoparallelismo delle geodetiche, mentre percorre  $\mathcal{T}$  (ad es. in senso sinistrorso, partendo subito dopo A) il versore tangente  $\tau$  ruota discontinuamente di  $\pi - \beta$  in B, di  $\pi - \gamma$  in C e infine di  $\pi - \alpha$  in A; quindi si ripresenta al punto di partenza avendo ruotato di  $3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ , ovvero di  $\pi - (\alpha + \beta + \gamma) \bmod(2\pi)$ . Questa è dunque la rotazione del versore  $\tau$  (non continuo!) lungo  $\mathcal{T}$ . D'altra parte il generico versore  $\Omega$ , traslato parallelamente lungo i lati geodetici e *continuo attraverso i vertici*, subisce la rotazione  $\int_{[\mathcal{S}]\mathcal{T}} \mathbf{K} dS$  secondo il teorema di Levi-Civita. L'angolo di cui ruota  $\Omega$  rispetto a  $\tau$  è nullo lungo i lati di  $\mathcal{T}$ , e si riduce quindi a quello di  $\tau$  cambiato di segno, o  $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ . In conclusione

$$(9) \quad (\alpha + \beta + \gamma) - \pi = \int_{[\mathcal{S}]\mathcal{T}} \mathbf{K} dS.$$

Questa è la tesi del **teorema (di Gauss) del triangolo geodetico** (1828), almeno altrettanto famoso di quello di Levi-Civita, e qui dimostrato (ovviamente come non era necessario) sulla base di quest'ultimo. Se in particolare la superficie  $S$  è una sfera di raggio  $R$ , si trova che l'area di  $\mathcal{T}$  è uguale a  $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2$ , un asserto ben noto della geometria sferica.<sup>31</sup> Se poi il triangolo non è geodetico, (si verifica facilmente che) all'integrale nella (9) si deve aggiungere l'integrale lungo  $\mathcal{T}$  della componente *tangenziale* (con segno) del vettore di curvatura geodetica  $\omega_g$ . Infine il caso del triangolo geodetico si estende subito a quello di un generico poligono geodetico a  $p$  lati di  $S$ : basta sostituire a  $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ , nella (9), la somma  $\sum_{i=1}^p \alpha_i - p^* \pi$ , dove  $p^*$  è uguale a 0 o a 1 a seconda che  $p$  sia pari o dispari.

Torniamo ancora alla (1) prima di concludere questa sottosezione. È chiaro che il campo vettoriale che abbiamo ivi denotato come  $u$  va pensato come la  $(n+1)$ -pla ordinata – o se si preferisce la  $(1 \times (n+1))$ -matrice) delle sue componenti cartesiane ortogonali in  $E_{n+1}$ , vincolate dalla condizione lineare di tangenza a  $S$   $u \cdot N = 0$ . Questo induce a generalizzare la stessa (1) sostituendo a  $u$  un generico campo  $\kappa$ -tensoriale superficiale  $\tau_{(\kappa)}$ , da pensare come  $(\kappa \times (n+1))$ -matrice delle sue componenti cartesiane ortogonali in  $E_{n+1}$  sotto il vincolo della tangenza a  $S$ , allo scopo di similmente decomporre  $d_t \tau_{(\kappa)}$  lungo  $L$  in un componente tangenziale  $D_t \tau_{(\kappa)}$  (derivata geodetica) e in un componente normale  $d_t \tau_{(\kappa)}$  (derivata forzata). Questo programma è facilmente realizzabile, ed è lasciato al lettore come esercizio. Ad esempio per un campo 2-tensoriale  $\tau_{(2)}$  si trova:

$$(10) \quad D_t \tau_{(2)} = [d_t \tau^{ik} + (\tau^{rk} \Gamma_{rj}^i + \tau^{ir} \Gamma_{rj}^k) d_t q^j] X_i X_k,$$

(derivata geodetica), e

$$(11) \quad d_t \tau_{(2)} = \tau^{ik} (h_{ij} N X_k + h_{kj} X_i N) d_t q^j,$$

<sup>31</sup> Nel caso di un *ottante* di sfera, i tre angoli del triangolo geodetico valgono  $\pi/2$ , e dunque l'area dell'ottante è  $(3/2 - 1)\pi R^2$ ; quindi l'area dell'intera sfera è 8 volte questa,  $4\pi R^2$ .

(derivata forzata).

Una parte delle definizioni e degli sviluppi illustrati con riferimento al campo vettoriale  $u$  si potranno così similmente estendere al campo  $\tau_{(2)}$  (e in generale al campo  $\tau_{(k)}$ ): ad esempio,  $\tau_{(2)}$  si dirà “trasportato per parallelismo” lungo  $L$  se il contenuto delle [ ] nella (10) si mantiene nullo lungo  $L$ , cioè se le componenti controvarianti  $\tau^{ik}$  di  $\tau_{(2)}$  nella base  $\{X_1, \dots, X_n\}$  soddisfano al SDO

$$(12) \quad d_t \tau^{ik} = -(\tau^{rk} \Gamma_{rj}^i + \tau^{ir} \Gamma_{rj}^k) d_t q^j,$$

che generalizza il SDO (2). Si verifica subito, infine, che se  $\tau_{(2)}$  è il prodotto ordinato di due vettori tangenti  $u$  e  $v$  (cioè se  $\tau^{ik} = u^i v^k$ ), la sua derivata geodetica  $D_t(uv)$  soddisfa la regola di Leibniz:  $D_t(uv) = u D_t v + D_t u v$  (o se si preferisce  $(D_t(uv))^{ik} = u^i (D_t v)^k + (D_t u)^i v^k$ ), e che lo stesso vale per la derivata forzata,  $d_t(uv) = u d_t v + d_t u v$ .

#### 8.1.4) 2-SUPERFICI IMMERSE IN UNO SPAZIO MINKOWSKIANO 3-DIM

In questa ultima breve sottosezione rimuoveremo l'ipotesi fin qui osservata che lo spazio sommergente la 2-superficie  $S$  considerata sia  $E_3$ , sostituendola con quella che tale spazio sia  $E_{3,2}$ , pseudoeuclideo 3-dim di indice 2, o spazio di Minkowski 3-dim; e naturalmente, che la metrica di  $S$  sia quella indotta da  $E_{3,2}$  stesso. Come è prevedibile, ciò ci allontanerà dalla possibilità di riconoscere in modo *intuitivo* alcuni aspetti importanti della teoria. Il lettore comprenderà agevolmente, alla fine, che l'intero programma svolto si può generalizzare con adattamenti abbastanza ovvi al caso di una  $n$ -superficie immersa nello spazio minkowskiano  $E_{n+1,n}$ ; in particolare, per  $n = 1$ , al caso di una curva del piano minkowskiano  $E_{2,1}$ .

Per definizione, la metrica p.ortonormale ( $\equiv$  pseudortonormale, pON) di  $E_{3,2}$  è al solito  $G_{\mu\nu} =: \delta_{\mu\nu} \varepsilon_\nu$  con  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  e  $\varepsilon_3 = -1$ . Scrivendo  $X \equiv \{^1X, ^2X, ^3X\}$  per il generico vettore di  $E_{3,2}$  (quindi usando ancora indici sinistri per le componenti), la forma quadratica  $G_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$  (somma da 1 a 3 sugli indici greci ripetuti) è uguale a  $(^1X)^2 + (^2X)^2 - (^3X)^2$ , e quindi (cfr. S.sez. 2.3.1) può essere  $> 0$  ( $X$  p.reale), oppure  $< 0$  ( $X$  p.immaginario) oppure  $= 0$  ( $X$  isotropo). Come sappiamo, in  $E_{3,2}$  esistono piani euclidei (o p.reali, abbracciati da due vettori p.reali linearmente indipendenti). Una superficie  $S$  immersa in  $E_{3,2}$  è data come  $X = X(q)$ ,  $q \equiv \{q^1, q^2\} \in U$  (aperto di  $\mathbb{R}^2$ ), per il momento di CdC 1, sotto la solita condizione che la matrice jacobiana  $\partial(X)/\partial(q)$  abbia rango massimale in  $U$ . Per una tale superficie  $S$ , si supponga che in un suo punto-base  $A$  il piano tangente  $\Pi$  sia p.reale. Per definizione, questo piano è abbracciato dai vettori p.reali linearmente indipendenti  $X_1$  e  $X_2$  (qui il pedice destro (i) continua a significare  $\partial/\partial q^i$ ), e perciò un minore non degenero della  $\partial(X)/\partial(q)$  è

quello formato con le sue righe ( ${}^1X_1 \ {}^2X_1$ ) e ( ${}^1X_2 \ {}^2X_2$ ). È allora facile dimostrare che la metrica indotta da  $E_{3,2}$  su  $S$  in  $A$ ,  $g_{ij} = G_{\mu\nu} {}^\mu X_i {}^\nu X_j$  (con  $i, j = 1, 2$ ), è definita positiva. Scegliendo per semplicità il riferimento di  $E_{3,2}$  in modo che  $X_1$  e  $X_2$  *non* abbiano componente  $({}^3)$ , il calcolo di  $g =: \det\{g_{ij}\}$  dà <sup>32</sup>  $g = ({}^1X_1 {}^2X_2 - {}^2X_1 {}^1X_2)^2 > 0$ . D'altra parte  $g_{22}$  (ad es.), cioè  $G_{\mu\nu} {}^\mu X_2 {}^\nu X_2$ , è per ipotesi  $> 0$ , e la tesi è provata. Nelle stesse condizioni il versore p.normale  $N$  ha la sola componente  $({}^3)$  non nulla, proporzionale a  ${}^1X_1 {}^2X_2 - {}^2X_1 {}^1X_2$ ; dividendola per il modulo di questo numero, si passa a  ${}^3N = 1$  aut  ${}^3N = -1$ , e quindi  $G_{\mu\nu} {}^\mu N {}^\nu N = -({}^3N)^2 = -1$ :  $N$  è p.immaginario. Queste conclusioni valgono in  $A$ , e per continuità in un suo intorno.

Per brevità, nel seguito converrà usare per la forma bilineare minkowskiana  $G_{\mu\nu} {}^\mu X {}^\nu Y$  (per dati vettori  $X, Y$ ) la notazione  $X * Y$ . Se definiamo ancora i coefficienti  $h_{ij}$  di una “2<sup>a</sup> forma fondamentale” come  $N * X_{ij}$ , in conseguenza delle simmetrie di Gauss ritroviamo le (8.1.1, 9bis), mentre le (8.1.1, 11bis) (avendo presupposto la  $X = X(q)$  di CdC 2), si alterano per la presenza di un segno  $-$  (anziché  $+$ ) davanti alle  $h_{ij}$ . Per miglior convenienza del lettore, trascriviamo qui appresso, nell'ordine, queste equazioni:

$$(1) \quad N_j = -h_j^k X_k,$$

$$(2) \quad X_{ij} = \Gamma_i^k X_k - h_{ij} N,$$

Ovviamente, nella (2) i  $\text{Chr}2$  si intendono espressi al solito modo mediante i coefficienti della metrica e le loro derivate prime. Poiché le (1) sono le (8.1.1, 9bis), e le (2) sono le (8.1.1, 11bis) con il segno invertito dinnanzi alle  $h_{ij}$ , è facile concludere che, avendo ormai presupposto la  $X = X(q)$  di CdC 3, le simmetrie di Gauss danno luogo alle

$$(3) \quad h_{ij} h_k^s - h_{kj} h_i^s = -\rho_j^s{}_{ik},$$

ovvero alle (8.1.1, 14) con segno del 2° membro invertito; e quindi,  $h =: \det\{h_{ij}\} = -\rho_{1212}$ . Se continuiamo a definire una curvatura gaussiana (qualcuno la chiama **pseudocurvatura** o **curvatura formale**) come  $K^* =: \rho_{1212}/g$ , concludiamo che nella nuova situazione è

$$(4) \quad K^* = -h/g.$$

Questo calcolo è riferito ad una generica superficie di CdC 3 immersa in  $E_{3,2}$  avente piano tangente p.reale in un suo punto  $\underline{X}$  (e quindi in un intorno di questo). Un importante esempio concreto di superficie di questo tipo è quello della sfera p.immaginaria

$$(5) \quad X * X = -C^2,$$

<sup>32</sup> Infatti,  $g = ({}^1X_1 {}^1X_1 + {}^2X_1 {}^2X_1)({}^1X_2 {}^1X_2 + {}^2X_2 {}^2X_2) - [({}^1X_1 {}^1X_2)^2 + ({}^2X_1 {}^2X_2)^2 + 2{}^1X_1 {}^1X_2 {}^2X_1 {}^2X_2] = ({}^1X_1 {}^2X_2 - {}^2X_1 {}^1X_2)^2 > 0$ . Il fatto che il 2° membro sia un quadrato perfetto, e quindi  $\geq 0$ , è una espressione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.



con  $C = \text{cost} > 0$  <sup>33</sup> Scrivendo per brevità  $\{x,y,z\}$  per  $\{^1X, ^2X, ^3X\}$ , la (5) diventa  $x^2 + y^2 - z^2 = -C^2$ . Se pensiamo allo spazio  $(x,y,z)$  come allo spazio euclideo standard, questa equazione rappresenta un iperboloide a due falde, superficie assisimmetrica generata per rotazione di una iperbole equilatera attorno all'asse passante per i due fuochi di questa, nel nostro caso l'asse  $(z)$ . Posto  $\rho^2 =: x^2 + y^2$ , l'equazione del meridiano dell'iperboloide è  $\rho = \sqrt{(z^2 - C^2)}$ , tangente per  $|z| \rightarrow \infty$  ai due (semi)asintoti, tra loro ortogonali,  $\rho = |z|$ . La costante  $C$  è la comune distanza dall'origine degli apsi dell'iperboloide.

Tornando alla sfera p.immaginaria, proviamo ora che il piano tangente  $dX = \{dx, dy, dz\}$  è p.reale per  $|z| < \infty$ , cioè che è ivi  $dx^2 + dy^2 - dz^2 > 0$ . Differenziando la (5) abbiamo

$$(6) \quad X * dX = 0,$$

ovvero

$$(6\text{bis}) \quad xdx + ydy - zdz = 0:$$

$X$  e  $dX$  sono cioè p.ortogonali. Quadrando la (6bis) abbiamo  $z^2 dz^2 = (xdx + ydy)^2 \leq \rho^2(dx^2 + dy^2) = (z^2 - C^2)(dx^2 + dy^2) < z^2(dx^2 + dy^2)$  se  $|z| < \infty$  (la  $\leq$  esprime la disuguaglianza di Schwarz). Essendo  $|z| \geq C > 0$ , risulta così  $0 < (dx^2 + dy^2 - dz^2)$ , qed. La (6) dice anche che il versore p.normale  $N$  è parallelo a  $X$ , ovvero  $N = \pm X/C$ ; allora  $N * N = X * X / C^2 = -C^2 / C^2 = -1$ ;  $N$  è unitario p.immaginario, come deve essere.

Possiamo anche calcolare la 2<sup>a</sup> forma fondamentale  $h_{ij}$  della sfera p.immaginaria. Usando il segno (+) nella precedente determinazione di  $N$ , in forza della (1) abbiamo  $X_i = CN_i = -Ch_i^k X_k$ . Dalla indipendenza lineare delle  $X_1, X_2$  segue  $h_i^k = -\delta_i^k / C$ , e  $h_{ij} = h_i^k g_{kj} = -\delta_i^k g_{kj} / C = -g_{ij} / C$ , e quindi  $h = g / C^2$ . <sup>34</sup> Combinando questa con la (4), troviamo infine, per la relativa p.curvatura gaussiana,

$$(7) \quad K^* = -1/C^2.$$

La superficie considerata, immersa in  $E_{3,2}$  e con la metrica indotta, ha dunque p.curvatura  $K^*$  costante e negativa pari a  $-1/C^2$ ; e per questa ragione è talvolta detta **pseudosfera** (di raggio  $C$ ) anziché “sfera pseudoimmaginaria”. Essa non è tuttavia da confondere con la pseudosfera di Beltrami, che è una superficie assisimmetrica a curvatura  $K$  costante negativa immersa in  $E_3$ , con la metrica indotta. Rileviamo infine che l'iperboloide a due falde più sopra considerato avrebbe curvatura  $K$  *positiva* se la sua metrica fosse quella indotta da  $E_3$  (come tutte le superfici di rotazione a meridiani convessi verso l'asse), pari a  $1/C^2$ .

<sup>33</sup>  $C$  potrebbe essere supposta soltanto  $\neq 0$ , con alcuni banali aggiustamenti in quanto segue.

<sup>34</sup> Con la scelta opposta di  $N$  avremmo ottenuto  $h_{ij} = g_{ij} / C$ , in accordo con la disparità di  $h_{(2)}$  rispetto a  $N$ , ma ovviamente ancora  $h = g / C^2$ .

## 8.2 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE II

Assieme ai nuovi concetti e sviluppi, in questa seconda sezione del capitolo prosegue la parziale rivisitazione di questioni già note. Ciò avverrà attraverso due generalizzazioni della geometria differenziale delle varietà immerse in uno spazio generalmente pseudoeuclideo. La prima generalizzazione è quella (della geometria) delle varietà riemanniane, mentre la seconda – a sua volta una generalizzazione della prima – è quella (della geometria) delle varietà a connessione affine. Entrambe queste geometrie presentano analogie assai strette con quella delle varietà immerse. Ciò che invece è diverso, come si vedrà, è ancora il percorso logico che, partendo da altre premesse, conduce alle stesse conclusioni.

### 8.2.1) GEOMETRIA DELLE VARIETÀ ELEMENTARI PSEUDORIEMANNIANE

Per cominciare, rimarchiamo che le  $(n \geq 1)$ -superfici  ${}_nS$  di cui alle S.sezz. (8.1.1 ÷ 8.1.3) sono per ipotesi immerse nello spazio euclideo  $E_{n+1}$ , e le  $n$ -superfici di cui alla S.sez. 8.1.4 lo sono nello spazio pseudoeuclideo  $E_{n+1,n}$ . In entrambi i casi abbiamo cioè a che fare con  $(r \geq 1)$ -immersioni  $\iota$  di un aperto connesso  $V$  di  $R^n$  in uno spazio euclideo o rispettivamente pseudoeuclideo  $(n+1)$ -dim, il quale induce sulla immagine  $\iota(V)$  la sua metrica pitagorica o pseudopitagorica. Una idea più flessibile è quella di considerare una  $\langle r \geq 1, n \geq 1 \rangle$ -varietà  ${}^rM^n$  come un insieme astratto equipotente a  $R^n$  (o ad un suo aperto connesso), e quindi dotato di carte “globali” ( $\equiv$  aventi l'intero supporto  $\mathcal{M}$  di  $M$  come dominio)  $r$ -compatibili. Non siamo ancora, con ciò, alla definizione generale di  $\langle r, n \rangle$ -varietà data nella S.sez. 4.1.1 (non necessariamente dotata di carte globali), ma soltanto a quella di una  $\langle r, n \rangle$ -varietà elementare (v. ancora S.sez. 4.1.1). In questo caso il ruolo di  $\mathcal{M}$  come “ponte di biunivocità” tra carte globali di domini  $U = U' = \mathcal{M}$  può essere ignorato, e la teoria può inquadrarsi nell'analisi degli  $r$ -diffeomorfismi globali tra aperti connessi di  $R^n$ .

Se ci si limita ad una varietà elementare, la relazione tra le sue  $n$  coordinate in due diverse carte, diciamo

$$(1) \quad x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle \leftrightarrow x' \equiv \langle x'^1, \dots, x'^n \rangle,$$

con  $x \in V =: \lambda(U)$ ,  $x' \in V' =: \lambda'(U'=U) = \lambda' \circ \lambda^{-1}(V)$  e  $V =: \lambda \circ \lambda'^{-1}(V')$ , con  $V$ , e quindi  $V'$ , aperti connessi di  $R^n$ , è ormai globalmente (e non soltanto localmente, come nella teoria di Gauss)  $r$ -diffeomorfa. La biunivocità e la CdC  $r \geq 1$  assunte nella (1) implicano quindi che

$$(2_1) \quad \det\{\partial(x')/\partial(x)\} \neq 0,$$

$$(2_2) \quad \det\{\partial(x)/\partial(x')\} (\equiv [\det\{\partial(x')/\partial(x)\}]^{-1}) \neq 0$$

in  $V$ , e rispettivamente in  $V'$ .

La situazione consente innanzitutto di istituire un'algebra tensoriale, *punto per punto* della varietà elementare  ${}^rM^n \equiv M$  considerata, nel senso che è stato illustrato nella S.sez. 4.3.1. Vale a dire, un  $\langle a \geq 0, b \geq 0 \rangle$ -tensore, nel dato punto  $\underline{p} \in M$ , è un insieme di  $n^{a+b}$  reali  $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$  (con  $i_1, \dots, i_a, j_1, \dots, j_b = 1, \dots, n$ ) che sotto il passaggio dalle coordinate  $x$  alle coordinate  $x'$  si trasforma secondo l'usuale legge di  $a$ -cogredienza/ $b$ -controgradienza. Se poi  $\underline{p} \equiv p$  si pensa come *corrente* in  $M$  – quindi  $x$  come corrente in  $V$  e  $x'$  come corrente in  $V'$  – i sopradetti  $n^{a+b}$  numeri diventano funzioni di conveniente CdC di  $x$  o di  $x'$ , il  $\langle a, b \rangle$ -tensore diventa un *campo*  $\langle a, b \rangle$ -tensoriale, e la legge di trasformazione diventa la (4.3.1, 6). Per manifeste ragioni di consistenza, la CdC di un generico campo tensoriale deve essere assunta  $\geq 0$  e  $\leq r$ .

Sebbene sia corretta e completa, la notazione adottata nella (4.3.1, 6) è troppo macchinosa, e conviene snellirla nella seguente forma compatta, ma sufficientemente inequivoca:

$$(3) \quad \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = \wp_{k_1}^{j_1} \dots \wp_{k_b}^{j_b} \tau_{h_1 \dots h_a}^{k_1 \dots k_b} \wp_{i_1}^{h_1} \dots \wp_{i_a}^{h_a} \quad . \quad ^1$$

Evidentemente, qui  $\wp_k^{j'}$  sta per  $\partial x^{j'}/\partial x^k$  (funzione di  $x$ ),  $\wp_{i'}^h$  sta per  $\partial x^h/\partial x^{i'}$  (funzione di  $x'$ ), le  $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$  (funzioni di  $x'$ ) sono le componenti di  $\tau_{\langle a, b \rangle}$  nella carta  $C'$ , e le  $\tau_{h_1 \dots h_a}^{k_1 \dots k_b}$  (funzioni di  $x$ ) quelle nella carta  $C$ . Le relazioni  $x \leftrightarrow p \leftrightarrow x'$  sono biunivoche attraverso l'elemento-ponte  $p$  (o anche direttamente come  $x \leftrightarrow x'$  in una varietà elementare) e tali che le  $x \leftrightarrow x'$  sono di CdC  $0 \leq h \leq r-1$  se  $ab > 0$  (perché gli jacobiani sono comunque di CdC  $r-1$ ), o  $0 \leq h \leq r$  se  $a = b = 0$ . Infine, la (3) vale identicamente in  $V [V']$  avendovi eliminato le  $x'$  [le  $x$ ] come  $x'(x)$  [come  $x(x')$ ].

Come abbiamo accennato nella S.sez. 4.3.1, possibili simmetrie/antisimmetrie di un dato campo  $\langle a, b \rangle$ -tensoriale rispetto a coppie di indici dello stesso tipo permangono attraverso i cambiamenti  $r$ -diffeomorfi di carta; ma lo stesso non vale, in generale, a fronte di variazioni della coordinata  $x$  nel suo dominio aperto-connesso  $V$ , perché si possono avere rotture o creazioni di simmetrie/antisimmetrie arbitrariamente regolari. Tali simmetrie/antisimmetrie vanno quindi introdotte *per definizione*, ad esempio dicendo che  $\tau_{ij} = \tau_{ij}(x)$  è un campo  $\langle 2, 0 \rangle$ -tensoriale simmetrico rispetto agli indici  $(i, j)$  nel dominio  $V$ . Vi sono tuttavia casi, e sono i più significativi, in cui la simmetria/antisimmetria del campo è intrinsecamente legata alla sua struttura: ad esempio, se  $\tau_{ijh}$  è un campo  $\langle 3, 0 \rangle$ -tensoriale arbitrario, il campo  $\langle 3, 0 \rangle$ -tensoriale  $\tau_{ijh} + \tau_{jih}$  è intrinsecamente simmetrico rispetto ai primi due indici. (Queste precauzioni o precisazioni diventano tuttavia superflue se ci si limita a considerare tensori (in un punto) piuttosto che campi tensoriali.)

---

<sup>1</sup> Come al solito, il lettore dovrà pensare le due righe di indici in  $\tau$  o in  $\wp$  come sovrapposte.

Esempi basilari di  $\langle 0,2 \rangle$ -tensori intrinsecamente simmetrici o antisimmetrici sono come è ovvio i componenti simmetrici o antisimmetrici dei bivettori. Siano  $u \equiv \langle u^1, \dots, u^n \rangle$  e  $v \equiv \langle v^1, \dots, v^n \rangle$   $\langle 0,1 \rangle$ -vettori arbitrari: il bivettore associato alla coppia *ordinata*  $\langle u,v \rangle$  è il  $\langle 0,2 \rangle$ -tensore  $uv$ , cioè il  $\langle 0,2 \rangle$ -tensore che ha componenti di indici (nell'ordine)  $(ij)$  uguali a  $u^i v^j$ . Il componente simmetrico [antisimmetrico] di  $u^i v^j$  è per definizione  $(u^i v^j + u^j v^i)/2 \equiv u^{(i} v^{j)}$  [ $(u^i v^j - u^j v^i)/2 \equiv u^{[i} v^{j]}$ ]. Il carattere di  $\langle 0,2 \rangle$ -tensore simmetrico [antisimmetrico] di questo oggetto, il **bivettore simmetrico** [**antisimmetrico**] **generato da**  $u, v$  [**da**  $u, v$  **nell'ordine**], è evidente. Si noterà che un bivettore simmetrico [antisimmetrico] corrisponde a una particolare 2-forma simmetrica [antisimmetrica]. Conviene aggiungere qualche commento sui bivettori antisimmetrici, o **antibivettori**. Le componenti di un antibivettore sono i minori del 2° ordine della matrice a 2 righe e  $n$  colonne  $u^1 \dots u^n$  e  $v^1 \dots v^n$ . Per definizione, due antibivettori  $u^{[i} v^{j]}$  e  $s^{[i} t^{j]}$  sono uguali se  $u = s$  e  $v = t$ . Ovviamente non è possibile risalire univocamente ai vettori che generano un antibivettore  $u^{[i} v^{j]}$ , ad esempio perché  $(u+v)^{[i} v^{j]} = u^{[i} v^{j]}$ ; tuttavia con le componenti  $u^{[i} v^{j]}$  possiamo univocamente definire le combinazioni lineari di  $u$  e  $v$ , o come comunemente si dice, il “piano” di  $u$  e  $v$ . Infatti, se  $w$  è una tale combinazione lineare, la matrice a 3 righe e  $n$  colonne  $u^1 \dots u^n, v^1 \dots v^n$  e  $w^1 \dots w^n$  deve avere rango  $< 3$ . Questo equivale a dire che

$$(4) \quad w^i u^{[j} v^{k]} + w^j u^{[k} v^{i]} + w^k u^{[i} v^{j]} = 0$$

$\forall (i,j,k) = 1, \dots, n$ .<sup>2</sup> Le (4) offrono una delle possibili espressioni della complanarità tra  $u, v$  e  $w$ . È infatti immediato verificare che, per arbitrari reali  $\alpha, \beta$ ,  $w = \alpha v + \beta u$  soddisfa le (4); e si può vedere che una tale  $w$  è anche la più generale soluzione delle (4) (avendovi supposto  $u$  e  $v$  linearmente indipendenti). Sottoponendo i generatori (linearmente indipendenti) di un antibivettore ad una trasformazione lineare non singolare, diciamo secondo  $s = \alpha u + \beta v$ ,  $t = \gamma u + \delta v$  con  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , si trova che  $s^{[i} t^{j]} = (\alpha\delta - \beta\gamma) u^{[i} v^{j]}$ , e dunque, alla luce della (4), gli antibivettori  $s^{[i} t^{j]}$  e  $u^{[i} v^{j]}$  determinano lo stesso piano. Questa relazione tra le coppie (generalmente non ordinate)  $\{u,v\}$  e  $\{s,t\}$ , cioè la  $\forall (i,j) \{s^{[i} t^{j]} = 0 \Leftrightarrow u^{[i} v^{j]} = 0\}$ , è chiaramente una relazione di equivalenza. Gli antibivettori possono essere così ripartiti in classi (disgiunte) di equivalenza; ad ogni classe corrisponde uno ed un solo piano, e vi sono in tutto  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$  classi-piani. All'interno di ogni tale classe vi è poi una sottoclasse di equivalenza, quella degli antibivettori generati da vettori trasformati lineari a determinante unitario ( $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ) di un antibivettore rappresentante, per i quali cioè  $\forall (i,j) \{s^{[i} t^{j]} = u^{[i} v^{j]}\}$ . La condizione più generale per cui questo succede è  $s = cu, t = c^{-1}v$ , dove  $c$  è un reale non

<sup>2</sup> La (4) è vuota per  $n = 1$  (tutti gli antibivettori sono nulli). Se  $n = 2$ , solo la coppia di indici  $\{1,2\}$  dà antibivettori non nulli. Ad esempio per  $i = j = 1$  e  $k = 2$ , abbiamo  $w^1 u^{[1} v^{2]} + w^2 u^{[2} v^{1]} = 0$ , una identità. Gli altri casi simili sono riducibili a questo, e si hanno comunque delle identità. In conclusione le (4) presentano interesse soltanto per  $n \geq 3$ .

nullo. Infine tutto quanto precede si può altrettanto riferire a  $\langle 1,0 \rangle$ -covettori generatori piuttosto che a  $\langle 0,1 \rangle$ -vettori.

Sia ora, nella carta corrente,  $\gamma_{ij}(x)$  un campo <sup>3</sup>  $\langle 2,0 \rangle$ -tensoriale definito e continuo in  $V \subset \mathbb{R}^n$  e ivi non singolare, cioè con  $\det(\gamma) \equiv \det\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1 \div n} \neq 0$ . Come abbiamo già osservato, tale non-singularità è indipendente dalla carta, perché  $\det(\gamma') = \det^2\{\partial(x)/\partial(x')\}\det(\gamma)$ . È dunque unicamente definita la matrice inversa della  $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1 \div n}$ , il cui elemento di indici  $(h,k)$  sarà per il momento denotato come  $\gamma^{hk}$ . Dimostriamo che  $\gamma^{hk}$  è la componente  $(^{hk})$  di un  $\langle 0,2 \rangle$ -tensore (ovviamente a sua volta non singolare) cioè che  $\gamma^{p'q'} = \wp_h^{p'} \gamma^{hk} \wp_k^{q'}$ . Consideriamo per cominciare il  $\langle 1,1 \rangle$ -tensore che nel sistema  $(x)$  ha componenti  $(^i_k)$  uguali a  $\delta_i^k$ , e calcoliamone le componenti nel sistema  $(x')$ . Abbiamo  $(^+)$   $\delta_i^{k'} = \wp_{i'}^j \delta_j^h \wp_h^{k'} = \wp_{i'}^j \wp_j^{k'} \equiv \delta_i^{k'}$ ; cioè le nuove componenti hanno gli stessi valori delle vecchie. Scriviamo poi la legge di trasformazione doppiamente cogrediente  $\gamma_{ij} = \wp_{i'}^{p'} \gamma_{p'q'} \wp_j^{q'}$ , e sostituiamo le  $\gamma_{ij}$  nella relazione di reciprocità  $\gamma_{ij} \gamma^{jk} = \delta_i^k$ . Troviamo così da una parte  $\wp_{i'}^{p'} \gamma_{p'q'} \wp_j^{q'} \gamma^{jk} = \delta_i^k$ , e dall'altra, in forza della  $(^+)$ ,  $\delta_i^{k'} \wp_{i'}^{p'} \wp_p^{k'} = \delta_i^{k'}$ ; quindi  $\delta_i^{k'} = \wp_{i'}^{p'} \gamma_{p'q'} \wp_h^{q'} \wp_k^{k'} \gamma^{hk} \equiv \gamma_{i'q'} \wp_h^{q'} \gamma^{hk} \wp_k^{k'}$ . Poiché anche  $\det(\gamma')$  è  $\neq 0$  (esso ha addirittura lo stesso segno di  $\det(\gamma)$ ),  $\wp_h^{q'} \gamma^{hk} \wp_k^{k'}$  è *unico* <sup>4</sup>; ma per definizione  $\gamma_{i'q'} \gamma^{q'k'} = \delta_i^{k'}$ , e quindi  $\wp_h^{q'} \gamma^{hk} \wp_k^{k'} = \gamma^{q'k'}$ ; ossia  $\gamma^{hk}$  si trasforma con legge doppiamente controgrediente, qed. Aboliremo pertanto la  $_$  in  $\gamma^{hk}$ . Analoghe considerazioni si potrebbero fare partendo da un  $\langle 0,2 \rangle$ -tensore (non singolare) anziché da un  $\langle 2,0 \rangle$ -tensore, concludendo che gli elementi della corrispondente matrice inversa sono componenti di un  $\langle 2,0 \rangle$ -tensore (non singolare), in completa dualità con quanto affermato più sopra.

Se in particolare il precedente campo non singolare  $\gamma_{..}$  <sup>5</sup> (ad es.) è supposto simmetrico e continuo in  $V$  (proprietà carta-indipendenti), il rango della sua matrice non dipende dalla base p.ortonormale scelta (teorema di Sylvester), ed è uniforme nel dominio aperto-connesso  $V$  dove  $\gamma_{..}$  è

<sup>3</sup> Per brevità, nel seguito diremo spesso “tensore” in luogo di “campo tensoriale”; una abbreviazione che non dovrebbe mai creare difficoltà di interpretazione.

<sup>4</sup> Questa unicità resta valida per una generica equazione tensoriale lineare del tipo  $\sigma_{ij} X^j \dots = A_i \dots$  [ $\sigma^{ij} X_j \dots = A^i \dots$ ] dove  $\sigma_{ij}$  [ $\sigma^{ij}$ ] è un  $\langle 2,0 \rangle$ -tensore [un  $\langle 0,2 \rangle$ -tensore] simmetrico non-singolare,  $A_i \dots$  [ $A_i \dots$ ] un  $\langle a,b \rangle$ -tensore dato, e  $X^j \dots$  [ $X_j \dots$ ] è un  $\langle a-1, b+1 \rangle$ -tensore [un  $\langle a+1, b-1 \rangle$ -tensore] incognito.

<sup>5</sup> Stimiamo ormai comodo usare *anche* questo tipo di notazione per indicare oggetti dipendenti da uno o più indici in certe posizioni (nel caso presente componenti di un  $\langle 2,0 \rangle$ -tensore). L'abitudine prevalsa è quella di dire che  $\tau_{i \dots i a}^{j^1 \dots j^b}$  “è” il  $\langle a,b \rangle$ -tensore  $\tau_{..}$  (con  $a$  puntini inferiori e  $b$  puntini superiori). Una notazione corretta sarebbe quella di scrivere, nell'esempio considerato,  $\{\tau_{ik}\}_{i,k=1 \div n}$ ; allora gli indici *apparirebbero come quelle variabili mute* (correnti su un certo dominio) *che sono in realtà*. Purtroppo questa scelta è tipograficamente onerosa e/o ridondante, anche se in certi casi irrinunciabile. Nonostante le sue carenze, la notazione  $\tau_{..}$  è spesso sufficiente agli scopi, e può essere adottata quando  $a$  e  $b$  sono specificati e abbastanza piccoli. Quanto sopra si adatta senza modifiche a generiche funzioni d'indici, ad esempio a simboli di Christoffel, ecc. Sono anche state proposte, e sono usate, notazioni completamente diverse (ad esempio notazioni con indici astratti, notazioni diagrammatiche, ecc.), ma la loro utilità pratica è discutibile.

definito <sup>6</sup>. Infine (la matrice di)  $\gamma''$ , anch'esso simmetrico non singolare ha lo stesso rango di (quello di)  $\gamma_{..}$ , perché i coefficienti della forma quadratica associata a  $\gamma''$  hanno per valori, nella stessa base p.ortonormale, i reciproci di quelli della forma quadratica associata a  $\gamma_{..}$  e quindi gli *stessi* n coefficienti di modulo unitario.

L'assegnazione, su una varietà <sup>7</sup>  $rM^n \equiv M$ , di un campo  $\langle 2,0 \rangle$ -tensoriale come quello descritto nel precedente paragrafo (o equivalentemente del suo inverso  $\langle 0,2 \rangle$ -tensoriale), ha un ruolo essenziale nella istituzione di una geometria differenziale p.riemanniana su di essa. Di fatto, la varietà M è priva di tensore fondamentale fino a che non si provvede ad una sua conveniente definizione assiomatica. Seguendo la teoria di Riemann, basta allo scopo assegnarvi, servendosi di una carta corrente con coordinate  $x \in V$  (connesso), un tale campo  $\langle 2,0 \rangle$ -tensoriale  $g_{..} = g_{..}(x)$  simmetrico non singolare e continuo in V, che si dirà suo "tensore fondamentale". (Di questa possibilità abbiamo già dato larghe anticipazioni, soprattutto nella S.sez. 4.3.2.) Tale campo  $g_{..}(x \in V)$ , arbitrario sotto i vincoli nominati (simmetria, non-singularità e continuità), si dice anche **pseudometrica** della varietà M. Infatti esso viene utilizzato per definire assiomaticamente la "pseudodistanza" ds tra due punti separati, nella carta corrente, dal vettore controvariante dx', mediante la  $ds =: |g_{ik} dx^i dx^k|^{1/2}$ . La varietà stessa, corredata del tensore fondamentale  $g_{..}$ , si dirà  $\langle r,n \rangle$ -**varietà** (elementare) **pseudoriemanniana** (p.riemanniana), di indice  $\pi$  uguale a quello (come abbiamo appena visto, uniforme in V) della forma quadratica associata a  $g_{..}$ , o al suo inverso  $g''$ . Se poi l'indice  $\pi$  e la dimensione n della varietà sono uguali, la detta forma quadratica è definita positiva, cioè tutti i minori principali della  $n \times n$ -matrice  $\{g_{..}\}$  (o  $\{g''\}$ ) sono positivi. In questo caso la varietà si dice più specificamente **riemanniana**. Le varietà p.riemanniane M e p.metrica  $g_{..}$  potranno genericamente denotarsi con il simbolo  $\{M, g_{..}\}$ , e quelle più specificamente riemanniane con il simbolo  $\{M, g_{>}\}$ . La geometria così imposta "nel senso di Riemann" su una varietà astratta è formalmente molto simile a quella di una varietà immersa in uno spazio pseudoeuclideo e da questo indotta. In particolare, con la disponibilità di un tensore fondamentale  $g_{..}(x)$  compare ancora la nozione di componente covariante aut controvariante *di uno stesso vettore* – o più in generale quella "dislocabilità verticale" di un indice di uno "stesso"  $\kappa$ -tensore – di cui le regole  $u_i = g_{ij} u^j$  e  $u^i = g^{ij} u_j$

<sup>6</sup> Che tale indice non possa variare su una varietà pseudoriemanniana M n-dim si vede facendo uso del seguente semplice Lemma. «Sia A una  $n \times n$ -matrice funzione *continua* di un parametro t reale corrente nell'intervallo chiuso  $I \equiv [0,1]$ , e ivi simmetrica e non singolare. L'indice (positivo) d'inerzia  $\pi$  della forma quadratica associata ad A è uguale al numero degli n autovalori di A (tutti reali e diversi da zero) che sono positivi. Gli autovalori di A devono essere funzioni continue di t in I, e  $\pi$  può cambiare soltanto in punti di I dove qualcuno di essi cambia segno. Ma questo è impossibile perché A, essendo per ipotesi non singolare in I, non può avere ivi alcun autovalore nullo. Quindi  $\pi$  deve essere costante in I.» Sia  $x = x(t)$  una curva continua arbitraria di M che unisce il suo punto iniziale  $x_0 = x(t=0)$  al suo punto finale  $x_1 = x(t=1)$ . La tesi è provata identificando la matrice A del lemma con quella del tensore metrico  $g_{..}$ , che per definizione è simmetrica non singolare e continua in M (tutte proprietà carta-indipendenti).

<sup>7</sup> Nel seguito di questa sezione trascureremo di ricordare che nominando generiche varietà sottintenderemo sempre di riferirci a varietà *elementari*.

sono gli esempi più semplici. Senza un tensore fondamentale, invece, esistono soltanto  $\langle a, b \rangle$ -tensori e  $\langle c, d \rangle$ -tensori tra loro *del tutto dissociati* anche se  $a + b = c + d$ . Come sappiamo, se  $ab > 0$  questi  $\langle a, b \rangle$ -tensori possono “contrarsi” dando luogo a  $\langle a-1, b-1 \rangle$ -tensori; ma ovviamente decade la nozione di modulo di un vettore  $u$  definito come l’invariante  $(g_{ij}u^i u^j)^{1/2}$  (se la forma quadratica sotto radice è definita positiva), o in generale di pseudomodulo  $|g_{ij}u^i u^j|^{1/2}$  (se la forma è indefinita). Insomma la disponibilità di un tensore fondamentale consente di passare in modo naturale dalla più debole algebra degli  $\langle a, b \rangle$ -tensori a quella più forte dei  $\kappa$ -tensori; ma d’altra parte, la possibilità di introdurre assiomaticamente in essa un tensore fondamentale *presuppone* la prima di queste algebre, o assiomi ad hoc.

Applicando la regola di dislocazione verticale di un indice allo stesso tensore fondamentale, abbiamo, per dislocazione dal basso verso l’alto,  $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$ ; e simmetricamente, per dislocazione dall’alto verso il basso in  $g^{ik}$ ,  $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$ . Potremo quindi denotare le componenti miste del tensore fondamentale con il simbolo comune  $g_j^i \equiv \delta_j^i$ . Proseguendo poi con la dislocazione, ad es. dal basso verso l’alto, abbiamo  $g_{ik}g^{kj}g^{ih} = \delta_i^j g^{ih} = g^{jh}$ , e similmente  $g^{ik}g_{kj}g_{ih} = \delta_j^i g_{ih} = g_{jh}$ , ecc. Queste relazioni provano la completa coerenza delle notazioni e delle regole di dislocazione nel caso, in sé piuttosto speciale, del tensore fondamentale. Una varietà  $n$ -dim immersa in uno spazio euclideo-cartesiano  $E_m$  e definita dalle  $X^\alpha = X^\alpha(x^1, \dots, x^n)$ ,  $\alpha = 1, \dots, m \geq n$ , con matrice jacobiana  $\partial(X)/\partial(x)$  di rango massimale e tensore metrico da questo indotto secondo la  $g_{ij} = g_{ij}(x) =: \sum_{\alpha=1}^m \partial X^\alpha / \partial x^i(x) \partial X^\alpha / \partial x^j(x)$ , è riemanniana: infatti  $g_{ik} dx^i dx^k = \sum_{\alpha=1}^m dX^\alpha dX^\alpha$  è definita positiva. Cominceremo con l’occuparci delle varietà (elementari) riemanniane  $\{M, g\}$ .

§1. *Varietà riemanniane.* L’elemento d’arco quadrato  $ds^2$  di una varietà riemanniana è l’invariante, per definizione definito positivo,  $g_{ik} dx^i dx^k$ , e la “lunghezza” di una  $C^1$ -curva di equazione  $x = x(t)$  compresa tra gli estremi  $t = a$  e  $t = b > a$  è l’integrale  $\int_a^b [g_{ik}(x(t)) d_t x^i(t) d_t x^k(t)]^{1/2} dt$ . Poiché si presuppone  $d_t x \neq 0$  in  $(a, b)$ , la lunghezza d’arco  $s = s(t)$  tra  $t = a$ ,  $s(a)$ , e il valore corrente  $t \in (a, b)$  ha derivata  $ds/dt > 0$ ; quindi esiste la funzione inversa  $t = t(s)$ ,  $s \in [s(a), s(b)]$  e  $s$  può essere usato come parametro “naturale” della curva. In questo caso  $[g_{ik}(x(s)) d_s x^i(s) d_s x^k(s)]^{1/2} \equiv 1$ , e con ciò la lunghezza della curva diventa  $\int_{s(a)}^{s(b)} ds = s(b) - s(a)$ , come ben naturale.

Più in generale, la  $J$ -misura del  $(1 \leq k \leq n)$ -blocco  ${}_k B$  generato dai  $k$   $\langle 0, 1 \rangle$ -vettori  $v_{(1)}, \dots, v_{(k)}$  (dello spazio tangente) di una varietà riemanniana è data dalla (5.1.2, 5bis), dove il gramiano ( $\geq 0$ )  $Gr(v_{(1)}, \dots, v_{(k)})$  è definito dalla (5.1.2, 5) ponendovi  $g_{hk} v_{(i)}^h v_{(j)}^k$  in luogo del prodotto interno  $(v_{(i)}, v_{(j)})$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ . In particolare per  $k = 2$ , il quadrato della  $J$ -misura del 2-blocco generato dalla

coppia di vettori  $u, v$  (nel generico punto  $p = p(x)$  della varietà, quindi sottintendendo la dipendenza da  $x$  in  $g_{(2)}$ ,  $u$  e  $v$ ) è:

$$(5) \quad \mathcal{A}^2 = (u,u)(v,v) - (u,v)(v,u) = 2g_{ih}g_{jk}u^h v^k u^{[i} v^{j]} \equiv -2g_{ih}g_{jk}u^k v^h u^{[i} v^{j]};$$

quindi  $\mathcal{A}^2 > 0$  se  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti e  $\mathcal{A}^2 = 0$  in caso contrario. Sommando le due espressioni di  $\mathcal{A}^2$  nella (5) si ha  $2\mathcal{A}^2 = 4g_{ih}g_{jk}u^{[i} v^{j]}u^{[h} v^{k]} \equiv -4g_{ik}g_{jh}u^{[i} v^{j]}u^{[h} v^{k]}$ ; e quindi,

$$(5bis) \quad \mathcal{A}^2 = g_{ijhk}u^{[i} v^{j]}u^{[h} v^{k]},$$

dove

$$(6) \quad g_{ijhk} =: g_{ih}g_{jk} - g_{ik}g_{jh}.$$

Scriveremo  $g_{(4)}$  per il 4-tensore di componenti (6) nella carta corrente. La (6) mostra che  $g_{(4)}$  è antisimmetrico rispetto allo scambio dei due primi indici e dei due secondi indici, e simmetrico rispetto allo scambio della prima coppia di indici con la seconda coppia. Infine se a  $g_{(4)}$  si sommano i due 4-tensori che si ottengono mantenendo al suo posto il primo indice e permutando ciclicamente gli altri tre indici, si ottiene (il 4-tensore) zero.

$(g_{ijhk}u^{[i} v^{j]}u^{[h} v^{k]})^{1/2} \geq 0$  si dice **area dell'antibivettore**  $u^{[i} v^{j]}$ . Un antibivettore di area unitaria (quindi con generatori linearmente indipendenti) si dice un **antibivettore unitario**. Dividendo un antibivettore con generatori linearmente indipendenti per la sua area si ottiene un antibivettore unitario della stessa classe di equivalenza; proprio come dividendo un vettore non nullo per il suo modulo si ottiene un vettore unitario parallelo ed equiverso.

In particolare per  $n = 2$ , nella tradizionale notazione di Gauss è  $g_{1212} \equiv g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \equiv EG - F^2 > 0$ . Denotando con  $x \equiv x^1$  e  $y \equiv x^2$  le coordinate della superficie in oggetto, e considerando un parallelogramma infinitesimo avente per lati gli elementi  $dx, dy$  delle linee coordinate, troviamo, per il corrispondente elemento d'area (assoluto),  $d\mathcal{A} = (EG - F^2)^{1/2} dx dy$ .<sup>8</sup> L'area (assoluta) della porzione di superficie associata a un dominio  $\Delta V \subset V$  è l'integrale su  $\Delta V$  di questa forma differenziale. In modo analogo si esprime il  $(2 \leq k \leq n)$ -volume di una  $k$ -superficie inclusa nella varietà. Come meglio vedremo, il caso della 2-superficie presenta un interesse particolare nell'ambito della teoria della curvatura (cfr. anche la S.sez. 3.5.4).

La componente  $g_{ijhk}$  nelle (6) è il minore della matrice  $\{g_{ij}\}$  formato con le righe di indici  $(i,j)$  e le colonne di indici  $(h,k)$ . Un confronto delle (6) con le formule di Gauss (3.5.3, 4),  $h_{ih}h_{jk} - h_{ik}h_{jh} = \rho_{ijhk}$ , mostra subito, tenendo conto della simmetria di  $g_{(2)}$  e di  $h_{(2)}$ , che sussiste la stessa relazione tra  $g_{(4)}$  e  $g_{(2)}$  da una parte e tra  $\rho_{(4)}$  e  $h_{(2)}$  dall'altra. Un 4-tensore per il quale esiste un 2-tensore simmetrico (non necessariamente non singolare) che lo esprime come  $g_{(2)}$  esprime  $g_{(4)}$

<sup>8</sup> Vi sono quattro addendi da sommare,  $g_{1212}[ ]^{12}[ ]^{12}$ ,  $g_{1221}[ ]^{12}[ ]^{21}$ ,  $g_{2112}[ ]^{21}[ ]^{12}$  e  $g_{2121}[ ]^{21}[ ]^{21}$ , dove per brevità si è scritto  $[ ]^{ij}$  per  $dx^i dy^j$ . Tenendo conto delle  $dx^1 dy^2 = dx dy$  e  $dx^2 dy^1 = -dx dy$ , e delle due antisimmetrie di  $g_{ijhk}$ , si trova che tali addendi hanno tutti il comune valore  $g_{1212}(dx dy)^2/4$ . Quindi  $(d\mathcal{A})^2 = g_{1212}(dx dy)^2$ .



(o come  $h_{(2)}$  esprime  $\rho_{(4)}$ ) si dice **di tipo Ricci**, e gode dei quattro tipi di simmetria (3.4.2, 10) che abbiamo nominato a proposito di  $\rho_{(4)}$  e appena ricordato a proposito di  $g_{(4)}$ . Se  $T_{(4)}$  è un 4-tensore di tipo Ricci, il 2-tensore simmetrico  $t_{(2)}$  che lo esprime non è, in generale, unicamente determinato. Abbiamo già incontrato questo problema nella S.sez. 8.1.1, e sappiamo che, per  $n \geq 3$ ,  $t_{(2)}$  è in effetti unicamente determinato *a meno del segno* se la sua matrice ha rango  $\geq 3$ . Quindi per  $n \geq 3$  vale l'unicità a meno del segno di  $g_{(2)}$  per dato  $g_{(4)}$  (perché il rango di  $g_{(2)}$  è per definizione  $n$ ). §

§2. *Varietà pseudoriemanniane*. Passando alle varietà p.riemanniane, nella S.sez. 8.1.3 abbiamo introdotto la nozione di trasporto parallelo lungo la  $C^1$ -curva  $L$  di equazione  $q = q(t)$  di una varietà immersa muovendo dalla (8,1.3, 1), e quindi, sostanzialmente, dalle equazioni di Gauss (3.5.3, 12). La situazione è generalmente diversa, ma non dal punto di vista formale, se la curva in questione è inclusa in una varietà  ${}^{r \geq 2}M^{n \geq 2} \equiv M$  p.riemanniana, in cui cioè sia assegnato un 2-tensore fondamentale  $g_{..}$ . Precisamente, il **trasporto parallelo** del vettore (di CdC 1)  $u = u(x)$  lungo la  $C^1$ -curva  $L$  di equazione  $x = x(t \in (a,b))$  ( $d_t x \neq 0$ ) si definirà imponendo alle componenti controvarianti di  $u$  di soddisfare un SDO del 1° ordine simile al SDO (8.1.3, 2), cioè del tipo:

$$(7) \quad d_t u^i = -\Lambda_{k,j}^i u^k d_t x^j,$$

dove le  $\Lambda_{..}^i$  sono certe  $n^3$  funzioni (continue) di  $x$  a tre indici da opportunamente definire, e  $x$  è espresso ovunque come funzione di  $t \in (a,b)$ . Poiché  $d_t u^i = \partial u^i / \partial x^j d_t x^j$ , se le (7) si richiedono valide per *qualsiasi*  $C^1$ -curva  $L$  (quindi per  $d_t x$  arbitrari), esse equivalgono alle

$$(7bis) \quad \partial u^i / \partial x^j + \Lambda_{k,j}^i u^k = 0.$$

Queste coincidono con le  $u^i_{;j} = 0$  se vi si sostituiscono i coefficienti  $\Lambda_{..}^i$  con i corrispondenti Chr2  $\Gamma_{..}^i$ . Si noti che alle (7) si potrebbero sostituire le equivalenti  $d_t u_h = \Lambda_{h,p,j}^p u_p d_t x^j$  con  $u_h = g_{ih} u^i$  e quindi alle (7bis) le  $\partial u_h / \partial x^k - \Lambda_{h,p,k}^p u_p = 0$ . Nel seguito faremo preferibilmente riferimento alle (7, 7bis).

Per ipotesi, su  $M$  è data la forma bilineare simmetrica  $g_{ij}(x) \xi^i \eta^j$  in una generica base, con associata forma quadratica generalmente indefinita. La richiesta ( $\alpha$ ) appresso descritta lega allora, benché non univocamente, i coefficienti  $\Lambda_{..}^i$  al campo del tensore fondamentale  $g_{..}$ . Precisamente, sotto la condizione che il dato  $g_{..}$  sia di CdC 1 in  $V$ , richiederemo ( $\alpha$ ) che “per *qualsiasi*  $C^1$ -curva  $L$ ,  $x = x(t \in I)$  ( $d_t x \neq 0$  in  $I \equiv (0,1)$ ) di  $M$ , e per *qualsiasi* coppia di  $\langle 0,1 \rangle$ -vettori di CdC 1,  $v = v(x)$ ,  $w = w(x)$  trasportati parallelamente lungo  $L$ , l'invariante (rispetto a cambi di carta)  $g_{ij} v^i w^j$  si mantenga costante lungo  $L$ ”. Esaminiamo adesso le implicazioni di ( $\alpha$ ).  $t$ -derivando, si ha  $0 = d_t g_{ij} v^i w^j + g_{ij} (d_t v^i w^j + v^i d_t w^j) = \partial g_{ij} / \partial x^k d_t x^k v^i w^j - (g_{pj} \Lambda_{i,k}^p + g_{ip} \Lambda_{j,k}^p) d_t x^k v^i w^j$ ; e quindi, per l'arbitrarietà di  $d_t x^k v^i w^j$ ,

$$(8) \quad \partial g_{ij} / \partial x^k = g_{pj} \Lambda_{i,k}^p + g_{ip} \Lambda_{j,k}^p.$$

Se dunque poniamo

$$(9) \quad \Lambda_{ijk} =: g_{jp} \Lambda_i^p{}_k,$$

la (8) si trascrive come

$$(10) \quad \partial g_{ij} / \partial x^k = \Lambda_{ijk} + \Lambda_{jik} \equiv 2\Lambda_{(ij)k}.$$

Si noti ancora che sostituendovi  $\Lambda$  con  $\Gamma$ , le (8) diventano le (3.3.2, 12) con il 1° membro nullo; mentre similmente le (10), con la stessa sostituzione, diventano le (3.3.2, 12bis), sempre con il 1° membro nullo.

Sia le (8) che le (10) sono  $n^2(n+1)/2$ , e quindi *non bastano* per determinare gli  $n^3$  coefficienti  $\Lambda_{\cdot}$  (salvo che nel caso privo di interesse  $n = 1$ ); per far quadrare il bilancio, occorrerebbero altre  $n^2(n-1)/2$  condizioni. Ma esattamente tante sono le condizioni di simmetria rispetto a due indici di una funzione a tre indici; e d'altra parte, né le (8) implicano la simmetria dei  $\Lambda_{\cdot}$  rispetto agli indici inferiori, né le (10) quella delle  $\Lambda_{\dots}$  rispetto agli indici "esterni" (1° e 3° indice). Questo fatto lascia prevedere che si possa istituire una ragionevole geometria differenziale su  $M$  dotata di coefficienti di connessione, sotto una delle seguenti condizioni: (i) avendo assegnato un 2-tensore fondamentale  $g_{\cdot}$  di adeguata  $CdC \geq 1$ , e avendo definito il trasporto parallelo lungo una  $C^1$ -curva  $L$  di un vettore  $u = u(x)$  di  $CdDC 1$  mediante un SDO del tipo (7) con coefficienti  $\Lambda_{\cdot}$  a priori *simmetrici* rispetto agli indici inferiori, *richiedere* che  $g_{ik}v^i w^k$  sia costante lungo la curva arbitraria  $L$  per  $v = v(x)$  e  $w = w(x)$  trasportati parallelamente lungo  $L$  e per il resto arbitrari; (ii) *assegnare* un 2-tensore fondamentale come in (i) unitamente a coefficienti  $\Lambda_{\cdot}$  continui e soddisfacenti alle leggi di trasformazione (3.3.2, 16) (o coefficienti  $\Lambda_{\dots}$  continui e soddisfacenti alle (3.3.2, 17), presupponendo il legame (9)); (iii) *assegnare* soltanto coefficienti di connessione  $\Lambda_{\cdot}$  continui e soddisfacenti alle (3.3.2, 16) e per il resto arbitrari. Il caso (i) porta direttamente ad una geometria p.riemanniana su  $M$ . Certi aspetti del caso (ii) sono stati illustrati nella Sez. 4.3, alla quale rimandiamo. Quanto al caso (iii), in cui si configura la situazione più debole e generale, lo esamineremo in dettaglio nella prossima sottosezione.

Veniamo ad un esame più ravvicinato del caso (i). Sotto l'assunta imposizione della simmetria dei  $\Lambda_{\cdot}$ , dalle (10) (dopo l'introduzione (9) dei  $\Lambda_{\dots}$ ) e dalle analoghe che da esse si ottengono per circolazione degli indici secondo  $ijk \rightarrow jki \rightarrow kij$ , si hanno in effetti le relazioni

$$(11) \quad 2\Lambda_{ijk} = \partial g_{ij} / \partial x^k + \partial g_{jk} / \partial x^i - \partial g_{ik} / \partial x^j,$$

che identificano i  $\Lambda_{\dots}$  con i corrispondenti  $\Gamma_{\dots}$  (cfr. le (3.3.2, 12ter)), e quindi anche i  $\Lambda_{\cdot}$  con i corrispondenti  $\Gamma_{\cdot}$  in forza delle (9). Dalle (11) si hanno poi le leggi di trasformazione cui devono sottostare i  $\Lambda_{\dots}$  e rispettivamente i  $\Lambda_{\cdot}$  così definiti, e che risultano coincidere con le (3.3.2, 16<sub>1</sub>, 17).

Infatti, nella notazione compatta introdotta con la (3) abbiamo  $\partial g_{i'j'}/\partial x^{k'} = \wp_{i'}^i \wp_{j'}^j \wp_{k'}^k \partial g_{ij}/\partial x^k + (\wp_{i'k'}^i \wp_{j'}^j + \wp_{i'}^i \wp_{j'k'}^j) g_{ij}$ <sup>9</sup>, e quindi

$$(12) \quad \Gamma_{i'k'j'} = \wp_{i'}^i \wp_{j'}^j \wp_{k'}^k \Gamma_{ikj} + \wp_{i'j'}^i \wp_{k'}^k g_{ik},$$

vale a dire, le (3.3.2, 17). Con procedura simile si ottengono poi anche le (3.3.2, 16<sub>1</sub>), che riscriviamo qui nella notazione compatta:

$$(13) \quad \Gamma_{i'}^{k'j'} = \wp_{i'}^i \wp_{j'}^j \wp_p^k \Gamma_{ij}^p + \wp_{i'}^k \wp_{j'}^i.$$

In definitiva, nel caso (i) (coefficienti  $\Lambda$  simmetrici), attraverso le (11) [le (11, 9)] abbiamo identificato i coefficienti  $\Lambda_{..}$  [i coefficienti  $\Lambda_{.}$ ] con i corrispondenti Chr1  $\Gamma_{..}$  [con i corrispondenti Chr2  $\Gamma_{.}$ ], il loro legame con le x-derivate di  $g_{..}$  [con le x-derivate di  $g_{..}$  e  $g_{..}$  stesso], e infine *determinato* le leggi di trasformazione cui essi devono soddisfare, che sono appunto le stesse cui devono soddisfare i simboli di Christoffel nel caso di una varietà immersa.

Il trasporto parallelo lungo  $L \subset M$  con assegnata metrica  $g_{..}$  di CdC 1 di un vettore  $u^i$  (componente controvariante) è stato definito attraverso il SDO (7), imponendo poi la costanza di  $g_{ij} v^i w^j$  lungo  $L$  per qualsiasi  $L$  e per qualsiasi coppia di vettori  $v, w$  trasportati parallelamente lungo  $L$ . È naturale chiedersi come si debba modificare questa definizione quando si voglia l'analogo trasporto parallelo di un vettore  $u_h$  (componente covariante). La risposta a questo problema si ha imponendo che l'invariante  $u_h v^h$  sia costante lungo  $L$  per qualunque  $v$  trasportato parallelamente. Questo si può fare senza usare il tensore  $g_{..}$  o imporre ai  $\Lambda_{.}$  di essere simmetrici, ed equivale a che  $0 = d_t(v^h u_h) = d_t v^h u_h + v^h d_t u_h = -\Lambda_{i'k'}^h v^i u_h d_t x^{k'} + v^h d_t u_h$ ; vale a dire, tenendo conto dell'arbitrarietà di  $v$ , a che

$$(14) \quad d_t u_h = \Lambda_{h'j'}^k u_k d_t x^{j'}$$

Ancora, poiché  $d_t u_h = \partial u_h / \partial x^{j'} d_t x^{j'}$ , se le (14) si richiedono valide per *qualsiasi*  $C^1$ -curva  $L$  (quindi per  $d_t x$  arbitrari), esse equivalgono alle già anticipate

$$(14bis) \quad \partial u_h / \partial x^{j'} - \Lambda_{h'j'}^k u_k = 0;$$

e queste coincidono con le  $u_{h/j} = 0$  se vi si sostituiscono i coefficienti  $\Lambda_{.}$  con i corrispondenti  $\Gamma_{.}$ . Se poi disponiamo di un tensore fondamentale  $g_{..}$ , le (14) possono similmente utilizzarsi per legare i  $\Lambda_{.}$  al campo  $g_{..}$  richiedendo la costanza lungo  $L$  di  $g^{ij} v_i w_j$  per qualsiasi  $L$  e qualsiasi coppia di vettori  $v$  e  $w$  trasportati parallelamente lungo  $L$ . Ne risultano ancora le (8) (o le (10) dopo l'introduzione delle  $\Lambda_{..}$  mediante le (9)); e quindi, se si impone la simmetria dei  $\Lambda_{..}$  (o dei  $\Lambda_{.}$ ), ancora l'identità dei coefficienti  $\Lambda$  con i corrispondenti simboli di Christoffel. Infine il trasporto parallelo lungo  $L$  di un generico ( $\kappa \geq 0$ )-tensore espresso in componenti di qualunque tipo si definisce in modo analogo, mediante equazioni delle quali le (7bis, 14bis) sono gli esempi per le componenti controvarianti o

<sup>9</sup> In effetti, questa vale per un  $\langle 2,0 \rangle$ -tensore del tutto generico.

rispettivamente covarianti di vettori. (In realtà il caso di uno scalare è già stato considerato ed utilizzato poco più sopra.) §

§3. *Curvatura sezionale e trasporto parallelo.* Nella S.sez. 3.5.4 è stata introdotta la nozione di 2-curvatura sezionale di una varietà ( $n \geq 2$ )-dim riemanniana. Vogliamo adesso recuperare questa nozione in termini di angolo di rotazione  $\varphi$  di un vettore trasportato parallelamente lungo un piccolo ciclo semplice  $C$  di una 2-superficie di quella varietà. Vale il teorema seguente:

T1. «La curvatura sezionale (connessa alla giacitura di un 2-piano) nel generico punto-base  $\underline{p}$  di una varietà ( $n \geq 2$ )-dim coincide con il limite del rapporto tra l'angolo  $\varphi$  e l'area della regione di 2-superficie (avente quella giacitura in  $\underline{p}$ ) racchiusa da  $C$  allorché  $C$  si contrae intorno a  $\underline{p}$ .»

Dim. Sia tale 2-superficie  $S$  descritta parametricamente da  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $\langle \xi, \eta \rangle \in W$  un aperto connesso di  $\mathbb{R}^2$  con immagine  $x(W) \subset V$  (il dominio  $n$ -dim della  $n$ -varietà) di CdC 2, e contenente  $\underline{p} \leftrightarrow \underline{x}$ . Orienteremo il ciclo  $C$ , che potremo pensare descritto da  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$ ,  $t \in [0, 1)$  di CdC 1, e con  $\langle \xi, \eta \rangle|_{t \rightarrow 1} = \langle \xi, \eta \rangle|_{t=0}$ , dalla direzione positiva di  $\xi$  verso la direzione positiva di  $\eta$ . Senza limitazioni di generalità, porremo  $\xi = \eta = 0$  e  $x(0, 0) = \underline{x} = 0$ , e assumeremo  $\underline{x}$  come punto iniziale di  $C$ . Trasportando parallelamente lungo  $C$  un vettore  $u$  di CdC 1, ad es. rappresentato dalle sue componenti controvarianti  $u^1, \dots, u^n$ , la componente  $u^r$  subisce a ciclo percorso una variazione

$$(15) \quad \Delta u^r = \int_C du^r = - \int_C \Gamma_{ik}^r(x) u^i(x) dx^k,$$

dove  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $dx^k = \partial x^k / \partial \xi d\xi + \partial x^k / \partial \eta d\eta$ ,  $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle(t)$ ,  $d\xi = d_t \xi dt$ ,  $d\eta = d_t \eta dt$ . L'obbiettivo è quello di calcolare l'integrale a 3° membro della (15) fino al 2° ordine (incluso) in un fattore di piccolezza "naturale"  $\varepsilon$  che assumeremo come misura della "lunghezza formale"  $l$  di  $C$  nel piano  $(\xi, \eta)$ ,  $l =: \int_C (d\xi^2 + d\eta^2)^{1/2}$ ; o equivalentemente, come misura della radice dell'"area formale"  $\mathcal{A}$  della regione  $[C]$  racchiusa da  $C$  nello stesso piano,  $\mathcal{A} =: \int_{[C]} d\xi d\eta$ . Usando  $|_0$  come riferimento al valore nel punto iniziale di  $C$ , abbiamo  $\Gamma_{ik}^r(x) = \Gamma_{ik}^r|_0 + \partial \Gamma_{ik}^r / \partial x^j|_0 x^j + o(\varepsilon)$ , e similmente  $u^i(x) = u^i|_0 + \partial u^i / \partial x^j|_0 x^j + o(\varepsilon) = u^i|_0 - u^p|_0 \Gamma_{pj}^i|_0 x^j + o(\varepsilon)$ . (Evidentemente, non occorre andare oltre il 1° ordine in queste valutazioni.) Si trova così  $d\Delta u^r = - \Gamma_{ik}^r u^i dx^k = \{[(\Gamma_{ik}^r \Gamma_{pj}^i - \partial \Gamma_{pk}^r / \partial x^h)|_0 x^h - \Gamma_{pk}^r|_0] u^p|_0\} dx^k + o(\varepsilon^2)$ , perché prodotti del tipo  $xxdx$  sono  $O(\varepsilon^3)$ . Il contributo dell'ultimo addendo nelle precedenti  $\{ \}$  si deve ignorare perché  $\int_C dx^k = 0$ , e si conclude che

$$(16) \quad \Delta u^r = (\Gamma_{ik}^r \Gamma_{pj}^i - \partial \Gamma_{pk}^r / \partial x^h)|_0 u^p|_0 \int_C x^h dx^k + o(\varepsilon^2).$$

Dobbiamo adesso valutare nella stessa approssimazione gli integrali di ciclo  $\int_C x^h dx^k = \int_C x^h (\partial x^k / \partial \xi d\xi + \partial x^k / \partial \eta d\eta)$ . In forza del teorema di Green, essi sono uguali agli integrali estesi a  $[C]$  di  $\partial / \partial \xi (x^h \partial x^k / \partial \eta) - \partial / \partial \eta (x^h \partial x^k / \partial \xi) = \partial x^h / \partial \xi \partial x^k / \partial \eta - \partial x^h / \partial \eta \partial x^k / \partial \xi \equiv 2 \partial x^{[h} / \partial \xi \partial x^{k]} / \partial \eta$ ; e poiché

già  $\mathcal{A} = \int_{[C]} d\xi d\eta$  è per suo conto  $O(\varepsilon^2)$ , abbiamo  $\int_C x^h dx^k = 2(\partial x^{[h}/\partial \xi \partial x^{k]}/\partial \eta)|_o \mathcal{A} + o(\varepsilon^2)$ . In definitiva il risultato del nostro calcolo corretto al 2° ordine in  $\varepsilon$  è

$$(17) \Delta u^r = 4(\Gamma_p^i{}_{[h} \Gamma^r{}_{i k]} - \partial \Gamma_p^r{}_{[k}/\partial x^{h]})|_o u^p|_o (\partial x^{[h}/\partial \xi \partial x^{k]}/\partial \eta)|_o \mathcal{A} + o(\varepsilon^2) = 2(\rho_p^r{}_{hk} u^p \partial x^{[h}/\partial \xi \partial x^{k]}/\partial \eta)|_o \mathcal{A} + o(\varepsilon^2).$$

In luogo di  $\mathcal{A}$ , conviene usare l'area  $\sigma$  che le corrisponde attraverso  $x(\xi, \eta)$  sulla 2-superficie  $S$ . Allo scopo, basta introdurre nuovi parametri definiti (ad esempio) da  $d\xi'/d\xi = f(\xi, \eta)$ ,  $\eta' = \eta$ , con  $f =: (EG-F^2)^{1/2} > 0$ , e dove  $(E, G, F) = (E, G, F)(\xi, \eta)$  sono i soliti coefficienti gaussiani della superficie, ora espressi da  $E = g_{ik} \partial x^i / \partial \xi \partial x^k / \partial \xi$ ,  $G = g_{ik} \partial x^i / \partial \eta \partial x^k / \partial \eta$  e  $F = g_{ik} \partial x^i / \partial \xi \partial x^k / \partial \eta \equiv g_{ik} \partial x^i / \partial \eta \partial x^k / \partial \xi$ . A questo punto, la (17) si riscrive con i nuovi parametri  $\xi'$ ,  $\eta'$  in luogo dei vecchi  $\xi$ ,  $\eta$ , e  $\sigma$  in luogo di  $\mathcal{A}$  come:

$$(17bis) \Delta u^r = 2(\rho_p^r{}_{hk} u^p \partial x^{[h}/\partial \xi' \partial x^{k]}/\partial \eta')|_o \sigma + o(\varepsilon^2).$$

Contratta con  $u_r|_o$ , la (17bis) dà

$$(18) u_r|_o \Delta u^r = 2(\rho_{ijhk} u^i u^j \partial x^{[h}/\partial \xi' \partial x^{k]}/\partial \eta')|_o \sigma + o(\varepsilon^2) \equiv o(\varepsilon^2)$$

in forza della simmetria di  $u^i u^j$ : vale a dire, al 2° ordine in  $\varepsilon$  è *nulla* la componente su  $u_r|_o$  della variazione  $\Delta u^r$  di  $u^r$ . Se invece  $v_r \equiv v_r|_o$  è un vettore del piano dell'antibivettore  $(\partial x^{[h}/\partial \xi' \partial x^{k]}/\partial \eta')|_o$  linearmente indipendente da  $u_r|_o$ , l'analoga contrazione dà

$$(19) v_r|_o \Delta u^r = (\rho_{ijhk} u^{[i} v^{j]} \partial x^{[h}/\partial \xi' \partial x^{k]}/\partial \eta')|_o \sigma + o(\varepsilon^2),$$

dove l'ulteriore antisimmetrizzazione rispetto a  $(^{i j})$  consegue dalla corrispondente antisimmetria di  $\rho_{ijhk}$ . Nel seguito, converrà usare notazioni più agili, diciamo  $\Pi^{ij}$  per  $\partial x^{[i}/\partial \xi \partial x^{j]}/\partial \eta$  e  $\Pi'^{ij}$  per  $\partial x^{[i}/\partial \xi' \partial x^{j]}/\partial \eta'$ . Così la (19) si riscrive come

$$(19bis) v_r|_o \Delta u^r = (\rho_{ijhk} u^{[i} v^{j]} \Pi'^{hk})|_o \sigma + o(\varepsilon^2).$$

Se in particolare  $u|_o$  e  $v|_o$  sono ortogonali e unitari,  $v_r|_o \Delta u^r$  uguaglia la tangente trigonometrica dell'angolo di rotazione  $\varphi$  (di un vettore lungo  $C$ ), e quindi, tenuto conto che essa è  $O(\varepsilon^2)$ , l'angolo  $\varphi$  stesso a meno di  $o(\varepsilon^2)$ . Il nostro calcolo asintotico porta insomma a

$$(20) \varphi = (\rho_{ijhk} u^{[i} v^{j]} \Pi'^{hk})|_o \sigma + o(\varepsilon^2).$$

Con  $u$  e  $v$  ortonormali,  $u^{[i} v^{j]}$  è un antibivettore unitario, e può essere sostituito da qualunque altro antibivettore unitario della stessa classe di equivalenza, cioè associato allo stesso 2-piano. Una scelta naturale è quella di  $\Pi'^{ij}$ , la cui unitarietà si accerta facilmente partendo dalla  $EG-F^2 = g_{ijhk} \Pi^{ij} \Pi^{hk}$  e dalla  $\Pi^{ij} = \Pi'^{ij} (EG-F^2)^{1/2}$ . Il risultato di questa sostituzione è:

$$(20bis) \varphi = (\rho_{ijhk} \Pi'^{ij} \Pi'^{hk})|_o \sigma + o(\varepsilon^2).$$

Questa può porsi in una forma più generale scrivendola in termini di antibivettori non necessariamente unitari della stessa classe di equivalenza, diciamoli ancora  $\Pi^{ij}$ , e normalizzandoli col dividerli per  $(g_{ijhk}\Pi^{ij}\Pi^{hk})^{1/2}$ . Si ottiene così:

$$(20ter) \quad \varphi = (\rho_{ijhk}\Pi^{ij}\Pi^{hk}/g_{ijhk}\Pi^{ij}\Pi^{hk})|_o\sigma + o(\varepsilon^2);$$

e quindi finalmente, per la curvatura sezionale di giacitura  $\Pi$ :

$$(21) \quad \kappa = \kappa(\Pi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varphi/\sigma) = \rho_{ijhk}\Pi^{ij}\Pi^{hk}/g_{ijhk}\Pi^{ij}\Pi^{hk},$$

dove il riferimento  $|_o$  al punto base è ormai superfluo. Il confronto di questa (21) con la (3.5.4, 2) conclude la dimostrazione del teorema (T1). #

La curvatura sezionale nella (21) dipende sia dal punto  $x$  della varietà che dalla giacitura  $\Pi$ , cioè  $\kappa = \kappa(x, \Pi)$ . Una varietà riemanniana in cui  $\kappa$  è indipendente *sia da  $x$  che da  $\Pi$*  si dice **a curvatura costante-isotropa**. Torniamo alla (21) riferita ad un punto  $\underline{x}$  della varietà, e supponiamo che i 4-tensori  $\rho_{\dots}$  e  $g_{\dots}$  in  $\underline{x}$  siano proporzionali, cioè che esista un numero  $\lambda$  ( $= \lambda(\underline{x})$ ) per cui  $\rho_{\dots}(\underline{x}) = \lambda(\underline{x})g_{\dots}(\underline{x})$ . Allora la curvatura sezionale in  $\underline{x}$  vale  $\lambda(\underline{x})$ , e dunque è (banalmente) indipendente dalla giacitura  $\Pi$ . Ma vale anche il contrario. Supponiamo cioè che, sempre in  $\underline{x}$ , la curvatura sezionale sia indipendente dalla giacitura  $\Pi$ : allora i 4-tensori  $\rho_{\dots}$  e  $g_{\dots}$  in  $\underline{x}$  sono proporzionali, e il fattore di proporzionalità è la curvatura sezionale  $\kappa(\underline{x})$ . Quest'ultimo asserto si può ricondurre ad un lemma algebrico (la cui dimostrazione lasciamo al lettore) che recita: «se per un 4-tensore di tipo Ricci  $T_{\dots}$  risulta  $T_{ijhk}z^{ij}z^{hk} = 0$  per *ogni* antibivettore  $z$ , allora  $T_{\dots} = 0$ .»<sup>10</sup>

Il **teorema di Schur** (Friedrich, 1856-1932, 1903) afferma che «se una varietà riemanniana ( $n \geq 3$ )-dim ha curvatura sezionale indipendente dalla giacitura  $\Pi$  in *ogni* suo punto  $x$ ,  $\kappa = \kappa(x) \forall x$ , allora tale curvatura è in realtà indipendente *anche da  $x$* ; ovvero, *la varietà isotropa in questione ha curvatura costante.*»<sup>11</sup> Un altro teorema, che ci limitiamo ad enunciare, afferma che «una varietà ( $n \geq 2$ )-dim immersa in  $E_{n+1}$ , considerata come riemanniana con la metrica indotta da  $E_{n+1}$  e dotata di curvatura sezionale  $\kappa$  costante, è *localmente* isometrica ad una  $n$ -sfera se  $\kappa > 0$ , ad una  $n$ -pseudosfera (vedi S.sez. 8.1.4) se  $\kappa < 0$ , e ad un  $n$ -piano se  $\kappa = 0$ .» Come ci si aspetta, la sua dimostrazione fa uso sostanziale del teorema di Gauss-Bonnet. §

<sup>10</sup> Del resto, il più generale 4-tensore isotropo  $\tau_{ijhk}$  di una varietà di metrica  $g_{ik}$  ha la struttura  $A g_{ij}g_{hk} + B g_{ih}g_{jk} + C g_{ik}g_{jh}$ , dove  $A, B, C$  sono degli scalari. Rappresentando in tal modo il 4-tensore di Riemann  $\rho_{ijhk}$  supposto isotropo, e imponendo le simmetrie  $\rho_{iiii} \equiv 0$  (non sommare sugli indici ripetuti!),  $\rho_{ijij} \equiv 0$ ,  $\rho_{ijih} \equiv 0$  e  $\rho_{ijhh} \equiv 0$ , si trova  $A = 0$  e  $B + C = 0$ ; vale a dire, si trova che  $\rho_{ijhk}$  è proporzionale a  $g_{ijhk}$  con fattore di proporzionalità  $B$ .

<sup>11</sup> La dimostrazione del teorema di Schur è quasi immediata se si parte dalla  $\rho_{ijhk} = \kappa g_{ijhk}$  (uniforme isotropia del tensore di Riemann). Basta costruire il 2-tensore simmetrico  $S_{jh} =: \rho_{jh} - \rho g_{jh}/2$ , dove  $\rho_{jh} =: \rho_j^k{}_{kh}$  e  $\rho$  è la sua traccia  $\rho_j^j$  (vedi (3.4.2, 15)) per trovare che le sue componenti miste sono espresse da  $S_j^h = \kappa(n-1)(n-2)\delta_j^h/2$ . Ma  $S_j^h$  deve comunque avere le sue  $n$  divergenze identicamente nulle (vedi (3.4.2, 16)) e quindi deve essere  $\kappa_{,i} \equiv \partial\kappa/\partial x^i \equiv 0$ , o  $\kappa \equiv \text{cost}_x$  per  $n > 2$ , qed. La dimostrazione cade per  $n = 2$  perché allora  $S_j^h$  è identicamente nullo.

Chiudiamo questa sottosezione con una utile osservazione. In molte delle formule della geometria p.riemanniana, i coefficienti di Christoffel compaiono in modo tale che il loro possibile annullarsi, in uno specifico punto di interesse, condurrebbe a comode semplificazioni (ovviamente limitate a quel punto); ad esempio si potrebbero ignorare i termini bilineari nei  $\Gamma$ ; nell'espressione del tensore di Riemann. È quindi di notevole interesse pratico verificare che esistono infinite carte locali nelle quali questo è possibile. Senza limitare la generalità, diamo al punto in oggetto coordinata  $x = 0$  nella carta corrente, e consideriamo la trasformazione

$$(22) \quad x^k = \alpha_{k'}^k x^{k'} + \beta_{i'j'}^k x^{i'} x^{j'}/2 + \dots,$$

dove  $\alpha_{k'}^k, \beta_{i'j'}^k \dots$  sono coefficienti da determinare sotto la condizione che  $(^\circ) \det\{\alpha_{k'}^k\}_{k',k=1=n} \neq 0$  e che i  $\beta_{i'j'}^k \dots$  siano simmetrici rispetto agli indici inferiori. (In realtà i termini successivi al secondo nel 2° membro della (22) possono pensarsi tutti nulli senza perdita di generalità ai fini presenti). La trasformazione (22) è evidentemente non singolare in  $x = x' = 0$ , e quindi localmente invertibile rispetto a  $x'$ . Sfruttando le (13), si possono infatti effettivamente determinare infinite trasformazioni di tipo (22) tali da rendere nulli i  $\Gamma$ ; in  $x = x' = 0$ : come si verifica subito, basta imporre i vincoli

$$(23) \quad \beta_{i'j'}^k = -\alpha_{i'}^i \alpha_{j'}^j \Gamma_{ij}^k|_0$$

(dove  $|_0$  significa "per  $x = x' = 0$ ") ai coefficienti del sopravvissuto sviluppo. (La simmetria dei  $\beta$  si accorda allora con quella dei  $\Gamma$ , mentre gli  $\alpha$  restano arbitrari entro la condizione  $(^\circ)$ .)<sup>12</sup> Le coordinate locali in cui si annullano i coefficienti di Christoffel si dicono **localmente geodetiche** (o anche localmente **normali**, o localmente **inerziali** nel linguaggio della relatività generale).

## 8.2.2) GEOMETRIA DELLE VARIETÀ ELEMENTARI A CONNESSIONE AFFINE

Ci occuperemo ora del caso (che abbiamo detto (iii) nella S.sez. 8.2.1) in cui la varietà  ${}^{r \geq 2}M^n \equiv M$  è *priva di tensore fondamentale* ma è dotata di una connessione (continua)  $\Lambda$ ; soddisfacente alla legge di trasformazione (8.2.1, 13) con  $\Lambda$  in luogo di  $\Gamma$ , legge che in questa sottosezione scriveremo come

$$(13_\Lambda) \quad \Lambda_{i'}^{k'} j' = \wp_{i'}^i \wp_{j'}^j \wp_p^{k'} \Lambda_{ij}^p + \wp_{i'}^{k'} \wp_{i'j'}^i.$$

La geometria differenziale che si potrà istituire su  $M$  partendo da questi presupposti è più debole, ma ancora di notevole interesse, di quella p.riemanniana. L'elemento di novità della

<sup>12</sup> La procedura è usualmente limitata alle varietà p.riemanniane, ma potrebbe estendersi senza modifiche a varietà a connessione simmetrica. Si noti che la richiesta che la connessione si annulli in tale  $x = 0$  dopo tutto implica una richiesta di simmetria in  $x = 0$ . La (23) vale poi, con lo stesso risultato, per una connessione  $\Lambda$  arbitraria, purché in luogo dei  $\Gamma_{ij}^k|_0$  a 2° membro si pongano i coefficienti *simmetrizzati*  $\Lambda_{(ij)}^k|_0$ .

presente illustrazione di questa geometria (rispetto alle anticipazioni che ne abbiamo dato nella S.sez. 4.3.2), è ancora la scelta del trasporto per parallelismo come strumento concettuale di base.

Alla luce delle (8.2.1, 7), è naturale introdurre una **t-derivata assoluta**  $D_t$  del  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore  $u'$  lungo  $L$  attraverso le:

$$(1) \quad (D_t u)^i =: d_t u^i + \Lambda_{h k}^i u^h d_t x^k.$$

L'annullarsi di  $D_t u$  si definisce come il **trasporto parallelo di  $u$  lungo  $L \subset M$**  (affinementemente connessa). È significativo che le  $(D_t u)^i$  si trasformino come componenti di un  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore a fronte di un cambiamento di carta. La prova consiste in una verifica diretta, nella quale è ancora utile tenere presente il legame tra le derivate seconde delle coordinate,  $\partial^2 x^k / \partial x^i \partial x^j$ , e i coefficienti di connessione  $\Lambda$ :

$$(2) \quad \varphi_{i' j'}^k = \varphi_{k'}^{k'} \Lambda_{i' j'}^{k'} - \varphi_{i'}^i \varphi_{j'}^j \Lambda_i^k,$$

che si deriva dalla (13 $_{\Lambda}$ ). Quindi se vale la (13 $_{\Lambda}$ ), il fatto che un  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore venga trasportato parallelamente lungo  $L$  non dipende dalla carta prescelta: il trasporto parallelo di  $u$  è un fatto “intrinseco”, caratterizzato dalla relazione manifestamente carta-indipendente  $D_t u = 0$ .<sup>13</sup>

Similmente, a partire dalle (8.2.1, 14) si prova che, sempre sotto la (13 $_{\Lambda}$ ), se  $u = u_h dx^h$ , le

$$(3) \quad (D_t u)_h =: d_t u_h - \Lambda_{h j}^k u_k d_t x^j$$

si trasformano come componenti di un  $\langle 1,0 \rangle$ -vettore a fronte di un cambiamento di carta. Si noti, confrontando i secondi membri della (1) e della (3), che gli operatori lineari agenti sulle  $u'$  e sulle  $u$ , sono diversi. Conviene memorizzare questa diversità, esattamente come nella geometria p.riemanniana si memorizza la definizione dell'operatore “derivata covariante” di una componente vettoriale controvariante, che è diversa da quella della stessa derivata covariante di una componente vettoriale covariante. Del resto la (1) e la (3) si riducono proprio a tale derivata covariante quando  $L$  si identifichi con una curva coordinata e si ponga  $\Gamma$  in luogo di  $\Lambda$ . Cioè, per  $t \equiv x^d$ , il 2° membro della (1) diventa  $\partial u^i / \partial x^d + \Gamma_{h k}^i u^h \delta_d^k = \partial u^i / \partial x^d + \Gamma_{h d}^i u^h = u_{|d}^i$ , e quello della (3) diventa  $\partial u_h / \partial x^d - \Gamma_{h d}^j u_j = u_{h/d}$ . Poiché  $(D_t u)^i \partial / \partial x^i = (D_t u)_h dx^h$ , l'annullarsi delle  $(D_t u)^i$  equivale a quello delle  $(D_t u)_h$ , e naturalmente si definisce ancora come il trasporto parallelo di  $u$  lungo  $L$ .

In modo analogo e facilmente ricostruibile si definisce la t-derivata assoluta lungo  $L$  di un generico  $\langle a,b \rangle$ -tensore, con il risultato che, sempre sotto la (13 $_{\Lambda}$ ), tale t-derivata si trasforma come un  $\langle a,b \rangle$ -tensore a fronte di un cambiamento di carta.<sup>14</sup> Ancora, l'annullarsi della t-derivata assoluta

<sup>13</sup> Confrontata con la definizione di  $D_t u$  data nella S.sez. 8.1.3, (°)  $(D_t u)^i = d_t u^i + \Gamma_{k j}^i u^k d_t q^j$ , la (1) ne differisce soltanto per la sostituzione di  $\Gamma$  con  $\Lambda$  e di  $q$  con  $x$ . Quindi la (°) può vedersi a tutti gli effetti come *un caso particolare della* (1).

<sup>14</sup> Come ricordato nella nota precedente, una versione della (1) era già stata data a proposito di una varietà  $n$ -dim  $S$  immersa in  $E_{n+1}$  facendo esplicito ricorso alla proprietà di immersione. Questo non era strettamente necessario, nel senso che le  $(D_t u)^i$  si potevano introdurre *induttivamente* in modo più diretto come segue. Sia sempre  $q = q(t)$  l'equazione della curva  $L$  di  $S$  nella carta  $(q)$ , e sia  $u = u(t)$  un vettore dato lungo di essa. Si parta dall'usuale legge di



di tale  $\langle a,b \rangle$ -tensore significa che esso è trasportato parallelamente lungo  $L$ . Esiste tuttavia una diversità sostanziale tra la derivata assoluta e la derivata covariante di un dato  $\langle a,b \rangle$ -tensore: nel primo caso si ha ancora un  $\langle a,b \rangle$ -tensore, mentre nel secondo si passa ad un  $\langle a+1,b \rangle$ -tensore. Questo è ben naturale, perché se si pone  $\Gamma$  al posto di  $\Lambda$  in  $D_t$ , rientrando così nella geometria p.riemanniana, si trova

$$(4) \quad (D_t \tau)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} /_d d_t x^d,$$

per qualunque tipo di  $\langle a,b \rangle$ -tensore  $\tau$ . Ancora riferendoci ad una varietà p.riemanniana, se in particolare si applica la (4) al tensore metrico, si trova  $(D_t g)_{ik} = g_{ik/d} d_t x^d = 0$ , perché come sappiamo è  $g_{ik/d} \equiv 0$ . Quindi in una varietà p.riemanniana la derivata assoluta del tensore fondamentale lungo una qualsiasi  $C^1$ -curva è identicamente nulla.

Tornando alla geometria differenziale di una varietà a connessione affine, dobbiamo osservare che nulla vieta di conservare validità alla (4), *definendo* le **derivate covarianti**  $/_d$  in tale varietà mediante le *stesse* formule ricavate o indotte per una varietà immersa o rispettivamente p.riemanniana, ma sostituendovi i  $\Gamma$  con i  $\Lambda$  (sui quali ultimi non si farà alcuna ipotesi di simmetria). Esamineremo nel seguito della sottosezione alcuni sviluppi di questa importante generalizzazione.

Con la terminologia che si usa comunemente in questi casi, diremo “propriamente affine” una connessione  $\Lambda$  non riconducibile ad un campo  $\langle 2,0 \rangle$ -tensoriale simmetrico non singolare che la “generi” (cfr. S.sez. 4.3.2), e soltanto “affine” una connessione che a priori può essere tanto propriamente affine quanto p.riemanniana (come una connessione p.riemanniana  $\Gamma$  può essere tanto “propriamente” p.riemanniana quanto p.euclidea). Una varietà  $r \geq 2 M^n \equiv M$  con connessione affine  $\Lambda$  potrà denotarsi genericamente con il simbolo  $\{M, \Lambda\}$ .

La linearità delle equazioni che definiscono il trasporto parallelo su una  $\{M, \Lambda\}$  implica che (i) se due  $\langle a,b \rangle$ -tensori sono trasportati parallelamente lungo la curva  $L$  allora lo è anche una loro qualsiasi combinazione lineare; e (ii) che se due  $\langle a,b \rangle$ -tensori sono linearmente indipendenti in un punto di  $L$ , allora restano tali lungo l'intera  $L$ , essendovi stati trasportati parallelamente. Come già

trasformazione delle componenti controvarianti di  $u$ ,  $(\dagger) u^i = u^k \phi_k^{i'}$ . Derivandola rispetto a  $t$  otteniamo  $(\circ) d_t u^{i'} = d_t u^k \phi_k^{i'} + u^k d_t \phi_k^{i'}$ . La presenza del termine con le derivate seconde a 2° membro dice che le  $d_t u^i$  non si trasformano come componenti controvarianti di un vettore; ma proprio tale termine, messo a confronto con la legge di trasformazione (3.3.2, 16) dei Chr2, suggerisce di introdurre le  $(D_t u)^i$  come  $(*) (D_t u)^i =: d_t u^i + \Gamma_{hk}^i u^h d_t q^k$ . Per verificare che esse si trasformano davvero come componenti *controvarianti* di un vettore, basta tener conto delle (3.3.2, 16),  $(\dagger)$ , e  $(\circ)$ , e manipolarle in modo opportuno. Precisamente, riscriviamo la  $(*)$  nella carta  $(q')$  ponendo un apice su gli indici di  $u$ , su quelli di  $\Gamma$  e di  $q$ , e poi eliminiamo  $d_t u^{i'}$  mediante le  $(\circ)$ ,  $\Gamma_{h'k'}^{i'}$  mediante le (3.3.2, 16), e  $u^{h'}$  mediante le  $(\dagger)$ . I due termini nelle derivate seconde si elidono, e restiamo con  $(D_t u)^{i'} = (d_t u^k + \Gamma_{hk}^i u^h d_t q^k) \phi_k^{i'} \equiv (D_t u^k) \phi_k^{i'}$ , qed. Similmente si procederebbe avendo introdotto le  $(D_t u)_j$  come  $d_t u_j - \Gamma_{jk}^h u_h d_t q^k$  (cfr. eq.(17)), che risultano trasformarsi come componenti *covarianti* di un vettore (cioè,  $(D_t u)_{i'} = (D_t u)_h \phi_{i'}^h$ ).

osservato, in una  $\{M, \Lambda\}$  a connessione *propriamente* affine viene a mancare la nozione di (pseudo)modulo di un vettore, ecc.

Due varietà equidimensionali a connessione affine  $\{M, \Lambda\}$ ,  $\{M', \Lambda'\}$  tra i punti delle quali esista una corrispondenza biunivoca ( $p \leftrightarrow p'$ ) si dicono **equivalenti rispetto alla connessione**, o **connesso-equivalenti** (“c.equivalenti”), se su di esse esistono due carte con la corrispondenza biunivoca ( $x \leftrightarrow p \leftrightarrow p' \leftrightarrow x'$ ) e tali che  $\Lambda(x) = \Lambda'(x')$ . È ovvio che la c.equivalenza è una relazione di equivalenza. Se una varietà elementare n-dim a connessione affine è c.equivalente a  $E_n \equiv \mathbb{R}^n$  (o a una regione *connessa* di  $E_n$ ) esiste dunque in essa, per definizione, una carta in cui la connessione è identicamente nulla; e poiché questa è (banalmente) simmetrica, e la simmetria si conserva attraverso la legge di trasformazione  $(13_\Lambda)$ , la connessione trasformata in un'altra carta (generalmente non nulla per il carattere *affine* della  $(13_\Lambda)$ ) deve risultare comunque simmetrica. Del resto se la connessione è nulla in una certa carta, in quella carta le componenti di un tensore restano inalterate sotto trasporto parallelo; e questo fatto resta valido in qualunque carta, essendo, come abbiamo visto, carta-indipendente. Inoltre si vede che in una tale varietà il tensore risultante dal trasporto parallelo lungo una curva di dati estremi, da un estremo all'altro, non deve dipendere dalla curva ma solo dagli estremi, come avviene in  $E_n$ . In particolare, un tensore trasportato per parallelismo lungo una qualsiasi curva *chiusa* deve rimanere inalterato dopo aver compiuto un giro lungo di essa.<sup>15</sup> Questo fatto si denomina come proprietà del **parallelismo assoluto**.

Almeno localmente, vale anche il contrario, cioè vale il teorema

T2. «Se in una varietà elementare  $r \geq 2$   $M^n \equiv M$  connessa e a connessione affine *simmetrica* il trasporto per parallelismo lungo curve chiuse arbitrarie non altera il generico tensore trasportato – se cioè su  $M$  vige il parallelismo assoluto – allora la varietà è localmente c.equivalente a  $E_n$ .» Di questo teorema daremo qui appresso una dimostrazione costruttiva determinando, a partire dalle ipotesi, una particolare carta (locale)  $C$  (la scriviamo corsiva per distinguerla dalle carte correnti) in cui

$$(5) \quad {}^c\Lambda_{\cdot} \equiv 0.$$

Dim: Sia  $\underline{p}$  un punto-base arbitrario di  $(M, \Lambda)$  ed  $L$  una curva di classe  $C^1$  arbitraria passante per  $\underline{p}$ . Trasportiamo parallelamente lungo  $L$  una base dello spazio tangente  $T_{\underline{p}}$ ; questo genera un continuo di basi  $\{\eta_1(x) \dots, \eta_n(x)\}$  di CdC 1 nei  $T_{\underline{p}}$  lungo  $L$  intorno a  $\underline{p}$  (come sappiamo il carattere di base – essenzialmente l'indipendenza lineare – si conserva sotto trasporto parallelo). Per ipotesi, nella carta corrente  $C$  vale il SDP

$$(6) \quad \partial \eta^j / \partial x^p = - \Lambda_{\cdot k}^j \eta_p^k$$

<sup>15</sup> Si ricordi che le varietà elementari di cui ci occupiamo sono assunte connesse (cioè a dominio  $V$  connesso) e che questa proprietà è carta-indipendente.

$\forall p = 1, \dots, n$ , e dove i  $\Lambda_i^j$  vanno pensati come funzioni (continue) date di  $x$ . Qui abbiamo scritto l'indice  $(p)$  corsivo per significare che esso si limita per il momento a contrassegnare un vettore di una  $n$ -pla di vettori, o una coordinata di una  $n$ -pla di coordinate. Consideriamo poi il seguente SDP nelle  $n$  funzioni  $x^k$  di certe  $n$  variabili (reali)  $y^p$ :

$$(7) \quad \partial x^k / \partial y^p = \eta_p^k(x(y)),$$

e dimostriamo che esso ha un'unica soluzione intorno a  $y = y_{\underline{x}}$  (dove  $\underline{x}$  corrisponde a  $\underline{p}$  nella carta  $C$ ) sotto la condizione iniziale

$$(8) \quad x(y_{\underline{x}}) = \underline{x}.$$

Secondo il teorema di Frobenius, la condizione di integrabilità del SDP (6) è infatti che le  $\eta_q^h \partial \eta_p^k / \partial x^h$  siano simmetriche,  $\forall k$ , rispetto agli indici  $(p, q)$ ; ovvero, sostituendovi le (2), che lo siano le  $\Lambda_i^k \eta_p^i \eta_q^h$ . Questo è assicurato dall'assunta simmetria delle connessioni  $\Lambda_i^j$ . Quindi le funzioni  $x = x(y)$  soddisfacenti alle (7, 8) esistono uniche e di CdC 2 in un intorno di  $y_{\underline{x}}$ . Inoltre lo jacobiano  $\det\{\partial(x)/\partial(y)\}$  è uguale a  $\det\{\eta_p^k\}_{p,k=1, \dots, n}$ , che è diverso da zero perché le  $\eta_p$  sono linearmente indipendenti. Questo ci permette di considerare le  $y$  come coordinate locali intorno a  $\underline{x}$ . Affermiamo che tali coordinate individuano una carta (locale)  $C$  nella quale valgono le (5). Infatti in tale carta (il corsivo degli indici significa che essi si riferiscono alla carta  $C$ )

$$(9) \quad \eta_p^q = \eta_p^k \partial y^q / \partial x^k = \partial x^k / \partial y^p \partial y^q / \partial x^k = \delta_p^q,$$

e quindi le equazioni del trasporto parallelo dei vettori  $\eta_p$  lungo la curva di classe  $C^1$  di parametro  $t$ , espresse nella carta  $C$ , sono

$$(10) \quad 0 = d_t \eta_p^q = -\Lambda_r^q \eta_p^r d_t y^s = -\Lambda_p^q d_t y^s$$

$\forall (p, q)$ . Ma  $L$ , e quindi i  $d_t y^s$ , sono arbitrari, per cui  $\Lambda_p^q \equiv \Lambda_p^q \equiv 0$ , qed. #

Va da sé, infine, che il ragionamento resta valido se allo spazio euclideo  $E_n$  si sostituisce un generico spazio  $p$ -euclideo  $E_{n,\pi}$ , perché  $E_n$  e  $E_{n,\pi}$  sono banalmente  $c$ -equivalenti.

Nella S.sez. 8.1.2 abbiamo reintrodotta, nella presente nuova linea logica, quella nozione di curva geodetica di una varietà immersa (vedi 8.1.2, 1) che già conoscevamo dalla S.sez. 6.2.2 (in una varietà riemanniana) per averla discussa dal punto di vista del calcolo delle variazioni. La definizione si estende facilmente al caso di una  $\langle r \geq 2, n \rangle$ -varietà riemanniana  $(M, g)$ . Precisamente, per definizione è geodetica di una tale varietà una curva il cui versore tangente è trasportato parallelamente lungo di essa. Detta  $x = x(s)$  l'equazione (con  $x(s)$  di CdC 2) di una tale geodetica parametrizzata nella sua lunghezza con segno  $s$  a partire da una origine, risulta

$$(11) \quad d_s^2 x^j + \Gamma_{ik}^j d_s x^i d_s x^k = 0,$$

dove i  $\Gamma_i^j$  sono al solito i Chr2 di  $M$ , per ipotesi continui. Gli usuali teoremi di esistenza/unicità ci consentono di affermare che per ogni punto  $\underline{p}$  di  $M$  passa una e una sola geodetica con direzione

iniziale  $d_s x|_p = b$ ,  $b$  essendo un *versore* dato ad arbitrio. (Sappiamo che il modulo di un generico vettore trasportato parallelamente lungo una curva generica si conserva lungo di essa.)

La situazione è un po' diversa in una varietà con data connessione affine  $\Lambda$ :. Le diversità, rispetto alle (11), sono (i): che non possiamo più usare la lunghezza con segno come parametro, ma soltanto un generico parametro  $t$  per rappresentare la geodetica; e (ii) che assegnare la direzione iniziale significa assegnare  $d_t x|_{\underline{t}}$  (dove  $\underline{t}$  è il valore iniziale del parametro) *a meno di un fattore*  $k \neq 0$  arbitrario, diciamo come

$$(12) \quad d_t x|_{\underline{t}} = kb,$$

dove  $b$  è un vettore arbitrario. Ma indipendentemente dal valore di  $k$ , la geodetica in questione è ancora unica: infatti se  $(*) x^* = x^*(t)$  descrive la geodetica (unica) corrispondente a  $k = 1$ , la curva descritta dalla  $(^\circ) x = x(t) =: x^*(kt)$  soddisfa sia le (11) che le (12). Essa è dunque la geodetica cercata, e coincide con la precedente (cambia soltanto la sua rappresentazione come funzione di  $t$ , che passa dalla  $(*)$  alla  $(^\circ)$ ).

Naturalmente queste conclusioni sono valide a fortiori per una varietà p.riemanniana. Ma in tale caso, possiamo identificare il parametro della curva con la sua pseudolunghezza con segno (a partire da una origine), purché il pseudoversore tangente non sia mai un generatore del cono  $(n-1)$ -dim singolare *locale* di equazione  $g_{ik} \xi^i \xi^k = 0$ . (Se poi la varietà è uno spazio p.euclideo, e gli estremi della geodetica giacciono su un generatore del cono singolare, la geodetica è *per definizione* il segmento di generatore compreso tra gli estremi dati.)

Vediamo ora come si modifica, nel caso di una generica varietà a connessione affine  $\{\overset{r \geq 2}{M}^{n \geq 2}, \Lambda\}$ , la costruzione del circuito infinitesimo descritto dalla (8.1.3, 4) per una varietà immersa. Se la varietà è p.riemanniana, o comunque a connessione *simmetrica*, non c'è niente da modificare. Basta sostituire formalmente, nella (8.1.3, 4), gli  $n$  parametri  $q$  con le  $n$  coordinate  $x$ , e  $\Gamma$  con  $\Lambda$ : il percorso resta chiuso a meno di termini  $o(d\delta) = o(\varepsilon^2)$ , e forma un (quasi-)parallelogramma. Questo cessa invece di valere di valere se  $2\Lambda_{[\Gamma^j k]}^j \equiv \sigma_{ik}^j \neq 0$ . Infatti, in luogo della (8.1.3, 4) si trova:

$$(13) \quad (d\delta - \delta d)x^i = -(\Lambda_j^i \delta x^j dx^h - \Lambda_j^i dx^j \delta x^h) + o(\varepsilon^2) = -\sigma_{jh}^i \delta x^j dx^h + o(\varepsilon^2),$$

e dunque i due rami opposti del percorso portano a punti generalmente diversi *già al 2° ordine in  $\varepsilon$*  per la presenza del  $\langle 2,1 \rangle$ -tensore  $\sigma$ ..: a 2° membro, antisimmetrico negli indici inferiori.

Altrettanto interessanti sono le conseguenze di una possibile assenza di simmetria della connessione sul  $\langle 3,1 \rangle$ -tensore di curvatura  $\kappa$ ..: che fornisce il commutatore di due derivate covarianti – ad es. di un  $\langle 1,0 \rangle$ -tensore di CdC 2 – *definite* dalla (4). Rifacendo i calcoli che hanno portato alla definizione del 4-tensore di Riemann nel caso p.riemanniano (v. S.sez. 3.4.2, sotto

l'ipotesi che la CdC di g.. sia 2), si vede che vengono meno due elisioni che erano dovute alla simmetria dei Chr2, e che per questa ragione si ottiene

$$(14) \quad v_{i/kr} - v_{i/rk} = -v_j \kappa_{ikr}^j - v_{i/j} \sigma_{kr}^j,$$

dove  $\kappa_{...}$  è definito in termini dei  $\Lambda_{...}$  come il tensore di Riemann  $\rho_{...}$  è definito in termini dei  $\Gamma_{...}$ , cioè dalle:

$$(15) \quad \kappa_{ihk}^j =: \partial \Lambda_{i/h}^j / \partial x^k + \Lambda_{p/k}^j \Lambda_{i/h}^p - \text{alt}(h,k),^{16}$$

e  $\sigma_{kr}^j =: \Gamma_{[kr]}^j$  è il  $\langle 2,1 \rangle$ -tensore di torsione (antisimmetrico negli indici inferiori). Ovviamente adesso le possibili simmetrie/antisimmetrie di  $\kappa_{...}$  possono riferirsi soltanto agli indici inferiori. In forza della definizione, risulta

$$(16_1) \quad \kappa_{i(hk)}^j = 0,$$

$$(16_2) \quad \kappa_{ihk}^j + \text{cycl}(i,h,k) = (\sigma_{ih/k}^j + \sigma_{ip}^j \sigma_{hk}^p) + \text{cycl}(i,h,k).$$

Nelle (16<sub>2</sub>) compare ancora il  $\langle 2,1 \rangle$ -tensore di torsione, che nella versione p.riemanniana delle corrispondenti identità mancava in forza della simmetria dei Chr2. Le (16<sub>2</sub>) si dicono **1<sup>e</sup> identità generalizzate di Bianchi**. Sussiste inoltre la seguente versione generalizzata delle 2<sup>e</sup> identità di Bianchi (cfr. la (3.4.2, 11)), o **2<sup>e</sup> identità generalizzate di Bianchi**:

$$(17) \quad \kappa_{ihk}^j/d + \text{cycl}(h,k,d) = \sigma_{hk}^p \kappa_{ipd}^j + \text{cycl}(h,k,d).$$

Quanto alle formule di commutazione per le derivate 2<sup>e</sup> covarianti delle componenti del generico  $\langle a,b \rangle$ -tensore, esse diventano (cfr. la (3.4.2, 6)):

$$(18) \quad \tau_{i1...ia}^{j1...jb}/_{hk} - \tau_{i1...ia}^{j1...jb}/_{kh} = \sum_{s=1}^b \tau_{i1...ia}^{j1...j(s-1)tj(s+1)...jb} \kappa_{thk}^{(js)} - \\ - \sum_{s=1}^a \tau_{i1...i(s-1)ti(s+1)...ia}^{j1...jb} \kappa_{(is)hk}^t - \sigma_{hk}^p \tau_{i1...ia}^{j1...jb}/_p,^{17}$$

e sono dette talvolta **identità generalizzate di Ricci** (si ponga mente alle solite difettose notazioni degli indici!). Come nelle (16<sub>2</sub>) e nelle (17), vi è dunque anche in questo caso un contributo della torsione rispetto a quanto avviene in una varietà p.riemanniana. In particolare, se il tensore di torsione è diverso da zero *cade la commutabilità degli indici di derivazione* (ordinaria  $\equiv$  covariante) *di uno scalare*:  $\tau_{/hk} - \tau_{/kh} = -\sigma_{hk}^p \tau_{/p}$ .

Dal tensore di curvatura si ricavano (essenzialmente) due  $\langle 2,0 \rangle$ -tensori usando le tre possibili contrazioni. Essi sono:

$$(19_1) \quad \kappa_{ih} =: \kappa_{ijh}^j \quad (\text{per } \langle 2,1 \rangle\text{-contrazione});$$

$$(19_2) \quad -\kappa_{ih} =: \kappa_{ihj}^j \quad (\text{per } \langle 3,1 \rangle\text{-contrazione});$$

<sup>16</sup> Questo tensore di curvatura coincide, come è naturale, con quello introdotto nella illustrazione della teoria di Weyl, cfr. (4.3.2, 23).

<sup>17</sup> Ad evitare equivoci di origine tipografica: l'indice controvariante (tra parentesi) del tensore di curvatura nella prima somma a secondo membro delle (18) è  $j_s$ , e il primo indice covariante (tra parentesi) del medesimo nella seconda somma è  $i_s$ .

(19<sub>3</sub>)  $\kappa^*_{ih} =: \kappa_{jih}^j$  (per  $\langle 1,1 \rangle$ -contrazione), evidentemente antisimmetrico.

Con queste posizioni, si trova

$$(20) \quad \kappa_{hi} - \kappa_{ih} + \kappa^*_{ih} = \sigma_{ih}^j{}_{/j} + \sigma_{hj}^j{}_{/i} + \sigma_{ji}^j{}_{/h} + \sigma_{jp}^j \sigma_{ih}^p,$$

i cui due membri sono antisimmetrici in  $(i,h)$ ; il primo perché lo sono separatamente  $\kappa_{hi} - \kappa_{ih}$  e  $\kappa^*_{ih}$ , e il secondo perché lo sono separatamente il primo e il quarto termine e la somma del secondo e del terzo. Introducendo la  $(1,1)$ -contrazione  $\sigma_i =: \sigma_{ji}^j$  (**vettore di torsione**), la (20) può riscriversi nella forma  $\kappa_{hi} - \kappa_{ih} + \kappa^*_{ih} = \sigma_{ih}^j{}_{/j} + (\sigma_{i/h} - \sigma_{h/i}) + \sigma_p \sigma_{ih}^p$ , ove l'antisimmetria rispetto a  $(i,h)$  del 2° membro è anche più evidente. Quindi  $\kappa_{hi} - \kappa_{ih} + \kappa^*_{ih}$  è nulla sse la connessione è simmetrica; in questo caso,  $\kappa_{hi}$  è inoltre simmetrica sse  $\kappa^*_{ih}$  è nulla. (Ovviamente questo succede anche nel caso p.riemanniano, ove la connessione è simmetrica e  $\rho_{jhk}^j \equiv 0$  in forza della (3.4.2, 8<sub>2</sub>);  $\rho_{ijh}^j = \rho_{ih}$  diventa allora il tensore di Ricci, che è appunto simmetrico.) Tornando al tensore di curvatura  $\kappa_{\dots}$  e alle sue tracce, si vede subito che  $\kappa^*_{ih} = \partial \Lambda_{ji}^j / \partial x^h - \partial \Lambda_{jh}^j / \partial x^i$  in virtù della simmetria in  $(i,h)$  di  $\Lambda_p^j{}_{jh} \Lambda_j^p{}_{i}$ . Questo  $\langle 2,0 \rangle$ -tensore antisimmetrico si annulla quindi se  $\Lambda_{ji}^j$  può esprimersi come derivata (ordinaria) rispetto a  $x^i$  di una conveniente primitiva.

Enunceremo ora e proveremo un significativo risultato della geometria differenziale (del 2° ordine) di una varietà a connessione affine  $\{r \geq 2 M^n \equiv M, \Lambda\}$ . Le (18) mostrano che nel commutatore delle derivate covarianti seconde di un tensore  $\tau$  (di CdC 2) di qualunque ordine  $> 0$  e tipo compare un contributo della torsione, lineare nelle derivate covarianti prime di  $\tau$  stesso. Se  $r, t$  sono due parametri, sia ora  $x = x(r,t)$ , con  $\langle r,t \rangle$  in un aperto  $A$  2-dim connesso, incluso nel dominio  $U$  (della carta di  $M$ ), una 2-superficie di CdC 2 di  $M$ . Con la definizione di operatore di derivazione assoluta lungo una  $C^1$ -curva di un tensore di qualunque ordine e tipo, sono definite le derivate assolute  $D_r$  e  $D_t$  di quel tensore in  $A$  (nonostante i simboli usati, è chiaro che tali derivate sono da pensare come “parziali”); e se il tensore operando è di CdC 2 e i coefficienti  $\Lambda_{\dots}$  di CdC 1, anche le sue derivate assolute seconde  $D_r D_t$  e  $D_t D_r$ , nonché il relativo commutatore “assoluto”  $D_r D_t - D_t D_r$ . Il risultato consiste in questo, che, a differenza di quanto avviene per il commutatore “covariante” (eq. (18)), il contributo della torsione è *assente* nel commutatore assoluto! La dimostrazione non presenta difficoltà, e consiste in una verifica diretta. Riferendoci al solito ad un  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore  $u$ , abbiamo:

$$(21) \quad D_r(D_t u)^i = D_r(d_t u^i + \Lambda_{hk}^i u^h d_t x^k) = d_{rt}^2 u^i + d_r \Lambda_{hk}^i u^h d_t x^k + \Lambda_{hk}^i d_r u^h d_t x^k + \Lambda_{hk}^i u^h d_{rt}^2 x^k + \\ + \Lambda_{pj}^i \Lambda_{hk}^p u^h d_t x^k d_r x^j + \Lambda_{hk}^i d_t u^h d_r x^k,$$

ove  $d_r \Lambda_{hk}^i$  va espresso come  $\partial \Lambda_{hk}^i / \partial x^p d_r x^p$ . Passando al commutatore, cioè sottraendo dalla (21) la sua alternata rispetto a  $(r,t)$ , possiamo ovviamente ignorare il primo e il quarto addendo nel 3° membro. Dei rimanenti, i contributi del terzo e del sesto addendo si elidono, e si resta con quelli del

secondo e del quinto addendo, cioè con il prodotto di  $u^h d_r x^p d_t x^k$  per  $(\partial \Lambda_{hk}^i / \partial x^p - \partial \Lambda_{hp}^i / \partial x^k)$  e rispettivamente per  $(\Lambda_{jp}^i \Lambda_{hk}^j - \Lambda_{jk}^i \Lambda_{hp}^j)$ ; quindi con

$$(22) \quad D_r(D_t u)^i - D_t(D_r u)^i = \kappa_{hkp}^i u^h d_r x^p d_t x^k,$$

in cui non vi è traccia del tensore di torsione.

Questo risultato può suscitare qualche perplessità, dal momento che la derivata assoluta lungo una curva coordinata coincide con la corrispondente derivata covariante. È tuttavia facile lumeggiare il meccanismo di mutua cancellazione dei contributi della torsione nella (22) utilizzando la (4) per esprimere la derivata assoluta, cioè passando attraverso le derivate covarianti del vettore considerato, per poi servirsi delle (18). Mediante la (4), abbiamo anzitutto

$$(23) \quad D_r(D_t u)^i = [u^i_{/h} d_t x^h]_{/k} d_r x^k = u^i_{/hk} d_t x^h d_r x^k + u^i_{/h} (d_t x^h)_{/k} d_r x^k.$$

Sotto alternazione rispetto a (r,t) il primo addendo a 3° membro della (23) contribuisce

$$(24) \quad (u^i_{/hk} - u^i_{/kh}) d_t x^h d_r x^k = (u^p \kappa_{phk}^i - \sigma_{hk}^j u^i_{/j}) d_t x^h d_r x^k;$$

mentre il secondo addendo contribuisce  $u^i_{/h} [(d_t x^h)_{/k} d_r x^k - (d_r x^h)_{/k} d_t x^k]$ . Ma

$$(25) \quad (d_t x^h)_{/k} = \partial(d_t x^h) / \partial x^k + \Lambda_q^h{}^k d_t x^q,$$

e similmente per  $(d_r x^h)_{/k}$ . Poiché evidentemente  $\partial d = d\partial$ , e  $\partial x^h / \partial x^k = \delta_k^h$ , il primo addendo a 2° membro della (25) può ignorarsi, e si resta, dopo l'alternazione rispetto a (r,t), con  $u^i_{/j} \sigma_{hk}^j d_t x^h d_r x^k$ . Questo contributo della torsione *si elide* con quello a 2° membro della (24), e si ha così la (22), qed. Si conclude che, in una varietà a connessione affine, nel commutatore assoluto  $D_r D_t - D_t D_r$  compare soltanto il tensore di curvatura, mentre lo stesso è vero per il commutatore covariante soltanto se la connessione è simmetrica.

La (22) permette di affermare che, se in  $\{M^{n \geq 2}, \Lambda\}$  vige il parallelismo assoluto, allora il relativo  $\langle 3,1 \rangle$ -tensore di curvatura  $\kappa_{...}$  è identicamente nullo. Infatti, se per qualsiasi  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore  $u$  trasportato parallelamente lungo  $C^1$ -curve trasverse con parametri  $r$  e risp.  $t$ , si ha  $(D_t u)^{\cdot} = 0$  e  $(D_r u)^{\cdot} = 0$  nel punto di intersezione, allora è ivi  $D_r(D_t u)^{\cdot} - D_t(D_r u)^{\cdot} = 0$ , da cui la tesi segue per l'arbitrarietà di  $u$ . Ma vale anche il contrario. Siano  $A$  e  $B$  punti di  $M$  non troppo "lontani" (il senso di questa richiesta diverrà evidente in un momento) e sia  $x = x(r,t)$ ,  $t \in [0,1]$ , una famiglia di CdC 2 di curve di  $M$  ciascuna delle quali "targata"  $r$  (parametro reale in un intervallo  $H$ ), orientate da  $A$  a  $B$  per  $t$  crescente, per cui  $x(r,0) = x_A$ ,  $x(r,1) = x_B$  identicamente per  $r$  in  $H$ . (La sopraddetta famiglia è quindi per definizione connessa.) La tesi è che, se  $\kappa_{...}$  è nullo in  $M$ , un  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore  $u$  trasportato parallelamente da  $A$  (ove si suppone assegnato come  $u_A$ ) a  $B$  lungo la curva  $r$  arriva in  $B$  con un valore indipendente da  $r$ . Per ipotesi,  $\forall r \in H$  e  $\forall t \in [0,1]$ ,  $D_t u^{\cdot} = 0$ . Si può considerare la derivata assoluta  $D_r$  applicata a  $D_t u^{\cdot}$ , ottenendo  $D_r D_t = 0$  in  $H \times [0,1]$ , quindi, per l'ipotesi  $\kappa_{...} = 0$  in  $M$ ,  $D_t(D_r u)^{\cdot} = 0$  in  $H \times [0,1]$ . Questo significa che anche il  $\langle 0,1 \rangle$ -vettore  $(D_r u)^{\cdot}$  è trasportato

parallelamente lungo ogni curva della famiglia. Ma  $(D_r u)^i = d_r u^i + \Lambda_{u^i k}^h d_r x^k$ , e per  $t = 0$ , né  $x(r,0) = x_A$  né  $u(r,0) = u_A$  dipendono da  $r$ , cioè  $d_r x|_{t=0} = 0$  e  $d_r u|_{t=0} = 0$ . Allora anche  $(D_r u)^i|_{t=0} = 0 \forall r \in H$ ; ma  $D_t(D_r u)^i = 0$  in  $H \times [0,1]$ , per cui  $(D_r u)^i = 0$  in  $H \times [0,1]$  e in particolare  $(D_r u)^i|_{t=1} = 0$  per ogni  $r$  in  $H$ . D'altra parte è  $x|_{t=1} = x_B$ , cioè  $d_r x|_{t=1} = 0$  per ogni  $r \in H$ , e quindi  $d_r u|_{t=1} = 0$ : il valore di  $u$  al suo arrivo in  $B$  non dipende da  $r$ , cioè dalla curva che percorre tra  $A$  e  $B$ , qed. In conclusione, « $\{M, \Lambda\}$  ha la proprietà del parallelismo assoluto sse  $\kappa_{\dots} = 0$ ».

(Può essere utile, prima di chiudere la sezione, determinare le dimensioni delle grandezze introdotte. Per brevità, denoteremo qui con  $[\cdot]$  la dimensione della grandezza  $\cdot$ ,  $\dim(\cdot)$ . Dalle (13 $_{\Lambda}$ ) si ha subito  $[\Lambda_{\dots}][x] = 1$ . Di norma, la dimensione di una coordinata si identifica con quella di una lunghezza  $L$ ; *in tal caso*, la dimensione di  $\Lambda_{\dots}$  è  $[L]^{-1}$ , e quella di  $g_{\dots}$  è 1. Quanto alla dimensione di  $\kappa_{\dots}$ , abbiamo  $[\kappa_{\dots}] = [\Lambda_{\dots}][x]^{-1} = [x]^{-2}$ . Naturalmente questo deve valere anche per una varietà riemanniana, cioè per  $[\rho_{\dots}]$ . In effetti, passando (come non è obbligatorio) per il tensore fondamentale, si ha  $[\Gamma_{\dots}] = [g_{\dots}][x]^{-1}$ ,  $[g^{\dots}] = [g_{\dots}]^{-1}$ ,  $[\Gamma_{\dots}] = [\Gamma_{\dots}][g^{\dots}] = [\Gamma_{\dots}][g_{\dots}]^{-1}$ ; quindi  $[\rho_{\dots}] = [\Gamma_{\dots}][x]^{-1} = [\Gamma_{\dots}][g_{\dots}]^{-1}[x]^{-1} = [g_{\dots}][x]^{-1}[g_{\dots}]^{-1}[x]^{-1} = [x]^{-2}$ . Per una varietà riemanniana, una curvatura sezionale ha dimensione  $[\rho_{\dots}][g_{\dots}]^{-1} = [x]^{-2}[g_{\dots}]^{-1}$ , che è ancora  $[L]^{-2}$  se  $x$  è una lunghezza e  $g_{\dots}$  è adimensionale.)



## 8.3 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE III

### 8.3.1) ALGEBRA DEI CAMPI TENSORIALI SU VARIETÀ

Descrivere l'algebra tensoriale da un punto di vista strutturale-astratto non è altrettanto facile come imparare l'uso corretto delle sue regole. Come al solito, "lineare" starà nel seguito per "R-lineare". Mediante la procedura che descriviamo qui appresso, a partire da una famiglia di spazi lineari (questi ultimi in generale di dimensione numerab. infinita)  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbb{N} \equiv$  insieme dei naturali, si costruisce un particolare spazio lineare, la "somma diretta esterna di  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ", che si denota  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$ . Il supporto  $\Sigma$  di  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$  è definito come l'insieme delle successioni  $x \equiv \langle x_i \in E_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  aventi *al più* un numero finito di elementi non nulli. Ovviamente,  $\Sigma$  è un SI di  $\times_{i \in \mathbb{N}} E_i$  (prodotto cartesiano degli spazi della famiglia  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ), o  $\Sigma \subset \times_{i \in \mathbb{N}} E_i$ . Se scriviamo  $O_i$  per lo zero di  $E_i$ , la successione  $\langle O_1, O_2, \dots \rangle$  (ad esempio) appartiene a  $\Sigma$ . Daremo ora a  $\Sigma$  la struttura di spazio lineare come segue. Innanzitutto lo zero  $O$  di  $\Sigma$  sarà definito come  $\langle O_1, O_2, \dots \rangle$ . Se  $x \in \Sigma$  è diverso da  $O$ , la condizione "per ogni  $i \in \mathbb{N}$   $x_{i \notin I} = O_i$ " identifica unicamente un SI finito  $I = I(x)$  di  $\mathbb{N}$ . Siano  $x$  e  $y$  elementi di  $\Sigma$ , e  $I(x)$  e  $I(y)$  i relativi SI finiti di  $\mathbb{N}$ . Siano poi  $\alpha, \beta$  due reali arbitrari. Sia  $z =: \langle \alpha x_i + \beta y_i \in E_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ . Questa  $z$  è una successione di  $\Sigma$  che ha nulli tutti i termini salvo, possibilmente, quelli per cui  $i \in I(x) \cup I(y)$ . Ma il SI  $I(x) \cup I(y)$  di  $\mathbb{N}$  è certamente finito, e quindi  $z \in \Sigma$ . Tale  $z$  definisce allora la combinazione lineare  $\alpha x + \beta y \in \Sigma$  di  $\Sigma$ . Con questa definizione, e quella di  $O$ , è immediato verificare che  $\Sigma$  è uno spazio lineare, la predetta **somma diretta esterna** (o in breve **somma diretta**) di  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} E_i$ . A maggior ragione, la definizione funziona se in luogo di  $\mathbb{N}$  abbiamo un suo SI finito, diciamo  $N'$ , allorché  $\Sigma = \times_{i \in N'} E_i$ , e non più generalmente  $\Sigma \subset \times_{i \in \mathbb{N}} E_i$ . Per semplicità, nel seguito scriveremo  $0$  in luogo di  $O$ .

Nel caso dell'algebra tensoriale, al posto degli  $E_i$  abbiamo gli spazi lineari  $T_{\langle a, b \rangle}$  degli  $\langle a \geq 0, b \geq 0 \rangle$ -tensori, e quindi  $\bigoplus_{a, b=0}^{\infty} T_{\langle a, b \rangle} \equiv T$  è la relativa somma diretta. (Il fatto che gli indici siano ora due anziché uno è palesemente privo di importanza.) Dallo spazio lineare  $T$  si passa nel modo usuale ad un'algebra introducendovi un prodotto (ordinato) associativo e distributivo sia a sinistra che a destra. Vale a dire, denotando qui per semplicità mediante giustapposizione questo prodotto, e detto  $A$  l'anello risultante, per ogni  $x, y, z$  di  $A$  e ogni  $\alpha$  di  $\mathbb{R}$ , oltre agli assiomi di spazio lineare avremo gli assiomi di prodotto

$$(1) \quad x(yz) = (xy)z \text{ (di associatività);}$$

(2)  $x(y+z) = xy + xz$ ,  $(x+y)z = xz + yz$  (di distributività a sinistra, a destra);

(3)  $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$  (di associatività mista).

A questo quadro di algebra (reale) associativa, per ogni coppia  $(a \geq 1, b \geq 1)$  e ogni  $1 \leq p \leq a$ ,  $1 \leq q \leq b$ , si deve aggiungere una applicazione lineare  $C_{\langle p, q \rangle}: T_{\langle a, b \rangle} \rightarrow T_{\langle a-1, b-1 \rangle}$ , che è la  $\langle p, q \rangle$ -contrazione. L'algebra tensoriale è dunque un anello generalmente *non commutativo* avente per gruppo additivo (abeliano) una somma diretta esterna, e con  $ab$  contrazioni per ogni coppia  $(a \geq 1, b \geq 1)$ .

In realtà questa algebra non è stata qui "effettivamente" definita, perché non sono stati definiti né gli spazi  $T_{\langle a, b \rangle}$ , né il prodotto associativo, né le contrazioni. Rifacendoci tuttavia alla analisi presentata nella S.sez. 3.1.2 e ai teoremi (3.1.2,  $(T_0 \div T_5)$ ) conseguenti dagli assiomi (3.1.2, (I,II)), sappiamo che è comunque  $T_{\langle 0, 0 \rangle} = \mathbb{R}$ , inteso come spazio lineare 1-dim. Per uno spazio lineare  $n$ -dim  $E$ , poniamo  $F =: E^* =$  duale di  $E$  (quindi anch'esso  $n$ -dim), e definiamo  $T_{\langle 0, 1 \rangle} =: E$ ,  $T_{\langle 1, 0 \rangle} =: F$ . Siano inoltre  $G$  uno spazio lineare e  $\otimes$  un'applicazione bilineare di  $E \times F$  in  $G$  soddisfacenti gli assiomi (3.1.2, (I,II)), cioè per cui  $\vdash \{E, F, \otimes, G\}$  (v. S.sez. 3.1.2). Allora la coppia  $\{\otimes, G\}$  è *unica a meno di un isomorfismo lineare* (v. (3.1.2,  $(T_3)$ ), e possiamo convenire di scrivere  $G$  (che risulta  $n^2$ -dim, vedi (3.1.2,  $(T_1)$ )) come  $F \otimes E$ . A questo punto definiamo  $T_{\langle 1, 1 \rangle} =: F \otimes E$ . Infine  $(F \otimes F) \otimes E$  (che per quanto precede è uno spazio lineare  $n^3$ -dim) risulta linearmente isomorfo a  $F \otimes (F \otimes E)$  (v. (3.1.2,  $(T_5)$ ); scartando uno di questi due spazi in favore dell'altro, denotiamo il rimanente (ad es.  $F \otimes (F \otimes E)$ ) come  $F \otimes F \otimes E$ , e definiamo  $T_{\langle 2, 1 \rangle} =: F \otimes F \otimes E$ . Si prosegue quindi in modo analogo, definendo, per ogni  $a \geq 1, b \geq 1$ ,

(4)  $T_{\langle a, b \rangle} =: F \otimes \dots \otimes F$  ( $a$  fattori  $F$ )  $\otimes E \otimes \dots \otimes E$  ( $b$  fattori  $E$ ),

che è uno spazio lineare  $n^{a+b}$ -dim.

Sempre partendo dagli assiomi (3.1.2, (I,II)) e conseguenti teoremi, sia  $\{e_j\}_{j=1+n}$ , o in breve  $\{e_j\}_n$ , una base di  $E$ , e  $\{e^{*i}\}_{i=1+n}$ , o in breve  $\{e^{*i}\}_n$  (i cui elementi potremo scrivere senza asterisco), la base (duale) di  $E^* = F$ . Sappiamo allora che  $\{e^i \otimes e_j\}_{i,j=1+n}$ , o in breve  $\{e^i_j\}_n$ , è una base di  $T_{\langle 1, 1 \rangle}$ . Quindi proseguendo similmente per  $a \geq 1$  e  $b \geq 1$ ,  $\{e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_a} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_b}\} \equiv \{e^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}\}_{i_1, \dots, i_a=1+n; j_1, \dots, j_b=1+n}$ , o in breve  $\{e^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}\}_n$ , è una base di  $T_{\langle a, b \rangle}$ . Segue che il generico  $\langle a \geq 0, b \geq 0 \rangle$ -tensore  $\tau_{\langle a, b \rangle}$  si rappresenta come  $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} e^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}$  (somma da 1 a  $n$  sugli indici ripetuti), dove i  $n^{a+b}$  reali  $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$  sono le componenti di  $\tau_{\langle a, b \rangle}$  nella base  $\{e^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}\}_n$ , ed è invariante a fronte di trasformazioni lineari non singolari della base di  $E$  (quindi di  $F$ ) e delle corrispondenti trasformazioni delle componenti tensoriali. Anche nel caso in cui  $E$  e  $F$  sono generici spazi lineari di dimensioni finite senza legame tra loro, la base ottenuta sotto gli assiomi (3.1.2, (I,II)) da quelle di  $E$  e di  $F$  con la precedente procedura si dice **base fattorizzata** rispetto a quelle di  $E$  e di  $F$ , e gli assiomi stessi si dicono

**assiomi di fattorizzazione** (più precisamente, (3.1.2, I) è un semplice assioma di completezza, mentre (3.1.2, II) è il vero assioma di fattorizzazione).

Con questa definizione “unica a meno di isomorfismi” degli spazi lineari  $n^{a+b}$ -dim  $T_{\langle a,b \rangle}$ , sono definiti la loro somma diretta esterna  $T = \bigoplus_{a,b=0}^{\infty} T_{\langle a,b \rangle}$  (spazio lineare) e quindi l’anello  $A = \{T, \otimes\}$ . La definizione dell’**algebra tensoriale basata su E** (o equivalentemente su F) si completa con l’introduzione degli operatori (unari, lineari) di  $\langle p,q \rangle$ -contrazione (per  $a \geq 1$  e  $b \geq 1$ ), che qui introduciamo per semplicità “via componenti” secondo una ovvia generalizzazione della (3.1.1, 18). Per la data  $\{e_j\}_n$  e il dato  $\otimes$ , questa situazione permette di definire tutte le operazioni dell’algebra tensoriale così descritta in termini di corrispondenti operazioni sulle componenti tensoriali, ed è invariante rispetto a trasformazioni della base del tipo (3.1.1, 7) e della duale del tipo (3.1.1, 10) se le componenti tensoriali si trasformano secondo la corrispondente legge cogrediente o controgrediente.

Dall’algebra tensoriale basata su E si passa agevolmente all’algebra tensoriale in un punto arbitrario di una data varietà  $r$ -differenziabile e  $n$ -dim  $r \geq 1$   $M^n \equiv M$  (come abbiamo già osservato,  $n$  è comunque supposta  $\geq 1$ ). Precisamente, per ogni  $p \in M$ , (i) identifichiamo lo spazio lineare  $\langle a,b \rangle$ -tensoriale  $T_{\langle a,b \rangle} = T_{\langle a,b \rangle}(p)$  con la varietà lineare abbracciata dalla base  $e^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b}(p)$  generata per fattorizzazione dalla base canonica  $e_{1 \leq r \leq n}(p) = \partial_p / \partial x^r$  e dalla duale  $e^{1 \leq s \leq n}(p) =: d_p x^s$ , (nella carta corrente, e con le ovvie modifiche per  $a = 0$ ,  $b \geq 1$ , oppure  $b = 0$ ,  $a \geq 1$ , oppure  $a = b = 0$ ). In questo modo  $T_{\langle 0,1 \rangle}(p)$  [ $T_{\langle 1,0 \rangle}(p)$ ] diventa lo spazio tangente [cotangente] di  $M$  in  $p$ . Proseguiamo poi come in precedenza, introducendo (ii) la somma diretta esterna in  $p$ , cioè lo spazio lineare  $T(p) = \bigoplus_{a,b=0}^{\infty} T_{\langle a,b \rangle}(p)$ , (iii) il prodotto  $\otimes$  e il relativo anello (in  $p$ ) “di ordine  $n$ ”, e infine (iv) le contrazioni (in  $p$ ) via componenti. Il risultato è un’algebra tensoriale di ordine  $n$  “in  $p$ ”, cioè con tutte le sue operazioni definite tra tensori in  $p$  ed esprimibili univocamente in termini di componenti nella carta corrente.

Per istituire una “analisi” sulla sopraddetta varietà  $r \geq 1$   $M^n \equiv M$ , che supporremo qui elementare, occorre partire dalla nozione di “campo  $\langle a,b \rangle$ -tensoriale”, o “ $\langle a,b \rangle$ -campo”, su  $M$ . Supponiamo di avere una regola ( $\alpha$ ) che, ad ogni  $p \in M$ , fa corrispondere un (unico) elemento di  $T_{\langle a,b \rangle}(p)$ . Questa nozione *esula sostanzialmente da quella di applicazione* (di un insieme di partenza in un insieme di arrivo); infatti nel caso dell’applicazione l’insieme di arrivo deve essere indipendente dal valore della variabile nell’insieme di partenza, come evidentemente *non* è nel caso presente. Vi è tuttavia un modo naturale per superare questa difficoltà conservando la regola ( $\alpha$ ), e consiste nel considerare l’unione  $\cup_{p \in M} T_{\langle a,b \rangle}(p)$  (in cui  $M$  viene visto come insieme di indici) come insieme di arrivo di una genuina applicazione di  $M$ . Nel nostro caso, questa unione è il **fibrato**

$\langle a,b \rangle$ -**tensoriale**, o  $\langle a,b \rangle$ -**fibrato**, di  $M$ ,  $\mathcal{T}_{\langle a,b \rangle} \equiv \mathcal{T}_{\langle a,b \rangle}(M)$ .<sup>1</sup> Un  $\langle a,b \rangle$ -campo  $\tau_{\langle a,b \rangle}$  è allora una applicazione di  $M$  in  $\mathcal{T}_{\langle a,b \rangle}$ ,  $\tau_{\langle a,b \rangle}: M \rightarrow \mathcal{T}_{\langle a,b \rangle}$ , e l'insieme dei suoi valori  $\tau_{\langle a,b \rangle}(M) \subset \mathcal{T}_{\langle a,b \rangle}$  può vedersi come "sezione" di  $\mathcal{T}_{\langle a,b \rangle}$  lungo  $\tau_{\langle a,b \rangle}$ . Nella carta corrente, questa sezione si specifica assegnando le componenti  $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \in \mathbb{R}^{n^{*(a+b)}}$  come funzioni di CdC  $h \geq 1$  di  $x (\in \mathbb{R}^n) \leftrightarrow p (\in M)$ . Ad esempio, riferendoci alla carta corrente, un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo è un  $\langle 0,1 \rangle$ -tensore (vettore) funzione di  $p \in M$  del tipo  $v = v(p) = v^i(x) \partial_p / \partial x^i$  (somma su  $i$  da 1 a  $n$ ), e similmente un  $\langle 1,0 \rangle$ -campo è un  $\langle 1,0 \rangle$ -tensore (covettore) del tipo  $u = u(p) = u_j(x) d_p x^j$ . Se  $ab > 0$ , la CdC del campo  $\tau_{\langle a,b \rangle}(p)$  si definisce come  $\min(r-1, h)$ . La famiglia dei campi tensoriali su  $M$  riceve così, punto per punto di  $M$ , la struttura di un'algebra tensoriale di ordine  $n$ . Vale a dire, riferendoci alla struttura lineare di quest'algebra, se  $\tau_{\langle a,b \rangle} = \tau_{\langle a,b \rangle}(p)$  e  $\sigma_{\langle a,b \rangle} = \sigma_{\langle a,b \rangle}(p)$  sono  $\langle a,b \rangle$ -campi su  $M$ , la loro combinazione lineare (con  $\alpha$  e  $\beta$  reali arbitrari)  $\alpha \tau_{\langle a,b \rangle} + \beta \sigma_{\langle a,b \rangle} = (\alpha \tau_{\langle a,b \rangle} + \beta \sigma_{\langle a,b \rangle})(p)$  si definisce come il  $\langle a,b \rangle$ -campo su  $M$  che, in  $T_{\langle a,b \rangle}(p)$ , vale  $\alpha \tau_{\langle a,b \rangle}(p) + \beta \sigma_{\langle a,b \rangle}(p)$ ; ovvero, che in  $x \leftrightarrow p$  ha per componenti  $\alpha \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}(x) + \beta \sigma_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}(x)$ . Denotando con  $C_{\langle a,b \rangle} \equiv C_{\langle a,b \rangle}(M)$  ( $C$  come "campo") lo spazio lineare dei  $\langle a,b \rangle$ -campi su  $M$ , e introducendo la relativa somma diretta  $C = \bigoplus_{a,b=0}^{\infty} C_{\langle a,b \rangle} (= C(M))$ ,  $C$  risulta così essere il gruppo additivo (abeliano) di quell'algebra. Si passa poi all'anello associato introducendovi il prodotto ordinato  $\otimes$ <sup>2</sup>, e infine alla vera e propria **algebra dei campi tensoriali su  $M$**  aggiungendo nel modo ormai ovvio le contrazioni. È chiaro che questa algebra è invariante a fronte di cambiamenti di carta  $x \leftrightarrow x'$  sse le componenti tensoriali si trasformano secondo la legge (8.2.1, 3). Un  $\langle 0,0 \rangle$ -campo su  $M$  è una funzione reale definita su  $M$ , ed ha per definizione CdC uguale a  $\min(r, h)$ . I campi vettoriale  $v(p)$  e covettoriale  $u(p)$  possono poi moltiplicarsi ( $\otimes$ ) nell'ordine, producendo il campo  $\langle 1,1 \rangle$ -tensoriale  $v^i(x) \partial_p / \partial x^i \otimes u_j(x) d_p x^j$  (somme su  $i$  e  $j$ ), oppure contrarsi producendo il campo scalare  $v^i(x) u_i(x)$  (somma su  $i$ ); e infine, possono combinarsi linearmente in quanto elementi della somma diretta  $C$ .

### 8.3.2) DERIVAZIONE DI CAMPI TENSORIALI SU VARIETÀ ORDINARIE. DERIVATA DI LIE

Stabilita questa algebra dei campi tensoriali su  ${}^{\geq 1}M^n$ , definiremo come **derivazione** una applicazione  $D$  di  $C (\equiv C(M))$  in  $C$  che soddisfi le seguenti condizioni:

<sup>1</sup> Questo modo di vedere le cose mostra l'inevitabilità della nozione di  $\langle a,b \rangle$ -fibrato; almeno, finché si voglia evitare la considerazione delle cosiddette **multiapplicazioni con selezione**, che solitamente non trovano posto nei fondamenti primi della matematica.

<sup>2</sup> Cioè, se  $\tau_{\langle a,b \rangle}$  e  $\sigma_{\langle c,d \rangle}$  sono campi di  $C$ , il prodotto (ordinato)  $\tau_{\langle a,b \rangle} \otimes \sigma_{\langle c,d \rangle}$  è il  $\langle a+c, b+d \rangle$ -campo di  $C$  che in  $T_{\langle a+c, b+d \rangle}(p)$  vale  $\tau_{\langle a,b \rangle}(p) \otimes \sigma_{\langle c,d \rangle}(p)$ , ecc.

- (i)  $D$  è lineare rispetto a  $C$ , cioè tale che per arbitrari reali  $\alpha, \beta$ ,  $D(\alpha\tau + \beta\sigma) = \alpha D\tau + \beta D\sigma$  per ogni  $\tau$  e  $\sigma$  di  $C$ ;
- (ii)  $D$  preserva il tipo, cioè  $D(C_{(a,b)}) \subset C_{(a,b)}$ ;
- (iii)  $D$  è leibniziana rispetto a  $(+, \otimes)$ , cioè  $D(\tau \otimes \sigma) = D\tau \otimes \sigma + \tau \otimes D\sigma$  per ogni  $\tau$  e  $\sigma$  di  $C$ ;
- (iv)  $D$  commuta con una generica contrazione compatibile  $C_{(p,q)}$ , cioè  $DC_{(p,q)}\tau = C_{(p,q)}D\tau$  per ogni  $\tau$  di  $C_{(a \geq 1, b \geq 1)}$  e ogni  $1 \leq p \leq a$ ,  $1 \leq q \leq b$ .

Come sempre, in quanto segue si sottintende la somma alla Einstein, da 1 a  $n = \dim(M)$ , su indici ripetuti in alto e in basso. Nelle S.sezz. 8.1.3, 8.2.1 e 8.2.2 abbiamo introdotto la derivata assoluta, lungo una curva di una varietà differenziabile immersa, risp. pseudoriemanniana, e risp. a connessione affine, di un campo tensoriale dato su di essa. Il secondo e il primo caso sono evidentemente successive specializzazioni del terzo; e quindi, se la derivata assoluta in una varietà a connessione affine gode di una certa proprietà, a maggior ragione ne godono le derivate assolute in una varietà p.riemanniana e in una varietà immersa. Come abbiamo sostanzialmente anticipato nella S.sez. 4.3.2, si verifica che la derivata assoluta di un campo tensoriale definito e di  $CdC \geq 1$  in una varietà a connessione affine è *una derivazione*. La linearità ((i) del precedente paragrafo) è ovvia rifacendoci alla (8.2.2, 4), mentre il tipo è preservato (ii) perché la derivata covariante  $_{/d}$  aggiunge l'indice di covarianza  $_d$  che viene riassorbito dalla contrazione con il covettore  $d_i x^d$ . Quanto al carattere leibniziano (iii), esso è altrettanto evidente considerando il caso prototipo di un campo bivettoriale, diciamo di componenti covarianti  $u_i v_j$ , e lavorando, come è legittimo, su queste componenti (cfr. (4.3.2, (c))). Se  $\Lambda_{\cdot}^{\cdot}$  è la connessione affine della varietà, si ha:  $(u_i v_j)_{/d} = \partial(u_i v_j) / \partial x^d - u_i v_p \Lambda_j^p{}_d - u_p v_j \Lambda_i^p{}_d = (\partial u_i / \partial x^d - u_p \Lambda_i^p{}_d) v_j + u_i (\partial v_j / \partial x^d - v_p \Lambda_j^p{}_d) = u_{i/d} v_j + u_i v_{j/d}$ . La successiva contrazione con  $d_i x^d$  non altera il carattere leibniziano dell'operazione. Anche la commutabilità con le contrazioni (iv) (cfr. (4.3.2, (d))) si può verificare sul precedente campo bivettoriale. Da una parte risulta  $(u^i v_i)_{/d} = \partial(u^i v_i) / \partial x^d$ , perché  $u^i v_i$  è un campo scalare; e dall'altra, contraendo  $(u_i v_j)_{/d} = u_i v_{j/d} + u_{i/d} v_j$  rispetto agli indici  $(ij)$  si ottiene  $u^i v_{i/d} + u^i_{/d} v_i = u^i (\partial v_i / \partial x^d - v_p \Lambda_i^p{}_d) + (\partial u^i / \partial x^d + u^p \Lambda_p^i{}_d) v_i = \partial(u^i v_i) / \partial x^d$ . Quindi la derivata covariante commuta con la contrazione; e ancora la successiva contrazione con  $d_i x^d$  non altera il risultato. Un'ultima proprietà della derivata covariante di un  $\langle a, b \rangle$ -campo è infine quella (v) di rispettare possibili simmetrie o antisimmetrie del campo stesso: vale a dire, se il campo è simmetrico o antisimmetrico rispetto ad una coppia di indici inferiori o superiori anche la sua derivata covariante lo è. Proviamolo su un  $\langle 2, 0 \rangle$ -campo simmetrico  $\tau_{hk} = \tau_{kh}$ . Abbiamo  $\tau_{hk/d} = \partial \tau_{hk} / \partial x^d - \Lambda_h^m{}_d \tau_{mk} - \Lambda_k^m{}_d \tau_{hm}$ , e questa è evidentemente simmetrica rispetto allo scambio  $h \leftrightarrow k$  sotto l'ipotesi  $\tau_{hk} = \tau_{kh}$ . La stessa procedura prova che  $\tau_{kh/d} = -\tau_{hk/d}$  se  $\tau_{kh} = -\tau_{hk}$ . Le elementari generalizzazioni sono lasciate al lettore.

Si dimostra senza difficoltà che le proprietà ( $i \div v$ ) permangono per campi tensoriali relativi. Un campo tensoriale la cui derivata covariante sia identicamente nulla in un aperto della varietà si dice ivi “costante rispetto alla connessione affine della varietà”, e “universalmente costante” se costante rispetto a qualunque connessione affine.

Constatiamo insomma che, sotto le convenienti condizioni di regolarità, permane la possibilità di istituire una ragionevole analisi differenziale su una varietà elementare nonostante l'indebolirsi della sua struttura connessionale – fino al ridursi di questa alla semplice assegnazione di una connessione affine –, e per campi tensoriali arbitrari. È naturale chiedersi se sia possibile un passo ulteriore in questa direzione, quello cioè di ottenere lo stesso risultato su una varietà (elementare) abbastanza regolare ma *priva di qualsiasi struttura connessionale*, o come anche diremo, su una **varietà ordinaria**; vale a dire, se sia possibile definire su di essa una “derivata” di generici campi tensoriali *che sia una derivazione*. Supponiamo disponibile, come nel caso della derivata assoluta, un campo  $\langle 0,1 \rangle$ -tensoriale (o campo vettoriale) **pilota** di CdC 1, le cui componenti (ad es. controvarianti) nella carta corrente denoteremo con  $u^{1 \leq s \leq n}$ . Consideriamo dapprima il caso di un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo operando  $\tau$ , di componenti controvarianti  $\tau^{1 \leq i \leq n}$  nella stessa carta. L'idea è quella di generalizzare ad un tale  $\langle 0,1 \rangle$ -campo  $\tau$  la familiare nozione di “derivata secondo  $u$ ” di un campo scalare  $f$ , cioè  $u^s \partial f / \partial x^s$  (che è a sua volta un campo scalare). Sappiamo che le  $u^s \partial \tau^i / \partial x^s$  *non* sono componenti  $(\dot{\phantom{i}})$  di un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo; ma se la varietà fosse munita di una connessione  $\Lambda_{\cdot}$ , e quindi vi si potessero introdurre delle derivate covarianti, allora le  $u^s \tau^i /_{/s}$  lo sarebbero. Per le stesse ragioni sarebbero componenti  $(\dot{\phantom{i}})$  di un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo le  $\tau^s u^i /_{/s}$ , e quindi anche le differenze  $u^s \tau^i /_{/s} - \tau^s u^i /_{/s} = u^s \partial \tau^i / \partial x^s - \tau^s \partial u^i / \partial x^s + \tau^p u^q (\Lambda_{p\ q}^i - \Lambda_{q\ p}^i)$ . In forza delle leggi di trasformazione (8.2.1, 13), sappiamo che le differenze  $\Lambda_{p\ q}^i - \Lambda_{q\ p}^i$  sono *comunque* componenti  $(\dot{\phantom{i}})$  di un  $\langle 2,1 \rangle$ -campo, antisimmetrico rispetto agli indici inferiori, pari al doppio del  $\langle 2,1 \rangle$ -campo di torsione  $\sigma_p^i$ . Segue che, se la varietà fosse munita di una connessione  $\Lambda_{\cdot}$ , le  $\tau^p u^q (\Lambda_{p\ q}^i - \Lambda_{q\ p}^i)$  sarebbero componenti  $(\dot{\phantom{i}})$  di un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo, e dunque che, *indipendentemente dai valori dei coefficienti di connessione*, lo sarebbero anche le differenze  $u^s \partial \tau^i / \partial x^s - \tau^s \partial u^i / \partial x^s$ . Ciò induce a ricercare in modo autonomo, cioè prescindendo dall'effettiva esistenza di una connessione sulla varietà, la legge di trasformazione di queste differenze a fronte di un 2-diffeomorfismo  $x \leftrightarrow x'$ . Questo può essere fatto senza difficoltà partendo dalle leggi di trasformazione per controgredienza  $u^{i'} = \wp_p^{i'} u^p$  e  $\tau^{j'} = \wp_q^{j'} \tau^q$  (v. la (8.2.1, 3)). Ad esempio prendendo la  $u^{k'} \partial / \partial x^{k'}$  della seconda di queste otteniamo  $u^{k'} \partial \tau^{j'} / \partial x^{k'} = u^p \wp_p^{k'} (\wp_{sq}^{j'} \wp_{k'}^s \tau^q + \wp_q^{j'} \partial \tau^q / \partial x^s \wp_{k'}^s) = u^s (\wp_{sq}^{j'} \tau^q + \wp_q^{j'} \partial \tau^q / \partial x^s)$ ; e sottraendo da questa uguaglianza quella, ugualmente valida per ragioni di simmetria, che da essa si trae scambiando  $u$  con  $\tau$ , si ha

$$(1) \quad u^{k'} \partial \tau^{j'} / \partial x^{k'} - \tau^{k'} \partial u^{j'} / \partial x^{k'} = \wp_{sp}^{j'} (u^s \tau^p - \tau^s u^p) + \wp_p^{j'} (u^s \partial \tau^p / \partial x^s - \tau^s \partial u^p / \partial x^s) = \\ = \wp_p^{j'} (u^s \partial \tau^p / \partial x^s - \tau^s \partial u^p / \partial x^s),$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla simmetria della derivata seconda  $\wp_{sp}^{j'}$  rispetto agli indici  $s$  e  $p$ . Si ha così conferma del fatto che ci si aspettava: a fronte del cambiamento di carta 2-diffeomorfo  $x \leftrightarrow x'$ , le differenze  $u^s \partial \tau^p / \partial x^s - \tau^s \partial u^p / \partial x^s$  si trasformano come componenti di un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo. Considerato come trasformato del  $\langle 0,1 \rangle$ -campo  $\tau = \tau^i \partial / \partial x^i$ , il  $\langle 0,1 \rangle$ -campo  $(u^s \partial \tau^p / \partial x^s - \tau^s \partial u^p / \partial x^s) \partial / \partial x^p$  si dice **derivata di Lie** (Sophus, Nordfjordeid Norv. 1842, Kristiania-Oslo 1899) (o **Lie-derivata**) **secondo** (il campo vettoriale)  $u$  **del campo** (vettoriale)  $\tau$ , e si denota come  $\mathcal{L}_u \tau$ . La

(1) si trascrive così come

$$(2) \quad (\mathcal{L}_u \tau)^{j'} = \wp_q^{j'} (\mathcal{L}_u \tau)^q.$$

È chiaro che  $\mathcal{L}_u \tau$  è carta-indipendente. Inoltre, considerato come operatore agente su un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo,  $\mathcal{L}_u$  è lineare.

Una procedura strettamente analoga a quella che ha portato ad accertare il carattere di  $\langle 0,1 \rangle$ -campo di  $\mathcal{L}_u \tau$  quando  $\tau$  è un  $\langle 0,1 \rangle$ -campo permette di similmente accertare il carattere di  $\langle a,b \rangle$ -campo di  $\mathcal{L}_u \tau$  quando  $\tau$  è un  $\langle a,b \rangle$ -campo, se in questo caso generale  $\mathcal{L}_u \tau$  si definisce attraverso le sue componenti secondo la

$$(3) \quad (\mathcal{L}_u \tau)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} =: u^s \partial \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} / \partial x^s + \sum_{\alpha=1}^a \tau_{i_1 \dots i_{(\alpha-1)} s i_{(\alpha+1)} \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \partial u^s / \partial x^{(i\alpha)} - \\ - \sum_{\beta=1}^b \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_{(\beta-1)} s j_{(\beta+1)} \dots j_b} \partial u^{(j\beta)} / \partial x^s;$$

restando inteso che se  $a$  [b] fosse zero, non ci sarebbe la prima [la seconda] sommatoria a 2° membro, e (quindi) che se  $a$  e  $b$  fossero entrambi zero, non ci sarebbero né la prima né la seconda sommatoria. Con la definizione (3) è soddisfatta la legge di trasformazione

$$(4) \quad (\mathcal{L}_u \tau)_{i_1' \dots i_a'}^{j_1' \dots j_b'} = \wp_{q_1}^{j_1'} \dots \wp_{q_b}^{j_b'} (\mathcal{L}_u \tau)_{p_1 \dots p_a}^{q_1 \dots q_b} \wp_{i_1'}^{p_1} \dots \wp_{i_a'}^{p_a},$$

e quindi  $\mathcal{L}_u$  preserva il tipo. È evidente che le (3, 4) si riducono alle (1, 2) quando  $a = 0$ ,  $b = 1$ . La prova che la (3) implica la (4) si ottiene in modo naturale studiando il caso di un  $\langle a=1, b=1 \rangle$ -campo, perché il passaggio a quello di un  $\langle a>1, b=1 \rangle$ -campo, o di un  $\langle a=1, b>1 \rangle$ -campo, o infine di un  $\langle a>1, b>1 \rangle$ -campo, non fa altro che aggiungere termini simili, con gli stessi meccanismi, alla prima, alla seconda, o ad entrambe le sommatorie a 2° membro della (3). Oltre alla legge di trasformazione  $\tau_i^{j'} = \wp_q^{j'} \wp_i^p \tau_p^q$ , bisogna ora usare quella per  $u$ , per la sua inversa, e le loro derivate, al fine di eliminare dalla espressione di  $u^s \partial \tau_i^{j'} / \partial x^s$  i termini contenenti le derivate seconde  $\wp_{i's}^p$  e  $\wp_{qh}^{j'}$ , cioè

$$(5_1) \quad u^s \wp_{i's}^p = \wp_{i'}^h \partial u^p / \partial x^h - \wp_s^p \partial u^s / \partial x^{i'}, \text{ e}$$

$$(5_2) \quad u^h \wp_{qh}^{j'} = \wp_q^s \partial u^{j'} / \partial x^s - \wp_s^{j'} \partial u^s / \partial x^q.$$

Il risultato è  $u^s \partial \tau_i^j / \partial x^s + \tau_s^j \partial u^s / \partial x^i - \tau_i^s \partial u^j / \partial x^s = \wp_q^j (u^s \partial \tau_p^q / \partial x^s + \tau_s^q \partial u^s / \partial x^p - \tau_p^s \partial u^q / \partial x^s) \wp_i^p$ , cioè  $(\mathcal{L}_u \tau)_i^j = \wp_q^j (\mathcal{L}_u \tau)_p^q \wp_i^p$ , qed.

Il  $\langle a, b \rangle$ -campo la cui componente  $(i_1 \dots i_a \overset{j_1 \dots j_b}{})$  figura a 1° membro della (3),  $\mathcal{L}_u \tau$ , si dice **derivata di Lie** (o **Lie-derivata**) **secondo** (il campo vettoriale) **u del  $\langle a, b \rangle$ -campo**  $\tau \equiv dx^{p_1} \otimes \dots \otimes dx^{p_a} \tau_{p_1 \dots p_a}^{q_1 \dots q_b} \partial / \partial x^{q_1} \otimes \dots \otimes \partial / \partial x^{q_b}$ . In particolare nel caso  $a = b = 0$ , in accordo con le originali intenzioni la (3) fornisce la Lie-derivata secondo u dello scalare  $\tau \equiv f$  come  $u^s \partial f / \partial x^s$ . In base alla (3)  $\mathcal{L}_u$  è lineare in  $\tau$ , e in base alla (4) la Lie-derivata di un  $\langle a, b \rangle$ -campo è carta-indipendente. Con un accettabile abuso di notazione, di norma  $(\mathcal{L}_u \tau)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$  si scrive più brevemente  $\mathcal{L}_u \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ . Se la  $\mathcal{L}_u$  di un campo tensoriale è identicamente nulla in un aperto della varietà, quel campo si dirà ivi **Lie-costante** (o Lie-conservato) rispetto a u, e **universalmente Lie-costante** se Lie-costante rispetto a qualunque u. Infine, se  $\tau \equiv v$  è un campo vettoriale, le (3) danno  $(\mathcal{L}_u v)^i = u^s \partial v^i / \partial x^s - v^s \partial u^i / \partial x^s$ , evidentemente dispari rispetto allo scambio di u con v. Allora  $\mathcal{L}_u v$ , che è ancora un  $\langle 0, 1 \rangle$ -campo, usualmente si scrive  $[u, v]$ , e si dice **parentesi** (talvolta **commutatore**) **di Lie** della coppia ordinata di vettori  $\langle u, v \rangle$ . Pertanto avremo

$$(3^*) \quad [u, v]^i = u^s \partial_s v^i - v^s \partial_s u^i,$$

(o equivalentemente  $[u, v] = (u^s \partial_s v^i - v^s \partial_s u^i) \partial_i$ .) Si noti che se u e v sono elementi della stessa base canonica covariante, diciamo  $u = \partial_h$ ,  $v = \partial_k$ , quindi  $u^s = \delta^s_h$ ,  $v^t = \delta^t_k$ , allora  $[u, v] = \delta^s_h \partial_s (\delta^t_k \partial_t) - \delta^t_k \partial_s (\delta^s_h \partial_t) = \partial_h \partial_k - \partial_k \partial_h = 0$ . Viceversa, si potrebbe provare che se  $u_{1 \leq i \leq n}$  sono n campi vettoriali linearmente indipendenti per i quali  $[u_{(i)}, u_{(j)}] = 0 \quad \forall i, j = 1 \div n$ , allora esiste una carta  $\langle x \rangle$  per cui  $u_{(i)} = \partial / \partial x^i \equiv \partial_i$ .

Sia  $(U, \lambda)$  una carta di M,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione di M in  $\mathbb{R}$ , e  $f^\circ = f \circ \lambda^{-1}$ . Allora il vettore  $u = u(f)$  si definisce attraverso la  $u^s \partial_s f^\circ$  per ogni f (con  $f^\circ = f^\circ(x)$  regolare). Questo permette di scrivere  $[u, v](f)$  come  $u(v(f)) - v(u(f))$ , una definizione della parentesi di Lie che prescinde dalla carta.

Lasciamo al lettore, partendo dalla (3), la verifica dei seguenti asserti. (i): per arbitrari campi tensoriali  $\tau, \sigma$ , la  $\mathcal{L}_u$  del prodotto  $\tau \otimes \sigma$  soddisfa la regola di Leibniz, cioè  $\mathcal{L}_u(\tau \otimes \sigma) = \mathcal{L}_u \tau \otimes \sigma + \tau \otimes \mathcal{L}_u \sigma$ ; (ii) la  $\mathcal{L}_u$  di un qualunque  $\langle a \geq 1, b \geq 1 \rangle$ -campo commuta con ogni contrazione compatibile. Ad esempio, ancora nel caso di un  $\langle 1, 1 \rangle$ -campo  $\tau$ , abbiamo  $C_{\langle 1, 1 \rangle} \mathcal{L}_u \tau = (\mathcal{L}_u \tau)_t^t$  (abusivamente,  $\mathcal{L}_u \tau_t^t = u^s \partial \tau_t^t / \partial x^s - \tau_t^k \partial u^t / \partial x^k + \tau_k^t \partial u^k / \partial x^t = u^s \partial \tau_t^t / \partial x^s = \mathcal{L}_u C_{\langle 1, 1 \rangle} \tau$ , qed. In conclusione, la derivata di Lie di un campo di  $C(M)$  è una derivazione.

Come la derivata covariante, anche la  $\mathcal{L}_u$  rispetta possibili simmetrie o antisimmetrie del tensore operando. Possiamo ad esempio provarlo ancora per un  $\langle 2, 0 \rangle$ -campo simmetrico oppure



antisimmetrico  $\tau_{hk}$ . Si ha  $(\mathcal{L}_u\tau)_{hk} = \partial\tau_{hk}/\partial x^s u^s + \tau_{mk}\partial u^m/\partial x^h + \tau_{hm}\partial u^m/\partial x^k$ , che è simmetrica o antisimmetrica sotto l'ipotesi del caso. Anche in questo caso le generalizzazioni sono banali.

La nozione di Lie-derivata può estendersi consistentemente a campi tensoriali *relativi* di peso  $w$  (cfr. S.sez. 4.3.3): il risultato è un altro campo tensoriale dello stesso tipo e *dello stesso peso*, e che conserva tutte le proprietà di una derivazione, oltre il rispetto di possibili simmetrie o antisimmetrie del tensore. Ciò si ottiene generalizzando il 2° membro della definizione (3) (delle componenti di una Lie-derivata) con l'aggiungervi un termine  $w\partial u^s/\partial x^s \tau_{p_1\dots p_a}^{q_1\dots q_b}$  a 2° membro. Per dimostrarlo, conviene considerare il semplice caso di un campo scalare relativo di peso  $w$ , diciamo  $f$ , per il quale  $\mathcal{L}_u f = u^s \partial f/\partial x^s + w\partial u^s/\partial x^s f$  e che dobbiamo provare essere uno scalare relativo di peso  $w$ . Dalla  $f' = J^w f$ , dove  $J$  è lo jacobiano della trasformazione  $x' = x'(x)$ ,  $\det\{\partial(x')/\partial(x)\}$ , si ha  $\partial f'/\partial x'^s = wJ^{w-1} f \partial J/\partial x'^s + J^w \partial f/\partial x'^s$ , che va sostituito in  $(\mathcal{L}_u f)' = u'^s \partial f'/\partial x'^s + w\partial u'^s/\partial x'^s f'$ . Qui è a sua volta  $\partial u'^s/\partial x'^s = \partial u^s/\partial x^s + u^h \wp_{hq}^s \wp_{s'q}$ . A questo punto, la tesi consiste nel verificare che  $(\circ) wJ^{w-1} u'^s \partial J/\partial x'^s f' + J^w w u^h \wp_{hq}^s \wp_{s'q} f = 0$ , (avendo già eliminato due coppie di termini identici nei due membri, cioè  $J^w u^s \partial f/\partial x^s$  e  $J^w w \partial u^s/\partial x^s f$ ). Allo scopo, basta tener conto della formula generale  $\partial J/\partial x'^s = J \wp_{s't'}^h \wp_{h'}^t$  e delle uguaglianze (5) per eliminare i due tipi di derivate seconde che compaiono nel 1° membro della  $(\circ)$ . La giustificazione del caso generale di un  $\langle a,b \rangle$ -campo relativo (di peso  $w$ ) si ottiene ormai semplicemente, componendo quest'ultimo risultato con la prova dell'implicazione (3)  $\Rightarrow$  (4). Le (3, 4) in tal senso generalizzate a campi relativi di peso  $w$  sono:

$$(3bis) \quad (\mathcal{L}_u\tau)_{i_1\dots i_a}^{j_1\dots j_b} =: u^s \partial\tau_{i_1\dots i_a}^{j_1\dots j_b}/\partial x^s + \sum_{\alpha=1}^a \tau_{i_1\dots i_{(\alpha-1)} s i_{(\alpha+1)} \dots i_a}^{j_1\dots j_b} \partial u^s/\partial x^{i_\alpha} - \\ - \sum_{\beta=1}^b \tau_{i_1\dots i_a}^{j_1\dots j_{(\beta-1)} s j_{(\beta+1)} \dots j_b} \partial u^s/\partial x^{j_\beta} + w\partial u^s/\partial x^s \tau_{p_1\dots p_a}^{q_1\dots q_b},$$

$$(4bis) \quad (\mathcal{L}_u\tau)_{i_1' \dots i_a'}^{j_1' \dots j_b'} = J^w \wp_{q_1}^{j_1'} \dots \wp_{q_b}^{j_b'} (\mathcal{L}_u\tau)_{p_1\dots p_a}^{q_1\dots q_b} \wp_{i_1'}^{p_1} \dots \wp_{i_a'}^{p_a}.$$

La natura meccanica e confortevolmente terra-terra di questi argomenti induce a ricercare una definizione alternativa, più sintetica e motivata, della Lie-derivata rispetto a  $u$  di un  $\langle a,b \rangle$ -campo (possibilmente, relativo di peso  $w$ ). La procedura più naturale è la seguente. Consideriamo la trasformazione di coordinate infinitesima definita dalla  $x' = x - \varepsilon u(x)$ , dove  $\varepsilon$  è un fattore di piccolezza, e applichiamo alla legge di trasformazione tra componenti tensoriali

$$(7) \quad \tau_{i_1' \dots i_a'}^{j_1' \dots j_b'} = J^w \wp_{q_1}^{j_1'} \dots \wp_{q_b}^{j_b'} \tau_{p_1\dots p_a}^{q_1\dots q_b} \wp_{i_1'}^{p_1} \dots \wp_{i_a'}^{p_a},$$

con  $J = \det\{\partial(x)/\partial(x')\}$ , e con le solite semplificazioni per  $a = 0$ ,  $b \geq 1$ , o  $b = 0$ ,  $a \geq 1$ , o  $a = b = 0$ .

Conviene ancora riferirsi al caso di un  $\langle 1,1 \rangle$ -tensore di peso  $w$ , per il quale la (7) si riduce alla

$$(7bis) \quad \tau_i^{j'} = J^w \wp_q^{j'} \tau_p^q \wp_i^p.$$

Si ha  $\wp_q^{j'} = \delta_q^j - \varepsilon \partial u^j/\partial x^q$ , e al 1° ordine in  $\varepsilon$ ,  $\wp_i^p \approx \delta_i^p + \varepsilon \partial u^p/\partial x^i$  e  $J^w \approx 1 + \varepsilon w \partial u^s/\partial x^s$ . Quindi la

(7bis) diventa

$$(8) \quad \tau_i^{j'} \approx (1 + \varepsilon w \partial u^s / \partial x^s) (\delta_q^j - \varepsilon \partial u^j / \partial x^q) \tau_p^q (\delta_i^p + \varepsilon \partial u^p / \partial x^i) \approx \tau_i^j + \varepsilon (\tau_p^j \partial u^p / \partial x^i - \tau_i^q \partial u^j / \partial x^q + w \tau_i^j \partial u^s / \partial x^s);$$

o anche, in forza della (3bis),  $\tau_i^{j'} - \tau_i^j \approx \varepsilon [(\mathcal{L}_u \tau)_i^j - u^s \partial \tau_i^j / \partial x^s]$ . Merita qui osservare che il peso  $w$  è sparito (è nascosto in  $(\mathcal{L}_u \tau)_i^j$ ). Ricordiamo ora che  $\tau_i^{j'}$  è il valore della componente  $(i^j)$  di  $\tau$  nelle coordinate con apice calcolata in  $x'$ ; cioè con notazione più esplicita,  $\tau_i^{j'}(x')$ . Si vede dunque che, sempre al 1° ordine in  $\varepsilon$ ,  $\tau_i^{j'}(x') + \varepsilon u^s(x) \partial \tau_i^j / \partial x^s(x) \approx \tau_i^j(x)$ , e così

$$(9) \quad \tau_i^{j'} - \tau_i^j \approx \varepsilon (\mathcal{L}_u \tau)_i^j,$$

ove tutto si intende ormai calcolato in  $x$ . In conclusione,

$$(10) \quad (\mathcal{L}_u \tau)_i^j = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(\tau_i^{j'} - \tau_i^j) / \varepsilon].$$

Rimarchiamo che  $\tau_i^{j'}$  è un oggetto di natura ibrida, in quanto componente  $(i^j)$  di  $\tau$  *nella carta con apice, ma "riportata" da  $x'$  a  $x = x' + \varepsilon u(x)$* . Qui si trova forse la maggiore difficoltà nel comprendere il vero significato della (10); ma è proprio nell'ultimo passaggio, quello che porta da  $\tau_i^{j'}(x')$  a  $\tau_i^j(x)$ , la chiave per definire una particolare "derivata" (di un campo tensoriale) *senza alterare il valore della coordinata nella carta corrente*, e quindi il corrispondente punto della varietà. La generalizzazione della (10) al caso di un  $\langle a, b \rangle$ -campo è ormai banale, e porta alla simile

$$(10bis) \quad (\mathcal{L}_u \tau)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(\tau'_{i_1 \dots i_a}{}^{j_1 \dots j_b} - \tau_{i_1 \dots i_a}{}^{j_1 \dots j_b}) / \varepsilon].$$

Questa (10bis) può assumersi come definizione alternativa, di immediata suggestione, della Lie-derivata di un  $\langle a, b \rangle$ -campo relativo di peso  $w$ . L'essere  $w$  di fatto sparito nella espressione (10bis) della Lie-derivata  $\mathcal{L}_u \tau$  è una addizionale conferma della centralità di questa nozione nei fondamenti della geometria differenziale su varietà ordinarie. Altre e più astratte definizioni di  $\mathcal{L}_u \tau$  sono possibili, e sono spesso proposte nei moderni trattati di geometria differenziale. Talvolta, infine, si definiscono "Lie-derivate" (sempre rispetto ad un campo vettoriale pilota  $u$ ) anche di oggetti diversi da campi tensoriali (ad esempio di coefficienti di connessione), delle quali non ci occuperemo qui.

Poiché l'introduzione della  $\mathcal{L}_u$  di un campo tensoriale su una varietà  $M$  prescinde dall'essere tale  $M$  dotata o meno di una connessione  $\Lambda^*$ , è banale prevedere che essa si possa esprimere *anche* in termini di derivate covarianti di quel campo e (possibilmente) dei coefficienti  $\Lambda^*$ . Questa operazione si riduce ad esprimere le derivate parziali che compaiono nel 2° membro della (3bis), sia del campo operando  $\tau$  che del campo pilota  $u$ , in termini delle corrispondenti derivate covarianti; e del resto l'abbiamo già illustrata quando abbiamo esaminato il caso in cui  $\tau$  era un campo vettoriale assoluto ( $w = 0$ ). L'espressione generale che così si ottiene, e della quale il lettore potrà agevolmente controllare la correttezza, è:

$$(11) \quad (\mathcal{L}_u \tau)_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} =: u^s \tau_{i_1 \dots i_a}{}^{j_1 \dots j_b} /_s + \sum_{\alpha=1}^a \tau_{i_1 \dots i(\alpha-1) s i(\alpha+1) \dots i_a}{}^{j_1 \dots j_b} (u^s /_{(i\alpha)} - u^p \sigma_p^s /_{(i\alpha)}) - \sum_{\beta=1}^b \tau_{i_1 \dots i_a}{}^{j_1 \dots j(\beta-1) s j(\beta+1) \dots j_b} (u^{(j\beta)} /_s - u^p \sigma_{ps}^{(j\beta)}) + w u^s /_s \tau_{i_1 \dots i_a}{}^{j_1 \dots j_b},$$

con i soliti avvertimenti se  $a = 0$ , o  $b = 0$ , o  $a = b = 0$  e le solite cautele nell'interpretare i doppi indici (dovuti alle note insufficienze di Word). Come si vede, la connessione  $\Lambda$ , *sparisce ovunque* in favore del  $\langle 2,1 \rangle$ -campo di torsione  $\sigma$ . Questa (11) rende evidente che il suo 1° membro è un  $\langle a,b \rangle$ -campo tensoriale relativo di peso  $w$ . La (11) significa tra l'altro che la nozione di Lie-derivata è accessibile senza difficoltà a quanti sono abituati a lavorare su varietà dotate di una connessione affine (se non pseudoriemanniana).

Non è facile, invece, spiegare perché il fisico “medio” sia così spesso indifferente all'importanza fondativa della nozione di Lie-derivata (o addirittura di essa Lie-derivata completamente ignaro). Al di là del dato culturale, e della possibilità offerta dalla (11) di fornire comunque  $\mathcal{L}_u \tau$  anche nel linguaggio standard del calcolo tensoriale su varietà affinemente connesse, resta un incontestabile dato di fatto: le applicazioni *dirette* della Lie-derivata alla fisica matematica non sono particolarmente importanti, e ove occorrono, si possono comunque aggirare mediante la (11) stessa. In questa situazione, da una parte è certamente vero che chi rinuncia alla nozione di Lie-derivata perde la visione corretta dello status matematico del calcolo differenziale su una varietà ordinaria, e non percepisce la reale ricchezza della sua struttura; ma dall'altra, non si può sostenere che il dominio di questi (ed altri più esotici) strumenti della moderna geometria differenziale sia condizione irrinunciabile per una soddisfacente comprensione delle teorie fisico-matematiche (in particolare macroscopiche, alle quali questo libro è limitato). Va insomma da sé che per apprezzare la reale portata di quegli strumenti, e trarne profitto sul piano della scienza fisica, occorre operare ad un sufficiente livello di maturità matematica.<sup>3</sup>

Di fatto, abbiamo incontrato un caso di derivata realizzabile su una varietà ordinaria nel calcolo differenziale esterno, in cui la classe dei campi tensoriali differenziandi era peraltro ristretta a quelli (assoluti e) completamente antisimmetrici. Secondo la (4.5.1, 3), la definizione di derivata esterna di una ( $\kappa \geq 0$ )-forma antisimmetrica – nel seguito  $\kappa$ -forma tout court – non presuppone infatti alcuna connessione della varietà su cui si opera, coinvolgendo le sole derivate parziali (rispetto alle coordinate correnti) delle componenti della forma stessa. Tale derivata esterna di una  $\kappa$ -forma è ovviamente lineare; ma essa produce una  $(\kappa+1)$ -forma (e non un'altra  $\kappa$ -forma) partendo da una  $\kappa$ -forma; e inoltre, viene meno la regola di Leibniz sui prodotti (ordinati) di forme, che sono prodotti wedge, cfr. la (4.5.1, 8). Questa è una conseguenza naturale del carattere graduato del prodotto wedge, che non può considerarsi un prodotto tensoriale standard. Su un piano formale, la

---

<sup>3</sup> Ci è parso esemplare di una situazione vagamente schizofrenica quanto afferma sulla nozione di Lie-derivata J. Stewart nelle prime pagine del suo “Advanced General Relativity” (Cambridge, 1990): «The Lie derivative is one of the most important and least understood concepts in mathematical physics.» (v. Chpt 1, Sect. 6). Ovviamente, il lettore si aspetta di trovare irrinunciabili applicazioni della Lie-derivata alla relatività generale nel seguito del volume, ma non ne trova alcuna.

(4.5.1, 8) si può comunque ancora vedere come regola di Leibniz pensando allo stesso operatore  $\partial$  come 1-forma: per agire sulla seconda forma-fattore,  $\partial$  deve “attraversare” la prima forma-fattore, il che genera il fattore  $(-1)$  elevato al grado della prima forma-fattore nel secondo addendo della somma risultante. Infine non è chiaro cosa debba intendersi per “contrazione” di una  $(\kappa \geq 2)$ -forma. Tutto questo suggerisce l’opportunità di una congrua definizione della Lie-derivata di una  $\kappa$ -forma.

Come sappiamo, l’algebra (dei campi) delle  $\kappa$ -forme è isomorfa a quella dei  $\langle \kappa, 0 \rangle$ -campi (assoluti e) completamente antisimmetrici. Un momento di riflessione prova allora che la corretta definizione di **Lie-derivata di** (un campo di)  **$\kappa$ -forma** è fissata, in pratica, una volta che lo sia stata quella di un  $\langle \kappa \leq n, 0 \rangle$ -campo tensoriale antisimmetrico. Sia infatti

$$(12) \quad v_{(\kappa)} = v_{i_1 \dots i_\kappa}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_\kappa},$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ , un  $\langle \kappa, 0 \rangle$ -campo tensoriale (assoluto,  $w = 0$ ) antisimmetrico dato; allora la sua Lie-derivata rispetto a  $u$ ,  $\mathcal{L}_u$ , è  $(\mathcal{L}_u v)_{i_1 \dots i_\kappa}(x) dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_\kappa}$ , ed è anch’essa un  $\langle \kappa, 0 \rangle$ -campo antisimmetrico perché la  $\mathcal{L}_u$  rispetta l’antisimmetria di  $v_{i_1 \dots i_\kappa}$ . La  $\kappa$ -forma canonicamente associata al  $\langle \kappa, 0 \rangle$ -campo (12) può scriversi  $v_{i_1 \dots i_\kappa}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$  (cfr. la (4.4.3, 18<sub>2</sub>)), ed è quindi naturale *definire* la sua  $\mathcal{L}_u$  come  $(\mathcal{L}_u v)_{i_1 \dots i_\kappa}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$ . Tuttavia anche  $v^{\wedge(\kappa)} =: v^{\wedge i_1 \dots i_\kappa}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$ , dove  $v^{\wedge i_1 \dots i_\kappa}$  sono generiche funzioni di indici che si trasformano come componenti covarianti a fronte di un cambiamento di carta, è una  $\kappa$ -forma antisimmetrica. Le sue componenti covarianti antisimmetriche sono (\*)  $v_{i_1 \dots i_\kappa} = (\kappa)^{-1} \sum_{O(j)=O(i)} \delta_{i_1 \dots i_\kappa}^{j_1 \dots j_\kappa} v^{\wedge i_1 \dots i_\kappa}$  (cfr. la (4.4.3, 14<sub>2</sub>)), dove  $\delta_{i_1 \dots i_\kappa}^{j_1 \dots j_\kappa}$  è il simbolo di Kronecker generalizzato; e questo ci permette di definire la  $\mathcal{L}_u v^{\wedge(\kappa)}$  utilizzando la regola precedente. Ma  $(\mathcal{L}_u v)_{i_1 \dots i_\kappa}$  si ha utilizzando la (\*), ed il risultato è quello che si ottiene ponendo nella (\*) stessa  $(\mathcal{L}_u v^{\wedge})_{i_1 \dots i_\kappa}$  in luogo di  $v^{\wedge i_1 \dots i_\kappa}$ . Questo è corretto perché  $\mathcal{L}_u$  è lineare-leibniziana, perché commuta con le contrazioni, e infine perché  $\mathcal{L}_u \delta_{i_1 \dots i_\kappa}^{j_1 \dots j_\kappa} \equiv 0$  (vedi il penultimo paragrafo della sezione). In conclusione la  $\mathcal{L}_u v^{\wedge(\kappa)}$  si definisce come  $(\mathcal{L}_u v^{\wedge})_{i_1 \dots i_\kappa} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$ , cioè come nel caso in cui in luogo delle  $v^{\wedge i_1 \dots i_\kappa}$  ci siano le originali componenti antisimmetriche della forma. Ovviamente la  $\mathcal{L}_u$  di una generica  $\kappa$ -forma antisimmetrica risulta lineare e leibniziana. La seconda proprietà significa che se  $v$  è una  $\kappa$ -forma e  $\mu$  è una  $\eta$ -forma,  $\mathcal{L}_u(v \wedge \mu) = (\mathcal{L}_u v) \wedge \mu + v \wedge (\mathcal{L}_u \mu)$ , il risultato essendo una  $(\kappa + \eta)$ -forma. Meno evidente, ma facilmente verificabile, è la proprietà che  $\mathcal{L}_u$  commuta con  $\partial$  (derivata esterna) per una qualsiasi  $\kappa$ -forma  $v$ :  $\mathcal{L}_u(\partial v) = \partial(\mathcal{L}_u v)$  (il risultato essendo una  $(\kappa + 1)$ -forma).

La parentesi di Lie  $[\cdot, \cdot]$  gode tra le altre delle tre proprietà seguenti. Per generici  $\langle 0, 1 \rangle$ -campi  $u, v, w$ , e per ogni costante reale  $\alpha, \beta$ ,

(a):  $[u, v] + [v, u] = 0$ , quindi  $[u, u] = 0$  (antisimmetria),

(b):  $[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w]$  (linearità rispetto al 1° fattore),

(c):  $[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0$  (identità di Jacobi).

(a) e (b) sono ovvie; combinandole, si ottiene la linearità di  $[ , ]$  rispetto al 2° fattore. Per quanto riguarda (c), scrivendo brevemente  $\partial_m$  per  $\partial/\partial x^m$  e  $\partial_{mp}$  per  $\partial^2/\partial x^m \partial x^p$ , risulta:  $[[u, v], w]^i = [u, v]^m \partial_m w^i - w^m \partial_m [u, v]^i = (u^p \partial_p v^m - v^p \partial_p u^m) \partial_m w^i - w^m (\partial_m u^p \partial_p v^i + u^p \partial_{mp} v^i - \partial_m v^p \partial_p u^i - v^p \partial_{mp} u^i)$ . Calcolando in modo analogo  $[[v, w], u]$  e  $[[w, u], v]$ , e sommando, si hanno 18 addendi uguali e opposti a due a due in forza della simmetria  $\partial_{mp} = \partial_{pm}$ ; qed. La proprietà (c) può anche trascriversi come

(d)  $[u, [v, w]] - [v, [u, w]] = [[u, v], w]$ ,

e diventa più espressiva se è posta nella forma

$$(13) \quad (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u)z = \mathcal{L}_{[u, v]}z.$$

Questa dà il **commutatore di Lie-derivate**  $\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u$  di un  $\langle 0, 1 \rangle$ -campo  $z$  secondo due  $\langle 0, 1 \rangle$ -campi distinti e ordinati  $\langle u, v \rangle$  come Lie-derivata di  $z$  rispetto alla parentesi di Lie  $[u, v]$  (che è un  $\langle 0, 1 \rangle$ -campo). Lasciamo al lettore, come esercizio, di dimostrare che la (13) si può generalizzare nella

$$(14) \quad (\mathcal{L}_u \mathcal{L}_v - \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u)\tau = \mathcal{L}_{[u, v]}\tau,$$

per un campo tensoriale  $\tau$  generico.

È utile, a questo punto, ricordare e riassumere quanto segue: il commutatore di derivate covarianti di campi  $\kappa$ -tensoriali su varietà riemanniane si esprime in termini del 4-tensore di Riemann (v. S.sez. 3.4.2); quello su varietà a connessione affine  $\Lambda$ ., per campi  $\langle a, b \rangle$ -tensoriali, in termini del  $\langle 3, 1 \rangle$ -tensore di curvatura e del  $\langle 2, 1 \rangle$ -tensore di torsione. (v. S.sez. 8.2.2); e infine, il commutatore di derivate assolute lungo curve intersecantisi dipende dal solo  $\langle 3, 1 \rangle$ -tensore di curvatura (v. ancora S.sez. 8.2.2)). A queste formule si aggiunge ora la (14) per il commutatore di Lie-derivate, che vale addirittura su varietà ordinarie.

Nella S.sez. 8.3.1 abbiamo menzionato la definizione di algebra (reale) associativa: uno spazio lineare con prodotto associativo soggetto agli assiomi (8.3.1, 1, 2, 3). Un'algebra *non* associativa è la stessa struttura senza l'assioma (8.3.1, 1), ma possibilmente con nuovi assiomi di prodotto in suo luogo. Se in particolare questi nuovi assiomi – fermi restando tutti gli altri – sono

$$(e_1) \quad xx = 0,$$

$$(e_2) \quad x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \text{ (Jacobi),}$$

abbiamo un'algebra di Lie. In forza degli assiomi distributivi (8.3.1, 2),  $(e_1)$  può equivalentemente sostituirsi con  $(e_3)$   $xy + yx = 0$ .<sup>4</sup> Come sappiamo, l'insieme dei campi vettoriali su  $M$ ,  $C_{(0,1)}(M) \equiv C_{(0,1)}$ , è uno spazio lineare. Se questo spazio viene munito del prodotto (non associativo) costituito dalla parentesi di Lie, alla luce delle proprietà di questa parentesi si vede subito che si è generata un'algebra di Lie.

Concludiamo la sezione con un breve approfondimento sui campi tensoriali "biantisimmetrici" e antisimmetrici (da qualcuno) detti "numerici". Nella S.sez. 8.2.1 abbiamo mostrato che il simbolo di Kronecker  $\delta_i^j$  (con  $i, j = 1, \dots, n$ ) può considerarsi come la componente mista di indici  $(i^j)$  di un  $\langle 1, 1 \rangle$ -campo, con i suoi usuali valori 0 e 1, in ogni carta di ogni varietà  $n$ -dim (anche ordinaria). Con le (3.2.2, 9) abbiamo poi introdotto il simbolo di Kronecker generalizzato  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}$  per  $1 \leq q \leq n$  (nel caso  $q = 1$  si è ridotti al simbolo di Kronecker standard  $\delta_i^j$ ). Mostriamo che se  $2 \leq q \leq n$  esso è la componente  $(i_1 \dots i_q^{j_1 \dots j_q})$  di un  $\langle q, q \rangle$ -campo antisimmetrico rispetto agli indici inferiori e superiori (o  $\langle q, q \rangle$ -campo **biantisimmetrico**), con valori numerici interi costanti in ogni carta di ogni varietà  $n$ -dim ordinaria. Allo scopo, basta osservare che  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}$  è il valore del determinante della  $q \times q$ -matrice che ha  $\delta_{i_\alpha}^{j_\beta}$  come elemento di indici  $1 \leq \alpha \leq q$ ,  $1 \leq \beta \leq q$ . Quindi  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}$  è somma algebrica di  $q!$  termini ciascuno dei quali è il prodotto di  $q$  simboli di Kronecker standard, e questo prova la tesi. Poiché ogni indice di  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}$  è compreso tra 1 e  $n$ , se si accetta la stessa definizione anche per  $q > n$  si trova immediatamente che  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} \equiv 0$ ; infatti in tal caso almeno due indici inferiori (e superiori) devono coincidere, e il determinante si annulla. Infine nella S.sez. 1.4.2 abbiamo introdotto il simbolo antisimmetrico  $\Upsilon_{i_1 \dots i_n}$  (o equivalentemente  $\Upsilon^{j_1 \dots j_n}$ ). Con la convenzione adottata, di scegliere come permutazione di riferimento la 1, 2, ...,  $n$ , risulta  $\Upsilon_{i_1 \dots i_n} = \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n}$  e  $\Upsilon^{j_1 \dots j_n} = \delta_{1 \dots n}^{j_1 \dots j_n}$ . Riproviamo ora che le  $\Upsilon^{j_1 \dots j_n}$  [le  $\Upsilon_{i_1 \dots i_n}$ ] sono componenti di un  $\langle 0, n \rangle$ -campo [di un  $\langle n, 0 \rangle$ -campo] antisimmetrico *relativo* di peso +1 (cioè di un  $\langle 0, n \rangle$ -campo di densità) [di peso -1 (cioè di un  $\langle n, 0 \rangle$ -campo di capacità)]. Tenendo conto del fatto che le  $\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$  sono componenti di un  $\langle n, n \rangle$ -campo, abbiamo:

$$(15) \quad \Upsilon^{j_1 \dots j_n} = \delta_{1' \dots n'}^{j_1 \dots j_n} = \wp_{k_1}^{j_1'} \dots \wp_{k_n}^{j_n'} \delta_{h_1 \dots h_n}^{k_1 \dots k_n} \wp_{1'}^{h_1} \dots \wp_{n'}^{h_n}.$$

D'altra parte si riconosce facilmente che  $\delta_{h_1 \dots h_n}^{k_1 \dots k_n} = \Upsilon_{h_1 \dots h_n}^{k_1 \dots k_n}$ , e che  $\Upsilon_{h_1 \dots h_n} \wp_{1'}^{h_1} \dots \wp_{n'}^{h_n} = \partial(x)/\partial(x') = J$ ; per cui, sostituendo queste posizioni nella (15), otteniamo  $\Upsilon^{j_1 \dots j_n} = J \wp_{k_1}^{j_1'} \dots \wp_{k_n}^{j_n'} \Upsilon^{k_1 \dots k_n}$ , cioè la tesi precedente per  $\Upsilon^{j_1 \dots j_n}$ . Una procedura analoga prova la corrispondente tesi per  $\Upsilon_{i_1 \dots i_n}$ .

<sup>4</sup> Che  $(a_3)$  implichi  $(a_1)$  è ovvio. L'implicazione contraria si ha partendo da  $0 = (x+y)(x+y)$  e usando gli assiomi distributivi secondo la  $0 = xx + xy + yx + yy = xy + yx$ .

Esaminiamo adesso la derivata covariante del  $\langle 1 \leq q \leq n, 1 \leq q \leq n \rangle$ -campo di Kronecker generalizzato  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}$ . Se  $q = 1$ , abbiamo  $\delta_i^j/d = \partial \delta_i^j / \partial x^d - \Lambda_i^m{}_d \delta_m^j + \Lambda_m^j{}_d \delta_i^m = -\Lambda_i^j{}_d + \Lambda_i^j{}_d \equiv 0$ . Se  $n \geq 2$ , il caso successivo di  $\delta_{hk}^{ij}$  è soltanto un po' più complicato: a parte il termine nullo  $\partial \delta_{hk}^{ij} / \partial x^d$ , si hanno altri otto addendi uguali e contrari a due a due, per cui è anche  $\delta_{hk}^{ij}/d \equiv 0$ . Similmente si verifica che  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}/d \equiv 0$  per ogni  $2 < q \leq n$ ; e in definitiva, la tesi vale per ogni  $1 \leq q \leq n$ . Ancora, anche la  $\mathcal{L}_u$  gode di proprietà analoghe: il lettore può facilmente verificarlo su  $\delta_i^j$ , poi su  $\delta_{hk}^{ij}$ , .. e così via. In conclusione,  $(\mathcal{L}_u \delta)_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} \equiv 0$  per ogni  $1 \leq q \leq n$ , secondo quanto avevamo anticipato. Le due tesi in oggetto sono poi banalmente valide per  $q > n$ .

Restano da esaminare le analoghe derivate, sia covarianti che di Lie, dei campi di densità  $Y_{i_1 \dots i_n}$ , e di capacità  $Y^{j_1 \dots j_n}$ . Si trova  $Y_{i_1 \dots i_n}/d \equiv 0$  e rispettivamente  $(\mathcal{L}_u Y)_{i_1 \dots i_n} \equiv 0$  (e similmente per  $Y^{j_1 \dots j_n}$ ). Queste sono conseguenze delle analoghe conclusioni sui simboli di Kronecker generalizzati. In definitiva tutte le derivate, covarianti e di Lie, dei  $\langle q, q \rangle$ -campi  $\delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}$  (per ogni  $1 \leq q \leq n$ ), nonché dei campi di densità  $Y_{i_1 \dots i_n}$ , e di capacità  $Y^{j_1 \dots j_n}$ , sono identicamente nulle; questi oggetti biantisimmetrici e rispettivamente antisimmetrici sono cioè universalmente costanti e universalmente Lie-costanti in ogni aperto della varietà in oggetto.

## 8.4) ELEMENTI DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SU VARIETÀ ELEMENTARI

La presente sezione 8.4 conduce (v. S.sez 8.4.2) ad un teorema di grande potere di sintesi ed eleganza, quello di Poincaré-Stokes (PS). A parte le sue generalizzazioni nel senso della misura di Lebesgue, questo teorema costituisce l'ultima evoluzione di quello di Gauss-Ostrogradskij, e può considerarsi una sorta di coronamento dell'analisi classica (calcolo differenziale-integrale per funzioni di più variabili) su varietà, di piena pertinenza alla fisica matematica.<sup>1</sup> Per la sua discussione, qui limitata a varietà elementari, finito-dim e compatte, abbiamo qui scelto un profilo concettuale relativamente basso, avendo rinunciato a mezzi più sofisticati (come ad esempio la nozione generale di "partizione dell'unità") ma meno immediatamente accessibili.

### 8.4.1) PROPEDEUTICA

Il lettore è stato introdotto alla integrazione su domini di  $\mathbb{R}^{n \geq 1}$ , e più in generale su domini di varietà differenziabili  $(1 \leq \kappa \leq n)$ -dim *immerse* in  $\mathbb{R}^n$ , nella S.sez. 5.1.3. Come si ricorderà, la J-misura del dominio di integrazione è intrinsecamente non-negativa. Nella stessa ottica, riprenderemo adesso l'argomento prendendo in considerazione l'*orientamento* di quel dominio, e quindi dando un *segno* alla sua misura. Vedremo che in pratica questo induce a studiare il problema, da convenientemente formulare, dell'integrazione di  $\kappa$ -forme differenziali esterne su domini  $\kappa$ -dim "ammissibili" di una varietà  $(n \geq \kappa)$ -dim.

Sia  $I^{\kappa \geq 1}$  il  $\kappa$ -quadrato unitario chiuso di  $\mathbb{R}^{\kappa}$  definito da  $0 \leq u^i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, \kappa$ . Scrivendo per brevità  $u$  per  $\langle u^1, \dots, u^{\kappa} \rangle$ , se  $f = f(u)$  è una funzione reale definita e continua in  $I^{\kappa}$ , esiste finito l'integrale di Riemann (R-integrale  $\kappa$ -plo) di  $f$  su  $I^{\kappa}$ ,  $\int_{I^{\kappa}} f(u) du^1 \dots du^{\kappa} \equiv \int_{I^{\kappa}} f(u) \prod_{i=1}^{\kappa} du^i \equiv \int_{I^{\kappa}} f(u) d(u)$ . Ricordiamo brevemente la definizione di questo R-integrale  $\kappa$ -plo. Per una data generica partizione  $\mathcal{P} \equiv \{\Delta_j u\}_{j=1, \dots, N}$  di  $I^{\kappa}$  in  $N \geq 1$   $\kappa$ -rettangoli congiunti lungo i bordi  $\Delta_j u$ ,<sup>2</sup> sia  $|\Delta_j u|$  la misura ( $> 0$ ), o

---

<sup>1</sup> Nella sua monumentale opera intitolata all'Analisi Funzionale non lineare (vedi Bibl. Gen. A), E. Zeidler qualifica il teorema di PS come «one of the most important theorems in analysis». Giustificati o meno che siano, certamente giudizi iperbolici come quello appena citato suscitano curiosità nel neofita, inducendolo a riflettere; ma colpiscono di meno il lettore smaliziato, che preferisce lasciare maturare senza fretta le proprie opinioni. Si dovrebbe aggiungere che i meriti di Stokes nella formulazione/dimostrazione del teorema sono in pratica inesistenti (essendo fondati su un equivoco); tuttavia è comodo continuare a chiamare il teorema con il suo nome tradizionale per distinguerlo dai molti "teoremi di Poincaré".

<sup>2</sup> Benché se ne sia già parlato, diamo qui una definizione più dettagliata di questa nozione. La partizione si effettua per mezzo di  $H-1 \geq 1$   $(\kappa-1)$ -piani coordinati distribuiti tra le facce opposte di  $I^{\kappa}$ , diciamo  $0 < u^1 < \dots < u^{H-1} < 1$ , con i quali si ottengono  $\kappa$ -rettangoli  $0 \leq u^h \leq u^1, \dots, u^{H-1} \leq u \leq 1$ , dove oltre a  $u$  e  $u^1 \leq h \leq H-1$  anche  $H$  si intende indicizzato da 1 a  $\kappa$ . I



$\kappa$ -area, di  $\Delta_j u$ ,  $j\delta$  il suo diametro ( $> 0$ ), e  $\delta$  il più grande  $j\delta$  al correre di  $j$  su  $1, \dots, N$ .  $\delta = \delta(\mathcal{P})$  si dice diametro di  $\mathcal{P}$ .<sup>3</sup> Infine sia  $j\xi$  un punto arbitrariamente scelto in  $\Delta_j u$  (diciamo, ma non è necessario, al suo interno). Con la data scelta dei  $j\xi$ , la partizione  $\mathcal{P}$  di  $I^\kappa$  diventa una partizione “marcata” che denoteremo  $\mathcal{P}^*$ . Per tale  $\mathcal{P}^*$ , e per la data  $f$ , è definita la somma:

$$(1) \quad \Sigma = \Sigma(\mathcal{P}^*|f) =: \sum_{j=1}^N f(j\xi) |\Delta_j u|.$$

Facendo uso del criterio di Cauchy per l'esistenza del limite finito, si dimostra allora che  $\Sigma(\mathcal{P}^*|f)$  tende ad un (unico) limite finito  $\underline{\Sigma}(f)$ , lineare in  $f$  e indipendente dalla scelta di  $j\xi \in \Delta_j u$ , quando  $\delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0$ . L'R-integrale  $\int_{I^\kappa} f(u) d(u)$  si definisce allora come tale limite  $\underline{\Sigma}(f)$ .<sup>4</sup> Ovviamente se  $f \equiv 1$  in  $I^\kappa$ ,  $\int_{I^\kappa} d(u) = 1$ .

Al di là di questo oggetto fondamentale la cui precisa definizione risale a oltre un secolo e mezzo fa, e che domina le applicazioni pratiche, la teoria dell'integrazione si è sviluppata in due distinte direzioni (non contando gli ibridi tra le due): da una parte, generalizzando la nozione di misura (vedi App. Gen. C), e dall'altra passando a domini di integrazione inclusi ( $\subset$ ) in varietà differenziabili (o differenziabili a pezzi) tipicamente finito-dim, e orientabili. Ci proponiamo ora di illustrare questa seconda direttrice di sviluppo, limitandoci a varietà elementari.

**§1 . Integrale su  $I^\kappa$  di una  $\kappa$ -forma esterna.** Siano  $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(\kappa)}$  vettori non nulli e mutuamente ortogonali di  $\mathbb{R}^\kappa$ , e sia  $\xi_{(i)}^{h_i}$ ,  $1 \leq i \leq \kappa$ ,  $1 \leq h_i \leq \kappa$  la componente ( $h_i$ ) di  $\xi_{(i)}$  in una base ortonormale. Formiamo la produttoria esterna

$$(2) \quad \xi_{(1)}^{h_1} \wedge \dots \wedge \xi_{(\kappa)}^{h_\kappa} = (1/\kappa!) \sum_{O\langle t \rangle = O\langle h \rangle} e_{t_1 \dots t_\kappa}^{h_1 \dots h_\kappa} \xi_{(1)}^{t_1} \dots \xi_{(\kappa)}^{t_\kappa}$$

(cfr. (4.4.3, 8bis), facendovi  $j_s = s$ ). La sommatoria a 2° membro è il determinante della  $(\kappa \times \kappa)$ -matrice la cui riga  $r$ -ma ( $1 \leq r \leq \kappa$ ) è  $\xi_{(1)}^{h_r} \dots \xi_{(\kappa)}^{h_r}$ , e il suo valore assoluto è la misura del  $\kappa$ -rettangolo costruito sui vettori  $\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(\kappa)}$ , o anche  $\kappa!$  volte la misura del  $\kappa$ -simpleso ortogonale costruito sugli stessi vettori. Interpretando tali vettori come i lati orientati di un  $\kappa$ -rettangolo della partizione  $\mathcal{P}$ , diciamo  $\Delta_{(1)} u, \dots, \Delta_{(\kappa)} u$ , e denotando con  $\pi\langle h \rangle$  la parità dell'indice stretto  $\langle h \rangle$  rispetto a  $\langle 1, \dots, \kappa \rangle$ , abbiamo

$$(3) \quad (\Delta_{(1)} u)^{h_1} \wedge \dots \wedge (\Delta_{(\kappa)} u)^{h_\kappa} = (-1)^{\pi\langle h \rangle} |\Delta u| / \kappa!,$$

vari  $\kappa$ -rettangoli della partizione sono così congiunti soltanto lungo i loro bordi. La numerazione  $j = 1, \dots, N$  può considerarsi arbitraria, e  $N = H^1 \dots H^\kappa$ .

<sup>3</sup> Una partizione  $\mathcal{P}'$  di  $I^\kappa$  ottenuta da  $\mathcal{P}$  mediante una possibile ulteriore partizione (in  $\kappa$ -rettangoli) dei  $\kappa$ -rettangoli di  $\mathcal{P}$  si dice (una partizione) più fine di  $\mathcal{P}$ , e questo si denota con  $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ . È chiaro che il diametro di  $\mathcal{P}'$ ,  $\delta(\mathcal{P}')$ , è  $\leq \delta(\mathcal{P})$  se  $\mathcal{P}' \leq \mathcal{P}$ .

<sup>4</sup> Per l'arbitrarietà della scelta di  $j\xi$  in ciascun  $\Delta_j u$  in questo processo, si può convenire che  $j\xi$  sia determinato da una regola fissa (ad esempio ponendolo nel suo baricentro, o nel suo “vertice inferiore”, ecc.). In tal caso una partizione  $\mathcal{P}$  determina automaticamente una corrispondente partizione marcata  $\mathcal{P}^*$ , e le due nozioni possono essere identificate.

dove  $|\Delta u|$  è la misura del  $\kappa$ -rettangolo. Se i lati del  $\kappa$ -rettangolo sono paralleli equiversi agli assi coordinati, il doppio indice è superfluo, e il 1° membro della (3) si può scrivere semplicemente  $\Delta u^{h_1} \wedge \dots \wedge \Delta u^{h_\kappa}$ . Il fattore  $1/\kappa!$  sparisce nel fare la somma integrale, in quanto automaticamente riassorbito da questa operazione (vi sono  $\kappa!$   $\kappa$ -simplessi per ogni  $\kappa$ -rettangolo). Questo induce a *definire*

$$(4) \quad \int_{I_\kappa} f(u) du^{h_1} \wedge \dots \wedge du^{h_\kappa} =: (-1)^{\pi(h)} \int_{I_\kappa} f(u) d(u).$$

La (4) potrebbe anche rovesciarsi, ponendo un  $-$  davanti al 2° membro, perché la successione naturale  $\langle 1, \dots, \kappa \rangle$  non ha niente di speciale per essere necessariamente considerata come riferimento. Bisogna soltanto rispettare le convenzioni una volta che le si è accettate. Notiamo che con la (4) si è introdotto un nuovo tipo di integrale, la misura del cui dominio elementare è dotata di segno (e che può dunque essere negativo anche se l'integranda  $f$  è ovunque positiva). §

§2.  *$\kappa$ -domini ammissibili di una varietà e loro possibile equivalenza-antivalenza.* Introduciamo adesso una nuova nozione, quella di  $\kappa$ -**dominio ammissibile** (cioè, ammissibile come  $\kappa$ -dominio di integrazione,  $\kappa \geq 1$  riferendosi sempre alla sua dimensione) di una varietà  $(n \geq \kappa)$ -dim elementare e  $(r \geq 1)$ -differenziabile  ${}^r M^n \equiv M$ . Esso è l'insieme dei punti  $p$  di  $M$  che, nella carta totale  $(\lambda, M)$ , hanno coordinate  $x^i (\equiv \lambda^i(p))$ , con  $1 \leq i \leq n$  date da:

$$(5') \quad x^i = \varphi^i(u^t),$$

dove  $1 \leq t \leq \kappa$ , e  $\varphi^i$  sono funzioni di classe  $C^1$  dei  $\kappa$  parametri  $u^t$ , ciascuno dei quali varia in  $[0,1]$ . In pratica, potremo non distinguere tra  $\kappa$ -dominio ammissibile “di  $M$ ” e  $\kappa$ -dominio ammissibile “di  $\lambda(M)$ ” essendo questi in relazione biunivoca attraverso la mappa  $\lambda$  o la sua inversa. (ovviamente questo vale solo per varietà elementari). Nel seguito, scriveremo la (5') nella forma abbreviata, sottintendendo gli indici,

$$(5) \quad x = \varphi(u),$$

con  $u \in I^\kappa$ , e porremo  $\mathcal{U}_{(\kappa)} =: \varphi(I^\kappa)$ . Non richiederemo che la  $(n \times \kappa)$ -matrice jacobiana  $\partial(x)/\partial(u)$  abbia rango massimale, cioè  $\kappa$ , e quindi che la (5) stabilisca una corrispondenza biunivoca tra i punti di  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  e quelli di  $I^\kappa$ .

Un  $\kappa$ -dominio ammissibile di  $M$ , diciamo  $\mathcal{U}_{(\kappa)} = \varphi(u \in I^\kappa)$ , si dice **equivalente** ad un simile  $\kappa$ -dominio ammissibile di  $M$ , diciamo  $\mathcal{V}_{(\kappa)} = \psi(v \in I^\kappa)$  se esiste un 1-diffeom(orfismo) *equiverso*  $\mathcal{D}$  di  $I^\kappa$  (cioè, di  $I^\kappa$  su se stesso<sup>5</sup>) per il quale  $\varphi = \psi \circ \mathcal{D}$  (o equivalentemente  $\psi = \varphi \circ \mathcal{D}^{-1}$ ); o con altra

<sup>5</sup> Riferirsi ad un 1-diffeom. di  $I^\kappa$  comporta una blanda difficoltà, che abbiamo già incontrato e che si può aggirare in vari modi se si vogliono evitare le derivate unilateri. Qui sostituiamo  $I^\kappa$  con un  $\kappa$ -quadrato  $I_\varepsilon^\kappa$  con lo stesso baricentro di  $I^\kappa$  ma con i lati lunghi  $1-\varepsilon$ . Le derivate di interesse sono ben definite in  $I_\varepsilon^\kappa$ , e si può proseguire riservandosi di fare alla fine, nei risultati,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ricordiamo anche che un 1-diffeom di  $I^\kappa$  (o di un generico dominio di  $\mathbb{R}^n$ ) ne trasforma i punti

notazione, per il quale  $\varphi(u) = \psi(v=\mathcal{D}(u))$  (o  $\psi(v) = \varphi(u=\mathcal{D}^{-1}(v))$ ). In questo caso scriveremo  $\varphi \sim \psi$  e  $\mathcal{U}_{(\kappa)} \sim \mathcal{V}_{(\kappa)}$ . Si dimostra facilmente che la relazione “ $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  è equivalente a  $\mathcal{V}_{(\kappa)}$ ” è per l'appunto una relazione di equivalenza, riflessiva, simmetrica <sup>6</sup> e transitiva; e inoltre, che essa non dipende dalla carta usata per verificarla.

L'insieme dei 1-diffeom di  $I^\kappa$ , diciamo  $\mathcal{I}^{(\kappa)}$ , è un gruppo sotto composizione ( $\circ$ ), avente per unità (nel linguaggio moltiplicativo) l'identità. Esso ammette il sottogruppo dei 1-diffeom equiversi, diciamo  $\mathcal{I}^{(\kappa)+}$ . A tale  $\mathcal{I}^{(\kappa)+}$  appartengono, ad esempio, le permutazioni di parità pari dei parametri, che hanno tutte jacobiano = +1. Diremo  $\mathbf{U}_{(\kappa)}$  e  $\mathbf{V}_{(\kappa)}$  le classi di equivalenza dei  $\kappa$ -domini ammissibili corrispondenti a  $\varphi$  (di cui  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  è un rappresentante) e rispettivamente a  $\psi$  (di cui  $\mathcal{V}_{(\kappa)}$  è un rappresentante). Segue che “ $\varphi \sim \psi$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $\mathbf{U}_{(\kappa)} = \mathbf{V}_{(\kappa)}$ ”.

L'insieme dei 1-diffeom *antiversi* di  $I^\kappa$ , diciamo  $\mathcal{I}^{(\kappa)-}$ , non è invece un sottogruppo di  $\mathcal{I}^{(\kappa)}$ , ad esempio perché la composizione di due 1-diffeom antiversi è un 1-diffeom equiverso. (All'interno di  $\mathcal{I}^{(\kappa)}$  vale infatti una delle tante versioni della “regola dei segni” che si incontrano in matematica.) Come è vero per ogni 1-diffeom, esiste tuttavia l'inverso di un 1-diffeom antiverso, ed è anch'esso antiverso. A  $\mathcal{I}^{(\kappa)-}$  appartengono ad esempio le permutazioni di parità dispari dei parametri, che hanno tutte jacobiano = -1.

La definizione di  $\kappa$ -dominio **antivalente** ad un  $\kappa$ -dominio dato corre parallela a quella di  $\kappa$ -dominio equivalente, e si ottiene sostituendo il 1-diffeom equiverso  $\mathcal{D}$  della equivalenza con un 1-diffeom antiverso  $\bar{\mathcal{D}}$ . Scriveremo dunque “ $\varphi \sim_- \psi$ ” per la relazione “esiste un 1-diffeom antiverso  $\bar{\mathcal{D}}$  per cui  $\varphi = \psi \circ \bar{\mathcal{D}}$  ( $\Leftrightarrow \psi = \varphi \circ \bar{\mathcal{D}}^{-1}$ ). Ovviamente una relazione di antivalenza non è né riflessiva né transitiva, ma è simmetrica. Inoltre anche l'antivalenza è carta-indipendente. Se  $\varphi \sim_- \psi$ , le due classi di equivalenza di cui  $\mathcal{U}_{(\kappa)} = \varphi(I^\kappa)$  e  $\mathcal{V}_{(\kappa)} = \psi(I^\kappa)$  (con  $\mathcal{U}_{(\kappa)} \sim_- \mathcal{V}_{(\kappa)}$ ) sono rappresentanti si possono dire **classi** (di  $\kappa$ -domini equivalenti) **antivalenti**. Se al solito  $\mathbf{U}_{(\kappa)}$  è la classe di cui  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  è rappresentante e  $\mathbf{V}_{(\kappa)}$  è quella di cui lo è  $\mathcal{V}_{(\kappa)}$ , e  $\mathcal{U}_{(\kappa)} \sim_- \mathcal{V}_{(\kappa)}$ , è comodo scrivere  $\mathbf{U}_{(\kappa)} = -\mathbf{V}_{(\kappa)}$ . §

§3. *Integrazione su domini  $\kappa$ -dim ammissibili di una varietà elementare.* Sia sempre  ${}^{\geq 1}M^n \equiv M$  una varietà elementare, e siano  $\langle M, \lambda \rangle, \langle M, \lambda' \rangle$  due sue carte totali. Ricordiamo che, posto  $x = \lambda(p) \in \mathbb{R}^n$  e  $x' = \lambda'(p) \in \mathbb{R}^n$  per ogni  $p \in M$ , le funzioni  $x' = \lambda' \circ \lambda^{-1}(x)$  e  $x = \lambda \circ \lambda'^{-1}(x')$  sono definite in  $\lambda(M)$  e rispettivamente in  $\lambda'(M)$  (aperti di  $\mathbb{R}^n$ ), essendo ivi di CdC  $r$  e l'una inversa dell'altra. Ciò implica

---

interni in punti interni e quindi i punti di frontiera in punti di frontiera. Inoltre esso trasforma ogni faccia in una faccia, e coppie di facce opposte in coppie di facce opposte.

<sup>6</sup> Dimostriamo ad esempio la simmetria di  $\sim$ . Se esiste  $\mathcal{D}$  equiverso per cui  $\varphi_1(u) = \varphi_2(\mathcal{D}(u)) \forall u \in I^\kappa$ , allora  $\varphi_2(v) = \varphi_1(\mathcal{D}^{-1}(v)) \forall v \in I^\kappa$ , e  $\mathcal{D}^{-1}$  è equiverso.

che le matrici (quadrate) jacobiane  $\partial(x')/\partial(x)$  e  $\partial(x)/\partial(x')$  siano non singolari (in  $\lambda(M)$  e rispettivamente in  $\lambda'(M)$ ), e l'una inversa dell'altra.

Una varietà differenziabile ( $\equiv$  di CdC  $\geq 1$ ) è “orientabile” se ammette un atlante di carte tra loro “positivamente compatibili”, ossia aventi tutte, dove congiunte, funzioni di transizione a jacobiano  $> 0$  (e non genericamente  $\neq 0$ ). Segue che una varietà differenziabile elementare è *banalmente orientabile*. Ricordiamo inoltre che due varietà elementari di uguale CdC e dimensione possono essere considerate “equivalenti” e identificate, nel senso che si può sempre stabilire una corrispondenza biunivoca della comune CdC tra le coordinate di loro carte totali. In particolare una varietà elementare  $M$  può identificarsi con la sua immagine  $\lambda(M)$ .<sup>7</sup>

Sul  $\kappa$ -dominio ammissibile  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  (vedi §2), consideriamo la  $\kappa$ -forma differenziale (con  $1 \leq i_1 \leq \kappa, \dots, 1 \leq i_\kappa \leq \kappa$ )  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$ . Per la data  $x = \varphi(u)$ , questa può essere trasformata secondo la

$$(6) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa} = \sum_{j_1=1}^{\kappa} \partial\varphi^{i_1}/\partial u^{j_1} du^{j_1} \wedge \dots \wedge \sum_{j_\kappa=1}^{\kappa} \partial\varphi^{i_\kappa}/\partial u^{j_\kappa} du^{j_\kappa} = \\ = \sum_{(j)} e_{1\dots\kappa}^{j_1\dots j_\kappa} \partial\varphi^{i_1}/\partial u^{j_1} \dots \partial\varphi^{i_\kappa}/\partial u^{j_\kappa} du^1 \wedge \dots \wedge du^\kappa.$$

Come abbiamo già osservato, la seconda sommatoria è uguale al determinante della  $(\kappa \times \kappa)$ -matrice la cui riga  $r$ -ma ( $1 \leq r \leq \kappa$ ) è  $\partial\varphi^{ir}/\partial u^1 \dots \partial\varphi^{ir}/\partial u^\kappa$ , matrice che scriveremo  $\{\partial\varphi^{ir}/\partial u^s\}_{r,s=1 \rightarrow \kappa}$ . Abbiamo così

$$(7) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa} = \det\{\partial\varphi^{ir}/\partial u^s\}_{r,s=1 \rightarrow \kappa} du^1 \wedge \dots \wedge du^\kappa$$

Passando al  $\kappa$ -dominio ammissibile equivalente  $\mathcal{V}_{(\kappa)}$  (vedi ancora §2), abbiamo similmente

$$(7bis) \quad dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa} = \det\{\partial\psi^{ir}/\partial v^t\}_{r,t=1 \rightarrow \kappa} dv^1 \wedge \dots \wedge dv^\kappa.$$

In forza della definizione (4) abbiamo così (sottintendendo i pedici nei determinanti)

$$(8) \quad \int_{\mathcal{U}_{(\kappa)}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa} = \int_{I_\kappa} \det\{\partial\varphi^{ir}/\partial u^s\} du^1 \wedge \dots \wedge du^\kappa \equiv \int_{I_\kappa} \det\{\partial\varphi^{ir}/\partial u^s\} d(u),$$

e similmente

$$(8bis) \quad \int_{\mathcal{V}_{(\kappa)}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa} = \int_{I_\kappa} \det\{\partial\psi^{ir}/\partial v^t\} dv^1 \wedge \dots \wedge dv^\kappa \equiv \int_{I_\kappa} \det\{\partial\psi^{ir}/\partial v^s\} d(v).$$

Ma  $v = \mathcal{D}(u)$ , dove  $\mathcal{D}$  è un 1-diffeom equiverso ( $\det\{\partial(v)/\partial(u)\} > 0$ ), per cui  $d(u) = d(v)\det\{\partial(u)/\partial(v)\}$  (regola del cambiamento della variabile d'integrazione); e inoltre,

$$(9) \quad \det\{\partial\varphi^{ir}/\partial u^s\} = \det\{\partial\psi^{ir}/\partial v^t\} \det\{\partial(v)/\partial(u)\}$$

(regola della catena differenziale), per cui  $\det\{\partial\varphi^{ir}/\partial u^s\} d(u) = \det\{\partial\psi^{ir}/\partial v^s\} d(v)$ : i terzi membri delle (8,8bis) sono uguali, e quindi lo sono i primi membri. In definitiva, l'integrale della  $\kappa$ -forma

<sup>7</sup> Dette  $M_1$  e  $M_2$  le varietà in oggetto,  $r$  la loro comune CdC,  $n$  la loro comune dimensione e  $\langle M_1, \lambda_1 \rangle, \langle M_2, \lambda_2 \rangle$  loro rispettive carte totali, basta stabilire una corrispondenza biunivoca di CdC  $r$  tra gli aperti  $\lambda_1(M_1)$  e  $\lambda_2(M_2)$  di  $\mathbb{R}^n$ , ciò che può sempre farsi in infiniti modi. Evidentemente questa corrispondenza resta biunivoca e di CdC  $r$  passando ad altre carte totali: quindi la relazione tra  $M_1$  e  $M_2$ , che è una relazione di equivalenza, ha carattere assoluto.

esterna  $dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{ik}$  non cambia passando da un  $\kappa$ -dominio di integrazione a un  $\kappa$ -dominio di integrazione equivalente. Questo importante risultato può estendersi passando dalla  $\kappa$ -forma esterna canonica  $dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{ik}$  ad una generica combinazione lineare di simili  $\kappa$ -forme, diciamo a  $\sum_{(i)} v_{(i)}(x) dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{ik}$ , con i coefficienti  $v_{(i)}(x)$  funzioni continue di  $x = \varphi(u) = \psi(v)$ . Se invece  $\mathcal{V}_{(\kappa)}$  è antivalente a  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  l'integrale sul primo è uguale e opposto a quello sul secondo. Queste conclusioni danno da una parte conferma della coerenza delle definizioni adottate, e dall'altra rivelano che gli integrali di  $\kappa$ -forme esterne possono essere intesi su classi di equivalenza di  $\kappa$ -domini piuttosto che su  $\kappa$ -domini in senso stretto. §

§4. *Catene e loro possibile equivalenza/antivalenza.* Ancora una nuova nozione è quella di  $\kappa$ -catena. Una  $\kappa$ -catena (per semplicità finita) su  $M$  è un insieme di coppie  $\{\varepsilon_s, \mathcal{U}_{(\kappa)}^s\}_{s \in S}$ , dove  $S$  è un insieme (finito) d'indici,  $\varepsilon_s$  è un reale e  $\mathcal{U}_{(\kappa)}^s$  è un  $\kappa$ -dominio ammissibile di  $M$ . Una  $\kappa$ -catena per la quale  $\varepsilon_s = 0 \ \forall s \in S$ , oppure  $S = \emptyset$ , si dice (una  $\kappa$ -catena) **nulla**. Due  $\kappa$ -catene su  $M$ , diciamo  $c_{(\kappa)} = \{\varepsilon_s, \mathcal{U}_{(\kappa)}^s\}_{s \in S}$  e  $c'_{(\kappa)} = \{\eta_t, \mathcal{V}_{(\kappa)}^t\}_{t \in T}$  si dicono **equivalenti [antivalenti]** se (i) tra le loro coppie esiste una corrispondenza biunivoca, diciamo  $s \leftrightarrow t$  (quindi  $\text{card}S = \text{card}T$ ), e (ii) per coppie corrispondenti  $s \leftrightarrow t$ ,  $0 \neq \varepsilon_s = \eta_t$  e  $\mathcal{U}_{(\kappa)}^s \sim \mathcal{V}_{(\kappa)}^t$ , [ $0 \neq \varepsilon_s = -\eta_t$  e  $\mathcal{U}_{(\kappa)}^s \sim_- \mathcal{V}_{(\kappa)}^t$ ]. Si dimostra senza difficoltà che due catene equivalenti [antivalenti] sono effettivamente in una relazione di equivalenza [di antivalenza], per la quale scriveremo  $c_{(\kappa)} \sim c'_{(\kappa)}$  [ $c_{(\kappa)} \sim_- c'_{(\kappa)}$ ]. Tutte le  $\kappa$ -catene nulle sono equivalenti per definizione. <sup>8</sup>

Per una generica  $\kappa$ -forma differenziale esterna, che per brevità denoteremo  $v_{(\kappa)} = v_{(\kappa)}[x]$ , tenendo conto della additività/linearità di un integrale rispetto al suo dominio di integrazione, definiremo l'integrale di  $v_{(\kappa)}$  sulla catena  $c_{(\kappa)}$ , da scrivere  $\int_{c_{(\kappa)}} v_{(\kappa)}[x]$ , secondo la

$$(10) \quad \int_{c_{(\kappa)}} v_{(\kappa)}[x] =: \sum_{s \in S} \varepsilon_s \int_{\mathcal{U}_{(\kappa)}^s} v_{(\kappa)}[x]$$

dove gli integrali a 2° membro sono definiti dalle (8) (in cui si sostituisca la forma differenziale esterna  $dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{ik}$  con la  $v_{(\kappa)}[x]$ ). Si noti che il 2° membro della (10) non varia cambiando segno ad un (generico)  $\varepsilon_s$  ed al contempo passando da  $\mathcal{U}_{(\kappa)}^s$  ad un  $\kappa$ -dominio ad esso antivalente, perché entrambi i fattori del prodotto  $\varepsilon_s \int_{\mathcal{U}_{(\kappa)}^s} v_{(\kappa)}[x]$  cambiano segno (si tenga al solito presente l'imperfezione tipografica dei sottoscritti). È a questo punto immediato provare che

<sup>8</sup> Alternativamente, una  $\kappa$ -catena potrebbe definirsi come una combinazione lineare (formale), con coefficienti  $\varepsilon$ , di classi di equivalenza di  $\kappa$ -domini, cioè come  $\sum_{s \in S} \varepsilon_s \mathcal{U}_{(\kappa)}^s$ . (In particolare, in forza della regola dei segni, con questa definizione la  $\kappa$ -catena resterebbe invariata cambiando segno a un coefficiente  $\varepsilon_s$  ed al contempo passando alla classe  $-\mathcal{U}_{(\kappa)}^s$ .) Allora la nozione di  $\kappa$ -catene equivalenti decadrebbe in favore di quella di  $\kappa$ -catene uguali, .. e via dicendo. È importante capire che le  $\kappa$ -catene andranno alla fine considerate come domini di integrazione secondo la prossima (10), e che vi è un unico integrale (della stessa  $\kappa$ -forma) su una intera classe di equivalenza di domini di integrazione.

T1.

$$(11) \quad "c_{(\kappa)} \sim c_{(\kappa)}'" \Rightarrow \int_{c_{\kappa}} v_{(\kappa)}[X] = \int_{c_{\kappa}'} v_{(\kappa)}[X],$$

$$(11bis) \quad "c_{(\kappa)} \sim_{-} c_{(\kappa)}'" \Rightarrow \int_{c_{\kappa}} v_{(\kappa)}[X] = - \int_{c_{\kappa}'} v_{(\kappa)}[X]"$$

e che questo vale per ogni  $v_{(\kappa)}$ . Si potrebbe anche vedere che valgono le implicazioni opposte ( $\Leftarrow$ ) alle (11, 11bis) se negli attuali conseguenti si inserisce (sotto le “ ”) un  $\forall v_{(\kappa)}$ . Questo (T1) è il teorema fondamentale per l’integrazione su catene. In particolare se  $c_{(\kappa)}$  è una  $\kappa$ -catena nulla (e quindi lo è anche  $c_{(\kappa)}'$ ), i relativi integrali di  $v_{(\kappa)}$  su  $c_{(\kappa)}$  e su  $c_{(\kappa)}'$  sono entrambi nulli.

Convenienti definizioni permettono di estendere i precedenti argomenti al caso degenero  $\kappa = 0$ . Se  $\kappa = 0$ , non vi è più uno spazio di parametri, e possiamo pensare a  $I^0$  come al singoletto dello zero di  $R^0$ , che denoteremo  $\{0\}$ . Nella carta  $\lambda$ , in luogo di un dominio di integrazione abbiamo ora l’immagine di tale  $\{0\}$  attraverso un’applicazione  $\varphi$ ,  $\varphi(\{0\}) \equiv \{\varphi(0)\} \equiv \{x_0\} \subset \lambda(M) \subset R^n$ . Questa idea ha tuttavia soltanto il ruolo di mimare i precedenti passaggi, quando  $\kappa$  era  $\geq 1$ , perché l’oggetto che conta è ormai  $x$ . Sempre nella carta  $\lambda$ , una 0-forma esterna è semplicemente una funzione continua  $v$  di  $x \in \lambda(M)$ , e in luogo dell’integrale della 0-forma sul 0-dominio abbiamo semplicemente il valore di  $v$  in  $x$ ,  $v(x)$ . A questo punto è naturale *definire* una **0-catena** come insieme di coppie del tipo  $\{\varepsilon_s, \{x^s\}\}_{s \in S}$ , dove  $\{x^s\}$  è il singoletto di  $x^s \in \lambda(M)$ . La nozione di 0-dominio equivalente degenera, e in luogo dell’“integrale di  $v$  su  $c$ ” abbiamo la corrispondente combinazione lineare di valori di  $v$ ,  $\sum_{s \in S} \varepsilon_s v(x^s)$ . A questo si riduce la (10) nel caso degenero  $\kappa = 0$ .

<sup>9</sup> Le (11, 11bis) rimangono comunque valide, con le dovute sostituzioni degli integrali con le corrispondenti sommatorie. §

§5. *Frontiere*. Quanto esporremo in questo §5 può equivalentemente svilupparsi partendo dai  $\kappa$ -quadrati unitari  $I^\kappa$  o dai  $\kappa$ -simplessi ortogonali corrispondenti come  $\kappa$ -domini fondamentali orientati di  $R^{n \geq \kappa}$ : vi sono vantaggi e svantaggi complementari in entrambi i casi. Qui noi seguiremo la prima opzione (si veda comunque anche la S.sez. 8.5.4).

Per  $\kappa \geq 1$ , il  $\kappa$ -quadrato unitario  $I^\kappa$  (un  $\kappa$ -dominio ammissibile) è definito, come sottoinsieme di  $R^{n \geq \kappa}$ , dalla

$$(12) \quad I^\kappa =: \{u \in R^n | 0 \leq u^1 \leq 1, \dots, 0 \leq u^\kappa \leq 1; u^{\kappa+1} = \dots = u^n = 0\},$$

con l’intesa che le uguaglianze dopo il ; mancano se  $\kappa = n$ . Esso riceve un “orientamento” convenzionale imponendo un ordine, diciamo l’ordine naturale 1, 2, ...,  $\kappa$ , ai suoi lati uscenti dall’origine di  $R^n$ ,  $0 \leq u^1 \leq 1, \dots, 0 \leq u^\kappa \leq 1$ . Per ogni  $1 \leq i \leq \kappa$ ,  $I^\kappa$  ha una coppia di “facce” opposte

<sup>9</sup> Cambiando carta, le  $x^s = \lambda(p^s)$  cambiano in  $x'^s = \lambda'(p^s)$ ; ma al contempo la funzione  $f$  cambia in  $f'$  in modo che  $f(x) \equiv f'(x'(x)) \forall x \in \lambda(M)$ , perché il suo valore è carta-indipendente. In conclusione  $\sum_{s \in S} \varepsilon_s f(x^s)$  è anch’essa carta-indipendente, come deve essere.

(quindi le facce di  $I^\kappa$  sono in tutto  $2\kappa$ ) che sono  $(\kappa-1)$ -quadrati unitari che denoteremo  $I_{i,\alpha}^\kappa$ , dove converremo che  $\alpha = 0$  per la prima faccia e  $\alpha = 1$  per la seconda. Questi  $I_{i,\alpha}^\kappa$  sono definiti, sempre come sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ , dalle

$$(13) \quad I_{i,\alpha}^\kappa =: \{u \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq u^1 \leq 1, \dots, u^i = \alpha, 0 \leq u^{i+1} \leq 1, \dots, 0 \leq u^\kappa \leq 1; u^{\kappa+1} = \dots = u^n = 0\}$$

Se  $\kappa = 1$ ,  $I_{i,\alpha}^\kappa$  degenera nel punto  $u^1 = \alpha$ ;  $u^2 = \dots = u^n = 0$ .

Definiremo la **frontiera** (o **bordo**, o **contorno**) di  $I^\kappa$  come l'insieme delle sue  $2\kappa$  facce  $I_{i,\alpha}^\kappa$  presa ciascuna con il segno  $(-1)^{i+\alpha}$ . Vale a dire,  $\partial I^\kappa$  (frontiera di  $I^\kappa$ ; la frontiera di un dominio si denota in generale premettendo al simbolo del dominio una  $\partial$ ) è la  $(\kappa-1)$ -catena

$$(14) \quad \partial I^\kappa =: \{(-1)^{i+\alpha}, I_{i,\alpha}^\kappa\}_{i=1+\kappa, \alpha=0 \div 1}.$$

Questa può anche pensarsi come la  $(\kappa-1)$ -catena che da essa si ottiene ponendo tutti i coefficienti uguali a  $+1$ , e sostituendo  $I_{i,\alpha}^\kappa$  con un  $\kappa$ -quadrato antivalente se  $i + \alpha$  è dispari: il risultato è una  $(\kappa-1)$ -catena equivalente alla  $\partial I^\kappa$ . Quel  $\kappa$ -quadrato antivalente è poi il trasformato di  $I_{i,\alpha}^\kappa$  attraverso un generico 1-diffeomorfismo antiverso. Ad esempio per  $\kappa = 2$  si può pensare il 2-quadrato antivalente a  $I^2$  come lo stesso  $I^2$  ribaltato attorno ad uno dei suoi 4 lati.<sup>10</sup>

Se  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  è la solita immagine di  $I^\kappa$  attraverso  $\varphi$ ,  $\mathcal{U}_{(\kappa)} = \varphi(I^\kappa)$ , è naturale definirne la frontiera come

$$(15) \quad \partial \mathcal{U}_{(\kappa)} =: \varphi(\partial I^\kappa) = \{(-1)^{i+\alpha}, \varphi(I_{i,\alpha}^\kappa)\}_{i=1+\kappa, \alpha=0 \div 1}$$

A 2° membro abbiamo una  $(\kappa-1)$ -catena, perché i  $\varphi(I_{i,\alpha}^\kappa)$  sono a loro volta  $(\kappa-1)$ -domini. Verifichiamo la consistenza della definizione (15), cioè che

T2. « $\mathcal{U}_{(\kappa)} \sim \mathcal{V}_{(\kappa)}$ »  $\Rightarrow$  (secondo la (15) « $\partial \mathcal{U}_{(\kappa)} \sim \partial \mathcal{V}_{(\kappa)}$ »).

Dim. Per  $1 \leq \kappa \leq n$ ,  $\mathcal{U}_{(\kappa)} = \varphi(I^\kappa)$  e  $\mathcal{V}_{(\kappa)} = \psi(I^\kappa)$  sono le solite immagini di  $I^\kappa$  attraverso  $\varphi$  e rispettivamente  $\psi \sim \varphi$  nella carta  $(\lambda, M)$ .  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  e  $\mathcal{V}_{(\kappa)}$  sono quindi equivalenti in quanto esiste un 1-diffeom equiverso  $\mathcal{D}$  di  $I^\kappa$  per cui  $\psi = \varphi \circ \mathcal{D}^{-1}$ . (Si ricordi che  $\varphi$  e  $\psi$  sono indicizzate da 1 a  $n$ , mentre  $\mathcal{D}$  lo è da 1 a  $\kappa \leq n$ .) Come abbiamo già osservato (v. nota <sup>(5)</sup>) in quanto 1-diffeom  $\mathcal{D}$  trasforma punti interni, frontiere, facce, coppie di facce opposte di  $I^\kappa$  in punti interni, frontiere, .. ecc., di  $I^\kappa$ . Sia  $I_{j,\beta}^\kappa$  la faccia trasformata della faccia  $I_{i,\alpha}^\kappa$  ( $i, j = 1 \div \kappa$ ,  $\alpha, \beta = 0 \div 1$ ) sotto  $\mathcal{D}$ , cioè

<sup>10</sup> La definizione (14) può essere lumeggiata considerandola nel caso  $\kappa = 2$ , cioè quando  $I^\kappa$  è il 2-quadrato unitario con il vertice sinistro/basso nell'origine e l'orientamento naturale,  $I^2$ . Le  $I_{i,\alpha}^2$  ( $i = 1, 2$ ;  $\alpha = 0, 1$ ) sono le quattro facce (lati) di  $I^2$ , e i pesi  $(-1)^{i+\alpha}$  fissano il loro orientamento rispetto all'orientamento naturale. Precisamente,  $I_{1,1}^2$  ha peso  $(-1)^{1+1} = 1$  e quindi ha l'orientamento naturale, quello che va da  $x^2 \equiv y = 0$  a  $y = 1$ .  $I_{2,1}^2$  ha invece orientamento opposto a quello naturale ( $(-1)^{2+1} = -1$ ), cioè da  $x^1 \equiv x = 1$  a  $x = 0$ . Anche  $I_{1,0}^2$  ha orientamento opposto a quello naturale ( $(-1)^{1+0} = -1$ ), da  $y = 1$  a  $y = 0$ ; e infine,  $I_{2,0}^2$  ha l'orientamento naturale ( $(-1)^{2+0} = 1$ ), da  $x = 0$  a  $x = 1$ . In conclusione la frontiera  $\partial I^2$  di  $I^2$  è orientata nell'usuale senso antiorario. È facile generalizzare queste considerazioni passando al  $(\kappa > 2)$ -quadrato. Se  $\kappa = 1$ ,  $I^1$  è segmento unitario,  $\partial I^1$  è l'insieme dei suoi due estremi: il primo ( $\alpha = 0$ ) col segno  $-$ , e l'altro ( $\alpha = 1$ ) col segno  $+$ .

$I_{j,\beta}^\kappa = \mathcal{D}^j(I_{i,\alpha}^\kappa)$ . Da qui in avanti in questo §5, per brevità potremo sottintendere l'indice  $\kappa$  in  $I^\kappa$ ,  $I_{i,\alpha}^\kappa$  e  $I_{j,\beta}^\kappa$ . Scrivendo brevemente “ $u^{1 \leq i \leq \kappa} | \alpha$ ”, o addirittura “ $u^i | \alpha$ ”, per “ $0 \leq u^1 \leq 1, \dots, u^i = \alpha, 0 \leq u^{i+1} \leq 1, \dots, 0 \leq u^\kappa \leq 1, u^{\kappa+1} = \dots = u^n = 0$  ( $\equiv$  valore di  $u$  sulla faccia  $I_{i,\alpha}$ ), si deve allora avere

$$(16_1) \quad v^h = \mathcal{D}^h(u^i | \alpha)$$

(con  $1 \leq h \leq \kappa$ ) per  $h \neq j$ , e

$$(16_2) \quad \beta = \mathcal{D}^j(u^i | \alpha).$$

Dalla (16<sub>2</sub>) si ha subito che

$$(17) \quad \partial \mathcal{D}^j / \partial u^k (u^i | \alpha) \equiv 0$$

per ogni  $1 \leq k \neq i \leq \kappa$  (infatti in tal caso  $v^j = \mathcal{D}^j(u^i | \alpha)$  è la costante  $\beta$ ). D'altra parte, per l'equivarietà il determinante jacobiano  $D = D(u) =: \det\{\partial(v)/\partial(u)\}(u)$  è  $> 0$  in  $I^\kappa$ ; e in particolare lo è sulla faccia  $I_{i,\alpha}$ , cioè  $D(u^i | \alpha) > 0$ . Ora per la (17) questo determinante ha sulla riga  $j$ -ma il solo elemento non nullo  $\partial v^j / \partial u^i (u^i | \alpha)$ . Sviluppando quindi  $D(u^i | \alpha)$  secondo gli elementi di questa riga, e denotando con  $D_{i,j}(u)$  il minore complementare di  $\partial v^j / \partial u^i (u)$  nella matrice jacobiana  $\{\partial(v)/\partial(u)\}(u)$ , troviamo:

$$(18) \quad (-1)^{i+j} \partial v^j / \partial u^i (u^i | \alpha) D_{i,j}(u^i | \alpha) > 0.$$

Si verifica facilmente che il segno di  $\partial v^j / \partial u^i (u^i | \alpha)$  è  $(-1)^{\alpha+\beta}$ . Congelando infatti gli elementi di  $u$  diversi da  $u^i$ , la funzione  $v^j = v^j(u^i)$  che ne risulta va dall'angolo  $(u^i=0, v^j=0)$  all'angolo  $(u^i=1, v^j=1)$ , oppure dall'angolo  $(u^i=0, v^j=1)$  all'angolo  $(u^i=1, v^j=0)$ , del 2-quadrato unitario. Nel primo caso  $\alpha+\beta$  è  $0+0 = 0$  oppure  $1+1 = 2$ , e  $\partial v^j / \partial u^i (u^i | \alpha) > 0$ ; nel secondo  $\alpha+\beta$  è  $0+1 = 1$  oppure  $1+0 = 1$  e  $\partial v^j / \partial u^i (u^i | \alpha) < 0$ . Questo dimostra il precedente asserto, e si conclude che

$$(19) \quad \text{sign} D_{i,j}(u^i | \alpha) = (-1)^{i+j+\alpha+\beta}.^{11}$$

Ma  $D_{i,j}(u^i | \alpha)$  è il determinante dell'1-diffeom che trasforma la faccia  $I_{i,\alpha}$  nella faccia  $I_{j,\beta}$  secondo le (16); e quell'1-diffeom è dunque equiverso o antiverso a seconda che  $i+j+\alpha+\beta$  sia pari o dispari. Ne segue che i domini  $\psi(I_{j,\beta}) \equiv \psi(\mathcal{D}(I_{i,\alpha}))$  e  $\varphi(I_{i,\alpha})$  sono equivalenti o antivalenti sotto le stesse condizioni, o se si preferisce, che

$$(20) \quad (-1)^{i+\beta} \psi(I_{j,\beta}) \sim (-1)^{i+\alpha} \varphi(I_{i,\alpha}).$$

D'altra parte in base alla definizione (15) abbiamo  $\partial \mathcal{U} = \{(-1)^{i+\alpha}, \varphi(I_{i,\alpha})\}_{i=1 \div \kappa, \alpha=0 \div 1}$ , e similmente  $\partial \mathcal{V} = \{(-1)^{j+\beta}, \psi(I_{j,\beta})\}_{j=1 \div \kappa, \beta=0 \div 1}$ . Quindi, in forza della (20),  $\partial \mathcal{U} \sim \partial \mathcal{V}$ , qed.

A questo punto è naturale definire la frontiera della  $\kappa$ -catena  $c_{(\kappa)} = \{\varepsilon_s, \mathcal{U}_{(\kappa)}^s\}_{s \in S}$  mediante la

$$(21) \quad \partial c_{(\kappa)} =: \{\varepsilon_s, \partial \mathcal{U}_{(\kappa)}^s\}_{s \in S},$$

dove  $\partial \mathcal{U}_{(\kappa)}^s$  è espresso dalla (15) per il dato  $\mathcal{U}_{(\kappa)}^s$ .

Possiamo ora enunciare i due principali teoremi sulle catene e le loro frontiere. Il primo è

<sup>11</sup> Il fatto che  $\beta$  compaia nel 2° membro della (19) e non nel suo 1° membro si giustifica alla luce della (16<sub>2</sub>), che stabilisce un nesso tra  $i, j, \alpha$  e  $\beta$  per la data funzione  $v(u)$ .



T3. «Se  $c_{(\kappa)} \sim c_{(\kappa)}'$ , allora  $\partial c_{(\kappa)} \sim \partial c_{(\kappa)}'$ ». (ormai non occorre dimostrazione). Il secondo è

T4. «Per una  $(\kappa \geq 2)$ -catena  $c_{(\kappa)}$ , la  $(\kappa-2)$ -catena  $\partial \partial c_{(\kappa)} \equiv \partial^2 c_{(\kappa)}$  è una  $(\kappa-2)$ -catena nulla.» Da un punto di vista formale, questo (T4) ricorda fortemente il lemma di Poincaré, vedi S.sez. 4.5.1.

Dim. Cominciamo col considerare il caso di  $c_{(\kappa)} = I^{\kappa \geq 2}$ . Si ha  $\partial^2 I^{\kappa} = \{(-1)^{i+\alpha}, \partial I_{i,\alpha}^{\kappa}\}_{i=1+\kappa, \alpha=0+1}$ .

Denotando, per  $1 \leq j \leq \kappa-1$ , con  $(I_{i,\alpha}^{\kappa})_{j,\beta}$  la faccia  $(j,\beta)$  della faccia  $(i,\alpha)$  di  $I^{\kappa}$  ( $(I_{i,\alpha}^{\kappa})_{j,\beta}$  è un  $(\kappa-2)$ -quadrato), risulta quindi

$$(22) \quad \partial^2 I^{\kappa} = \{(-1)^{i+\alpha+j+\beta}, (I_{i,\alpha}^{\kappa})_{j,\beta}\}_{i=1+\kappa, \alpha=0+1; j=1+\kappa-1, \beta=0+1}.$$

È facile verificare che  $(I_{i,\alpha}^{\kappa})_{j,\beta} \sim ((I_{j+1,\beta}^{\kappa})_{i,\alpha})$  (è ancora utile vederlo direttamente nel caso  $\kappa = 2$ ); quindi l'insieme delle  $2\kappa(\kappa-1)$  coppie (coefficiente,  $(\kappa-2)$ -quadrato) a 2° membro della (22) consta di  $(\kappa-2)$ -quadrati equivalenti a due a due con coefficienti uguali e opposti, perché se  $i+\alpha+j+\beta$  è pari [dispari],  $1+i+\alpha+j+\beta$  è dispari [pari]; e dunque è una  $(\kappa-2)$ -catena nulla. In pratica questo dimostra il teorema (T4), perché il passaggio all'immagine di  $\partial^2 I^{\kappa}$  attraverso  $\varphi$  non altera il risultato. #

Una  $\kappa$ -catena la cui frontiera è una  $(\kappa-1)$ -catena nulla si dice un  $\kappa$ -ciclo. (T4) afferma dunque che la frontiera di una  $\kappa$ -catena è un  $\kappa$ -ciclo. §

#### 8.4.2) IL TEOREMA DI POINCARÉ-STOKES

Illustreremo ora la generalizzazione (qui limitata a varietà elementari) del teorema di Gauss-Ostrogradskij (GO) (5.2.1, 5) e delle sue conseguenze che abbiamo preannunciato come teorema di Poincaré-Stokes (PS). Come abbiamo visto, la forma più elementare del teorema di GO è quella della formula di Leibniz-Newton, che lega l'integrale definito di una funzione continua  $f$  su un intervallo  $(a,b)$  ai valori di una sua qualsiasi primitiva  $F$  agli estremi dell'intervallo secondo la (°)  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Questa può anche scriversi come (\*)  $\int_a^b dF/dx(x)dx = F(b) - F(a)$  per ogni funzione  $F$  di CdC 1 in  $(a,b)$ . Per cogliere il giusto modo di generalizzare la (\*), conviene osservare che scambiando tra loro i due reali  $a$  e  $b$  essa rimane valida (ovviamente), in quanto i suoi membri cambiano simultaneamente segno. Quindi, se nella (\*) si cambia l'orientamento del dominio di integrazione, bisogna contemporaneamente cambiare l'orientamento della sua frontiera, considerata a sua volta come dominio di integrazione degenera.

T1. «Per  $\kappa \geq 1$ , sia  $I^{\kappa} =: \{x \in \mathbb{R}^{\kappa} | 0 \leq x^1 \leq 1, \dots, 0 \leq x^{\kappa} \leq 1\}$  il  $n$ -quadrato unitario di  $\mathbb{R}^{\kappa}$ , e  $v_{(\kappa-1)} = v_{(\kappa-1)}[x]$  una  $(\kappa-1)$ -forma differenziale esterna su di esso. Allora

$$(1) \quad \int_{I_{\kappa}} \partial v_{(\kappa-1)}[x] = \int_{\partial I_{\kappa}} v_{(\kappa-1)}[x] \gg$$

(dove i pedici  $I_{\kappa}$  e  $\partial I_{\kappa}$  vanno al solito intesi come  $I^{\kappa}$  e  $\partial I^{\kappa}$ ).

Dim. Senza limitare la generalità, possiamo porre, con  $1 \leq i \leq \kappa$ , e con  $[[ \ ]] \equiv$  soppressore,

$$(2) \quad v_{(\kappa-1)}[X] = v(x) \sum_{i=1}^{\kappa} dx^1 \wedge \dots \wedge [[dx^i]] \wedge \dots \wedge dx^{\kappa},$$

dove  $v(x)$  è di CdC 1. Abbiamo allora

$$(3) \quad \partial v_{(\kappa-1)} = \sum_{i=1}^{\kappa} (-1)^{i-1} \partial v / \partial x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{\kappa}.$$

Il 1° membro della (1) è quindi

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\kappa} (-1)^{i-1} \int_{I_{\kappa}} \partial v / \partial x^i dx^1 \dots dx^{\kappa} = \sum_{i=1}^{\kappa} (-1)^{i-1} \int_{I_{(\kappa-1)}} [v(x^i|1) - v(x^i|0)] dx^1 \dots [[dx^i]] \dots dx^{\kappa},$$

dove abbiamo usato la notazione  $(x^i|\alpha)$  introdotta nella precedente sottosezione, e siamo passati dall'integrale nel 1° membro a quello nel 2° membro integrando da 0 a 1 rispetto a  $x^i$ . Calcoliamo ora il 2° membro della (1), tenendo presente che  $\partial I^{\kappa} = \{(-1)^{i+\alpha}, I_{i,\alpha}^{\kappa}\}_{i=1 \div \kappa, \alpha=0 \div 1}$  (vedi 8.4.1, 14). Tale 2° membro della (1) vale dunque  $\sum_{i=1}^{\kappa} \int_{I_{(\kappa-1)}} [(-1)^i v(x^i|0) + (-1)^{i+1} v(x^i|1)] dx^1 \dots [[dx^i]] \dots dx^{\kappa}$ , che è uguale al 2° membro della (4) ( $(-1)^{i-1} = (-1)^{i+1}$ ). La tesi è così dimostrata. # (Si noterà che la (1) non è altro che il teorema di GO per il  $\kappa$ -quadrato  $I^{\kappa}$  tradotto nel linguaggio delle forme differenziali esterne.)

Per generalizzare la (1) nella direzione del teorema di PS occorrerà provare che:

T2. «La (1) rimane valida se vi si sostituisce  $I^{\kappa}$  con un generico  $\kappa$ -dominio ammissibile  $\mathcal{U}_{(\kappa)} = \varphi(I^{\kappa})$  di  $M$  (v. 8.4.1, 5), con  $1 \leq \kappa \leq n \equiv \dim M$ , secondo la seguente

$$(5) \quad \int_{\mathcal{U}_{(\kappa)}} \partial v_{(\kappa-1)}[X] = \int_{\partial \mathcal{U}_{(\kappa)}} v_{(\kappa-1)}[X]. \gg$$

Nella (8.4.1, 5),  $\varphi$  è assunta di CdC 1, ma per poter far uso del lemma di Poincaré, occorrerà tuttavia l'ipotesi leggermente più forte che  $\varphi$  sia di CdC 2. Questo non meraviglia, perché essa ipotesi compare a carico dei coefficienti di una generica  $\kappa$ -forma nella dimostrazione che il suo  $\partial^2$  è identicamente nullo.

Premettiamo la seguente proposizione, che riguarda proprietà delle  $\kappa$ -forme differenziali esterne.

T3. «Per una  $\kappa$ -forma differenziale esterna  $v_{\kappa}[X]$ ,  $x \equiv x^1, \dots, x^n$ ,  $0 \leq \kappa \leq n$ , l'operazione  $\partial$  e il passaggio a variabili  $u$  secondo la  $x = \varphi(u)$  (cfr. la (8.4.1, 5)),  $u \equiv u^1, \dots, u^m$ ,  $1 \leq m \leq n$ , commutano: si può eseguire prima la differenziazione rispetto alle  $x$  e poi il passaggio alle  $u$ , o viceversa prima il passaggio alle  $u$  e poi la differenziazione rispetto alle  $u$ , senza che il risultato cambi.»

Dim. La dimostrazione è per induzione sul valore di  $\kappa$ . Proviamo innanzitutto che la proposizione è vera per  $\kappa = 0$ , quando  $v_{\kappa}[X]$  è una semplice funzione  $v(x)$ . In questo caso  $\partial v =$  (differenziazione rispetto alle  $x$ )  $= \sum_{i=1}^n \partial v / \partial x^i dx^i =$  (passaggio alle  $u$ )  $= \sum_{i=1}^n \partial v / \partial x^i(\varphi(u)) \sum_{j=1}^m \partial \varphi^i / \partial u^j du^j$ . Procedendo nell'ordine inverso, poniamo  $v'(u) =: v(\varphi(u))$ . Per la regola della derivazione di funzione di funzione abbiamo  $\partial v' = \sum_{j=1}^m \partial v' / \partial u^j du^j = \sum_{j=1}^m [\sum_{i=1}^n \partial v / \partial x^i(\varphi(u)) \partial \varphi^i / \partial u^j] du^j$ , che coincide con la

precedente. (Fin qui, non abbiamo avuto bisogno di usare il lemma di Poincaré.) Mostriamo ora che “(T3) vale per  $\kappa-1$ ” (ipotesi induttiva) implica “(T3) vale per  $\kappa$ ” (tesi induttiva). Supponiamo cioè soddisfatta l’ipotesi induttiva

$$(6) \quad (\partial v_{(\kappa-1)})[\varphi(u)] = \partial(v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)]),$$

in cui la notazione a 1° membro significa che si è prima differenziato e poi passati alle  $u$ , e quella a 2° membro che si è prima passati alle  $u$  e poi differenziato; e proponiamoci di dimostrare la stessa (6) per  $\kappa$  in luogo di  $\kappa-1$ , cioè la

$$(6bis) \quad (\partial v_{(\kappa)})[\varphi(u)] = \partial(v_{(\kappa)}[\varphi(u)]),$$

nostra tesi induttiva. Un momento di riflessione mostra che è sufficiente provare l’implicazione (6)  $\Rightarrow$  (6bis) per una  $\kappa$ -forma del tipo  $v_{(\kappa)}[x] = v_{(\kappa-1)}[x] \wedge dx^h[x]$  con  $1 \leq h \leq n$ , dove  $v_{(\kappa-1)}$  è una  $(\kappa-1)$ -forma. Con questa posizione, il 1° membro della (6bis) si scrive

$$(7) \quad \partial(v_{(\kappa-1)} \wedge dx^h)[\varphi(u)] = (\partial v_{(\kappa-1)} \wedge dx^h)[\varphi(u)] \equiv \partial v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)] \wedge dx^h[\varphi(u)],$$

perché  $\partial dx^h = \sum_{i=1}^n \partial(1)/\partial x^i dx^i \wedge dx^h \equiv 0$ . D’altra parte il 2° membro della (6bis) si scrive

$$(8) \quad \partial\{v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)] \wedge dx^h[\varphi(u)]\} = \partial(v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)]) \wedge dx^h[\varphi(u)],$$

perché  $\partial(dx^h[\varphi(u)]) = \sum_{i,j=1}^m \partial^2 \varphi^h / \partial u^i \partial u^j (u) du^i \wedge du^j \equiv 0$  (le derivate seconde essendo simmetriche rispetto a  $i, j$  per ipotesi). Qui interviene l’ipotesi induttiva (6), e il 2° membro della (8) diventa  $\partial v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)] \wedge dx^h[\varphi(u)]$ , cioè il 3° membro della (7). La tesi induttiva è quindi vera, cioè (6) implica (6bis), qed. Con questo, l’intera proposizione (T3) è dimostrata. Si noti anche che le  $\partial dx^h = 0$  e  $\partial(dx^h[\varphi(u)]) = 0$  sono espressioni del lemma di Poincaré, la seconda lecita sotto la convenuta ipotesi “ $\varphi$  è di CdC 2”.

Passiamo al teorema di PS. Sia  $\mathcal{U}_{(\kappa)} = \varphi(I^\kappa)$ , con frontiera  $\partial_{(\kappa)}\mathcal{U}$  (che è una  $(\kappa-1)$ -catena) data dalla (8.4.1, 15),  $0 \leq \kappa \leq n = \dim M$ . In forza della definizione di integrale di una  $(\kappa \geq 0)$ -forma su una  $(\kappa \geq 0)$ -catena (il caso degenere  $\kappa = 0$  è stato trattato a parte), e della tesi (1) di (T1), abbiamo:

$$(9) \quad \int_{\partial \mathcal{U}_{(\kappa)}} v_{(\kappa-1)}[x] = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\varphi(\kappa, i, \alpha)} v_{(\kappa-1)}[x],$$

dove per necessità tipografica abbiamo scritto  $(\kappa, i, \alpha)$  per  $I_{i, \alpha}^\kappa$  quando questo compare come pedice.

Con gli opportuni adattamenti, gli integrali  $(\kappa-1)$ -pli a 2° membro della (9) sono definiti al solito modo, e quindi si trascrivono come integrali su  $I_{i, \alpha}^\kappa$  passando ai parametri  $u$ . Scriveremo convenzionalmente questi integrali come  $\int_{(\kappa, i, \alpha)} v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)]$ . Ancora in forza della stessa definizione (di integrale di una forma su una catena), la (9) si riscrive allora come

$$(10) \quad \int_{\partial \mathcal{U}_{(\kappa)}} v_{(\kappa-1)}[x] = \int_{\partial I^\kappa} v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)];$$

quindi (vedi ancora la (1)) come

$$(11) \quad \int_{\partial \mathcal{U}_{(\kappa)}} v_{(\kappa-1)}[x] = \int_{I^\kappa} \partial(v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)]).$$

D'altra parte  $(\partial v_{(\kappa-1)})[x]$  è una  $\kappa$ -forma, e il suo integrale su  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$ ,  $\int_{\mathcal{U}_{(\kappa)}} \partial v_{(\kappa-1)}[x]$ , è ancora definito, quando si passa ai parametri  $u$ , come integrale su  $I^\kappa$ . Utilizzando la stessa convenzione notazionale, abbiamo dunque:

$$(12) \quad \int_{\mathcal{U}_{(\kappa)}} \partial v_{(\kappa-1)}[x] = \int_{I^\kappa} (\partial v_{(\kappa-1)})[\varphi(u)].$$

Qui è importante comprendere bene in cosa differiscano i 2<sup>i</sup> membri delle (11, 12), o meglio le relative integrande  $\partial(v_{(\kappa-1)}[\varphi(u)])$  (nella (11)) e  $(\partial v_{(\kappa-1)})[\varphi(u)]$  (nella (12)). Nella prima integranda (v. la (11)),  $v_{(\kappa-1)}$  è differenziata dopo essere stata espressa in termini dei parametri  $u$ . Nella seconda integranda (v. la (12)),  $v_{(\kappa-1)}$  è espressa in termini delle coordinate  $x$ , è differenziata come tale, e infine la risultante  $\kappa$ -forma è espressa in termini dei parametri  $u$ . In altre parole, nella prima integranda *prima* si passa ai parametri  $u$  e *poi* si differenzia, mentre nella seconda integranda *prima* si differenzia e *poi* si passa ai parametri  $u$ . Ma abbiamo provato (vedi (T3)) che le due operazioni in oggetto commutano, per cui i primi membri della (11) e (12) sono uguali. La tesi (5) di (T2) è così dimostrata. #

Possiamo finalmente enunciare il teorema di PS:

T4. «Riferendoci alla solita carta totale  $\lambda$  di  $M \equiv \mathbb{R}^{\geq 1} M^{n \geq 1}$ , siano  $c_{(\kappa \geq 1)}$  una  $\kappa$ -catena e  $v_{(\kappa-1)}$  una  $(\kappa-1)$ -forma di CdC 1 su di essa definita. Allora

$$(13) \quad \int_{c_{(\kappa)}} \partial v_{(\kappa-1)} = \int_{\partial c_{(\kappa)}} v_{(\kappa-1)}.$$

Si noti che  $\partial v_{(\kappa-1)}$  è una  $\kappa$ -forma che viene integrata su una  $\kappa$ -catena, e  $\partial c_{(\kappa)}$  è una  $(\kappa-1)$ -catena sulla quale si integra una  $(\kappa-1)$ -forma. La (13) si scrive usualmente sottintendendo i pedici in  $c$  e  $v$ , come

$$(13bis) \quad \int_c \partial v = \int_{\partial c} v.$$

In questa veste, la tesi del teorema di PS raggiunge un livello estremo di sintesi formale.

Dim. È lasciata al lettore, perché ormai elementare. #

Nonostante la sua generalità, la (13) è suscettibile di una ulteriore generalizzazione. Vale a dire: per  $\kappa \geq 2$ , il  $\kappa$ -dominio  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  che figura nella (5) reca traccia del suo essere il trasformato attraverso  $\varphi$  del  $\kappa$ -quadrato unitario  $I^\kappa$  nel fatto che, come è vero per la frontiera di questo, la sua frontiera ha punti, linee, ...  $(\kappa-2)$ -superfici singolari. Quindi  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  non corrisponde al concetto standard di  $\kappa$ -dominio di integrazione con frontiera *regolare* (anche se la parte singolare di quest'ultima ha misura nulla, avendo dimensione minore di  $\kappa - 1$ ). Questa limitazione si ripropone manifestamente per ogni  $\kappa$ -catena finita formata combinando linearmente (e tipicamente sommando) in modo formale tale tipo di  $\kappa$ -domini; ma può essere rimossa, sotto opportune condizioni di regolarità sulle quali non insistiamo, se si introducono catene di  $\kappa$ -domini **confinanti** (congiunti solo lungo il bordo) a frontiera singolare, di diametro abbastanza piccolo e in numero

abbastanza grande, e si passa al limite per tale numero  $\rightarrow \infty$ . Non manchiamo tuttavia di osservare che, mentre nell'approccio standard a problemi di questo tipo, che è fondato in gran parte sulla intuizione geometrica, la eventuale presenza di sottoinsiemi singolari nella frontiera dei domini di integrazione viene trattata come un "elemento di disturbo" (non a caso si parla di frontiera "regolare a pezzi"), nell'approccio attuale questa presenza è intrinseca, e va possibilmente aggirata mediante un passaggio al limite per catene *infinite* di  $\kappa$ -domini confinanti. (La situazione è del resto analoga a quella che si presenta nel calcolo di un R-integrale su un dominio (ad es.) piano a frontiera regolare, dominio che viene approssimato come unione di piccoli rettangoli confinanti, passando poi al limite per diametro degli stessi  $\rightarrow 0$ .)

Resta da ricordare che tutto quanto abbiamo qui esposto è limitato a varietà elementari, la orientabilità delle quali è ovvia per definizione. L'estensione della teoria a varietà non elementari ma *orientabili* non è banale (per quanto se ne possa intuire la realizzazione), e non ne tratteremo qui.<sup>12</sup> Infine la discussione dello stesso problema riferito a varietà *non orientabili* non ci sembra presentare un interesse così diretto nelle applicazioni alla fisica macroscopica per occuparcene in questo libro.

#### 8.4.3) ESEMPI E APPLICAZIONI

Concludiamo la sezione esaminando e commentando la (8.4.2, 5), che per brevità indicheremo qui come (5\*), per certe combinazioni tipiche dei parametri numerici ( $\kappa, n$ ), sempre riferendoci a varietà elementari.

§1. Cominciamo con la combinazione  $\kappa = 1, n \geq 1$ .  $\mathcal{U}_{(1)}$  è il segmento di curva di  $\mathbb{R}^n$  descritto, nella  $x^{1 \leq i \leq n} = \varphi^i(u)$ , con  $u \in [0, 1] \equiv I^1$  orientato da  $u = 0$  a  $u = 1$ , mentre la sua frontiera è una 0-catena di singoletti. La  $(\kappa-1=0)$ -forma  $v_{(0)} \equiv v = v(x)$ , di CdC 1, ha per differenziale  $(\partial v)[x] = \sum_{i=1}^n \partial v / \partial x^i(x) dx^i$ , e la (8.4.2, 1) dà

$$(1) \quad \int_0^1 \sum_{i=1}^n \partial v / \partial x^i(\varphi(u)) \partial \varphi^i / \partial u(u) du = v(\varphi(1)) - v(\varphi(0)),$$

ove per ipotesi almeno una delle  $\partial \varphi^{1 \leq i \leq n} / \partial u$  è  $\neq 0 \forall u \in [0, 1]$ . La (1) generalizza la formula di Leibniz-Newton al segmento di curva  $\mathcal{U}_{(1)}$  di  $\mathbb{R}^n$ , cui corrisponde il segmento di curva della varietà  $n$ -dim  $M$  di equazione  $p = \lambda^{-1}(\varphi(u)) \equiv p(u)$ . Se per brevità denotiamo con  $\mathcal{L}$  tale segmento di curva, e con  $p_0 =: p(u=0)$  e  $p_1 =: p(u=1)$  i suoi estremi, la (1) può trascriversi nella familiare forma

<sup>12</sup> Il testo di riferimento è quello di de Rham ("Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques" (1955)), vedi Bibl. Gen. A).

$$(2) \quad \int_{\mathcal{L}} \partial v = v(p_1) - v(p_0),$$

i cui due membri sono carta-indipendenti, anche formalmente. Il fatto che, alla luce della (2),  $\int_{\mathcal{L}} \partial v$  dipenda soltanto dai valori di  $v$  negli estremi di  $\mathcal{L}$ , e non da  $\mathcal{L}$  stessa, in ultima analisi deriva dall'assunto carattere elementare della varietà. (Già per  $M = 2$ -sfera, che non è elementare, la (2) è falsa in generale.) Il caso di varietà 1-dim non è escluso, ma esso si configura come una banale riparametrizzazione del segmento  $[0,1]$ . In conclusione, non considerando la diversità di linguaggio, il presente caso della (5\*) per ( $\kappa = 1, n \geq 1$ ) non ci insegna nulla che già non sapessimo entro il linguaggio standard. §

§2. L'esame della (5\*) per  $\kappa = 2, n \geq 2$  è concettualmente simile al precedente, e viene proposto soprattutto perché, per  $n = 3$ , riproduce il classico teorema del rotore in versione bidimensionale (cfr. 5.2.1, 8bis). Se la matrice jacobiana delle  $n$  funzioni  $x = \varphi(u^1, u^2)$  ha rango 2,  $\varphi$  trasforma  $I^2$  in un **quadroide**  $\mathcal{U}_{(2)}$  ( $\equiv$  un quadrato deformato *regolarmente* dall'applicazione  $\varphi$ ,  $\mathcal{U}_{(2)} = \varphi(I^2)$ ) di  $\mathbb{R}^n$ . La frontiera del detto quadroide è la 1-catena  $\{(-1)^{i+\alpha}, \varphi(I^2_{i,\alpha})\}_{i=1+2, \alpha=0+1}$ , e i suoi "lati" hanno l'orientamento indotto attraverso  $\varphi$  dai corrispondenti lati di  $I^2$  ( $I^2_{1,0}, \dots, I^2_{2,1}$ ), vedi la nota (<sup>10</sup>). Questo orientamento stabilisce un definito senso di percorrenza lungo la frontiera del quadroide. Se in particolare  $n = \kappa + 1 = 3$ , il senso di percorrenza è quello antiorario se orientato come il prodotto vettoriale dei vettori  $\partial\varphi/\partial u^1$  e  $\partial\varphi/\partial u^2$  (nell'ordine), tangenti alle linee coordinate ( $u^1$ ) e rispettivamente ( $u^2$ ). Ricordiamo che se  $\{e_i\}_{i=1,2,3}$  è una base ortonormale destra di  $\mathbb{R}^3$ , la componente su  $e_i$  di questo prodotto vettoriale vale  $\partial\varphi^{i+1}/\partial u^1 \partial\varphi^{i+2}/\partial u^2 - \partial\varphi^{i+2}/\partial u^1 \partial\varphi^{i+1}/\partial u^2$  (leggi mod3).

Tornando al caso generale  $n \geq 2$ , la  $(\kappa-1=1)$ -forma nella (5\*) è la pfaffiana  $v_{(1)}[x] = \sum_{i=1}^n v_i(x) dx^i$ , e il suo differenziale è

$$(3') \quad \partial v_{(1)}[x] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \partial v_i / \partial x^j(x) dx^j \wedge dx^i,$$

somma di  $n^2$  addendi. Questo differenziale si può riscrivere come somma di soli  $n(n-1)/2$  addendi secondo la (con  $\alpha, \beta = 1 \div n$ )

$$(3) \quad \partial v_{(1)}[x] = \sum_{\alpha < \beta} (\partial v_\beta / \partial x^\alpha - \partial v_\alpha / \partial x^\beta) dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

Se è  $n = 3$ , nella (3) abbiamo i tre addendi corrispondenti a  $(\alpha, \beta) = (1,2), (1,3), (2,3)$ . È allora immediato verificare che  $dx^1 \wedge [[dx^i]] \wedge dx^3$ , dove  $i = 1,2,3$  e  $[[ \ ]]$  è il solito simbolo di soppressione, è uguale a  $D_i du^1 \wedge du^2$ ,  $D_i$  essendo il minore della  $(3 \times 2)$ -matrice jacobiana che si ottiene cancellandone la riga  $i$ -ma. (La definizione di  $D_i$  si può estendere similmente al caso  $n \geq 2, \kappa = n - 1$ .) Si conclude così che, per  $n = 3$ , e sempre leggendo gli indici mod3,

$$(4) \quad \int_{\mathcal{U}_{(2)}} \partial v_{(1)}[x] = \int_{I^2} \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} D_i (\partial v_{i+2} / \partial x^{i+1} - \partial v_{i+1} / \partial x^{i+2}) du^1 du^2.$$

Ricordando la definizione generale del vettore  $N^*$  data in (5.1.3, §3), si verifica che  $N^*_i = (-1)^{i-1}D_i$ ; e quindi, per  $n = 3$ ,  $N^*_1 = D_1$ ,  $N^*_2 = -D_2$ ,  $N^*_3 = D_3$ . La (4) può dunque trascriversi come

$$(5) \quad \int_{\mathcal{U}_{(2)}} \partial v_{(1)}[X] = \int_{12} [N_1(\partial v_3/\partial x^2 - \partial v_2/\partial x^3) + \text{cicl}(1,2,3)] d\mathcal{U}_{(2)},$$

dove  $N = N^*/|N^*|$  è il versore di  $N^*$  (si noti che  $|N^*| \equiv |D| = [\sum_{i=1}^3 D_i^2]^{1/2}$ ), e si è scritto  $|D|du^1du^2$  come  $d\mathcal{U}_{(2)}$ . Questa convenzione notazionale può evidentemente adottarsi anche in generale: se  $\mathcal{U}_{(\kappa \leq n)} = \varphi(I^\kappa)$  è un  $\kappa$ -**quadroide** immerso in  $R^n$ , sotto il segno di integrale (su  $I^\kappa$ ) si scriverà  $d\mathcal{U}_{(\kappa)}$  per  $|D|\prod_{i=1}^\kappa du^i$  (con  $|D| = [\sum_{i=1}^n D_i^2]^{1/2}$ ), e a buona ragione si nominerà questo oggetto  $d\mathcal{U}_{(\kappa)}$  come **elemento euclideo di  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$** . Si noti che  $(\partial v_3/\partial x^2 - \partial v_2/\partial x^3) [(\partial v_1/\partial x^3 - \partial v_3/\partial x^1), (\partial v_2/\partial x^1 - \partial v_1/\partial x^2)]$  è la componente (1) [(2), (3)] del rotore del vettore  $v$  di componenti  $(v_1, v_2, v_3)$ ; quindi il 2° membro della (4) è il flusso di tale rotore attraverso  $\mathcal{U}_{(2)}$ , positivo nel verso di  $N$ , e la (5) afferma che questo flusso è uguale alla circolazione di  $v$  lungo il bordo del quadroide  $\mathcal{U}_{(2)}$ , orientato secondo la regola sopra specificata. Questo non è altro che il teorema (5.2.1, 8bis) riferito al quadroide, o alla sua immagine in  $M$  attraverso  $\lambda^{-1}$ .

La naturale estensione di questo risultato consiste nel passare ad una somma-catena di quadroidi equiversi e confinanti (salvo che lungo il bordo della catena), osservando che la circolazione del vettore  $v$  lungo il “lato” comune di due quadroidi confinanti è nulla per essere tale lato contato due volte con segni opposti. Resta così il solo contributo del bordo della catena (orientato secondo la regola del cavatappi rispetto alla normale alla catena) alla circolazione di  $v$ . Sotto convenienti condizioni di regolarità sulle quali non ci soffermiamo, si può passare al limite per quadroidi sempre più piccoli e numerosi, ed anche passare da varietà elementari a generiche varietà orientabili; si ritrovano così gli enunciati di cui in 5.2.2, §4 (ove ai generici “poligoni” della superficie poliedrica approssimante si sostituiscono i presenti quadroidi). §

§3. Il terzo esempio di applicazione della (5\*) che illustreremo è quello della combinazione  $\kappa = n \geq 1$ , e come vedremo esso ci porterà a ritrovare il teorema della divergenza (5.2.1, 7).

Innanzitutto converrà rappresentare la  $(n-1)$ -forma  $v_{(n-1)}$  di cui alla (5\*) come

$$(6) \quad v_{(n-1)}[X] = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} v_j(x) dx^1 \wedge \dots \wedge [dx^j] \wedge \dots \wedge dx^n,$$

dove  $v_j$  è la componente (j) di un vettore  $v$  di CdC 1. Il suo differenziale è quindi la  $n$ -forma

$$(7) \quad \partial v_{(n-1)}[X] = \sum_{j=1}^n \partial v_j/\partial x^j(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Il 2° membro della (5\*) diventa così  $\int_{\mathcal{U}_{(n)}} \text{div} v(x) d\mathcal{U}_{(n)}$ , dove abbiamo denotato con  $\mathcal{U}_{(n)}$  l' $n$ -quadroide  $\varphi(I^n)$ , con  $\varphi$  *equivversa* e di CdC 2. Ciò in quanto  $\sum_{j=1}^n \partial v_j/\partial x^j \equiv \text{div} v$  in  $R^n$ .

D'altra parte la frontiera di  $\mathcal{U}_{(n)}$  è  $\partial \mathcal{U}_{(n)} = \{(-1)^{i+\alpha}, \varphi(I_{i,\alpha}^n)\}_{i=1+n, \alpha=0 \div 1}$ , e dunque

$$(8) \quad \int_{\partial \mathcal{U}_{(n)}} v_{(n-1)}[X] = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{\varphi(I_{i,\alpha}^n)} v_{(n-1)}[X],$$

dove  $(n,i,\alpha)$  sta ancora per  $\Gamma_{i,\alpha}^n$ . Come sappiamo, l'integrale a 2° membro della (8) è il flusso del vettore  $v$  attraverso la faccia orientata  $\varphi(\Gamma_{i,\alpha}^n)$  di  $\mathcal{U}_{(n)}$ , il cui versore normale è  $N_{i,\alpha} = N_{i,\alpha}^*/|N_{i,\alpha}^*|$  con  $N_{i,\alpha}^* =: [\partial\varphi/\partial u^1, \dots, \partial\varphi/\partial u^{i-1}, \partial\varphi/\partial u^{i+1}, \dots, \partial\varphi/\partial u^n](-1)^{i+\alpha}$ , cioè, il prodotto vettoriale degli  $n-1$  vettori (nell'ordine) entro le [ ] moltiplicato per  $(-1)^{i+\alpha}$ . In definitiva,

$$(9) \quad \int_{\partial\mathcal{U}_{(n)}} v_{(n-1)}[x] = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\Gamma_{i,\alpha}^{(n-1)}} v_i N_{i,\alpha} |N_{i,\alpha}^*| du^1 \dots [[du^i]] \dots du^n \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 \int_{S_{i,\alpha}} v_i N_{i,\alpha} dS_{i,\alpha},$$

dove  $dS_{i,\alpha} =: |N_{i,\alpha}^*| du^1 \dots [[du^i]] \dots du^n$ , elemento euclideo della faccia orientata  $S_{i,\alpha} \equiv \varphi(\Gamma_{i,\alpha}^n)$  di  $\mathcal{U}_{(n)}$ , e  $v_i, N_{i,\alpha}$  sono valutati in  $x \equiv s \in S_{i,\alpha}$ . Si rilevi che  $N_{i,\alpha}$  è orientato verso l'esterno di  $\mathcal{U}_{(n)}$  per ogni  $1 \leq i \leq n$  e ogni  $0 \leq \alpha \leq 1$ . §

Analogamente a quanto abbiamo visto nel precedente §2, si può considerare la possibilità di avere una somma-catena di  $n$ -quadroidi equiversi e confinanti (sempre tenendo conto del fatto che il contributo di facce comuni di  $n$ -quadroidi è nullo per essere esse contate due volte con segni opposti), e infine di passare al limite per  $n$ -quadroidi sempre più piccoli e numerosi. Sotto le condizioni che rendono legittimo quest'ultimo passaggio (nonché quello da varietà elementari a generiche varietà orientabili, vedi ancora la già citata monografia di de Rham), si conclude con il teorema della divergenza in un dominio  $n$ -dim compatto di  $R^n$  con frontiera regolare (o regolare a pezzi), cfr. la (5.2.1, 7).



## 8.5 INTEGRAZIONE DI FORME DIFFERENZIALI ESTERNE SU VARIETÀ: COMPLEMENTI

Con l'opera di É. Cartan (Élie, 1869-1951), Weyl (Hermann, 1885-1955), Morse (Marston, 1892-1977), de Rham (Georges, allievo di É. Cartan, 1903-1990), Hodge (William, 1903-1975), e poi di altri matematici delle generazioni successive (Grothendieck, Atiyah, Singer, ecc.), la geometria differenziale ha conosciuto ulteriori grandi progressi, proponendosi come una regione di confluenza tra le categorie dell'algebra, dell'analisi e della topologia (ad esempio intrecciandosi con la teoria delle equazioni differenziali). La teoria delle varietà differenziabili orientabili ed il calcolo su di esse con forme differenziali esterne sono espressioni di tali sviluppi unificanti.

D'altra parte, è indubitabile che il corpo della geometria differenziale *moderna* (diciamo, sviluppata dopo il terzo-quarto decennio del '900) presenti un interesse ancora marginale per il fisico matematico "medio" (almeno, per quello che si occupa di fisica macroscopica). Questo resta vero anche se teorie come quelle di de Rham e di Hodge hanno fornito una trattazione rigorosa e completa di questioni di indubbio interesse fisico-matematico-macroscopico che erano state fino ad allora considerate su basi in buona parte intuitive. Non viene con ciò tradita la nota regola secondo cui la matematica precede significativamente le scienze esatte che su di essa si modelleranno, in simmetria con l'altra regola secondo cui quelle stesse scienze agiscono come un potente stimolo sullo sviluppo della matematica stessa.

Tale situazione rende difficile decidere cosa sia opportuno aggiungere *qui*, a completamento di quanto se ne è già detto, intorno al calcolo differenziale e integrale con forme differenziali esterne su varietà orientabili e congruamente differenziabili. Ad esempio, gli sviluppi più generali e sistematici dell'analisi nel dominio degli operatori ellittici su varietà lisce sono certamente al di là dei confini che ci siamo imposti. Quanto segue in questa Sez. 8.5 si limita pertanto a trattare di alcune questioni di teoria delle forme esterne e della loro integrazione che abbiamo ritenuto di interesse per il fisico matematico (macroscopico) e che si possono ancora affrontare con strumenti relativamente semplici: in pratica, restando nell'ambito dell'analisi delle funzioni di più variabili reali usualmente qualificata come "standard".<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Come è naturale, i trattati specializzati in teoria delle forme differenziali esterne enfatizzano (talvolta eccessivamente) l'importanza di queste ultime in competizione con il calcolo tensoriale, nel quadro generale dell'analisi su varietà e della fisica matematica che ne fa uso nei suoi modelli. In proposito, può essere utile menzionare alcune delle opere più note (a chi scrive), ordinate per data di pubblicazione: É. Cartan, v. Bibl. Gen. A, 1945; G. de Rham, v. Bibl. Gen. A, 1960; H. Flanders, v. Bibl. Gen. A, 1963; H. Cartan: "Formes différentielles", Hermann 1967; Y. Choquet-Bruhat: "Géométrie différentielle et systèmes extérieurs", Dunod 1968; H. Holmann, H. Rummeler: "Alternierende Differentialformen", BI Wissenschaftsverlag 1972; S. Brehner, H. Haar: "Differentialformen u. Vektoranalysis", VEB Deut. Wiss. 1973; E. Heil: "Differentialformen", BI Wissenschaftsverlag 1974; W. Slobodzinski "Exterior Forms and their Applications", Pol. Sci. Publ. 1976; C. Von Westenholz: "Differential Forms and their Applications", North Holland 1978. Utili informazioni si troveranno anche in: W. Hodge: "Theory and Applications of harmonic Integrals",

8.5.1)  $\kappa$ -FORME E DUALITÀ DI HODGE

Convorrà cominciare tornando alla definizione dell' $(n-\kappa)$ -tensore antisimmetrico duale di Hodge di un dato  $\kappa$ -tensore antisimmetrico in una varietà elementare pseudoriemanniana  $r^{\geq 1}M^n \equiv M$  di cui alla (4.4.3, 20), avendo scelto come fattore di normalizzazione  $N_{n,\kappa} = (-1)^{\kappa(\kappa+1)/2}/(n-\kappa)!$  (v. (4.4.3, 23)). In virtù dell'isomorfismo tra  $\kappa$ -tensori antisimmetrici e  $\kappa$ -forme esterne, questa definizione si estende alle seconde, ad esempio facendo uso della loro 2<sup>a</sup> rappresentazione canonica (v. la (4.4.2, 18)). Vale a dire, se

$$(1) \quad v_{(\kappa)} X_{(1)} \dots X_{(\kappa)} = \sum_{\langle i \rangle} v_{i_1 \dots i_\kappa} X_{(1)}^{i_1} \wedge \dots \wedge X_{(\kappa)}^{i_\kappa}$$

(dove la somma è su  $\langle i \rangle = \langle i_1, \dots, i_\kappa \rangle = \langle n, \kappa \rangle$ -indice stretto, e i coefficienti  $v_{i_1 \dots i_\kappa}$  sono antisimmetrici) è una  $\kappa$ -forma di partenza, si ha precisamente, per la sua duale di Hodge,

$$(2) \quad *v_{(\kappa)} Y_{(1)} \dots Y_{(n-\kappa)} = \sum_{\langle j \rangle} \mu_{j_1 \dots j_{(n-\kappa)}} Y_{(1)}^{j_1} \wedge \dots \wedge Y_{(n-\kappa)}^{j_{(n-\kappa)}},^2$$

dove la somma è su  $\langle j \rangle = \langle n, n-\kappa \rangle$ -indice stretto, e dove

$$(3) \quad \mu_{j_1 \dots j_{(n-\kappa)}} =: N_{n,\kappa} \sum_{\langle i \rangle} \sum_{\langle p \rangle} v_{p_1 \dots p_\kappa} g^{i_1 p_1} \dots g^{i_\kappa p_\kappa} e_{i_1 \dots i_\kappa j_1 \dots j_{(n-\kappa)}}^{1 \dots n} \sqrt{|g|}.$$

Qui  $\langle p \rangle$  è  $\langle n, \kappa \rangle$ -indice stretto,  $g_{hk}$  è il tensore fondamentale della varietà,  $g$  il suo determinante, e  $e_{h_1 \dots h_n}^{1 \dots n}$  è il solito simbolo di Kronecker generalizzato. Si noti che il 2° membro della (3) è uguale a  $N_{n,\kappa} \sum_{\langle i \rangle} v^{i_1 \dots i_\kappa} \varepsilon_{i_1 \dots i_\kappa j_1 \dots j_{(n-\kappa)}}$ , dove  $\varepsilon_{(n)}$  è il  $n$ -tensore (e non il  $n$ -pseudotensore) di Ricci se ci si limita a trasformazioni (1-diffeomorfe) equiverse delle coordinate; e che con questa sostituzione la (3) equivale alla (4.4.3, 20) più sopra menzionata.

Se in particolare la varietà in oggetto è lo spazio euclideo  $R^n$  e si usa una base ortonormale, allora  $g_{hk} = \delta_{hk}$ , e la (3) si semplifica nella

$$(4) \quad \mu_{j_1 \dots j_{(n-\kappa)}} = N_{n,\kappa} \sum_{\langle i \rangle} v^{i_1 \dots i_\kappa} e_{i_1 \dots i_\kappa j_1 \dots j_{(n-\kappa)}}^{1 \dots n},$$

dove ovviamente  $v^{i_1 \dots i_\kappa} \equiv v_{i_1 \dots i_\kappa}$ ; ovvero, la (2) diventa

$$(5) \quad *v_{(\kappa)} Y_{(1)} \dots Y_{(n-\kappa)} = N_{n,\kappa} \sum_{\langle i \rangle} v^{i_1 \dots i_\kappa} \sum_{\langle j \rangle} e_{i_1 \dots i_\kappa j_1 \dots j_{(n-\kappa)}}^{1 \dots n} Y_{(1)}^{j_1} \wedge \dots \wedge Y_{(n-\kappa)}^{j_{(n-\kappa)}}.$$

Alternativamente, partendo dalla  $v_{(\kappa)}$  in 1<sup>a</sup> rappresentazione canonica (v. la (4.4.2, 16))

$$(6) \quad v_{(\kappa)} X_{(1)} \dots X_{(\kappa)} = \sum_{\langle \alpha \rangle} v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa} X_{(1)}^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge X_{(\kappa)}^{\alpha_\kappa},$$

con  $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_\kappa \rangle = \langle n, \kappa \rangle$ -indice strettamente ordinato, sempre in  $R^n$  e base ortonormale, e usando la normalizzazione  $N_{n,\kappa}$ , si trova:

Cambridge Un. Press 1952; M. Spivak: "Calculus on Manifolds", Benjamin 1965; M. Spivak, vol I, v. Bibl. Gen. A, 1970.

<sup>2</sup> Il pedice  $(\kappa)$  in  $v_{(\kappa)}$  nei primi membri delle (1, 2) e successive (5, 6) ecc., potrebbe qui considerarsi superfluo, ma lo abbiamo aggiunto per essere più espliciti in successive occasioni.

$$(7) \quad *v_{(\kappa)} y_{(1)} \dots y_{(n-\kappa)} = \sum_{\langle \beta \rangle} \circ \mu_{\beta_1 \dots \beta_{(n-\kappa)}} y_{(1)}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge y_{(\kappa)}^{\beta_{(n-\kappa)}},$$

dove  $\langle \beta \rangle = \langle \beta_1, \dots, \beta_{n-\kappa} \rangle$  è il  $\langle n, n-\kappa \rangle$ -indice strettamente ordinato complementare di  $\langle \alpha \rangle$ , e in luogo della (4) si deve usare la

$$(8) \quad \circ \mu_{\beta_1 \dots \beta_{(n-\kappa)}} =: (-1)^{\sum \alpha} \circ v_{\alpha_1 \dots \alpha_{\kappa}},$$

dove l'esponente di  $-1$  è un'abbreviazione per  $\sum_{t=1}^{\kappa} \alpha_t$ . La (8) è più semplice della (4), ma di essa meno suggestiva, perché la (4) lega tra loro (linearmente) le componenti  $\mu_{j_1 \dots j_{(n-\kappa)}}$  e  $v_{i_1 \dots i_{\kappa}}$  di due tensori antisimmetrici (un  $(n-\kappa)$ -tensore e rispettivamente un  $\kappa$ -tensore, il primo duale del secondo), mentre i coefficienti  $\circ \mu_{\beta_1 \dots \beta_{(n-\kappa)}}$  e  $\circ v_{\alpha_1 \dots \alpha_{\kappa}}$  nella (8) non possono qualificarsi allo stesso modo. Come sappiamo (v. S.sez. 4.4.3) applicando ad un  $\kappa$ -tensore antisimmetrico l'operatore  $* \circ *$  si riproduce lo stesso  $\kappa$ -tensore moltiplicato per il fattore-segno  $(-1)^{n(n+1)/2}$ . Questo fatto riemerge nella (8), in quanto  $\sum_{t=1}^{\kappa} \alpha_t + \sum_{s=1}^{n-\kappa} \beta_s = 1 + 2 + \dots + n \equiv n(n+1)/2$ <sup>3</sup> in forza della complementarità. La definizione di  $*v_{(\kappa)}$  attraverso le (2, 3) è carta-indipendente; quindi, se  $M = \mathbb{R}^n$ , quella attraverso le (4,5), oppure attraverso le (7, 8), è base-indipendente. Questo significa che passando ad altra carta (o ad altra base), la risultante  $*v_{(\kappa)}$  è la trasformata della vecchia forma nella nuova carta (o base).

In particolare, secondo la (5) (quindi sempre in  $\mathbb{R}^n$ , ed in base ortonormale) la 0-forma  $v_{(0)} \equiv v = 1$  ha come duale la  $n$ -forma  $*1 y_{(1)} \dots y_{(n)}$ ; e questa, essendo  $N_{n,0} = 1/n!$ , è uguale a  $(1/n!) \sum_{\langle j \rangle} e_{j_1 \dots j_n} y_{(1)}^{j_1} \wedge \dots \wedge y_{(n)}^{j_n} \equiv y_{(1)}^1 \wedge \dots \wedge y_{(n)}^n$ . Similmente, sempre secondo la (5), si vede che la 1-forma  $v_{(1)x} = \sum_{i=1}^n v_i x^i$  ha come duale la  $(n-1)$ -forma

$$(9) \quad *v_{(1)} y_{(1)} \dots y_{(n-1)} = -(1/(n-1)!) \sum_{\langle j \rangle} \sum_{p=1}^n v_p e_{p j_1 \dots j_{(n-1)}} y_{(1)}^{j_1} \wedge \dots \wedge y_{(n-1)}^{j_{(n-1)}},$$

dove  $\langle j \rangle$  è  $\langle n, n-1 \rangle$ -indice stretto. Si può allora provare che

$$(10) \quad -(1/(n-1)!) \sum_{\langle j \rangle} e_{p j_1 \dots j_{(n-1)}} y_{(1)}^{j_1} \wedge \dots \wedge y_{(n-1)}^{j_{(n-1)}} = (-1)^p y_{(1)}^1 \wedge \dots \wedge y_{(p-1)}^{p-1} \wedge y_{(p)}^{p+1} \wedge \dots \wedge y_{(n-1)}^n$$

per ogni  $1 \leq p \leq n$ . La (10) è ovvia per  $n = 1$  (quindi  $p = 1$ ), perché da una parte  $-e_1^1 = -1$  (1° membro della (10)) e dall'altra  $(-1)^1 = -1$  (2° membro). La dimostrazione può allora procedere per induzione su  $n$  (lasciata al lettore).<sup>4</sup> Si conclude che

$$(11) \quad *v_{(1)} y_{(1)} \dots y_{(n-1)} = \sum_{p=1}^n (-1)^p v_p y_{(1)}^1 \wedge \dots \wedge y_{(p-1)}^{p-1} \wedge y_{(p)}^{p+1} \wedge \dots \wedge y_{(n-1)}^n.$$

<sup>3</sup> Per inciso, l'uguaglianza  $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$  ricorda il celeberrimo episodio dell'infanzia di Gauss narrato in tutte le sue biografie, e che ci permettiamo a nostra volta di riferire. Per tenerli quieti, il maestro aveva assegnato ai bimbi della sua classe il compito di sommare i primi cento numeri a partire da 1. Mentre i compagni cominciarono a diligentemente computare, il piccolo Karl (10 anni) forniva subito il risultato esatto (5050), avendo capito con un semplice ma ingegnoso ragionamento che esso era uguale al prodotto di 50 per 101.

<sup>4</sup> Procedendo ad una verifica diretta della (10) si ha, ad es. per  $n = 2$  e  $p = 1$ : 1° membro (10) =  $-e_{12}^1 y_{(1)}^2 = -y_{(1)}^2$ , 2° membro =  $(-1)^1 x_{(1)}^2 = -x_{(1)}^2$ . Similmente per  $n = 2$  e  $p = 2$  i due membri valgono entrambi  $+x_{(1)}^1$ , ecc.

I precedenti risultati si applicano senza problemi a forme differenziali esterne: ad esempio, nelle (1, 2) basta sostituire alle  $x_{(1)}^{i1}, \dots, x_{(\kappa)}^{i\kappa}, y_{(1)}^{j1}, \dots, y_{(n-\kappa)}^{j(n-\kappa)}$  gli elementi della base cotangente  $dx^{i1}, \dots, dx^{i\kappa}, dx^{j1}, \dots, dx^{j(n-\kappa)}$  della varietà. Partendo dalla  $\kappa$ -forma differenziale in 2<sup>a</sup> rappresentazione canonica  $\sum_{(i)} v_{i1} \dots_{i\kappa} dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{i\kappa}$ , si passa alla  $(n-\kappa)$ -forma differenziale duale  $\sum_{(j)} \mu_{j1} \dots_{j(n-\kappa)} dx^{j1} \wedge \dots \wedge dx^{j(n-\kappa)}$  sostituendovi  $\mu_{j1} \dots_{j(n-\kappa)}$  mediante la (3). Se poi la  $\kappa$ -forma differenziale di partenza è  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\kappa$ , (in 1<sup>a</sup> rappresentazione canonica, sempre nello spazio  $\mathbb{R}^n$  e con base ortonormale), e si usano le (7, 8), si ottiene la duale come  $(-1)^{\kappa(\kappa+1)/2} dx^{\kappa+1} \wedge \dots \wedge dx^n$ . In particolare partendo dalla 1-forma differenziale pfaffiana  $v_{(1)} = \sum_{i=1}^n v_i dx^i$ , abbiamo:

$$(12) \quad *v_{(1)} = \sum_{j=1}^n (-1)^j v_j dx^1 \wedge \dots \wedge [[dx^j]] \wedge \dots \wedge dx^n.$$

### 8.5.2) CODIFFERENZIAZIONE

Come si è già osservato, il fatto che gli spazi lineari  $\Lambda^{0 \leq \kappa \leq n}$  e  $\Lambda^{n-\kappa}$  abbiano la stessa dimensione è una conseguenza della identità  $C_n^\kappa = C_n^{n-\kappa}$ , cfr. S.sez. 4.4.1. L'operatore lineare stella di Hodge  $*$  stabilisce una corrispondenza *biunivoca* tra gli elementi di tali spazi, ed è quindi invertibile secondo le  $*$ :  $\Lambda^\kappa \rightarrow \Lambda^{n-\kappa}$ ,  $(*)^{-1}: \Lambda^{n-\kappa} \rightarrow \Lambda^\kappa$ . Tutto questo è di pertinenza algebrica; ma acquista rilievo anche nell'*analisi* delle forme differenziali esterne attraverso l'introduzione di una operazione "duale" della differenziazione, la **codifferenziazione**.

La differenziazione ( $\partial$ ) di una  $\kappa$ -forma differenziale, definita mediante la (4.5.1, 3), fu introdotta da É. Cartan, anche se probabilmente era già nota a Frobenius parecchio tempo prima. Questa  $\partial$  gode delle seguenti proprietà: (i)  $\partial$  è lineare (sullo spazio lineare delle  $(0 \leq \kappa \leq n)$ -forme di CdC  $h \geq 1$ , sottospazio di  $\Lambda^\kappa$ , e produce una  $(\kappa+1)$ -forma di CdC  $h-1$ , quindi appartenente ad un sottospazio di  $\Lambda^{\kappa+1}$ ); <sup>5</sup> (ii) applicata ad un prodotto wedge di forme,  $\partial$  soddisfa la legge "paraleibniziana" (4.5.1, 8); (iii) applicata ad una 0-forma,  $\partial$  produce il suo differenziale standard (una 1-forma); (iv) applicata due volte di seguito ad una  $\kappa$ -forma di (CdC  $\geq 2$ ),  $\partial$  produce una  $(\kappa+2)$ -forma nulla (lemma di Poincaré). Le due proprietà (i,ii) caratterizzano  $\partial$  come una **antiderivazione**.

L'opportunità di continuare a menzionare le classi di continuità (delle forme e della varietà) è ormai discutibile, e potremo evitare questo tipo di precisazione convenendo di limitarci a forme e varietà *lisce*, cioè (le une e le altre) di CdC  $\infty$ . Ciò non in quanto essa crei particolari difficoltà, ma

<sup>5</sup> Sarebbe dunque più appropriato scrivere ad es.  $\partial^{(\kappa)}$  in luogo di  $\partial$ , e similmente (vedi più sotto)  $\delta^{(\kappa)}$  in luogo di  $\delta$ .

soltanto complicazioni banali. Conservando il simbolo  $\wedge^\kappa$  per questo più ristretto significato, potremo dunque scrivere  $\partial: \wedge^\kappa \rightarrow \wedge^{\kappa+1}$  senza preoccuparci d'altro. Ricordiamo (v. S.sez. 4.5.1) che  $\partial$  è carta-indipendente, sebbene  $\partial v_{i_1 \dots i_\kappa} / \partial x^s$  non sia, in generale, la componente covariante di un  $(\kappa+1)$ -tensore antisimmetrico. (Se tuttavia nella espressione di  $\partial v_{(\kappa)}$  si sostituisce  $\partial v_{i_1 \dots i_\kappa} / \partial x^s$  con il corrispondente oggetto completamente antisimmetrizzato rispetto ai suoi  $\kappa+1$  indici,  $\partial v_{[i_1 \dots i_\kappa]} / \partial x^{s]}$ , la  $(\kappa+1)$ -forma così ottenuta coincide con l'originale  $\partial v_{(\kappa)}$ , e quindi tale  $\partial v_{[i_1 \dots i_\kappa]} / \partial x^{s]}$  è covariante (esercizio).)

In una varietà elementare pseudoriemanniana (liscia), e per  $0 \leq \kappa \leq n$ , introdurremo ora il **codifferenziale** della  $\kappa$ -forma (liscia)  $v_{(\kappa)}$ ,  $\delta v_{(\kappa)}$ ,<sup>6</sup> come

$$(1) \quad \delta v_{(\kappa)} =: * \partial * v_{(\kappa)}.$$

Se in particolare  $\kappa = 0$ ,  $*v_{(0)}$  è una  $n$ -forma, e quindi  $\partial *v_{(0)} \equiv 0$  in quanto  $(n+1)$ -forma: il codifferenziale di una 0-forma è identicamente nullo. Poiché nella (1) sia i due operatori-stella che  $\partial$  sono lineari, anche  $\delta$  è lineare. È chiaro che, per  $\kappa > 0$ ,  $\delta$  trasforma una  $\kappa$ -forma in una  $(\kappa-1)$ -forma, ovvero che  $\delta: \wedge^\kappa \rightarrow \wedge^{\kappa-1}$ ; infatti la prima (da destra)  $*$  porta ad una  $(n-\kappa)$ -forma, la  $\partial$  ad una  $(n-\kappa+1)$ -forma, e infine la seconda  $*$  ad una  $(n-(n-\kappa+1))$ -forma =  $(\kappa-1)$ -forma. (Quanto al caso  $\kappa = 0$ , per quanto abbiamo visto più sopra le cose vanno come se una forma di grado “negativo” sia identicamente nulla, in simmetria con quanto accade per una forma di grado maggiore di  $n$ .) In conclusione  $\partial$  e  $\delta$  sono operatori lineari “reciproci”: il primo eleva di una unità il grado della forma operanda mentre il secondo lo riduce di altrettanto. Posto  $C =: (-1)^{n(n+1)/2}$ , si vede subito che insieme con la  $*\partial* = \delta$  vale la duale  $*\delta* = \partial$ . Infatti  $*\delta* = **\partial** = C^2\partial = \partial$ .<sup>7</sup>

Sotto le assunte condizioni, il codifferenziale di una  $(0 \leq \kappa \leq n)$ -forma è unicamente definito dalle (8.5.1, 2 e 3), e dunque è naturale proporsi di studiarne le proprietà su questa base. Se ci si chiede tuttavia – ad esempio – come si esprima il codifferenziale di un prodotto wedge, si constata che il suo calcolo è laborioso, perché occorre tener conto della presenza del tensore fondamentale della varietà nella (3) all'atto della derivazione esterna  $\partial$ . Quindi nell'espressione generale del

<sup>6</sup> Con notazione più conveniente, si potrebbe scrivere  $\partial^*$  in luogo di  $\delta$ ; ma la  $\delta$  è più comoda, ed è ormai entrata nell'uso.

<sup>7</sup> Il lettore ha certamente notato, a proposito di  $\kappa$ -forme e  $\kappa$ -catene, una sorta di “difetto di simmetria” tra la derivazione ( $\partial$ ) delle prime, che produce  $(\kappa+1)$ -forme, e la **bordificazione** ( $\partial$ )  $\equiv$  passaggio alla frontiera) delle seconde, che produce  $(\kappa-1)$ -catene. In certo senso, la coderivazione ( $\delta$ ), in luogo della derivazione ( $\partial$ ), ristabilisce l'equilibrio; ma allora, per simmetria, si intuisce la possibilità di introdurre una conveniente operazione sulle catene che produca  $(\kappa+1)$ -catene a partire da  $\kappa$ -catene (**cobordificazione**). Questo è precisamente quanto avviene nella teoria omologica assiomatica, con l'introduzione dell'operatore lineare cosiddetto “di cobordismo”, che si denota ( $\delta$ ). Va da sé che con tale teoria siamo in piena Topologia Algebrica.

codifferenziale figurano linearmente le derivate prime (standard) del tensore fondamentale. Ma se ancora  $M = \mathbb{R}^n$  e si opera in una base ortonormale ( $g^{ik} = \delta^{ik}$ ), il risultato è immediatamente accessibile. Si verifica infatti (esercizio) che in tali condizioni una legge “paraleibniziana” vale anche per  $\delta$ , come è vero per  $\partial$  in una qualsiasi varietà (anche priva di connessione) e in coordinate generali. Vale a dire, se  $v$  è una  $\kappa$ -forma e  $v'$  è una  $\kappa'$ -forma,

$$(10) \quad \delta(v \wedge v') = \delta v \wedge v' + (-1)^\kappa v \wedge \delta v'.$$

Il calcolo del codifferenziale della 1-forma pffaffiana  $v_{(1)} = \sum_{i=1}^n v_i dx^i$  si effettua facilmente mediante la (8.5.1, 12). Prendendone la  $\partial$ , si trova (con  $[[ \ ]]$   $\equiv$  simbolo soppressore)

$$(11) \quad \partial * v_{(1)} = \sum_{j=1}^n (-1)^j \partial v_j / \partial x^j dx^1 \wedge \dots \wedge [[dx^j]] \wedge \dots \wedge dx^n \equiv - \sum_{j=1}^n \partial v_j / \partial x^j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Sempre con  $C = (-1)^{n(n+1)/2}$ , la duale di questa  $n$ -forma è la 0-forma  $-C \sum_{j=1}^n \partial v_j / \partial x^j$ . Quindi il codifferenziale della anzidetta pffaffiana è (in  $\mathbb{R}^n$  e in una base ortonormale) il prodotto di  $-C$  per la divergenza del vettore di componenti  $v_j$ .

Ricordando che  $** = C \text{ Id}$  (v. S.sez. 4.4.3), una proprietà di  $\delta$  che si giustifica subito, e che vale senza limitazioni, è quella espressa dalla

$$(12) \quad \delta \circ \delta \equiv \delta^2 = * \partial ** \partial * = C * \partial^2 * = 0,$$

(in forza del lemma di Poincaré e in simmetria con il lemma stesso). Segue quindi che

$$(13) \quad (\partial + \delta)^2 = \partial^2 + \partial \delta + \delta \partial + \delta^2 \equiv \partial \delta + \delta \partial.$$

La (13) propone all’attenzione l’operatore lineare del 2° ordine  $\Delta =: \partial \delta + \delta \partial$  (due volte la parte simmetrica di  $\partial \delta$ , o di  $\delta \partial$ ), i cui due addendi lasciano, ciascuno per suo conto, invariato il grado della forma su cui agiscono. Esso si dice operatore **di Laplace-Beltrami**, e gioca un ruolo importante nella moderna geometria differenziale. Si ha anche, sempre in forza della  $\partial^2 \equiv 0$ ,

$$(14_1) \quad \partial * \delta = \partial ** \partial * = C \partial^2 * \equiv 0,$$

$$(14_2) \quad \delta * \partial = * \partial ** \partial = C * \partial^2 \equiv 0.$$

Inoltre,

$$(15_1) \quad \partial \delta * = \partial * \partial ** = C \partial * \partial = ** \partial * \partial = * \delta \partial.$$

Da questa, agendo prima a sinistra e poi a destra (o viceversa) con  $*$ , si ha la simmetrica:

$$(15_2) \quad * \partial \delta = \delta \partial * .^8$$

In conseguenza delle precedenti,

---

<sup>8</sup> La (15<sub>2</sub>) può anche giustificarsi partendo dalla  $\partial = *^{-1} \delta *^{-1}$ , simmetrica della (1). Si ha  $\partial \delta = *^{-1} \delta *^{-1} * \partial * = *^{-1} \delta \partial *$ , e quindi la (15<sub>2</sub>) agendo a sinistra con  $*$ .

$$(16) \quad *\Delta = *(\partial\delta + \delta\partial) = *\partial\delta + *\delta\partial = \delta\partial* + \partial\delta* = (\delta\partial + \partial\delta)* = \Delta*;$$

vale a dire, l'operatore  $\Delta$ , che lascia invariato il grado della forma su cui agisce, commuta con la stella  $*$ .

La identificazione esplicita dell'operatore  $\Delta$  in una varietà pseudoriemanniana e in coordinate generali è un po' laboriosa; ma potremo accontentarci di farlo nel solito caso elementare di  $\mathbb{R}^n$  e in una base ortonormale ( $g^{ik} = \delta^{ik}$ ). Basterà limitarsi alla  $\kappa$ -forma differenziale monomia  $v_{(\kappa)} = v(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\kappa$ , con  $v(x)$  di classe  $C^2$ . Mediante procedure ormai familiari, si trova (esercizio):

$$(171) \quad (1/C)\delta\partial v_{(\kappa)} = -\sum_{j=1}^{\kappa} \partial^2 v / \partial x^j \partial x^j dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\kappa - \\ - (-1)^\kappa \sum_{j=1}^{\kappa} \sum_{s=\kappa+1}^n (-1)^j \partial^2 v / \partial x^s \partial x^j dx^s \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge [[dx^j]] \wedge \dots \wedge dx^\kappa;$$

e similmente,

$$(172) \quad (1/C)\partial\delta v_{(\kappa)} = -\sum_{s=\kappa+1}^n \partial^2 v / \partial x^s \partial x^s dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\kappa + \\ + (-1)^\kappa \sum_{s=\kappa+1}^n \sum_{j=1}^{\kappa} (-1)^j \partial^2 v / \partial x^j \partial x^s dx^s \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge [[dx^j]] \wedge \dots \wedge dx^\kappa.$$

Sommando, risulta dunque:

$$(18) \quad \Delta v_{(\kappa)} = -C \sum_{i=1}^n \partial^2 v / \partial x^i \partial x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\kappa;$$

ovvero,  $\Delta v_{(\kappa)}$  uguaglia la  $\kappa$ -forma differenziale monomia di partenza con la  $v$  sostituita da  $\sum_{i=1}^n \partial^2 v / \partial x^i \partial x^i$ , e moltiplicata per il fattore-segno  $-C$ .<sup>9</sup> La conclusione, a questo punto banale, è che passando alla generica  $\kappa$ -forma differenziale  $v_{(\kappa)} = \sum_{(i)} v_{i1 \dots i\kappa} dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{i\kappa}$  (in 2<sup>a</sup> rappresentazione canonica, e dove  $x^1, \dots, x^n$  sono coordinate cartesiane ortogonali), l'operatore  $\Delta$  la trasforma nella  $\kappa$ -forma  $-C \sum_{(i)} \sum_{j=1}^n \partial^2 v_{i1 \dots i\kappa} / \partial x^j \partial x^j dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{i\kappa}$ ; ovvero, la trasforma nella  $\kappa$ -forma di partenza con  $v_{i1 \dots i\kappa}$  sostituita da  $\sum_{j=1}^n \partial^2 v_{i1 \dots i\kappa} / \partial x^j \partial x^j$ , e moltiplicata per  $-C$ .

Come ben ci si aspetta, l'analogo calcolo costa alquanto più fatica se riferito ad una generica varietà pseudoriemanniana e a coordinate generali. Ad ogni modo, (si dimostra che) il risultato consta di due addendi, dei quali il primo è  $-C \sum_{(i)} (v_{i1 \dots i\kappa/j^j}) dx^{i1} \wedge \dots \wedge dx^{i\kappa} \equiv -C v_{(\kappa)/j^j} (j^j)$  essendo l'usuale laplaciano in coordinate generali), e il secondo contiene linearmente il tensore di curvatura della varietà. Questo asserto costituisce il **teorema di Weitzenböck**. Una forma  $v_{(\kappa)}$  soddisfacente la  $(\dagger) \Delta v_{(\kappa)} = 0$  in un aperto di  $M$  si dice ivi  **$\Delta$ -armonica**<sup>10</sup>. Abbiamo dunque due diverse accezioni di "armonicità" delle  $\kappa$ -forme. La prima accezione ( **$\nabla^2$ -armonicità**) parte dal corrispondente  $\kappa$ -tensore

<sup>9</sup> Alcuni autori definiscono  $\Delta$  come  $-(\partial\delta + \delta\partial)$ , forse per evitare il segno meno nella (18).

<sup>10</sup> L'originale definizione di Hodge è più forte:  $v_{(\kappa)}$  è armonica se è al contempo  $\partial v_{(\kappa)} = 0$  e  $\delta v_{(\kappa)} = 0$ . Che da questa condizione scenda la  $\Delta v_{(\kappa)} = 0$  è ovvio. Di seguito, ci atterremo alla definizione data nel testo, che (si dimostra) equivale alla definizione di Hodge sse le forme sono a supporto compatto.

antisimmetrico, ed è definita dalla  $(\dots)_i^i = 0$  (tra parentesi, la componente del tensore).<sup>11</sup> La seconda accezione si riferisce invece direttamente alla  $\kappa$ -forma, ed è definita dalla  $(\dagger)$ . Alla luce del teorema di Weitzenböck, le due definizioni differiscono in generale<sup>12</sup>, ma coincidono nel solito caso elementare di  $\mathbb{R}^n$  e base ortonormale, in cui il tensore di curvatura è identicamente nullo.

Come una forma (differenziale) si dice “chiusa” in un punto se è ivi nullo il suo differenziale  $(\partial)$  (cfr. S.sez. 4.5.1), una forma si dice **cochiusa** in un punto se è ivi nullo il suo codifferenziale  $(\delta)$ . Similmente, come una  $\kappa$ -forma (differenziale) si dice “esatta” (o “omologa a zero”) in un aperto se è ivi uguale al differenziale di una  $(\kappa-1)$ -forma, una  $\kappa$ -forma si dice **coesatta** (o “coomologa a zero”) se è ivi uguale al codifferenziale di una  $(\kappa+1)$ -forma. In forza della  $\delta^2 \equiv 0$ , come l’essere esatta (per una forma) implica l’essere chiusa, l’essere coesatta implica l’essere cochiusa. Due forme di grado uguale si dicono **omologhe** [**coomologhe**] tra loro, in un dato aperto, se la loro differenza è ivi esatta [coesatta]. La precedente espressione “tra loro” è giustificata dal fatto che la relazione di omologia [di coomologia] è una relazione di equivalenza, e quindi è simmetrica (esercizio).

### 8.5.3) IL “PROBLEMA $\partial - \delta$ ”

Nella S.sez. 5.2.3 ci siamo diffusamente occupati del seguente problema del “rotore-divergenza” (in  $\mathbb{R}^3$ , e in un dominio compatto semplicemente connesso  $X \subset \mathbb{R}^3$  con contorno  $\partial X$  abbastanza regolare): “determinare (se esiste) un campo vettoriale  $v = v(x \in X)$  soddisfacente alle  $\nabla \times v = \omega$ ,  $\nabla \cdot v = \theta$  in  $X$ , per  $\omega$  e  $\theta$  dati in  $X$  abbastanza regolari e sotto la  $\nabla \cdot \omega = 0$ , possibilmente sotto opportune condizioni addizionali sul contorno  $\partial X$  che lo rendano unico”. Il “problema  $\partial$ - $\delta$ ” di cui al titolo di questa sottosezione è una generalizzazione del problema rot-div che si enuncia come segue: “date una  $(\kappa+1)$ -forma chiusa  $\lambda_{(\kappa+1)}$  ed una  $(\kappa-1)$ -forma cochiusa  $\mu_{(\kappa-1)}$  con comune supporto (aperto) compatto  $X \subset M^n$ , determinare (se esiste) una  $\kappa$ -forma  $v_{(\kappa)}$  soddisfacente in  $X$  alle

$$(1_1) \quad \partial v_{(\kappa)} = \lambda_{(\kappa+1)},$$

$$(1_2) \quad \delta v_{(\kappa)} = \mu_{(\kappa-1)},$$

sotto eventuali condizioni che rendano la soluzione unica.”

<sup>11</sup> Ricordiamo che se il tensore operando è uno scalare  $f$ ,  $f_i^i = |g|^{-1/2} \sum_{i=1}^n \partial(|g|^{1/2} f^i) / \partial x^i$ .

<sup>12</sup> Che l’operatore  ${}_i^i$  non possa contenere il tensore di curvatura è intuitivamente evidente. Infatti come sappiamo quest’ultimo nasce dalla considerazione della parte *antisimmetrica* di  ${}_{/ik}$ , mentre  ${}_i^i \equiv {}_{/ik} g^{ik}$  coinvolge soltanto la parte *simmetrica* di  ${}_{/ik}$ .



Gli oggetti a 2° membro delle (1), la  $(\kappa+1)$ -forma chiusa  $\lambda_{(\kappa+1)}$  e la  $(\kappa-1)$ -forma cochiusa  $\mu_{(\kappa-1)}$ , sono i “dati forzanti” del problema. Essi sono assegnabili sotto i vincoli  $\partial^2 \lambda_{(\kappa+1)} = 0$  e rispettivamente  $\delta^2 \mu_{(\kappa-1)} = 0$  derivanti dal lemma di Poincaré, e per il resto ad arbitrio. Studieremo qui appresso questo problema  $\partial$ - $\delta$  quando  $M^n = \mathbb{R}^n$  (e per brevità, con  $n > 2$ ), dimostrando costruttivamente che la soluzione esiste ed è unica sotto una naturale condizione all’infinito. (Lo stesso problema, riferito ad una generica varietà  $n$ -dim liscia, anche elementare, sarebbe alquanto più difficile da trattare.)

In virtù della linearità, possiamo suddividere il problema in due sue versioni particolari: la prima (“problema I”), in cui è  $\lambda_{(\kappa+1)} \equiv 0$  in  $X$ , e la seconda (“problema II”), in cui è  $\mu_{(\kappa-1)} \equiv 0$  in  $X$ . Cominciamo con il problema I, cioè con il sistema  $\partial v_{(\kappa)} = 0$ ,  $\delta v_{(\kappa)} = \mu_{(\kappa-1)}$  sotto  $\delta \mu_{(\kappa-1)} = 0$ .

I) Trascurando ormai, quando superfluo, di scrivere i pedici in  $v$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , usiamo la 1ª rappresentazione canonica per  $\mu$  secondo la  $\mu = \mu[\xi] = \sum_{\langle \alpha \rangle} \mu_{\langle \alpha \rangle}(\xi) d\xi^{\alpha^1} \wedge \dots \wedge d\xi^{\alpha(\kappa-1)}$ , dove  $\xi \equiv \langle \xi^1, \dots, \xi^n \rangle$  sono coordinate cartesiane ortogonali, e  $\langle \alpha \rangle$  è un  $\langle n, \kappa-1 \rangle$ -indice strettamente ordinato. Nella S.sez. 5.2.3, vedi in particolare la (5.2.3, 1), abbiamo introdotto il potenziale coulombiano “di volume”. Poniamo dunque, per  $n > 2$ ,

$$(2) \quad \varphi_{(\kappa-1)}[\xi] =: \sum_{\langle \alpha \rangle} \left( \int_X \mu_{\langle \alpha \rangle}(x) |\xi-x|^{2-n} d(x) \right) d\xi^{\alpha^1} \wedge \dots \wedge d\xi^{\alpha(\kappa-1)},$$

dove  $d(x)$  sta per  $dx^1 \dots dx^n$ ,  $X$  è il comune supporto delle funzioni  $\mu_{\langle \alpha \rangle}$ , e gli integrali a 2° membro sono appunto potenziali coulombiani di volume. Nel seguito, per brevità sottintenderemo il pedice  $(\kappa-1)$  in  $\varphi$ . Vogliamo calcolare  $\delta \varphi[\xi]$ . Abbiamo innanzitutto:

$$(3) \quad * \varphi[\xi] = \sum_{\langle \beta \rangle} \left( \int_X \mu_{\langle \beta \rangle}^*(x) |\xi-x|^{2-n} d(x) \right) d\xi^{\beta^1} \wedge \dots \wedge d\xi^{\beta(n-\kappa+1)},$$

dove  $\langle \beta \rangle$  è il  $\langle n, n-\kappa+1 \rangle$ -indice strettamente ordinato complementare a  $\langle \alpha \rangle$ , e  $\mu_{\langle \beta \rangle}^*$  sta per  $(-1)^{\sum \alpha} \mu_{\langle \alpha \rangle}$  con l’esponente  $\sum \alpha$  di  $(-1)$  uguale ora a  $\sum_{i=1}^{\kappa-1} \alpha_i$ . Questa  $* \varphi$  è una  $(n-(\kappa-1))$ -forma. La successiva  $\partial$ , tenendo conto che è lecita la derivazione sotto il segno (v. S.sez. 5.2.3, punto (b)), porta a

$$(4) \quad \partial * \varphi[\xi] = - \sum_{\langle \beta \rangle} \sum_{i=1}^n \left( \int_X \mu_{\langle \beta \rangle}^*(x) \partial |\xi-x|^{2-n} / \partial x^i d(x) \right) d\xi^i \wedge d\xi^{\beta^1} \wedge \dots \wedge d\xi^{\beta(n-\kappa+1)},$$

dove il segno  $-$  compensa il fatto che la derivazione di  $|\xi-x|^{2-n}$  è fatta rispetto a  $x^i$  invece che rispetto a  $\xi^i$ . L’integranda  $\mu_{\langle \beta \rangle}^*(x) \partial |\xi-x|^{2-n} / \partial x^i$  nella (4) può scriversi  $\partial (\mu_{\langle \beta \rangle}^*(x) |\xi-x|^{2-n}) / \partial x^i - |\xi-x|^{2-n} \partial \mu_{\langle \beta \rangle}^* / \partial x^i$ . Integrato rispetto a  $x \in X$ , il contributo di contorno del primo termine è nullo perché  $\mu$  è a supporto compatto.

Quanto al secondo termine, esso ha a fattore  $\sum_{\langle \beta \rangle} \sum_{i=1}^n \partial \mu_{\langle \beta \rangle}^* / \partial x^i d\xi^i \wedge d\xi^{\beta^1} \wedge \dots \wedge d\xi^{\beta(n-\kappa+1)}$ , cioè  $\partial * \mu[\xi]$  calcolato per  $\xi = x$  ( $\in X$ ),  $(\partial * \mu[\xi])|_{\xi=x}$ . Ma anche quest’ultimo oggetto è nullo, in quanto

$0 \equiv \delta\mu = *\partial*\mu$ , e  $*$  è invertibile. In conclusione  $\partial*\varphi[\xi] = 0$ , e quindi anche  $\delta\varphi[\xi] = 0$ . Poniamo ora, restaurando per un momento il pedice in  $\varphi$ ,

$$(5) \quad v_{(\kappa)} =: C\partial\varphi_{(\kappa-1)}/((n-2)G_{n-1})$$

dove  $G_{n-1}$  è la J-misura della sfera  $(n-1)$ -dim di raggio 1 (cfr. S.sez. 5.2.3, punto (a)). Mostriamo che tale  $v_{(\kappa)}$  risolve il problema  $\partial$ - $\delta$  di tipo I. Da una parte  $\partial v_{(\kappa)} = 0$  in  $X$ , come richiesto. Dall'altra,  $\delta v_{(\kappa)} = C\delta\partial\varphi/((n-2)G_{n-1})$ . Ora  $\delta\partial\varphi = (\Delta - \partial\delta)\varphi \equiv \Delta\varphi$  perché, come abbiamo appena mostrato,  $\delta\varphi \equiv 0$ . Segue che  $\delta v_{(\kappa)} = \Delta\varphi C/((n-2)G_{n-1})$ . Dalla S.sez. 5.2.3, punto (c), sappiamo che  $\nabla^2\varphi = -\mu(n-2)G_{n-1}$ ; <sup>13</sup> e inoltre, sappiamo (v. S.sez. 8.5.2) che in  $\mathbb{R}^n$  e in base ortonormale, è  $\nabla^2 = -C\Delta$ . In definitiva  $\delta v_{(\kappa)} = -\nabla^2\varphi/((n-2)G_{n-1}) = \mu$  in  $X$ , come richiesto. È così stata costruita una soluzione del problema I. #

II) La trattazione del problema II, cioè del sistema  $\delta v = 0$ ,  $\partial v = \lambda$  sotto  $\partial\lambda = 0$ , è ormai molto semplice. Risulta  $\delta*\lambda = *\partial**\lambda = C*\partial\lambda = 0$ . Secondo quanto abbiamo mostrato studiando il problema I, esiste ed è costruibile una  $(n-\kappa)$ -forma  $\psi$  per cui  $\delta\psi = *\lambda$  e  $\partial\psi = 0$ . Affermiamo che una soluzione del problema II è  $v_{(\kappa)} = *\psi$  (si noti che  $*\psi$  è effettivamente una  $\kappa$ -forma). Infatti, da una parte abbiamo  $\delta v_{(\kappa)} = \delta*\psi = *\partial**\psi = C*\partial\psi = 0$ . Dall'altra,  $\partial v_{(\kappa)} = \partial*\psi = *^{-1}\delta*^{-1}*\psi = *^{-1}\delta\psi = \lambda$ . Con questo, la dimostrazione è conclusa. #

I teoremi di esistenza per i problemi I e II sono stati così dimostrati in modo costruttivo. Ovviamente, la soluzione dell'originario problema  $\partial$ - $\delta$  è la somma delle soluzioni dei problemi I e II, e così il teorema di esistenza è dimostrato anche per quello. Ci poniamo adesso il problema dell'unicità della soluzione costruita. Supponiamo che esistano due soluzioni  $v$  e  $v'$  del problema  $\partial$ - $\delta$ ; allora per la loro differenza  $v^* = v' - v$  deve aversi  $\partial v^* = 0$ ,  $\delta v^* = 0$ , e quindi  $\Delta v^* = 0$  in tutto  $\mathbb{R}^n$ ; cioè  $v^*$  deve essere  $\Delta$ -armonica in  $\mathbb{R}^n$ . Poiché la  $\Delta$ -armonicità e la  $\nabla^2$ -armonicità coincidono in  $\mathbb{R}^n$  e in una base ortonormale (il caso al quale ci siamo riferiti),  $v^*$ , o meglio i suoi coefficienti  $v^*_{\langle\alpha\rangle}$ , devono essere  $\nabla^2$ -armonici, cioè  $\nabla^2 v^*_{\langle\alpha\rangle} = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Ma le  $v$  e  $v'$  effettivamente costruite, e quindi la stessa  $v^*$  (ossia i relativi coefficienti) tendono a zero per  $|\xi| \rightarrow \infty$ . In conclusione i  $v^*_{\langle\alpha\rangle}$  sono  $\nabla^2$ -armonici e tendono a zero per  $|\xi| \rightarrow \infty$ ; e come ben sappiamo, questo implica che  $v^*$  sia nulla in tutto  $\mathbb{R}^n$ , e in particolare in  $X$ ; qed. Questo risultato si può parafrasare affermando che «il

<sup>13</sup> È chiaro che relazioni di questo tipo vanno sempre intese riferendole ai coefficienti delle forme (come abbiamo già fatto), in questo caso ai  $\varphi_{\langle\alpha\rangle}$  e rispettivamente ai  $\mu_{\langle\alpha\rangle}$ .

problema  $\partial\text{-}\delta$  ha una e una sola soluzione in un compatto  $X$  di  $\mathbb{R}^n$  nella classe delle forme definite in  $\mathbb{R}^n$  i cui coefficienti tendono a zero con la variabile indipendente  $\rightarrow \infty$ .<sup>14, 15</sup>

Resta da chiarire in che senso il problema rot-div è una specializzazione del problema  $\partial\text{-}\delta$ . Innanzitutto si deve fare  $n = 3$  e  $\kappa = 1$ ; cioè  $v = v_{(1)}$  è la 1-forma  $v_i dx^i$ , dove sottintendiamo la somma da 1 a 3 sugli indici ripetuti, e  $x^{i=1,2,3}$  sono coordinate cartesiane ortogonali. Abbiamo dunque  $\partial v_{(1)} = \partial v_i / \partial x^s dx^s \wedge dx^i$ . Sviluppando questa espressione e scrivendo brevemente  $\partial_s$  per  $\partial / \partial x^s$ , troviamo

$$(6) \quad \partial v_{(1)} = (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) dx^1 \wedge dx^2 + \text{cicl}(1,2,3).$$

Ricordiamo che le componenti di  $\underline{\omega} \equiv \nabla \times \underline{v}$  (dove con  $\underline{v}$  denotiamo il vettore di componenti  $v_i$ ) sono

$$(7) \quad \omega_1 = \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2,$$

e le simili che si ottengono con la rotazione ciclica degli indici (1, 2, 3); per cui la (6) può anche scriversi

$$(6') \quad \partial v_{(1)} = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 + \text{cicl}(1,2,3).$$

La (6') è dunque la prima equazione del problema  $\partial\text{-}\delta$ , con il termine forzante a 2° membro. Si verifica subito che la condizione di compatibilità  $\partial^2 v_{(1)} = 0$  equivale alla  $\nabla \cdot \nabla \times \underline{v} = 0$ , cioè alla  $\nabla \cdot \underline{\omega} = 0$ . La duale della (6') è la 1-forma pfaffiana

$$(8) \quad *\partial v_{(1)} = -\omega_i dx^i = -\underline{\omega}.$$

Calcoliamo adesso la 0-forma  $\delta v_{(1)} = *\partial*v$ . Si ha

$$(9) \quad *v_{(1)} = -(v_1 dx^2 \wedge dx^3 + \text{cicl}(1,2,3));$$

quindi

$$(10) \quad \partial*v_{(1)} = -\partial_i v_i dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \equiv -\nabla \cdot \underline{v} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

e quindi

$$(11) \quad \delta v_{(1)} = *\partial*v_{(1)} = -*\theta,$$

nel cui 2° membro compare il termine forzante  $\theta = \nabla \cdot \underline{v}$ . Essendo quest'ultima una 0-forma, la duale del lemma di Poincaré  $\delta^2 v = 0$  è soddisfatta automaticamente, e quindi  $\theta$  è libero da vincoli. Il problema  $\partial\text{-}\delta$  risultante è dunque quello del sistema costituito dalla (8), che essendo  $C = 1$  per  $n = 3$  si riscrive equivalentemente come

<sup>14</sup> Quest'ultima restrizione esclude la considerazione di soluzioni *polidrome* del sistema  $\partial v = \delta v = 0$  quando  $X$  non sia semplicemente connesso.

<sup>15</sup> Il caso  $n = 2$ , qui non considerato, si tratta analogamente sostituendo a  $|\xi - x|^{2-n}$  con  $\ln(|\xi - x|^{-1})$ , cfr. S.sez. 5.2.3.

$$(8bis) \quad \partial v_{(1)} = -*(\omega_i dx^i) = -*\underline{\omega}$$

(dove  $*\underline{\omega}$  è una 2-forma sotto il vincolo  $\nabla \cdot \underline{\omega} = 0$ ), e dalla (11) stessa (con  $\theta$  libero). Si noti la analogia formale tra la (11) e la (8bis).

#### 8.5.4) I TEOREMI DI DE RHAM <sup>16</sup>

Nella S. sez. 8.4.2 abbiamo illustrato il teorema di Poincaré-Stokes (PS) avendo introdotto la nozione di  $\kappa$ -catena in termini di  $\kappa$ -quadrati unitari di  $R^n$  orientato. Accingendoci ad enunciare i teoremi di de Rham, è storicamente corretto (oltre che più generale e flessibile) riproporre brevemente quel percorso partendo dai  $\kappa$ -simplessi di  $R^n$  stesso (sotto  $0 \leq \kappa \leq n$ , cfr. S.sez. 5.1.2). Il lettore non dovrebbe avere difficoltà – alla fine – a convincersi della equivalenza delle due procedure.

Come sappiamo, un  $(0 \leq \kappa \leq n)$ -simpleso di  $R^n$  è unicamente determinato da una  $(\kappa+1)$ -pla ordinata di punti  $\langle P_0, P_1, \dots, P_\kappa \rangle$  di quello spazio tali che i  $\kappa$  vettori  $P_1 - P_0, \dots, P_\kappa - P_0$  siano linearmente indipendenti. Precisamente, il corrispondente  $\kappa$ -simpleso è l'insieme dei punti  $P = \sum_{i=0}^{\kappa} t_i P_i$  per qualunque scelta dei  $t_{0 \leq i \leq \kappa}$  che siano  $\geq 0$  e soddisfino il vincolo  $\sum_{i=0}^{\kappa} t_i = 1$ , e sarà nel seguito denotato come  $[P_0, P_1, \dots, P_\kappa]$ . La frontiera  $\partial[P_0, P_1, \dots, P_\kappa]$  del  $\kappa$ -simpleso  $[P_0, P_1, \dots, P_\kappa]$  si definisce allora come il  $(\kappa-1)$ -simpleso  $\sum_{i=0}^{\kappa} (-1)^i [P_0, \dots, \widehat{P_i}, \dots, P_\kappa]$ , dove  $[\widehat{\quad}]$  è il solito simbolo di soppressione. Una  $\kappa$ -catena (finita) può trattarsi come combinazione lineare formale del tipo  $c_{(\kappa)} = \sum \varepsilon_s S_{(\kappa)}^s$ , dove  $\varepsilon_s$  sono reali arbitrari e  $S_{(\kappa)}^s$  sono  $\kappa$ -simplessi. La frontiera di tale  $\kappa$ -catena è definita come  $\partial c_{(\kappa)} = \sum \varepsilon_s \partial S_{(\kappa)}^s$ , ed è evidentemente una  $(\kappa-1)$ -catena. Sussiste il lemma  $\partial^2 c_{(\kappa)} = 0$  per qualunque  $(0 \leq \kappa \leq n)$ -catena. Questo è evidente per  $\kappa = 0$  e  $\kappa = 1$ , perché ogni simpleso di grado negativo è nullo per definizione. Per  $\kappa = 2$  si ha poi:  $\partial^2[P_0, P_1, P_2] = \partial[P_1, P_2] - \partial[P_0, P_2] + \partial[P_0, P_1] = ([P_2] - [P_1]) - ([P_2] - [P_0]) + ([P_1] - [P_0]) \equiv 0$ . La generalizzazione al caso  $2 < \kappa \leq n$  può ottenersi per induzione, ed è lasciata al lettore come esercizio. Denotiamo infine con  $X_{i,j}$ ,  $0 \leq i \leq \kappa \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ , la  $j$ -ma coordinata del punto  $P_i$  del generico  $\kappa$ -simpleso. Il  $\kappa$ -simpleso per cui  $X_{i,j} = \delta_{ij}$  si dirà ( $\kappa$ -simpleso) **standard** e si denoterà con  $S^\kappa$ . <sup>17</sup>

<sup>16</sup> G. De Rham, "Sur l'analysis situs des variétés a n dimensions", J. Math. Pures Appl., Sér. 9, **10** (1931). Benché i teoremi siano stati ovviamente stabiliti da De Rham, l'idea di una connessione tra la coomologia e le forme differenziali risale a Poincaré.

<sup>17</sup> La possibilità di assumere come "standard" altri tipi di simplessi va incontro a problemi, per così dirli, di "equanimità". Ad esempio scegliendo come standard il  $\kappa$ -simpleso  $[P_0, \dots, P_\kappa]$  per cui le distanze  $P_0 P_1, \dots, P_{\kappa-1} P_\kappa$  sono

Il passaggio a  $\kappa$ -simplessi di una varietà (elementare liscia)  $n$ -dim  $M$  è strettamente analogo a quello illustrato partendo dai  $\kappa$ -quadrati unitari (v. S.sez. 8.4.1). L'immagine in  $\lambda(M) \subset \mathbb{R}^n$  del  $\kappa$ -simpleso standard  $S^\kappa$  attraverso un'applicazione  $\varphi: S^\kappa \rightarrow \lambda(M)$ , definita a meno di un 1-diffeomorfismo equivario di  $S^\kappa$ , si denoterà  $\Sigma_{(\kappa)}$ . (Ad esso corrisponde un  $\kappa$ -dominio di  $M$   $\lambda^{-1}(\Sigma_{(\kappa)})$ ). La frontiera  $\partial\Sigma_{(\kappa)}$  in  $\lambda(M)$  è l'immagine attraverso  $\varphi$  della frontiera di  $S^\kappa$ ,  $\partial\Sigma_{(\kappa)} = \varphi(\partial S^\kappa)$ . Una  $\kappa$ -catena (finita) di  $\lambda(M)$  è una combinazione lineare formale del tipo  $c = \sum \varepsilon_s \Sigma_{(\kappa)}^s$ , dove  $\varepsilon_s$  sono reali, e la sua frontiera è  $\partial c = \sum \varepsilon_s \partial\Sigma_{(\kappa)}^s$ , evidentemente una  $(\kappa-1)$ -catena.

La dimostrazione del teorema di PS parte dalla definizione di integrale di una  $\kappa$ -forma  $v_{(\kappa)}$  su un  $\kappa$ -simpleso standard  $S^\kappa$ , che sarà ancora data dalla (8.4.1, 4) e generalizzazioni, in cui a  $\mathcal{U}_{(\kappa)}$  si sostituisca  $\Sigma_{(\kappa)} =: \varphi(S^\kappa)$  e a  $I^\kappa, S^\kappa$ . Si è così ridotti ad un integrale  $\kappa$ -plo standard, e la dimostrazione procede in analogia con quella del caso in cui avevamo scelto i  $\kappa$ -quadrati unitari, in luogo dei  $\kappa$ -simplessi standard, come domini fondamentali. (Il lettore potrà facilmente ripercorrere le tappe della dimostrazione.)

Possiamo ormai enunciare, senza dimostrarli, i teoremi di de Rham. Come in precedenza, una  $\kappa$ -catena di  $\lambda(M)$  si dice un  $\kappa$ -ciclo se la sua frontiera è nulla. Per quanto abbiamo visto più sopra ( $\partial^2 \equiv 0$ ), la frontiera di una  $\kappa$ -catena è automaticamente un  $\kappa$ -ciclo, ma non sempre vale il contrario; esattamente come una  $\kappa$ -forma esatta è automaticamente chiusa, ma non sempre vale il contrario. (Come vedremo tra un momento, il primo teorema di de Rham risponde appunto alla domanda: "sotto quali condizioni una  $\kappa$ -forma chiusa è esatta?".)

Ad ogni coppia formata da un  $\kappa$ -ciclo  $z$  ( $\partial z = 0$ ) e da una  $\kappa$ -forma chiusa  $v$  ( $\partial v = 0$ ) della varietà, si associa l'integrale  $\int_z v$ , che si dice  **$\kappa$ -periodo di  $v$  su  $z$** . Se in particolare il  $\kappa$ -ciclo  $z$  è una frontiera, il periodo di  $v$  su  $z$  è nullo in forza del teorema di PS: posto infatti  $z = \partial c$  per una conveniente  $(\kappa+1)$ -catena  $c$ , abbiamo  $\int_z v = \int_{\partial c} v = \int_c \partial v = 0$ , (ove la penultima uguaglianza è il teorema di PS), perché  $\partial v = 0$  per ipotesi. Quindi se per certi  $\kappa$ -cicli  $z^s$  e per certi reali  $\varepsilon_s$  avviene che  $\{\varepsilon_s, z^s\}$  sia una frontiera, allora  $\sum \varepsilon_s \int_{z^s} v = 0$  per ogni  $\kappa$ -forma chiusa  $v$ .

Sussiste il **primo teorema di de Rham**:

$T_1$ . «Una  $\kappa$ -forma chiusa  $v$  di  $\lambda(M)$  è esatta sse per ogni  $\kappa$ -ciclo  $z$  di  $\lambda(M)$   $\int_z v = 0$ .»

È facile rendersi conto che un tale asserto non dipende da  $\lambda$ , cioè che è carta-indipendente.

La naturale controparte di  $T_1$  è il **secondo teorema di de Rham**:

---

unitarie e il cui baricentro è l'origine di  $\mathbb{R}^n$ , si pone il problema di come orientarlo (nel senso delle rotazioni intorno all'origine) in un modo che non appaia arbitrario, attesa l'isotropia del simpleso.

T<sub>2</sub>. «Se ad ogni  $\kappa$ -ciclo  $z^s$  di  $\lambda(M)$  si associa un reale  $\text{Per}(z^s)$  tale che valga l'implicazione “per certi reali  $\varepsilon_s$ ,  $\{\varepsilon_s, z^s\}$  è una frontiera”  $\Rightarrow$  “per quegli  $\varepsilon_s$ ,  $\sum \varepsilon_s \text{Per}(z^s) = 0$ ”, allora *esiste* una  $\kappa$ -forma chiusa  $v$  di  $\lambda(M)$  per la quale il periodo su  $z^s$  è uguale a  $\text{Per}(z^s)$ , e questo per ogni  $z^s$  di  $\lambda(M)$ ; per la quale cioè  $\forall z^s \{ \int_{z^s} v = \text{Per}(z^s) \}$ .»

Ancora, questo asserto è carta-indipendente.

I teoremi di de Rham, qui riferiti ad una varietà elementare, possono generalizzarsi a varietà generiche (tuttavia questo non è affatto banale). La loro importanza sta anche nel fatto che, come è vero per molte varietà, elementari e non, esiste un insieme finito di  $\kappa$ -cicli che “abbraccia”, via combinazioni lineari e a meno di  $\kappa$ -frontiere, l'insieme di *tutti* i  $\kappa$ -cicli della varietà. Ad esempio per la ( $n \geq 1$ )-sfera unitaria (una varietà  $n$ -dim non elementare), ogni ( $0 < \kappa < n$ )-ciclo è una frontiera, e ogni  $n$ -ciclo può esprimersi come somma di un multiplo della  $n$ -sfera stessa e di una  $n$ -frontiera.

Aggiungiamo un commento conclusivo. Un lettore di orientamento pragmatico potrebbe obiettare che dall'armamentario concettuale propostogli nelle ultime due sezioni di questo capitolo (e soprattutto nella presente Sez. 8.5) non si tragga alcun risultato sostanzialmente nuovo rispetto a quelli che già il calcolo tensoriale su varietà metriche provvede (almeno, su scala locale). Quel lettore avrebbe sostanzialmente ragione, ma il punto non è questo. Ciò che abbiamo inteso offrirgli qui, infatti, è soltanto una iniziazione, per non dire lo stesso *vocabolario*, necessari per affrontare – col dovuto impegno ma senza difficoltà proibitive – la geometria/topologia differenziale del '900; o almeno quella parte di essa di più diretta pertinenza alla fisica matematica (coomologia di de Rham di varietà algebriche, forme e integrali armonici, varietà e forme di Kahler, ecc.).

## APP. 8.A SUI MODELLI CANONICI DEL PIANO ELLITTICO E DEL PIANO IPERBOLICO

Nella S.sez 1.1.1 abbiamo accennato a quanto tenace ma vana sia stata la ricerca di una presunta dimostrazione dell'assioma (euclideo) cosiddetto “delle parallele” a partire dai rimanenti assiomi della geometria euclidea piana. Questa ricerca si interruppe in tempi brevi soltanto quando si scoprirono modelli di geometrie 2-dim nei quali l'assioma delle parallele era sostituito da un assioma diverso e incompatibile, mentre tutti gli altri assiomi euclidei rimanevano invariati. A quel punto, la coerenza “relativa” del nuovo modello rispetto al vecchio (evidentemente non avrebbe senso parlare di coerenza “assoluta”) eliminava infatti ogni dubbio sulla indipendenza dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi.

In questa appendice descriveremo alcuni modelli di geometrie 2-dim non-euclidee, soffermandoci in particolare sul modello “semplicemente ellittico” (che per brevità diremo “ellittico” tout court) **di Riemann-Klein**, e sul modello “iperbolico” **di Poincaré** (o a lui usualmente attribuito). Per cominciare, ricordiamo che all'assioma delle parallele riferito al piano euclideo può darsi – in presenza dei rimanenti assiomi – la versione seguente (**assioma di Playfair**): «esiste esattamente una retta  $r'$  passante per un dato punto  $P$  non appartenente ad una data retta  $r$ , e che non interseca  $r$ .» Fermi restando i rimanenti assiomi euclidei, a questo assioma (si riveda la S.Sez 1.2.4) si sostituisca ora l'assioma: «non esiste alcuna “retta”  $r'$  (caso del piano ellittico) [esiste più di una “retta”  $r'$  (caso del piano iperbolico)] passante per un dato punto  $P$  non appartenente a una data retta  $r$ , e che non interseca  $r$ .» (Di fatto, nel caso iperbolico le rette in oggetto sono infinite.)<sup>1</sup> Si noti che entrambi questi nuovi assiomi negano l'assioma euclideo, e quindi sono con esso incompatibili (oltre che incompatibili tra loro), pena contraddizioni.

Naturalmente per dare senso al nuovo assioma, ellittico o iperbolico, occorre ridefinire convenientemente la nozione di retta, e questa è la ragione per cui questo termine è stato più sopra virgolettato quando riferito a  $r'$ . Converremo innanzitutto che i modelli che descriveremo, sia quello di piano ellittico che quello di piano iperbolico, assegnino a tale piano – qui inteso come varietà 2-dim  $M$ , possibilmente bordata – una metrica, o (campo di) 1° tensore fondamentale. Definiremo dunque come “retta per due punti distinti” di  $M$  la geodetica passante per tali punti, unica in forza di una assunta buona posizione del problema di risolvere il SDO delle geodetiche con le date condizioni accessorie; e per “segmento rettilineo” il tratto di quella geodetica compreso tra i due

---

<sup>1</sup> Tra l'altro si comprende subito, così, perché la geometria euclidea venga talvolta detta **parabolica**.

punti. Beninteso, si presupporrà che il modello garantisca l'unicità, oltre che della retta, anche del segmento rettilineo così definito; infatti la richiesta che il segmento sia compreso tra i due punti potrebbe non definirlo univocamente.

$\alpha$ ) Nel modello di piano ellittico inizialmente proposto da Riemann e perfezionato da Klein <sup>2</sup>, per la varietà  $M$  si assume la semisfera di raggio  $R$  (aperta) bordata dal suo equatore e immersa nello spazio  $R^3$ . L'equatore si *include* nel piano ellittico sotto la condizione che i suoi punti antipodali vengano *identificati*. <sup>3</sup> Diremo **semiequatore** l'equatore della semisfera soggetto a questa condizione. Come abbiamo riconosciuto (cfr. S.sez. 6.2.2, (T1)), le geodetiche di una sfera sono i suoi cerchi massimi, cioè le sue sezioni con i piani passanti per il centro della sfera, o piani "centrali". Tuttavia due punti distinti di una sfera sono estremi di *due* distinti segmenti geodetici, diversamente da come avviene nel piano euclideo; vale a dire, la sfera è un modello "doppiamente ellittico" nella locuzione di Klein. Questi due segmenti geodetici si riducono invece ad uno solo nel **piano ellittico** ( $\equiv$  semisfera  $\cup$  semiequatore) più sopra introdotto. Dimostriamo questo asserto. Esso è intuitivamente evidente se almeno uno dei due estremi *non* è sull'equatore. Se poi i due estremi sono entrambi sull'equatore senza essere antipodali, vi è tra essi un unico segmento di equatore, dovendosi quest'ultimo considerare come "doppio semiequatore" <sup>4</sup>. Se infine i due estremi sono entrambi sull'equatore ed antipodali, allora essi coincidono, e la definizione di segmento geodetico tra essi perde senso perché i due punti *non* sono allora distinti. In conclusione sia la retta ( $\equiv$  geodetica) passante per due punti distinti del piano ellittico, sia il segmento rettilineo ( $\equiv$  geodetico) tra essi, esistono e sono unici come nel caso euclideo. È anche chiaro che, per un punto  $P$  del piano ellittico come sopra definito e non appartenente ad una data retta  $r$ , non passa alcuna retta  $r'$  che non interseca  $r$ : comunque si scelga  $r'$ , vi è sempre esattamente un punto di intersezione tra  $r$  e  $r'$ , possibilmente sul semiequatore (precisamente, ciò avviene quando le rette  $r$  e  $r'$  appartengono a piani centrali aventi comune intersezione con il piano equatoriale). Quindi vale la versione ellittica dell'assioma delle parallele. Nella metrica sferica standard indotta da  $R^3$ , ogni retta del piano ellittico, incluso il semiequatore, è lunga  $\pi R$ , e l'area dell'intero piano ellittico è  $2\pi R^2$ . Armandosi di una congrua dose di pazienza, si può inoltre verificare che nel modello descritto valgono tutti i rimanenti assiomi euclidei.

<sup>2</sup> F. Klein, Math. Ann. IV 604 (1871), Math. Ann. VI 125 (1873).

<sup>3</sup> Come dovrebbe esser noto, questo insieme chiuso costituisce un modello canonico di "piano proiettivo", vedi ad es. W. Massey, "Algebraic Topology, an Introduction", Springer 1967, Chpt. 1, Sect. 4.

<sup>4</sup> Comunque si immagini ricavato dall'equatore un semiequatore  $\sigma$  (semiaperto) mediante punti antipodali  $C \in \sigma$  e  $D \notin \sigma$ , tra due punti  $A$  e  $B$  di  $\sigma$  vi è un solo segmento geodetico incluso in  $\sigma$ .



Evidentemente il modello di Riemann-Klein non è realizzabile nello spazio euclideo 3-dim. Lo è invece, si dimostra, in quello 4-dim. Se dunque si accetta la coerenza della geometria euclidea 4-dim, si deve accettare la coerenza del modello di Riemann-Klein. D'altra parte se l'assioma delle parallele fosse una conseguenza dei rimanenti allora il modello conterrebbe una contraddizione (tra un assioma e un teorema che lo contraddice), da cui la tesi della indipendenza.

Per quanto paradossale ciò possa apparire alla luce della millenaria storia dei tentativi di derivare l'assioma delle parallele dagli altri assiomi euclidei, la mera esistenza di questo modello – la cui descrizione ha qui richiesto meno di una pagina – rimuove l'annosa questione dell'indipendenza nel novero dei problemi matematici risolti, e quindi ormai soltanto di interesse storico. (Di fatto, non fu tuttavia un modello ellittico a fornire la soluzione del problema dell'indipendenza degli assiomi euclidei, ma un modello iperbolico (vedi anche la Sez. 9.1).)

Il descritto modello di piano ellittico coinvolge sostanzialmente le proprietà della 2-sfera di raggio  $R$  immersa in  $\mathbb{R}^3$ , proprietà che abbiamo fin qui affidato all'intuizione. Per completezza, ma anche a titolo di esercizio, sarà utile analizzare da un punto di vista formale i più importanti aspetti della geometria differenziale di questa 2-sfera, in certi casi anche prescindendo dalla sua immersione in  $\mathbb{R}^3$ , e quindi trattandola come varietà astratta. Ciò si otterrà mediante procedure elementari, anche se discretamente laboriose. Con la scelta qui più naturale, riferiremo la sfera in oggetto a coordinate sferiche standard, o “geografiche” (longitudine  $0 \leq \varphi < 2\pi$  e colatitudine  $0 \leq \theta \leq \pi$ ), avendo posto il polo nord sul semiasse positivo  $\mathbf{k}$  di una terna cartesiana ortogonale destra  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  centrata nel centro della sfera, e avendo orientato  $\varphi$  – contata a partire dall'asse  $\mathbf{i}$  – secondo l'usuale regola del cavatappi rispetto all'asse  $\mathbf{k}$ . Con tali coordinate geografiche, il generico punto  $\mathbf{P}$  della sfera è dato dalla:

$$(1) \quad \mathbf{P}/R = \mathbf{i}\sin\theta\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\theta\sin\varphi + \mathbf{k}\cos\theta;$$

o se si preferisce, introducendo coordinate cartesiane ortogonali  $X$  (lungo  $\mathbf{i}$ ),  $Y$  (lungo  $\mathbf{j}$ ) e  $Z$  (lungo  $\mathbf{k}$ ), dalle equivalenti

$$(1_{1\text{bis}}) \quad X/R = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$(1_{2\text{bis}}) \quad Y/R = \sin\theta\sin\varphi,$$

$$(1_{3\text{bis}}) \quad Z/R = \cos\theta.$$

Si noti che le (1bis) implicano che  $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$ , come deve essere. Le (1), o le (1bis), definiscono una biiezione tra la sfera privata dei poli (nei quali non è definita  $\varphi$ ), e il dominio  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  sul quale varia la coppia ordinata  $\langle \varphi, \theta \rangle$ .<sup>5</sup> Si possono così calcolare

---

<sup>5</sup> Come sappiamo, considerata come varietà astratta la 2-sfera *non* è una varietà elementare. Quindi la carta “geografica” di dominio  $\langle \varphi, \theta \rangle \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  non la ricopre tutta; e in realtà resta scoperto il meridiano iniziale  $\varphi = 0$  inclusi i suoi estremi, ossia i poli. (Occorrerebbe una seconda carta allo scopo.) Immaginando di avere definito questa carta

$$(2_1) \quad \partial_\varphi \mathbf{P}/R = -\mathbf{i} \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{j} \sin\theta \cos\varphi,$$

$$(2_2) \quad \partial_\theta \mathbf{P}/R = \mathbf{i} \cos\theta \cos\varphi + \mathbf{j} \cos\theta \sin\varphi - \mathbf{k} \sin\theta,$$

e quindi determinare le componenti covarianti del tensore fondamentale, che sono:

$$(3_1) \quad g_{\varphi\varphi}/R^2 = \partial_\varphi \mathbf{P} \cdot \partial_\varphi \mathbf{P}/R^2 = \sin^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \cos^2\varphi = \sin^2\theta,$$

$$(3_2) \quad g_{\varphi\theta}/R^2 = \partial_\varphi \mathbf{P} \cdot \partial_\theta \mathbf{P}/R^2 = -\sin\theta \sin\varphi \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta \cos\varphi \cos\theta \sin\varphi = 0,$$

$$(3_3) \quad g_{\theta\theta}/R^2 = \partial_\theta \mathbf{P} \cdot \partial_\theta \mathbf{P}/R^2 = \cos^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta = 1.$$

Le (3) sono valide anche nei poli, nel senso che le dette componenti sono continue come funzioni delle coordinate  $(\theta, \varphi)$ . D'altra parte, risulta

$$(4_1) \quad \partial_{\varphi\varphi}^2 \mathbf{P}/R = -\mathbf{i} \sin\theta \cos\varphi - \mathbf{j} \sin\theta \sin\varphi,$$

$$(4_2) \quad \partial_{\varphi\theta}^2 \mathbf{P}/R = -\mathbf{i} \cos\theta \sin\varphi + \mathbf{j} \cos\theta \cos\varphi,$$

$$(4_3) \quad \partial_{\theta\theta}^2 \mathbf{P}/R = -\mathbf{i} \sin\theta \cos\varphi - \mathbf{j} \sin\theta \sin\varphi - \mathbf{k} \cos\theta;$$

e inoltre, la normale alla sfera orientata verso l'esterno  $\mathbf{n}$  è uguale a  $\mathbf{P}/R$ . Quindi possiamo calcolare anche le componenti covarianti del 2° tensore fondamentale (che come è noto cambiano segno con il verso prescelto della normale alla superficie). Con la scelta operata per il verso di  $\mathbf{n}$ , queste componenti risultano essere:

$$(5_1) \quad h_{\varphi\varphi}/R = \mathbf{n} \cdot \partial_{\varphi\varphi}^2 \mathbf{P}/R = -\sin^2\theta$$

$$(5_2) \quad h_{\varphi\theta}/R = \mathbf{n} \cdot \partial_{\varphi\theta}^2 \mathbf{P}/R = 0$$

$$(5_3) \quad h_{\theta\theta}/R = \mathbf{n} \cdot \partial_{\theta\theta}^2 \mathbf{P}/R = -1.$$

Anche le (5) sono ancora valide, nello stesso sopraddetto senso, nei poli.<sup>6</sup> Constatiamo così che, nel riferimento scelto (e quindi in ogni riferimento),

$$(6) \quad h_{(2)} = -g_{(2)}/R;$$

un risultato già acquisito in App. 3.A facendo uso di coordinate cartesiane ortogonali, vedi le (3.A, 10ter), cioè le (3.A, 10bis) con i 2<sup>i</sup> membri divisi per R. Ovviamente se  $\mathbf{n}$  si assume orientata verso l'interno, i 2<sup>i</sup> membri delle (5, 6) perdono i segni  $-$  ( $\rightarrow$ 5bis,  $\rightarrow$ 6bis); ma sia in base alla (6) che alla (6bis) il rapporto tra il determinante delle componenti covarianti di  $h_{(2)}$  e quello delle componenti covarianti di  $g_{(2)}$  risulta uguale a  $R^{-2}$ . In forza del Theorema egregium, questo rapporto

addizionale (ma anche facendone a meno perché la parte di sfera che resta da ricoprire è 1-dimensionale e può essere raggiunta con passaggi al limite), si può sviluppare la geometria intrinseca della 2-sfera prendendo le mosse dalle componenti covarianti (vedi le successive (3)) del suo tensore fondamentale, pensate come oggetti primitivi.

<sup>6</sup> Se si rinuncia alla condizione che la normale alla sfera sia *esterna*, e la si definisce come  $\mathbf{P}_{/\theta} \times \mathbf{P}_{/\varphi} / |\mathbf{P}_{/\theta} \times \mathbf{P}_{/\varphi}|$ , essa cambia segno se cambia il verso di  $\theta$  aut quello di  $\varphi$ . Segue che anche le componenti covarianti di  $h_{(2)}$ , date dalle (5) cambiano segno sotto la stessa operazione. Poiché questa produce una inversione dello jacobiano, concludiamo che esse componenti vanno viste come quelle di un pseudotensore piuttosto che di un tensore. Ovviamente, e riferendoci al caso di una superficie generica, se  $\mathbf{n}$  ha per convenzione verso-*indipendente* da quello delle linee coordinate, come abbiamo supposto fin qui, allora  $h_{(2)}$  può trattarsi come un tensore senza preoccuparsi d'altro. È tuttavia importante aver segnalato che se  $\mathbf{n}$  è definito come  $\mathbf{P}_{/1} \times \mathbf{P}_{/2} / |\mathbf{P}_{/1} \times \mathbf{P}_{/2}|$ , allora la vera natura di  $h_{(2)}$  è quella di un 2-pseudotensore simmetrico.

è la curvatura gaussiana  $K$ , e si conclude che  $K = R^{-2}$  per la sfera di raggio  $R$ . Questo risultato è stato qui ricavato con procedure di geometria *estrinseca*, avendo comportato l'introduzione del versore normale alla sfera. Quanto alla semisomma  $H$  delle curvature principali, essa si deduce senza calcoli dalla (6) o dalla (6bis): ricordando che  $H = \pm g^{ik}h_{ik}/2$  a seconda che  $\mathbf{n}$  sia interna (segno +) o esterna, si trova infatti  $H = 1/R$  sia usando la (6) che la (6bis).

Poiché è comunque

$$(7) \quad g_{ij}d_s q^i d_s q^j = 1$$

lungo una generica curva di equazione  $q = q(s)$  della varietà di metrica riemanniana  $g_{ij}$  ( $q^i$  essendo le coordinate della varietà e  $s$  la lunghezza della curva), riferendoci ormai definitivamente alla (6), questa comporta che sia

$$(8) \quad h_{ij}d_s q^i d_s q^j = -1/R.$$

Scrivendo la (7) per la sfera di raggio  $R$ , e usando le coordinate  $(\varphi, \theta)$  in luogo delle generiche  $(q^1, q^2)$ , deve dunque essere  $1 = g_{\varphi\varphi}(d_s \varphi)^2 + g_{\theta\theta}(d_s \theta)^2 = R^2[\sin^2 \theta (d_s \varphi)^2 + (d_s \theta)^2]$ . Da questa si trae, salvo che nei poli,

$$(9_1) \quad d_s \varphi = \cos \alpha / (R \sin \theta),$$

$$(9_2) \quad d_s \theta = \sin \alpha / R,$$

dove  $\alpha$  è l'angolo che la curva in oggetto fa con il parallelo locale orientato secondo la  $\varphi$  crescente.

Con questi valori di  $d_s \varphi$  e  $d_s \theta$ , il 1° membro della (8) vale appunto, come deve,  $-1/R$ . La (8) permette in particolare di verificare la validità della (6.2.2, 16) nel caso di presente interesse, in cui  $\mathbf{t}_2$  (normale principale del cerchio massimo (geodetico)) è uguale e opposta a  $\mathbf{n}$  (normale esterna alla sfera). Secondo la (6.2.2, 16) si ha infatti  $\kappa_1 = 1/R$ , come ben ci si aspetta in base alla definizione di  $\kappa_1$  (cfr. anche il teorema di Meusnier).

Venendo alla geometria *intrinseca* della sfera (che per semplicità supporremo ora di raggio unitario,  $R = 1$ ), nelle coordinate geografiche  $\theta, \varphi$  abbiamo  $g = \sin^2 \theta$ , e quindi  $g^{00} = 1$ ,  $g^{\varphi\varphi} = 0$  e  $g^{\theta\varphi} = \sin^{-2} \theta$ . Possiamo così calcolare i sei coefficienti di Christoffel di 2ª specie Chr2. Risulta:

$$(10_1) \quad \Gamma_{\varphi}^{\varphi\theta} = g^{\varphi\theta} \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} / 2 = \text{ctg} \theta$$

$$(10_2) \quad \Gamma_{\varphi}^{\theta\varphi} = -g^{\theta\theta} \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} / 2 = -\sin \theta \cos \theta,$$

mentre gli altri quattro Chr2 sono nulli.<sup>7</sup> Passando al tensore di Riemann, abbiamo pertanto

$$(11) \quad \rho_{\varphi\theta\varphi\theta} = \partial_{\theta} \Gamma_{\varphi}^{\theta\varphi} - \Gamma_{\varphi}^{\theta\varphi} \Gamma_{\varphi}^{\varphi\theta} = -\partial_{\theta} (\sin \theta \cos \theta) + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta.$$

<sup>7</sup> Diamo il punto di partenza di questo risultato, cioè l'espressione dei sei Chr1. Abbiamo:  $2\Gamma_{000} = \partial_0 g_{00} = 0$ ;  $2\Gamma_{\theta\theta\varphi} = \partial_{\varphi} g_{\theta\theta} + \partial_{\theta} g_{\varphi\theta} - \partial_{\theta} g_{\theta\varphi} = 0$ ;  $2\Gamma_{\varphi\theta\varphi} = 2\partial_{\varphi} g_{\varphi\theta} - \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} = -2\sin \theta \cos \theta$ ;  $2\Gamma_{\theta\varphi\theta} = 2\partial_{\theta} g_{\theta\varphi} - \partial_{\varphi} g_{\theta\theta} = 0$ ;  $2\Gamma_{\theta\varphi\varphi} = \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} = 2\sin \theta \cos \theta$ ;  $2\Gamma_{\varphi\varphi\varphi} = \partial_{\varphi} g_{\varphi\varphi} = 0$ . Può anche essere conveniente calcolare il tensore di Riemann senza passare per i Chr2, mediante la relazione  $\rho_{iskr} = (\partial_r \Gamma_{isk} + g^{hj} \Gamma_{ihr} \Gamma_{jsk}) - \text{alt}(r, k)$ .

Poiché  $\rho_{\varphi\theta\varphi\theta} = Kg = K\sin^2\theta$ , ritroviamo  $K = 1$  con un calcolo geometrico-intrinseco. Lasciamo al lettore il facile esercizio di modificare come conviene le formule di questo paragrafo quando esse siano riferite ad una sfera di raggio  $R \neq 1$ .

Vediamo ora come si possa provare la natura geodetica dei cerchi massimi rifacendosi direttamente alle equazioni delle geodetiche, cioè senza far uso del comodo teorema estrinseco (6.2.2, (T1)). Questo equivale in realtà a risalire alla prima fonte di quanto asserito da (T1), che come sappiamo si deduce proprio dalle equazioni delle geodetiche. Cominciamo col ricordare che l'equazione dei cerchi massimi in coordinate sferiche, sempre per una sfera di raggio 1, può scriversi come EDO normale:

$$(12) \quad dv/du = -v/u,$$

in cui per brevità abbiamo posto  $v =: \cos\alpha$ ,  $u =: \sin\theta$ ,  $\alpha$  è l'angolo definito più sopra, e si escludono i poli (dove  $u = 0$ ) ed i punti in cui la curva è tangente al parallelo locale (dove  $|\operatorname{ctg}\alpha| = \infty$ ). La soluzione della (12) sotto la condizione iniziale  $v = v_0$  (con  $-1 \leq v_0 \leq 1$ ) per  $u = u_0 = 1$  (cioè sull'equatore) è chiaramente  $v = v_0/u$ .

Scriviamo ora le due equazioni geodetiche relative alle coordinate  $\varphi$ ,  $\theta$ . In base alle (10), esse sono:

$$(13_1) \quad d_s^2\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta}(d_s\varphi)^2 = d_s^2\theta - \sin\theta\cos\theta(d_s\varphi)^2 = 0$$

per la  $\theta$ , e

$$(13_2) \quad d_s^2\varphi + 2\Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi}d_s\varphi d_s\theta = d_s^2\varphi + 2\operatorname{ctg}\theta d_s\varphi d_s\theta = 0$$

per la  $\varphi$ . (Il fattore 2 nella (13<sub>2</sub>) scende dalla necessità di sommare gli uguali contributi di  $\Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi}$  e  $\Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi}$ .) Sostituendo in queste le  $d_s\varphi$  e  $d_s\theta$  date dalle (9) (con  $R = 1$ ) si ottiene:

$$(14_1) \quad \sin^2\theta d_s(\cos\alpha/\sin\theta) + 2\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

e rispettivamente

$$(14_2) \quad \sin\theta d_s\sin\alpha - \cos\theta\cos^2\alpha = 0.$$

Consideriamo dapprima la (14<sub>1</sub>). Con semplici passaggi essa si riscrive come

$$(15) \quad d_s(\sin\theta\cos\alpha) = \cos\theta\cos\alpha(d_s\sin\theta/\cos\theta - \sin\alpha) = \cos\theta\cos\alpha(d_s\theta - \sin\alpha).$$

Qui la differenza  $d_s\theta - \sin\alpha$  è nulla in forza della (9<sub>2</sub>), e dunque la (14<sub>1</sub>) implica che

$$(16) \quad d_s(\sin\theta\cos\alpha) = 0.$$

Passando alla (14<sub>2</sub>), e tenuto conto che  $d_s\sin\alpha = -\operatorname{ctg}\alpha d_s\cos\alpha$ , con analoghe manipolazioni anch'essa si riduce alla seconda (15), e quindi anch'essa implica la (16). Ma la (16) è precisamente la  $d_s(uv) = 0$ , e questa equivale alla (12), qed. <sup>8</sup>

---

<sup>8</sup> Lo stesso risultato poteva ottenersi partendo dal problema variazionale  $\int ds = \operatorname{staz}!$ . Se si descrive come  $\theta = \theta(\varphi)$  la generica estremale e si denota con un apice la  $d/d\varphi$ , si ha  $\int(\sin^2\theta + \theta'^2)^{1/2}d\varphi = \operatorname{staz}!$ . L'associata equazione di EL, risolta

L'espressione delle derivate prime delle incognite  $\theta$  e  $\varphi$  in termini di una terza incognita  $\alpha$  secondo le (9) ha dunque permesso di trasformare il SDO geodetico, costituito da due equazioni quasi lineari normali del 2° ordine, in un SDO di tre equazioni quasi lineari del 1° ordine, le (9) e la  $d_s\alpha = \text{ctg}\theta\cos\alpha$ . Avendo introdotto come sopra le nuove incognite  $u$  e  $v$ , questo sistema può scriversi nella forma

$$(17_1) \quad d_s u = \pm [(1-u^2)(1-v^2)]^{1/2}$$

$$(17_2) \quad d_s(uv) = 0$$

$$(17_3) \quad d_s\varphi = \cos\alpha/\sin\theta = v/u,$$

con la terza equazione disaccoppiata dalle altre due.

Convengono tre commenti. (i): A differenza di quello dedotto dal teorema (6.2.2, (T1)), il risultato testé ottenuto è fondato sulla geometria intrinseca della 2-sfera. (ii): nella costanza di  $uv$  ( $= v_0$ ) si riconosce il teorema di Clairaut (v. S.sez. 6.2.2) applicato alla 2-sfera, la quale è evidentemente una superficie di rotazione. Altre equazioni equivalenti sono  $d\alpha/d\theta = \text{ctg}\theta\text{ctg}\alpha$  e  $d\alpha/d\varphi = \cos\theta/\cos\alpha$ . (iii): tornando alla (7), la metrica (definita positiva) della sfera di raggio  $R$  si scrive (al solito  $ds^2$  sta per  $(ds)^2$ , e simili):

$$(18) \quad ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2);$$

ovvero, introducendo  $\rho =: R\theta$  ( $\equiv$  lunghezza dell'arco sotteso dall'angolo  $\theta$ ),

$$(18\text{bis}) \quad ds^2 = d\rho^2 + R^2\sin^2(\rho/R)d\varphi^2.$$

( $R\sin(\rho/R)$  è il raggio del parallelo locale, e  $0 \leq \rho \leq \pi R$ .) Facendo in quest'ultima (18bis)  $R \rightarrow \infty$ , si ottiene poi:

$$(18\text{ter}) \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2,$$

cioè, come ben naturale, la metrica del piano euclideo in coordinate polari  $(\rho, \theta)$ .

Questo conclude la nostra presente analisi del modello di piano ellittico della geometria differenziale della 2-sfera di raggio  $R$  immersa in  $R^3$ , o rispettivamente della 2-sfera astratta nel senso di Riemann.

$\beta$ ) Passiamo adesso ad occuparci dei modelli di piano iperbolico. Il cosiddetto **modello del disco di Poincaré** compare in un lungo lavoro dell'autore sulle funzioni automorfe (1882), ed è ripreso più diffusamente qualche anno dopo (1887)<sup>9</sup>. In esso, il piano iperbolico viene identificato con

rispetto a  $\theta''$ , risulta allora essere (\*)  $\theta'' = \sin\theta\cos\theta + 2\theta'\text{ctg}\theta$ . A questo punto le (9) danno  $\theta' = \text{tg}\alpha\sin\theta$  e  $\theta'' = d_s(\text{tg}\alpha\sin\theta)\sin\theta/\cos\alpha$ . Sostituendo queste nella (\*), e tenendo conto della  $d_s\text{tg}\alpha = -d_s\cos\alpha/(\sin\alpha\cos^2\alpha)$ , si ottiene  $-d_s\cos\alpha\sin\theta/(\sin\theta\cos\alpha) + \sin\alpha d_s\sin\theta = \cos\theta(1+\sin^2\alpha)$ . Qui si elimina  $-d_s\cos\alpha\sin\theta$  come  $d_s\sin\theta\cos\alpha - d_s(\sin\theta\cos\alpha)$ , e con qualche passaggio si ritrova la  $d_s(\sin\theta\cos\alpha) = 0$ , qed.

<sup>9</sup> H. Poincaré, Acta Math. I, 1 (1882); Bull. Soc. Math. de France, XV, 203 (1887). Si citano comunemente 4+1 modelli di piano iperbolico: (1) il modello detto di Beltrami-Klein; (2) il modello del disco detto di Poincaré e (2bis) la sua

l'interno di un disco (chiuso)  $\mathcal{D}$ , e le sue "rette" con gli archi di cerchio  $\lambda$  in  $\mathcal{D}$  che intersecano ortogonalmente il suo contorno  $\partial\mathcal{D}$ , diametri di  $\mathcal{D}$  inclusi. I punti di  $\partial\mathcal{D}$  vanno considerati come impropri, in quanto a "distanza" infinita da qualunque punto interno di  $\mathcal{D}$ . Infatti la distanza  $s_{PQ}$  (un numero adimensionale) tra due punti  $P$  e  $Q$  di  $\mathcal{D}$  viene definita come il logaritmo del birapporto  $(P, Q|p, q) =: (Pp/Qp)/(Pq/Qq)$ , dove  $p$  e  $q$  sono le intersezioni dell'arco di cerchio  $\lambda$  passante per  $P$  e  $Q$  (unicamente determinato) con  $\partial\mathcal{D}$ ,  $p$  dalla parte di  $Q$  e  $q$  da quella di  $P$ , e  $Pp, Qp, Pq, Qq$  sono le (lunghezze delle) corde con gli estremi indicati. Con questa definizione,  $Pp/Qp > 1$  e  $Pq/Qq < 1$ , per cui  $(P, Q|p, q) > 1$ , e  $s_{PQ} = \ln(P, Q|p, q) = s_{QP} > 0$ . Inoltre  $(P, Q|p, q) \rightarrow 1$ , quindi  $s_{PQ} \rightarrow 0$ , se  $P \rightarrow Q$ .

Per i nostri scopi, è conveniente limitarci al caso limite in cui il raggio di  $\mathcal{D}$  è infinito. Allora  $\mathcal{D}$  diventa un semipiano (**semipiano di Poincaré**) e  $\partial\mathcal{D}$  la retta che lo limita; gli archi di cerchio  $\lambda$  hanno centro sulla retta limite  $\partial\mathcal{D}$ , e sono dunque semicerchi di  $\mathcal{D}$ , incluso il caso delle semirette ortogonali a  $\partial\mathcal{D}$ . Riferiamo questo semipiano a coordinate cartesiane ortogonali  $x$  (lungo  $\partial\mathcal{D}$ ) e  $y$  con l'orientamento standard. Sia  $D$  il raggio del semicerchio  $\lambda$  passante per  $P$  e  $Q$  di  $\mathcal{D}$ , e diciamo  $x_0$  l'ascissa del suo centro (l'ordinata è  $y = 0$ ). Segue che l'equazione di  $\lambda$  è  $(x-x_0)^2 + y^2 = D^2$ , con  $y > 0$ . Poiché  $Pq^2 + Pp^2 = 4D^2$ , possiamo differenziare rispetto a  $P$ , e lungo  $\lambda$ , questa relazione, ottenendo  $d(Pq)/Pp = -d(Pp)/Pq$ . Per il corrispondente differenziale di  $s_{PQ}$  si ha poi  $ds_{PQ} = d[\ln(P, Q|p, q)] = d(Pp)/Pp - d(Pq)/Pq = Ppd(Pp)[1/Pp^2 + 1/Pq^2]$ . Denotando semplicemente con  $x, y$  le coordinate di  $P$ , abbiamo  $Pp^2 = (D+x-x_0)^2 + y^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + D^2 + 2(x-x_0)D = 2D^2 + 2(x-x_0)D$ . Differenziando ancora, troviamo  $Ppd(Pp) = Ddx$ , quindi  $ds_{PQ} = Ddx[1/Pp^2 + 1/Pq^2] = Ddx/y^2$  (perché  $y = PpPq/(Pp^2+Pq^2)$ ). Valutiamo adesso la forma differenziale quadratica  $(dx^2+dy^2)/y^2 \equiv [1+(dy/dx)^2]dx^2/y^2$  lungo  $\lambda$ , quindi con  $dy/dx = -(x-x_0)/y$ . Si ottiene subito  $[1+(x-x_0)^2/y^2]dx^2/y^2 = D^2dx^2/y^4 = ds^2$ . Questo significa che per avere il quadrato della distanza  $ds^2$  tra i due punti di coordinate  $(x+dx, y+dy)$  e  $(x, y)$  del semipiano  $y > 0$  dobbiamo assegnare a questo il tensore metrico (definito positivo):

$$(19) \quad g_{xx} = g_{yy} = 1/y^2, \quad g_{xy} = 0.$$

Dimostriamo che con questa metrica le curve geodetiche del semipiano sono dei semicerchi centrati sulla retta limite  $y = 0$ . La procedura più conveniente è quella di risolvere il corrispondente problema variazionale  $\int_a^b (1+x'^2)^{1/2} dy/y = \text{staz!}$ , dove abbiamo denotato con un apice la  $d/dy$  e  $a > 0$ ,  $b > a$  sono le ordinate degli estremi del segmento considerato. L'integranda  $F = F(y, x, x')$  non dipende dalla incognita  $x$  ma soltanto dalla sua derivata  $x'$ , per cui sussiste l'integrale primo

---

versione limite del semipiano; (3) il modello dell'iperboloide a due falde; (4) il modello della trattrice di Beltrami. Alla luce della priorità storica, e a dispetto delle denominazioni, i modelli (1, 2, 2bis) dovrebbero essere attribuiti a E. Beltrami.

dell'equazione di EL,  $F_{x'} = x'(1+x'^2)^{-1/2}/y = \text{costante arbitraria} \equiv A^{-1}$  (con  $A > 0$ ). Posto allora  $x' =: \operatorname{tg}\tau$ , risulta  $y = Ax'(1+x'^2)^{-1/2} = A\sin\tau$ , quindi  $dy/d\tau = A\cos\tau$ ; e inoltre  $dx/d\tau = A\sin\tau$ , quindi  $x - B = -A\cos\tau$ , dove  $B$  è un'altra costante arbitraria. Quadrando e sommando le espressioni di  $x - B$  e di  $y$  così ottenute abbiamo infine  $(x-B)^2 + y^2 = A^2$ , cioè la nostra tesi.<sup>10</sup>

Calcolando i Chr2 relativi alla metrica (19), troviamo che  $\Gamma_{x^x y} = \Gamma_{y^y y} = -\Gamma_{x^y x} = 1/y$ , mentre gli altri tre Chr2 risultano identicamente nulli.<sup>11</sup> Con questi, o con i Chr1 riportati in nota, si trova subito  $\rho_{xyxy} = -1/y^4$ . D'altra parte il determinante  $g$  della metrica (19) vale  $1/y^4$ , e dunque la curvatura gaussiana è  $K = \rho_{xyxy}/g = -1$ . In conclusione, il semipiano (aperto) di Poincaré è una varietà a curvatura gaussiana negativa costante pari a  $-1$ .

Disponendo dei Chr2, possiamo anche scrivere le due usuali equazioni geodetiche, cioè

$$(20_1) \quad d_s^2 x - 2d_s x d_s y / y = 0,$$

per la  $x$ , e

$$(20_2) \quad d_s^2 y + [(d_s x)^2 - (d_s y)^2] / y = 0$$

per la  $y$ . A prima vista non sembrerebbe facile risolvere questo SDO di equazioni del 2° ordine quasi lineari; ma ne conosciamo già le soluzioni, e non resta che verificare che esse effettivamente lo soddisfano.<sup>12</sup>

Torniamo ora alla metrica della 2-sfera standard (18bis). Se in questa poniamo formalmente  $R = i$  (unità immaginaria), otteniamo

$$(21) \quad ds^2 = d\rho^2 + \operatorname{Sh}^2 \rho d\varphi^2.$$

(Basta ricordare che  $\sin(z/i) = -i\operatorname{Sh}z$  per ogni  $z$  complesso.) Il tensore fondamentale (ancora definito positivo) che corrisponde alla (21) è evidentemente

$$(21\text{bis}) \quad g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \operatorname{Sh}^2 \rho, \quad g_{\rho\varphi} = 0.$$

Se con le solite formule calcoliamo i sei corrispondenti Chr1, troviamo che soltanto due di essi non sono identicamente nulli, e precisamente  $\Gamma_{\varphi\rho\varphi} = -\operatorname{Sh}\rho\operatorname{Ch}\rho$  e  $\Gamma_{\rho\varphi\varphi} = \operatorname{Sh}\rho\operatorname{Ch}\rho$ ; e similmente passando al Chr2, troviamo  $\Gamma_{\rho^{\varphi}\varphi} = \operatorname{Cth}\rho$  e  $\Gamma_{\varphi^{\rho}\rho} = \operatorname{Sh}\rho\operatorname{Ch}\rho$ , gli altri quattro Chr2 essendo nulli. Possiamo così calcolare il tensore di Riemann per la metrica (21), che risulta pari a  $\rho_{\rho\varphi\rho\varphi} = -\operatorname{Sh}^2 \rho$ ; quindi, essendo  $g = \operatorname{Sh}^2 \rho$ , la curvatura gaussiana è, come anticipato nella S.sez. 8.1.2,  $K = \rho_{\rho\varphi\rho\varphi} / g = -1$ . Il piano  $(\rho, \varphi)$  con la metrica (21) ha dunque curvatura costante negativa pari a  $-1$ . Esso viene ancora detto

<sup>10</sup> Il caso degenerare delle semirette parallele all'asse  $y$  si ha ponendo  $B = C + A$ , dove  $C$  è un'altra costante, e facendo poi  $A \rightarrow \infty$  a  $C$  fissa. Con la detta sostituzione, la (\*) nel testo diventa infatti  $x^2 + C^2 + 2AC - 2Ax + y^2 = 0$ , da cui dividendo per  $A$  e facendo  $A \rightarrow \infty$ ,  $x = C$ .

<sup>11</sup> Può essere ancora utile riportare i Chr1, che sono  $\Gamma_{xxx} = 0$ ;  $\Gamma_{xyx} = -1/y^3$ ;  $\Gamma_{yxy} = 0$ ;  $\Gamma_{xyx} = 1/y^3$ ;  $\Gamma_{xyy} = 0$ ;  $\Gamma_{yyy} = -1/y^3$ .

<sup>12</sup> Ecco questa verifica. Dalla  $(x-x_0)^2 + y^2 = D^2$ , derivando rispetto a  $s$  (a  $D$  costante) abbiamo (\*)  $(x-x_0)d_s x + yd_s y = 0$ ; e derivando ancora,  $(d_s x)^2 + (x-x_0)d_s^2 x + (d_s y)^2 + yd_s^2 y = 0$ . Eliminando in quest'ultima le derivate seconde mediante le (20), e tenendo conto della (\*), abbiamo una identità, qed.

pseudosfera (o sfera pseudoimmaginaria) unitaria. (La metrica della pseudosfera di raggio  $R$  si ottiene sostituendo  $iR$  a  $R$  nella (18bis), ed è dunque  $ds^2 = d\rho^2 + R^2\text{Sh}(\rho/R)d\varphi^2$ .) Mediante le solite procedure, possiamo scrivere le equazioni delle geodetiche della pseudosfera unitaria, che sono:

$$(22_1) \quad d_s^2\rho - \text{Sh}\rho\text{Ch}\rho(d_s\varphi)^2 = 0$$

per la  $\rho$ , e

$$(22_2) \quad d_s^2\varphi + 2\text{Cth}\rho d_s\rho d_s\varphi = 0$$

per la  $\varphi$ . Partendo da queste, e ponendo  $d_s\varphi = \cos\beta/\text{Sh}\rho$ ,  $d_s\rho = \sin\beta$ , dove  $\beta$  è un angolo arbitrario, (cfr. le simili (9) per la sfera unitaria), si trova un analogo del teorema di Clairaut, nella forma  $\cos\beta\text{Sh}\rho = \text{costante}$ .

Le formule della geometria della sfera di raggio unitario (o sfera unitaria) si trasformano in formule della geometria della pseudosfera unitaria mediante regole abbastanza semplici, che lasciamo intuire al lettore attraverso alcuni esempi. In quanto segue le lunghezze si intendono misurate in unità di raggio sferico o pseudosferico, le aree in unità di quadrato di tale raggio, ecc. La formula che dà la somma degli angoli  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  di un triangolo sferico come  $\alpha + \beta + \gamma = \pi - S$ , dove  $S$  è l'area del triangolo, diventa (si dimostra)  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + S$  nel caso del triangolo pseudosferico. Le formule per la lunghezza  $C$  della circonferenza di un cerchio di raggio  $r$ , o per l'area  $A$  di un disco di raggio  $r$  sono  $C = 2\pi\sin r$  nel caso della sfera e  $C = 2\pi\text{Sh}r$  in quello della pseudosfera; e rispettivamente,  $A = 2\pi(1 - \cos r)$  (sfera) e  $A = 2\pi(\text{Ch}r - 1)$  (pseudosfera). Similmente, se  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono nell'ordine le lunghezze dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo, sferico o pseudosferico, i "teoremi di Pitagora" sono  $\cos a = \cos b \cos c$  (sfera) e rispettivamente  $\text{Ch}a = \text{Ch}b \text{Ch}c$  (pseudosfera). Ancora: la legge dei seni sferica, per il triangolo generico di lati  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e angoli opposti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , è  $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma = \sin a:\sin b:\sin c$ , mentre quella pseudosferica è  $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma = \text{Sh}a:\text{Sh}b:\text{Sh}c$ ; la legge dei coseni sferica, per lo stesso triangolo generico, è  $\cos\alpha\sin b\sin c = \cos a - \cos b\cos c$ , mentre quella pseudosferica è  $\cos\alpha\text{Sh}b\text{Sh}c = \text{Ch}a - \text{Ch}b\text{Ch}c$ , ecc. Dalle formule della geometria sferica o pseudosferica di raggio  $R$  si derivano infine le corrispondenti formule euclidee semplicemente esprimendo le lunghezze [le aree] in unità  $R$  [ $R^2$ ] e prendendo il limite per  $R \rightarrow \infty$ .<sup>13</sup>

La geometria pseudosferica acquista un significato particolare nel contesto presente, in cui siamo interessati a modelli del piano iperbolico. Infatti tutte le varietà 2-dim con uguale (campo di) curvatura gaussiana sono isometriche, cfr. S.sez. 8.2.1. Quindi esiste una definita biiezione del

<sup>13</sup> Ad esempio il teorema di Pitagora standard (euclideo) si ottiene scrivendo  $a/R$ ,  $b/R$ ,  $c/R$  in luogo di  $a$ ,  $b$ ,  $c$  nella  $\cos a = \cos b \cos c$  o nella  $\text{Ch}a = \text{Ch}b \text{Ch}c$ . Al più basso ordine significativo per  $R \rightarrow \infty$ , e usando il segno  $-$  nel caso sferico e il  $+$  in quello pseudosferico, abbiamo  $1 \pm (a/R)^2/2 = 1 \pm (b/R)^2/2 \pm (c/R)^2/2$ ; cioè in entrambi i casi  $a^2 = b^2 + c^2$ , qed.



semipiano di Poincaré ( $x, y > 0$ ) su un aperto bordato del piano  $(\varphi, \rho)$ , data da certe funzioni di CdC 1 (in realtà analitiche) e invertibili  $\varphi = \varphi(x, y > 0)$ ,  $\rho = \rho(x, y > 0)$ , e per la quale

$$(23) \quad (dx^2 + dy^2)/y^2 \equiv d\rho^2 + \text{Sh}^2 \rho d\varphi^2.$$

Segue che anche tale aperto bordato del piano  $(\varphi, \rho)$  con la metrica (21), cioè la pseudosfera, è un modello del piano iperbolico; rispetto al semipiano di Poincaré, *cambiano soltanto le coordinate*, da  $(x, y)$  a  $(\varphi, \rho)$ . L'uguaglianza della curvatura gaussiana nei due casi può allora vedersi come conseguenza della sua invarianza rispetto a cambiamenti di carta. La costruzione esplicita delle funzioni  $\varphi = \varphi(x, y)$  e  $\rho = \rho(x, y)$  è un po' laboriosa, e viene qui omessa. Del resto ogni metrica che implichi una curvatura gaussiana uguale a  $-1$ , ad esempio la  $ds'^2 = d\rho'^2 + \text{Ch}^2 \rho' d\varphi'^2$  (come abbiamo anticipato nella S.sez. 8.1.2), ha la stessa proprietà. Si noti ancora che i modelli del disco e del semipiano di Poincaré godono della importante proprietà di essere conformi, cioè conservano gli angoli tra direzioni arbitrarie.

Della pseudosfera di Beltrami (immersa in  $\mathbb{R}^3$ ) abbiamo detto nella S.sez. 8.1.1. Possiamo ora dimostrare assai semplicemente che anch'essa è un modello del piano iperbolico. Torniamo alla (8.1.1, 8bis) facendovi  $A = 1$  (pseudosfera di Beltrami di diametro *unitario*). Denotando con  $X, Y, Z$  coordinate cartesiane ortogonali di  $\mathbb{R}^3$ , le equazioni parametriche di questa superficie di rotazione attorno all'asse ( $Z$ ), nelle coordinate  $\rho$  (raggio cilindrico, o del parallelo) e  $\varphi$  (longitudine) sono:

$$(24_1) \quad X = \rho \cos \varphi,$$

$$(24_2) \quad Y = \rho \sin \varphi,$$

$$(24_3) \quad Z = Z(\rho) = \pm \int_{0 < \rho \leq 1}^1 (1-t^2)^{1/2} dt/t,$$

dove il doppio segno si riferisce alle due metà della pseudosfera. (La (24<sub>3</sub>) è appunto la (8.1.1, 8bis) con  $A = 1$ .) La lunghezza quadrata d'arco è  $ds^2 = dZ^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = d\rho^2/\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2$ , perché  $dZ^2 = d\rho^2(1-\rho^2)/\rho^2$  alla luce della (24<sub>3</sub>). Identificando  $\varphi$  e  $\rho^{-1}$  con le coordinate  $x$  e rispettivamente  $y$  del semipiano di Poincaré, si ha  $dy^2 = d\rho^2/\rho^4$ , e quindi  $ds^2 = d\rho^2/\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$ : la pseudosfera di Beltrami è isometrica al semipiano di Poincaré, ovvero è un altro modello del piano iperbolico, qed.

Anche del modello dell'iperboloide a due falde, con la metrica indotta dallo spazio sommergente minkowskiano, abbiamo già discusso (v. S.sez. 8.1.4). Resta da esaminare il cosiddetto **modello di Beltrami-Klein**, introdotto da Beltrami nel 1868, e quindi *primo* modello storico di piano iperbolico inteso come varietà 2-dim astratta. Al disco unitario aperto  $\mathcal{D} \equiv \equiv u^2 + v^2 < 1$ , Beltrami assegna la metrica simmetrica in  $(u, v)$ :

$$(25) \quad ds^2 = [(1-v^2)du^2 + 2uvdudv + (1-u^2)dv^2]/[1-(u^2+v^2)]^2.$$

A partire da questa, quindi dal tensore fondamentale  $L^2 g_{uu} = 1 - v^2$ ,  $L^2 g_{uv} = uv$ ,  $L^2 g_{vv} = 1 - u^2$ , dove  $L^2$  è un'abbreviazione per il fattore  $[1 - (u^2 + v^2)]^2$ , si possono scrivere le equazioni delle geodetiche e calcolare la curvatura gaussiana. Le geodetiche risultano essere segmenti (aperti) di retta euclidea di  $\mathcal{D}$ , e la curvatura gaussiana è ancora  $-1$  (il lettore potrà esercitarsi a provare questi asserti a partire dalla (25) mediante procedure ormai familiari). Si noti che per un punto fuori di una retta data passano infinite rette, e quindi vale la versione iperbolica dell'assioma delle parallele. Il modello di Beltrami-Klein ha avuto un notevole impatto sullo sviluppo della teoria delle varietà astratte, in quanto esempio di varietà *elementare* (vi è un'unica carta con dominio  $\mathcal{D}$ ) dotata di curvatura costante negativa.

## CAP. 9

### COMPLEMENTI DI RELATIVITÀ SPECIALE, RELATIVITÀ GENERALE

#### 9.1) NOTA STORICA: DA GAUSS A EINSTEIN

La presente Sez. 9.1 offre un profilo essenzialmente storico della transizione dalla geometria spazio-temporale euclidea/newtoniana a quella pseudoriemanniana della relatività generale, con la geometria di Minkowski della relatività speciale come tappa intermedia. Come si vedrà, essa può essere letta tenendo presenti i contenuti dei capitoli precedenti soltanto come sfondo generale. Alcuni concetti che verranno approfonditi nel seguito del capitolo vi si trovano quindi anticipati un po' informalmente, e la sezione potrà essere affrontata come un piccolo saggio quasi autonomo sulla storia ragionata del “secolo mirabile” della geometria.

##### 9.1.1) VERSO LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Uscendo da una lunga gestazione, all'inizio del secolo XIX le idee che da oltre due millenni erano a fondamento della geometria cominciarono ad aprirsi verso nuove prospettive. Gli sviluppi ai quali ci riferiamo non avevano tuttavia alcuna relazione con progressi conoscitivi intorno alla natura dello *spazio fisico*, perché nulla era cambiato, e nulla sarebbe cambiato per molto tempo ancora, nella base empirica della disciplina: essi nacquero, ed in quello rimasero fino all'inizio del nuovo secolo, in un ambito specificamente teoretico-speculativo. La scoperta dell'esistenza “logica” di geometrie diverse dalla geometria euclidea, iniziata con la rielaborazione critica dell'opera di Euclide da parte di Legendre e dovuta essenzialmente a Gauss, a J. Bolyai e a N. Lobatchewsky,<sup>1</sup> pertiene insomma per intero alla matematica.

---

<sup>1</sup> All'amico e compagno di studi W. Bolyai che gli aveva comunicato le scoperte del figlio Janos, Gauss rispose di aver cominciato ad occuparsi dello stesso problema, giungendo a conclusioni simili, «sin da trenta o trentacinque anni prima». Gauss non aveva tuttavia pubblicato niente sull'argomento, forse per evitare le reazioni degli ambienti matematici più retrivi (le famose «strida dei beoti» di cui in una lettera a Bessel (Friederich, Minden Germ. 1784, Königsberg Germ. 1846)). Sembra insomma che la scoperta delle geometrie non euclidee possa essere condivisa tra Gauss, J. Bolyai e Lobatchewsky, il quale ultimo aveva scritto una serie di memorie sull'argomento tra il 1830 e il 1855 (vedi in particolare i suoi “Nuovi principi della geometria”, 1835-1838, trad. it. di L. Lombardo-Radice, Boringhieri 1955).

Non inaspettatamente, il cardine tra l'idea tradizionale di un'unica geometria come possibile "scienza dello spazio", e la nuova visione di una pluralità di geometrie dotate dello stesso status logico-matematico, si rivelò risiedere nell'ultimo degli assiomi euclidei: il celebre "quinto postulato" (o "delle parallele"), equivalente all'asserto che una generica retta ha esattamente una parallela passante per un punto dato fuori di essa. A conferma di una lunghissima storia di inutili tentativi di dimostrarne la derivabilità dagli altri quattro, questo assioma fu infine riconosciuto da essi indipendente; sostituendolo quindi con una sua conveniente diversa versione (ad esempio con l'affermare l'esistenza di *più* di una parallela per quel punto), diventava possibile affacciarsi all'orizzonte di una nuova geometria, avente gli stessi "diritti di cittadinanza", sul piano logico, della geometria euclidea classica.

Per le stesse ragioni ascrivibile soltanto alla matematica fu un risultato di natura tecnica pubblicato da Gauss nel 1828 assieme ad altri importanti sviluppi dell'allora nascente geometria differenziale delle superfici immerse nello spazio euclideo tridimensionale.<sup>2</sup> Gauss considera una porzione  $M^2 \equiv M$  di superficie immersa, data localmente in forma parametrica assegnando le tre coordinate cartesiane del suo generico punto  $P$  come funzioni abbastanza regolari di due parametri (o coordinate)  $(u,v)$ , dunque secondo  $P = P(u,v)$ , in un intorno aperto e semplicemente connesso  $U(u_0,v_0) \subset \mathbb{R}^2$  di una coppia di riferimento  $(u_0,v_0)$  alla quale corrisponde il punto  $P_0 =: P(u_0,v_0)$ . Mediante queste tre funzioni Gauss calcola, a loro volta come funzioni di  $(u,v)$ , i tre coefficienti  $E, F, G$  di una forma quadratica in due indeterminate  $(\xi,\eta)$ , diciamo  $Q(u,v|\xi,\eta) =: E(u,v)\xi^2 + 2F(u,v)\xi\eta + G(u,v)\eta^2$ , il cui valore in  $(u,v)$  uguagli il quadrato della lunghezza di un breve arco di  $M$  passante per  $P(u,v)$  quando le indeterminate  $(\xi,\eta)$  siano identificate con le piccole differenze  $(\Delta u, \Delta v)$  tra le coordinate omologhe degli estremi dell'arco.<sup>3</sup> È evidente che il campo  $(E,F,G)(u,v)$  in  $U(u_0,v_0)$ , e in particolare i valori di  $E, F, G$  e delle loro derivate prime e seconde (rispetto a  $u$  e/o  $v$ ) in  $(u_0,v_0)$ , è riconducibile a misure (di lunghezze e di angoli) interne a  $M$ , o come anche si dice, a misure relative alla "geometria intrinseca" di  $M$ . Orbene, Gauss trova che il prodotto delle due curvatures principali<sup>4</sup> di  $M$  in  $P_0$  (a prima vista *non riconducibili* alla geometria intrinseca di  $M$ ) è

<sup>2</sup> Vedi il già citato "Disquisitiones generales circa superficies curvas", in Comm. Soc. Gött., V (1828), 99-146, o in Werke IV, 217-258.

<sup>3</sup> Detta forma deve ovviamente essere, ed è di fatto, "definita positiva", cioè positiva se almeno una delle due indeterminate è diversa da zero. Per meglio chiarire: se  $P$ , pensato come estremo comune di due piccoli archi ivi intersecantisi, ha coordinate  $(u=0,v=0)$ , e le coordinate degli altri estremi  $P_1$  e  $P_2$  sono  $(\Delta u, 0)$  (arco "1") e  $(0, \Delta v)$  (arco "2"), dette  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  le lunghezze dei due archi, risulta:  $E = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} (\Delta_1/\Delta u)^2$ ,  $G = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} (\Delta_2/\Delta v)^2$ ,  $F = \sqrt{(EG)\cos\theta}$ , ove  $\cos\theta$  è il prodotto scalare tra i versori tangenti ai due archi in  $(0,0)$ . Segue che  $E > 0$ ,  $G > 0$  e  $EG - F^2 = EG\sin^2\theta > 0$ . La prima (o la seconda) e la terza di queste condizioni sono necessarie e sufficienti a che la forma  $Q$  sia definita positiva (v. 9.2.1, (Cr2)).

<sup>4</sup> Ricordiamo che le curvatures principali di una superficie regolare  $S$ , in un suo punto prefissato, sono i due valori stazionari del reciproco del raggio (con segno) del cerchio osculatore della curva  $\Gamma$  sezione di  $S$  con un piano  $\pi$  normale ad  $S$ , al ruotare di  $\pi$  attorno al versore normale  $N$  ad  $S$  stessa. (Il segno del raggio si riferisce all'orientamento di  $N$ , prefissato arbitrariamente una volta per tutte.) Sebbene dimensionalmente sia il *quadrato* di una curvatura, il prodotto

tuttavia esprimibile come ben definita funzione di  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e loro derivate prime e seconde (in  $P_0$ ). In particolare, questa funzione risulta nulla se tali derivate prime e seconde sono nulle, e quindi identicamente nulla in  $U(u_0, v_0)$  se  $E$ ,  $F$ ,  $G$  sono ivi costanti.

La portata di una tale scoperta non poteva certo sfuggire all'attenzione di Gauss, il quale non esitò (forse con una punta di autocompiacimento) a battezzarla con il nome di «Theorema egregium». Per esprimerci con una nota e suggestiva immagine, essa implicava che una ipotetica minuscola creatura “bidimensionale” residente in  $M$ , e quindi incapace di percepirne la configurazione nello spazio 3-dimensionale sommergente (ovvero la “geometria estrinseca”), sarebbe stata in grado di risalire al prodotto tra le sue due curvatures principali ( $\equiv$  curvatura totale), che di quella configurazione sembrava essere espressione, mediante certe misure *interne* a  $M$ , o misure intrinseche, a lei accessibili.

Il Theorema egregium ebbe un'influenza decisiva, se non immediata, sull'accettazione delle geometrie non euclidee. Ovviamente un piano euclideo (o una sua porzione aperta, analoga alla porzione di superficie considerata da Gauss) ha nulla la curvatura di qualunque sua sezione normale (ciò si esprime comunemente dicendo che un piano è “piatto”). Quindi la nozione di curvatura principale vi degenera, nel senso che le curvatures di tutte le sezioni normali possono considerarsi principali alla luce della loro definizione, e sono comunque nulle. Ciò è confermato dal Theorema egregium, in quanto – come avviene appunto nel caso del piano euclideo – esistono coordinate tali che  $E$ ,  $F$ ,  $G$  risultano costanti. (L'esistenza di tali coordinate è fin qui soltanto sufficiente a che la curvatura totale sia identicamente nulla; ma si potrebbe dimostrare che essa è anche necessaria.)

Si affacciava così l'idea che la correttezza del modello euclideo di un piano fisico (e per immediata estensione dello spazio fisico) potesse diventare oggetto di indagine sperimentale. A quel punto, cioè, il problema era quello di *effettuare certe specifiche misure intrinseche* con la precisione necessaria, per verificare la presunta “piattezza” dello spazio fisico; dopodichè, nella eventuale assenza di una sua conferma, si sarebbe convenientemente modificato qualcuno degli assiomi della geometria euclidea. In particolare sembra certo che Gauss si sia spinto a misurare la somma degli angoli interni di un triangolo avente per vertici tre vette mutuamente visibili delle montagne dello Harz, trovando – come non meraviglia tenuto conto della estrema esiguità dell'effetto e della sensibilità degli strumenti dell'epoca –  $180^\circ$  entro gli errori sperimentali. Così il problema restò senza una risposta definitiva; ma almeno dal punto di vista filosofico, il nuovo approccio alla geometria inferse un duro colpo all'apriorismo conoscitivo di matrice kantiana

---

delle curvatures principali si dice tradizionalmente curvatura “gaussiana” (o “totale”) di  $S$ , ed evidentemente il suo segno *non* dipende dall'orientamento di  $N$ .

(«giudizi sintetici a priori»); e in una lunga prospettiva, contribuì significativamente al tramonto di tutte le metafisiche (o almeno di tutte le commistioni tra metafisica e scienza).<sup>5</sup>

Il giovane Riemann fu certamente molto colpito dalle scoperte geometrico-differenziali del suo celebre tutor quando, intorno alla metà del secolo, cominciò ad interessarsi ai fondamenti della geometria come teoria fisico-matematica; al punto che, nella sua famosa dissertazione del 1854 tenuta a Göttinga<sup>6</sup> su questo tema, propose di sviluppare la geometria – non soltanto delle superficie, ma di quelle che più tardi si sarebbero chiamate “varietà n-dimensionali astratte” – in modo completamente *intrinseco*. Chiariamo meglio i termini della questione. Come abbiamo visto, Gauss muoveva innanzitutto dalla considerazione di una data porzione aperta di superficie immersa nel normale spazio euclideo 3-dimensionale, e calcolava i tre coefficienti E, G, F della forma Q (definita positiva) come funzioni delle due coordinate (u,v). Pur rendendosi conto che così facendo apriva le porte ad una geometria intrinseca di quella (porzione di) superficie, autonoma rispetto alla sua immersione nello spazio 3-dimensionale, almeno in apparenza egli non trasse tutte le conseguenze di questa circostanza. Invece Riemann radicalizzò l’idea di geometria intrinseca *partendo* dalla nozione di forma Q (o metrica) di una varietà n-dimensionale come un dato, ossia pensandone gli  $n(n+1)/2$  coefficienti (3 nel caso  $n = 2$  della superficie, le soprannominate funzioni E, F, G) come funzioni convenientemente regolari delle n coordinate, date sotto la sola condizione

---

<sup>5</sup> Proprio Gauss fu fiero oppositore di quei filosofi a lui contemporanei che avevano la pretesa di pontificare sulle scienze esatte nonostante la loro insufficiente o nessuna competenza in materia. In una lettera del 1844, egli cita in proposito Shelling, Hegel e von Essenbeck, aggiungendo: «E anche con lo stesso Kant, spesso non va molto meglio: secondo me, la sua distinzione tra proposizioni sintetiche e analitiche è una di quelle cose che o cadono nella banalità o sono false». A quel tempo Gauss aveva già una conoscenza matura della geometria non euclidea, la quale è di per sé una netta confutazione delle idee di Kant in materia di spazio e relativi giudizi sintetici a priori. Non possiamo passare sotto silenzio, allo stesso proposito, la parola di A. Einstein: «Sono convinto che i filosofi hanno sempre avuto un effetto nefasto sul progresso del pensiero scientifico, poiché hanno sottratto molti concetti fondamentali al dominio dell’empirismo, nel quale si trovavano sotto il nostro (dei fisici, ndr) controllo, trasferendoli alle intangibili altezze dell’*a priori* (evidente allusione a Kant, ndr). Infatti, anche se dovesse risultare che il mondo delle idee non può essere dedotto dall’esperienza attraverso mezzi logici ma è, in un certo senso, una creazione della mente umana, senza la quale non è possibile nessuna scienza, il mondo delle idee risulterebbe altrettanto indipendente dalla natura delle nostre esperienze quanto lo sono i vestiti dalla forma del corpo umano.» (da “The Meaning of Relativity”, 5<sup>a</sup> ed. Princeton Un. Press 1953). Il coinvolgimento di molti filosofi in campi conoscitivi che, pur competendo a pieno titolo alla filosofia, risultano al di là delle loro effettive conoscenze specifiche, è fenomeno duro a morire. Per citare soltanto due esempi estremi, possiamo ancora ricordare la manifesta incapacità di comprendere la teoria della *relatività speciale* da parte di H. Bergson (“Durée e simultanéité: à propos de la théorie d’Einstein” (1922). «Dio lo perdoni» fu il laconico commento del “chiamato in causa”); e molto più recente, la dissacrante monografia-beffa di Sokal e Bricmont (“Impostures intellectuelles”, Éditions Odile Jacob (1997)), vera e propria “galleria degli orrori” di certa filosofia sedicente scientifica del Novecento, specialmente francese. Generalmente parlando, da circa due secoli gli scienziati rimproverano ai filosofi che scelgono la scienza come oggetto delle loro meditazioni la troppo frequente mancanza di rigore, di concretezza e addirittura di informazione; ciò che a lungo andare ha prodotto una significativa dose di indifferenza, quando non di franca *insofferenza*, da parte del mondo scientifico nei confronti di quello filosofico. Di alcuni aspetti di questo deplorabile stato di cose si è detto nelle Sezz. 0.1 e 1.1.

<sup>6</sup> B. Riemann, “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”, in Abh. der Ges. zu Gött., XIII (1868); anche in Werke, 2<sup>a</sup> ed., p. 272; vedi anche in D.E. Smith, “A Source Book in Mathematics” (1929), ristampa in Dover (1959), p. 411. Una forse migliore traduzione inglese del testo riemanniano si trova nel 2° volume del trattato di M. Spivak “Differential Geometry”, 5 vols, (v. Bibl. Gen. A)), curata dallo stesso autore. Infine una traduzione italiana (dovuta a G. Gabella) è per la prima volta accessibile al grande pubblico in “La grande biblioteca della Scienza”, Fabbri Editori 2008.

(di “non-degenerazione”) che il determinante della relativa  $(n \times n)$ -matrice simmetrica (cioè  $EG - F^2$  per  $n = 2$ ) non fosse mai nullo nel dominio di interesse. A priori, questa metrica poteva essere definita positiva (come nel caso delle varietà  $n$ -dimensionali immerse in uno spazio euclideo  $(m \geq n)$ -dimensionale, quando tutti i minori principali della matrice dei coefficienti, incluso il suo stesso determinante, sono positivi), o come si cominciò presto a dire, “riemanniana”; ma anche, più generalmente, indefinita o “pseudoriemanniana”.<sup>7</sup>

Per quanto sotto molti aspetti lontana dal moderno standard di rigore, la riformulazione riemanniana fu quanto di più radicalmente innovativo fosse stato proposto fino ad allora sui fondamenti della geometria. Essa detronizzò la geometria euclidea, che fu ridotta, per così dire, al rango di mera “geometria possibile” (allora, dal solo punto di vista matematico), e conferì pieno status logico alla geometria iperbolica di J. Bolyai e Lobatchewsky, che Riemann probabilmente non conosceva, e che quegli autori avevano formulato sostituendo le usuali funzioni circolari con quelle iperboliche nella geometria della sfera.<sup>8</sup> Ma soprattutto, il lavoro di Riemann sottolineò che ogni ricerca sulla natura dello spazio *fisico* doveva partire dall’esperienza, distruggendo così definitivamente, almeno nel giudizio delle menti meno retrive, ogni illusione circa una “conoscenza a priori” del mondo.

Riemann concluse la sua conferenza con queste parole, la cui capacità profetica non può non colpire profondamente: « ... o la realtà soggiacente allo spazio costituisce una varietà discreta, o bisognerà ricercare il fondamento delle sue relazioni metriche al di fuori di esso, *nelle forze di connessione che vi operano*. ... Ciò conduce *nel dominio della fisica*, nel quale il tema delle presenti ricerche non ci consente di entrare.» (corsivi dr) Una tale allusione a quello che in ultima analisi, e passando dallo “spazio” allo “spazio-tempo”, sarà il tema della relatività generale, lascia stupefatti, perché ai tempi in cui fu concepita, l’idea che ipotetiche «forze di connessione» (tra corpi materiali?) potessero influenzare la natura *metrica* dello spazio appariva come una vera e propria fantasticheria. (Assai più tardi (1915), quelle forze furono supposte influenzare anche la metrica dello spazio-tempo.)

---

<sup>7</sup> Ricordiamo che nel caso indefinito ci si riferisce alla “pseudolunghezza” del piccolo arco della varietà come alla radice quadrata del *valore assoluto* della forma  $Q(\xi, \eta)$ . In particolare possono esistere archi (con estremi distinti) di pseudolunghezza nulla, esattamente come nello spazio pseudoeuclideo possono esistere vettori non nulli con pseudomodulo nullo.

<sup>8</sup> Questa scoperta fu pubblicata soltanto nel 1835 (Lobatchewsky). Fu merito di Beltrami (Eugenio, 1835-1900) quello di aver costruito (1866) una superficie *a curvatura costante negativa* immersa nel normale spazio euclideo (precisamente, la superficie generata dalla rotazione attorno al loro comune asintoto di due archi di tratrice simmetrici rispetto al piano equatoriale, detta anche “pseudosfera”), che risultava essere un modello locale del piano iperbolico di J. Bolyai e Lobatchewsky. Molto più tardi (1901), Hilbert dimostrò che non può esistere una superficie analitica (del 3-spazio euclideo) che sia un modello *globale* del piano iperbolico. Quest’ultimo risultato è significativo nell’ottica della futura cosmologia relativistica, suggerendo (in modo vago, ma ante litteram) la presenza di singolarità nelle soluzioni, prolungate analiticamente in tutto il loro dominio di esistenza, delle equazioni gravitazionali (vedi anche i cenni, verso la fine della prossima sottosezione, alle soluzioni di Schwarzschild e di Friedmann di quelle equazioni).

### 9.1.2) LA RELATIVITÀ SPECIALE

La prima e poco avvertita scossa al quadro che fino ad allora aveva rappresentato lo spazio ed il tempo come “contenitori” assoluti e separati degli eventi fisici che vi occorrono, doveva arrivare dalla teoria dell'elettromagnetismo (pubblicata da Maxwell nel 1873). Ben presto, infatti, ci si rese conto che le equazioni elettromagnetiche (EM) erano invarianti a fronte di trasformazioni galileiane, sia delle coordinate che dei campi EM<sup>9</sup>, non esattamente ma soltanto a meno di termini dell'ordine di  $v^2\varepsilon_0\mu_0$ , dove  $v$  è una velocità tipica e ( $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ ) sono le permeabilità (elettrica, magnetica) nel vuoto. Tuttavia la comunità scientifica convisse relativamente a lungo con questa difformità, secondo la quale le equazioni della meccanica, ma non quelle EM, risultavano esattamente invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane.

Intorno ai fenomeni EM, da una parte dominava l'idea meccanicistica di “campo” come stato fisico di un ipotetico mezzo continuo, ma dall'altra non sembrava possibile identificare questo mezzo con alcunché di materiale. In mancanza di meglio, qualcuno pensò di chiamare l'ipotetico supporto immateriale dei campi EM “etere luminifero”. Evidentemente, il problema diventava allora quello di conoscere quale era il moto del laboratorio, ove si effettuavano osservazioni e misure, rispetto all'etere.

Il primo, e poi più noto e definitivo, esperimento in tal senso (poi ripetuto in una lunga serie di versioni sempre più raffinate), fu quello di Michelson<sup>10</sup> (a partire dal 1881, e più tardi in collaborazione con Morley). Esso non rivelò peraltro alcun moto del laboratorio, o della stessa Terra, rispetto all'etere. Esito del pari negativo ebbero altri esperimenti basati su effetti diversi: quello di Rayleigh (John, 1842-1919; 1902)<sup>11</sup> e quello di Brace (1904)<sup>12</sup>, che sfruttavano entrambi la doppia rifrangenza di certe sostanze; e quello di Trouton e Noble (1903)<sup>13</sup>, che misurarono la coppia di torsione agente su un condensatore a placche trasverse alla presunta direzione del moto.

L'accumularsi di queste risposte negative circa l'esistenza di un moto rispetto all'etere (del laboratorio, della Terra, o dello stesso sistema solare), spostarono presto l'attenzione sulle trasformazioni – innanzitutto delle coordinate (x,y,z,t) di sistemi in moto relativo rettilineo uniforme – da sostituire, per generalizzarle, alle trasformazioni galileiane. Quasi fatalmente, questo

<sup>9</sup> Ricordiamo che, pensando questi campi come i vettori  $E$  (campo elettrico),  $B$  (induzione magnetica),  $J$  (densità di corrente), e lo scalare  $\rho$  (densità di carica), essi permangono tutti invariati sotto trasformazioni galileiane salvo la componente perpendicolare al moto di  $E$ ,  $E_{\perp}$ , e quella parallela di  $J$ ,  $J_{\parallel}$ . Queste trasformazioni di  $E$ ,  $B$ ,  $J$  e  $\rho$  si dicono talvolta “prerelativistiche”. Indicando con  $Y < c$  il vettore velocità relativa del nuovo riferimento (distinto da un ') rispetto al vecchio le trasformazioni prerelativistiche si scrivono  $B' = B$ ,  $E'_{\parallel} = E_{\parallel}$ ,  $E'_{\perp} = E_{\perp} + (Y \times B)_{\perp}$ ,  $J'_{\parallel} = J_{\parallel} - Y\rho$ ,  $\rho' = \rho$ . Le parentesi attorno al pedice  $\perp$  di  $Y \times B$  sono dovute all'essere questo vettore già di per sé perpendicolare.

<sup>10</sup> A.A. Michelson, Amer. Journ. Sci. **34**, 333 (1887); dello stesso autore, anche Phil. Mag. **24**, 449 (1887).

<sup>11</sup> J.W. Rayleigh, Phil. Mag. **4**, 678 (1902).

<sup>12</sup> D.B. Brace, Phil. Mag. **7**, 317 (1904).

<sup>13</sup> F.T. Trouton, H.R. Noble, Trans. Roy. Soc. **202**, 165 (1903).



collocò al centro della nuova cinematica relativa la nozione algebrica di gruppo (che risaliva a oltre un secolo prima): precisamente, di gruppo <sup>14</sup> delle trasformazioni delle coordinate. Chi per primo capì che alla radice dei problemi era appunto l'individuazione del gruppo corretto (visto che quello galileiano doveva essere rifiutato), sembra essere stato H. Poincaré.

È in queste circostanze che il “tempo” (o meglio il prodotto del modulo della velocità ( $\equiv$  celerità) della luce *nel vuoto*  $c$ , riconosciuto come una costante assoluta, per il tempo  $t$  – la cosiddetta “lunghezza römèriana”  $ct$ ), da sempre visto come parametro che “etichetta” una successione continua di copie identiche dello spazio fisico (euclideo), fa la sua piuttosto obliqua comparsa sulla scena di una nuova geometria 4-dimensionale. Le trasformazioni di Lorentz, che “mescolando” i due tipi di coordinate (spaziali e temporale) assicurano alle equazioni di Maxwell la desiderata invarianza al passaggio tra riferimenti in moto relativo uniforme, sono pubblicate nel 1904 <sup>15</sup>. (Ma alle trasformazioni di Lorentz vanno allora associate le corrette trasformazioni dei campi EM e delle loro sorgenti  $J$ ,  $\rho$  – corrente e densità di carica, legate tra loro dall'equazione di continuità.) Esse precedono quindi di pochissimo il lavoro di Einstein del 1905 <sup>16</sup> con il quale la relatività speciale si afferma quasi subito come conquista *teoretica* definitiva. Naturalmente la coperta risulta a questo punto troppo corta, perché viene a mancare l'invarianza della dinamica newtoniana rispetto alle nuove trasformazioni; ma Einstein non esita a porre rimedio a questa difficoltà modificando opportunamente quella dinamica. <sup>17</sup>

La vicenda, assolutamente “fatale” per la geometria fisica e per la fisica in generale, è storicamente troppo importante per esimersi dal tentare di descriverla qui con qualche dettaglio. Essa culmina in un brevissimo periodo a cavallo tra il 1904 e il 1905, pur avendo il suo diretto punto di avvio nel primo esperimento di Michelson di quasi quindici anni prima, e alcune sue premesse teoretico-speculative nelle idee espresse sin dai primi anni '80 dal fisico-epistemologo-fisiologo Mach (Ernst, 1838-1916). Partendo dai suoi rigorosi “criteri di verificabilità” Mach rigetta innanzitutto le nozioni di spazio e tempo assoluti come “metafisiche”. Egli sostiene infatti a ragione che non osserviamo né lo spazio né il tempo in sé, ma solo gli *eventi* che vi occorrono; e dunque, che ogni tentativo di separare la geometria fisica dalla fisica (di quegli eventi) *va incontro a*

<sup>14</sup> Si tenga presente che se l'operazione del gruppo è una dipendenza funzionale (come è il caso delle trasformazioni delle coordinate), l'associatività è automaticamente assicurata dalla definizione di funzione.

<sup>15</sup> H.A. Lorentz, “Electromagnetic Phenomena in a System moving with any Velocity less than that of Light”, Proc. Acad. Sci. Amsterdam, 6 (1904).

<sup>16</sup> A. Einstein, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, Annalen d. Physik **17**, 891 (1905).

<sup>17</sup> Torna qui opportuno porre ancora in evidenza la “cifra” dell'approccio alla filosofia naturale dell'Einstein relativista, e cioè la sua natura spregiudicatamente pragmatica, con l'apprezzamento della capacità predittiva delle teorie come loro qualità decisiva. Ben nota in proposito è del resto l'opinione (dello stesso Einstein) secondo la quale «il vero scienziato può apparire all'epistemologo sistematico come un opportunista privo di scrupoli». D'altra parte non va dimenticato che le modifiche apportate da Einstein alla dinamica del punto materiale erano già state proposte da Lorentz nella memoria del 1904, § 10.

*insormontabili difficoltà logiche*, a vere e proprie aporie. In particolare, ma questo riguarda già la relatività generale, Mach vede l'inerzia di un corpo materiale come una sua relazione con tutta la materia dell'universo (il cosiddetto "principio di Mach"). Queste idee di carattere fondamentale avranno una non trascurabile influenza su Einstein durante il suo laborioso sviluppo della teoria della relatività generale.<sup>18</sup>

La storia del progresso teorico verso il traguardo einsteiniano del 1905 può farsi cominciare nel 1892, quando FitzGerald<sup>19</sup> propone di giustificare l'esito negativo dell'esperimento di Michelson con una congettura ad hoc a prima vista un po' bizzarra, e secondo la quale un corpo in moto con velocità  $v$  (rispetto all'ipotetico etere) di modulo  $< c$ , subisce una contrazione, nella direzione di  $v$ , per un fattore  $(g(|v|))^{-1} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \equiv 1/\beta < 1$ . L'ipotesi di questo effetto è avanzata poco tempo dopo, ma indipendentemente, da Lorentz<sup>20</sup>, e da allora l'effetto stesso si chiamerà "contrazione di Lorentz-FitzGerald". Ancora a Lorentz si deve l'introduzione del "tempo locale"  $\tau =: g(|v|)(T - vX/c^2)$  indicato da un orologio in moto uniforme con velocità  $v$  (sempre di modulo  $< c$ ) lungo l'asse  $X$  del riferimento "fisso" ( $\equiv$  solidale con l'etere), e transitante dall'origine ( $X = 0$ ) al tempo  $T = 0$ . Sostituendo  $X$  con  $vT$  nella precedente definizione di  $\tau$ , risulta  $\tau = (g(|v|))^{-1}T$ ; ovvero il tempo di Lorentz, indicato dall'orologio in moto, *ritarda* su quello dell'orologio fisso.

Nel suo lavoro del 1904, Lorentz svolge una sistematica indagine su come si debbano trasformare gli operatori  $(\nabla, \partial/\partial t)$ , e i campi  $E$  (elettrico),  $H$  (magnetico),  $\rho$  (di densità di carica) e  $u$  (di velocità della carica), al passaggio da un riferimento "fisso"  $\mathfrak{S}$  ad un riferimento  $\mathfrak{s}$  in moto uniforme rispetto al primo con velocità  $Y$  di modulo  $< c$ , diciamo lungo un comune asse  $X \equiv x$ , affinché le equazioni di Maxwell nello spazio *vuoto* (vuoto a parte la presenza delle cariche), contenenti quegli operatori e campi, si mantengano formalmente invariate trattandovi  $c$  come una costante assoluta<sup>21</sup>. Dovrebbe tuttavia esser chiaro che, così formulato, il problema che Lorentz si pone non può avere una risposta univoca; ce l'ha, semmai, quello di determinare la legge di trasformazione dei campi  $(E, H, \rho, u)$  in connessione con quella degli operatori  $(\nabla, \partial/\partial t)$ .<sup>22</sup> Il fatto

<sup>18</sup> Einstein ebbe ammirazione per Mach – in particolare per la sua idea circa l'origine dell'inerzia –, ma prese più tardi posizione contro il di lui approccio filosofico alla conoscenza del mondo fisico. «Il sistema di Mach – ebbe a dire in una conferenza nel 1922 – studia le relazioni esistenti tra i dati sperimentali; secondo Mach, la scienza è la totalità di queste relazioni. Si tratta di un punto di vista scorretto: in effetti quello di Mach è un catalogo, non un sistema.» Evidentemente, Einstein poneva al vertice della conoscenza del mondo fisico ciò che legava le sopradette relazioni, e che faceva del loro catalogo un "sistema". (Se fosse stato un logico, avrebbe espresso la sua richiesta dicendo che le relazioni tra i dati sperimentali dovevano corrispondere univocamente alle "relazioni" di un sistema formale.)

<sup>19</sup> Vedi in O. Lodge, London Transact. (A) **184**, 727 (1893).

<sup>20</sup> H.A. Lorentz, Amst. Verh. Akad. v. Wet. **1**, 74 (1892). Si veda anche, dello stesso autore, "Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", Brill, Leiden (1895).

<sup>21</sup> Il valore di  $c$  è ormai noto con precisione non inferiore a  $10^{-10}$ ; espresso con 6 cifre significative, è uguale a  $2,99793 \cdot 10^8$  m/sec.

<sup>22</sup> Immaginando di trasportare lo stesso problema sull'equazione della dinamica newtoniana per un punto di massa  $m > 0$  e soggetto ad una forza  $f$ , sarebbe come pretendere di derivare dall'equazione stessa, richiedendone l'invarianza

che egli riesca nondimeno ad individuare correttamente *entrambe* le leggi (a parte una secondaria inesattezza relativa alle trasformazioni delle sorgenti  $\rho$  e  $\rho u$ ), e per giunta in assenza di una ragionevole e dichiarata base di *principi fisici*, va pertanto attribuito ad un insieme di acute e fortunate intuizioni. Naturalmente le trasformazioni di Lorentz comportano sia l'effetto di contrazione (di Lorentz-FitzGerald) che la nozione di tempo locale (di Lorentz).

Pochissimo tempo dopo, Poincaré fornisce le corrette trasformazioni delle sorgenti, ottenendo così un quadro completo e autoconsistente, ma ancora insoddisfacentemente fondato da un punto di vista generale, dell'elettromagnetismo nel vuoto. Combinando questi risultati con l'espressione della forza di Lorentz su una carica elettrica (invariante) unitaria "test" (cioè "di prova"), Poincaré addirittura intravede la prospettiva di una meccanica ( $\equiv$  dinamica) "diversa" di cui si fa profeta (seppur non troppo convinto, e per brevissimo tempo): «Forse dovremo formulare una meccanica completamente nuova, sulla quale abbiamo per ora soltanto gettato uno sguardo, in cui l'inerzia cresce con la velocità e la velocità della luce è un limite insuperabile.»<sup>23</sup> Come già accennato, Poincaré vede anche immediatamente, e sottolinea, il fatto che le nuove trasformazioni condividono con quelle galileiane il carattere grupale; e propone di intitolarle, come poi sarà, a colui che le aveva per primo introdotte.<sup>24</sup>

A questo punto le trasformazioni di Lorentz tra riferimenti in moto relativo costante e uniforme sono quanto occorre e basta per costruire senza grandi problemi una "fisica relativistica macroscopica in assenza di gravità" (geometria fisica inclusa) formalmente invariante rispetto alle dette trasformazioni<sup>25</sup>; come farà appunto Einstein (forse ancora all'oscuro dei risultati di Lorentz/Poincaré) nel citato lavoro del 1905, e come del resto aveva in buona parte già portato a termine lo stesso Lorentz nel 1904. È quindi naturale chiedersi perché il contributo einsteiniano

formale rispetto a cambiamenti di riferimenti, *sia* le trasformazioni galileiane *che* l'invarianza del rapporto  $f/m$ . Sfortunatamente, l'affermazione che "le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz" (senza altro aggiungere) ricorre continuamente nella letteratura (didattica e non), e noi stessi ne abbiamo usato una versione indebolita poco più sopra.

<sup>23</sup> H. Poincaré, Conferenza di St. Louis del settembre 1904, pubblicata in *Monist*, **15**, 1 (1905). Si veda anche, dello stesso autore, "Sur la dynamique de l'électron", *C.R. Paris* **140**, 1504 (1905). Tutto considerato, Poincaré fu veramente ad un passo dalla relatività speciale: ma apparentemente non la capì nella sua sostanza fisica, ostinandosi fino alla morte (1912) in un imbarazzato (e imbarazzante) agnosticismo. Per inciso, interessanti riflessioni dello stesso Poincaré sulla natura dello spazio e del tempo si trovano anche nelle sue "Dernières pensées", Cap. 2, pubblicate postume nel 1913.

<sup>24</sup> Per la verità, trasformazioni delle coordinate anche più generali di quelle di Lorentz erano già state considerate da W. Voigt nel 1887 (*Gött. Nachr.* 45 (1887)), nell'ambito di uno studio sul vecchio "modello elastico" delle vibrazioni luminose. Nel suo noto trattato storico-critico ("Electromagnetism", Longmans (1938), ripubblicato da Dover (1965)), A. O'Rahilly trae spunto dalle trasformazioni di Voigt per una lunga discussione (Cap IX, appunto intitolato "Voigt") sul rapporto tra l'elettromagnetismo e la relatività speciale. Il libro di O'Rahilly è certamente pregevole per ricchezza di notizie ed osservazioni critiche, ma le conclusioni che vi appaiono in materia di relatività speciale non potevano essere prese in seria considerazione, con largo margine, già alla data della sua pubblicazione.

<sup>25</sup> A rigore, poiché in tale fisica relativistica speciale compaiono masse/energie, e queste sono comunque associate ad effetti gravitazionali, esse masse/energie, nonché le sorgenti del campo elettromagnetico, andranno supposte abbastanza piccole. È precisamente questo il significato dell'attributo "test" usato nel paragrafo precedente. Alternativamente, si potrà pensare ad un modello "speciale" in cui la costante di Cavendish venga azzerata, o modello cosiddetto "a gravità spenta".

abbia quella carica di novità che la storia della scienza usualmente gli attribuisce. Due sono le ragioni che ne rendono conto (ma a nostro avviso soltanto in parte): vale a dire, (i) la nuova teoria è *fisicamente fondata*, cioè poggia su principi fisici dichiarati e pienamente ragionevoli alla luce dei fatti sperimentali, principi dai quali le trasformazioni di Lorentz *discendono come logica conseguenza*; (ii) anche se ne sono sostanzialmente illuminati, gli sviluppi che da quei principi portano alle trasformazioni di Lorentz sono *indipendenti dalla teoria elettromagnetica*, a parte la supposta costanza “universale” della celerità della luce ( $\equiv$  onde elettromagnetiche) nel vuoto.<sup>26</sup>

Ricordiamo (v. S.sez. 2.1.2) che per definizione un riferimento  $(x,y,z,t)$  è inerziale se in esso vale la legge d’inerzia, ovvero se un punto materiale sottratto all’azione di qualunque forza si muove con velocità costante. Nel caso della dinamica newtoniana, questa è una conseguenza ovvia della (2.1.1, 1). Mantenendo la sopramenzionata definizione di riferimento inerziale, ricordiamo anche (v. App. 2.C) che l’insieme dei fondamenti della relatività speciale (inclusi i protocolli metrologici, e in particolare quelli relativi alla sincronizzazione degli orologi locali) è costituito dai principi seguenti: (1) un “principio (o assioma) di relatività” ( $\equiv$  le leggi fisiche devono mantenere la stessa forma in tutti i riferimenti inerziali, anche se le misure di certe quantità possono dare valori numerici diversi); (2) un “principio della costanza di  $c$ ” ( $\equiv$  misurata secondo gli opportuni protocolli, la celerità (modulo della velocità) della luce nel vuoto è la stessa per tutti i riferimenti cartesiani inerziali, beninteso con le stesse unità di lunghezza e di tempo<sup>27</sup>); (3) un “principio di linearità” ( $\equiv$  le leggi di trasformazione delle coordinate spazio-temporali tra riferimenti inerziali devono essere lineari affini – o lineari se gli eventi con coordinate spazio-temporali nulle nei due riferimenti coincidono –, con coefficienti dipendenti a priori dalla loro velocità relativa); (4) un “principio di simmetria della misura di lunghezze perpendicolari”, o in breve di “simmetria perpendicolare” ( $\equiv$  la lunghezza di un segmento-campione solidale al riferimento mobile e *perpendicolare* alla direzione del moto relativo tra i riferimenti, di velocità  $Y$ , non dipende dal *verso* di questo moto, cioè dal *segno* di  $Y$ ).<sup>28, 29</sup>

Sotto queste condizioni, e nulla di più, Einstein *deduce* (v. App. 2.C) le trasformazioni di Lorentz; e inserendo queste ultime nel sistema di Maxwell, di cui richiede l’invarianza formale,

<sup>26</sup> Vale qui la pena di riportare le dichiarazioni “di non-priorità” di Lorentz, in materia di relatività speciale, che figurano in un suo scritto del 1928 (Astr. Journ. **68**, 350 (1928)): «Io consideravo la mia trasformazione del tempo soltanto come un’ipotesi di lavoro, per cui la teoria (della relatività speciale, ndr) è in realtà opera del solo Einstein. E non può esservi dubbio che egli l’avrebbe ugualmente concepita anche se il lavoro di tutti i suoi predecessori in questo campo non fosse esistito. In questo senso, la sua opera è indipendente dalle teorie che l’hanno preceduta».

<sup>27</sup> Qui si presuppone che i regoli siano “rigidi”, e similmente che gli orologi siano “normali”; cioè, sia gli uni che gli altri, sottratti ad ogni influenza che ne possa presuntivamente alterare la lunghezza e rispettivamente il ritmo di marcia.

<sup>28</sup> Gli ultimi due principi appaiono ad Einstein talmente ovvi che egli nemmeno si cura di nominarli esplicitamente come tali.

<sup>29</sup> Mirando ad una fondazione assiomatica completa della relatività speciale, gli assiomi (1÷4) soprariportati non ne esauriscono l’elenco. Un assioma non menzionato è quello che recita: “esiste un riferimento inerziale” (cfr. Sez. 2.1).

similmente *deduce* le leggi di trasformazione dei campi ( $E, H, \rho$ ) (quella relativa a  $u \equiv$  campo di velocità della carica disgregata, o di un qualunque punto in moto prescritto, segue direttamente dalle trasformazioni di Lorentz). Segue anche, in particolare, che la carica contenuta in un piccolo volume mobile è invariante; un asserto non nuovo (Poincaré), ma talvolta in precedenza invocato come ipotesi. Assimilando le forze *di qualunque natura* a quella di Lorentz sulla carica unitaria test, Einstein modifica infine la legge dinamica newtoniana  $mdv/dt = f$  (invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo ma non rispetto a quelle di Lorentz) con l'introdurvi una "massa di moto" (*sotto* il segno  $d/dt!$ ) in luogo della massa invariante di Newton – uguale a quest'ultima per  $v = 0$  e crescente con il modulo di  $v$  secondo il fattore  $g(|v|) > 1 -$ , e poi modificando coerentemente la forza newtoniana invariante  $f$ .<sup>30</sup> Come ci si aspetta, un riferimento inerziale resta tale sotto una trasformazione di Lorentz-Poincaré.

Questi risultati di grande importanza portano ad una sintesi coerente e fisicamente fondata della meccanica e dell'elettromagnetismo *in assenza di gravità*. La meccanica relativistica così formulata riproduce la meccanica newtoniana quando vi si faccia  $c \rightarrow \infty$ , e quindi le trasformazioni di Lorentz degenerino in quelle di Galileo. Nel giro di pochi mesi, la "nuova meccanica" intravista da Poincaré diventa una realtà teoretica autoconsistente, pronta ad affrontare le necessarie convalide sperimentali.

Le trasformazioni di Lorentz saranno presto dedotte anche da altri sistemi di assiomi<sup>31</sup>; uno di questi assiomi, che aveva già ricevuto notevole interesse matematico nell'ambito dell'algebra degli spazi lineari con metrica generalmente *indefinita*, è quello dell'invarianza (rispetto al solito passaggio tra riferimenti inerziali) della metrica pseudopitagorica  $\Delta l^2 - c^2 \Delta t^2$ , dove  $\Delta l$  è la separazione spaziale, e  $\Delta t$  quella temporale, tra due eventi qualsiasi (qui  $\Delta l^2$  sta per  $(\Delta l)^2$ , et sim.). In particolare, questa algebra offre la corretta chiave di lettura della geometria pseudoeuclidea di Minkowski<sup>32</sup> (v. il Cap. 2).

Nasce insomma una accezione allargata della geometria spazio-temporale, che si presenta con 4, e non più – per così dire – con  $3 + 1$ , coordinate. Come lo spazio 3-dimensionale euclideo etichettato mediante il parametro tempo, anche il nuovo spazio 4-dimensionale, o "spazio-tempo" (o "cronotopo" nel linguaggio di certi circoli filosofici rigorosamente spettatori) è privo di curvatura, o piatto, nel senso che in esso esistono sistemi di coordinate per le quali i coefficienti della metrica associata sono costanti; ma a differenza di quanto avviene in quello, tale metrica

<sup>30</sup> Come già segnalato, una indicazione in tal senso del tutto esplicita compare anche nella memoria di Lorentz del 1904.

<sup>31</sup> In proposito, il lettore può consultare G. Stephenson, C.W. Kilminster, "Special Relativity for Physicists", Longmans (1958); una referenza un po' vecchia ma comunque interessante.

<sup>32</sup> H. Minkowski, 18<sup>a</sup> Conferenza di Fisica di Colonia del settembre 1908, vedi anche in Phys. Zeitschr. **10**, 104 (1909).

risulta ora indefinita, con direzioni “spaziali” (per le quali la forma è positiva <sup>33</sup>), direzioni “temporali” (forma negativa), e direzioni “luminali” o “isotrope” (forma nulla). La geometria di questo spazio non euclideo (propriamente, “pseudoeuclideo di dimensione 4 ed indice 3” con la convenzione qui adottata <sup>34</sup>) presenta aspetti fortemente eterodossi rispetto alla geometria euclidea: ad esempio, può succedere che la classica disuguaglianza triangolare euclidea ( $\equiv$  “la somma delle lunghezze di due lati di un triangolo è maggiore di – o uguale a, se il triangolo è degenere – quella dell’altro lato”) valga alla rovescia (cioè con “minore” al posto di “maggiore”), ma con la nozione di lunghezza *sostanzialmente riformulata*.

### 9.1.3) LA RELATIVITÀ GENERALE

Lo spazio minkowskiano, “piatto” nello stesso senso in cui lo è quello euclideo, si proponeva come modello di uno spazio-tempo fisico *illimitatamente vuoto di massa-energia, impulso* ( $\equiv$  momento) *e loro flussi*. Vale a dire, le masse-energie e gli impulsi della dinamica relativistica speciale, e le intensità dei campi elettromagnetici (che attraverso ben note formule equivalgono appunto a densità di energia e impulso), e quindi le cariche/correnti che ne sono le sorgenti, dovevano pensarsi come abbastanza piccole per non infirmare la validità del modello. Appariva dunque naturale, dopo il 1905, l’obiettivo di superare questa limitazione: un’impresa formidabile cui lo stesso Einstein cominciò a dedicarsi molto presto (sembra già intorno al 1907), e che sarebbe stata da lui portata a sostanziale compimento nel 1915-16. <sup>35</sup> Due intuizioni complementari andarono a poco a poco delineandosi nel progetto einsteiniano. Da una parte vi era l’idea che le densità di energia e impulso, e i loro flussi, distribuiti nello spazio-tempo, ne alterassero in qualche modo la piatezza, “incurvandolo” nel senso tecnico formulato da Gauss per le superficie e generalizzato da Riemann per le generiche varietà astratte con metrica (non

<sup>33</sup> Questa scelta è convenzionale, e potrebbe essere rovesciata, come molti preferiscono, usando la forma di segno opposto, per cui sono spaziali le direzioni che rendono *negativa* la forma, ecc.

<sup>34</sup> Per comodità del lettore, ricordiamo che l’indice  $\pi$  di una forma quadratica non degenere in  $n$  indeterminate  $\xi^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) è il numero dei suoi addendi positivi dopo che, mediante una opportuna trasformazione lineare non singolare delle sue indeterminate, diciamo  $\xi^i \rightarrow \Xi^i$ , essa assume la forma canonica (“pseudopitagorica”)  $\sum_i \varepsilon_i (\Xi^i)^2$  (somma su  $i$  da 1 a  $n$ ), nella quale ciascun  $\varepsilon_i$  è uguale a  $+1$  o a  $-1$ . Quindi  $\pi = \sum_i (1+\varepsilon_i)/2$ . Similmente, il numero degli addendi negativi è  $\nu = \sum_i (1-\varepsilon_i)/2$ ; e ovviamente  $\pi+\nu = n$ . La possibile degenerazione della forma consiste nella violazione della precedente ultima relazione in favore della  $\pi+\nu < n$ , fermo restando il significato di  $\pi$  e di  $\nu$  (numero di addendi positivi e rispettivamente negativi della forma resa pseudopitagorica).

<sup>35</sup> Si veda soprattutto la sintesi: A. Einstein, “Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen d. Physik* **49**, 769 (1916).

degenere) arbitraria. Dall'altra, Einstein immaginò che questa deformazione influisse sul moto <sup>36</sup> dei punti materiali e dei fotoni ( $\equiv$  campi elettromagnetici localizzati), più o meno come le ondulazioni di una superficie influenzano il moto inerziale di un punto materiale ad essa vincolato senza attrito, cioè soggetto alla sola reazione vincolare normale alla superficie stessa. (Questa è soltanto una nota immagine di immediata suggestione didattica, mentre la realtà, in pratica equivalente ad una completa "geometrizzazione" della dinamica, è assai più difficile da rappresentarsi; non tanto perché si deve passare da due a quattro dimensioni, ma perché una delle dimensioni è il tempo.)

Nel suo prevalentemente solitario lavoro, <sup>37</sup> Einstein si ispirò in modo sostanziale ad un cosiddetto "principio di equivalenza" (tra gravitazione e inerzia) alla cui radice è l'identità, in un conveniente sistema di unità di misura, tra la "massa gravitazionale" (cioè la massa come soggetto-oggetto di gravità) e la "massa inerziale di quiete" (il parametro  $> 0$  che figura nelle equazioni dinamiche). Del principio di equivalenza sono note almeno tre versioni progressivamente più forti, la cui formulazione non è sempre priva di ambiguità (equivalenza "debole" – appena formulata –, "media" e "forte"). Secondo il principio di equivalenza forte, «in ogni punto dello spazio-tempo in (presenza di) un arbitrario campo gravitazionale è possibile scegliere un sistema di coordinate "localmente inerziali" tale che, in una regione spazio-temporale abbastanza piccola attorno al punto in oggetto, tutte le leggi naturali prendono la stessa forma come in sistemi di coordinate cartesiane non accelerati e in assenza di gravità.» <sup>38</sup> In particolare, il moto di un punto materiale soggetto ad un dato campo gravitazionale, e ad esso soltanto, almeno nella scala spazio-temporale locale è rettilineo ed uniforme in un sistema di riferimento in caduta libera nello stesso campo (il sistema localmente inerziale); come è vero per un punto materiale sottratto all'azione di qualunque forza nei comuni riferimenti inerziali della relatività speciale, o della stessa dinamica newtoniana.

A completamento del modello, vi era l'esigenza che fossero soddisfatte le condizioni seguenti: (I) la nuova teoria generale della gravitazione si deve ridurre a quella newtoniana per un punto materiale di lagrangiana ( $\equiv$  differenza tra energia cinetica e energia potenziale) molto più piccola del prodotto della sua massa classica per il quadrato della velocità della luce; (II) in assenza di (densità di) energia-impulso in *tutto* lo spazio-tempo (considerato come varietà 4-dimensionale lorentziana abbastanza regolare), si deve essere ridotti al quadro previsto dalla relatività speciale; e infine (III) le equazioni della teoria devono esprimere l'annullarsi di certi campi tensoriali in tutto lo

---

<sup>36</sup> Più precisamente, "determinasse il moto a meno delle condizioni accessorie". La stessa osservazione vale poco più sotto, allo stesso proposito.

<sup>37</sup> Per la particolare importanza dell'argomento nel presente contesto, in buona parte della presente sottosezione verremo meno ad un principio didattico altrimenti quasi sempre osservato in questo libro (cfr. Pres. 0.0), quello di ignorare i processi induttivi che presumibilmente ispirarono l'elaborazione della teoria di cui si parla.

<sup>38</sup> S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley (1972), p. 68.

spazio-tempo, e quindi devono rimanere formalmente invariate a fronte di arbitrarie trasformazioni regolari delle coordinate (principio cosiddetto di “covarianza”).

Quanto agli aspetti matematici del problema, apparve ad Einstein sempre più chiaro che l’elaborazione formale delle sue intuizioni non poteva prescindere da quel “Calcolo Differenziale Assoluto” (di campi tensoriali su varietà pseudoriemanniane 4-dim di indice 3), oggi comunemente noto come “Analisi Tensoriale Classica”, che Ricci-Curbastro aveva cominciato a sviluppare sin dal 1892,<sup>39</sup> sulle tracce degli studi di Gauss, Riemann e Christoffel, e che sarebbe stato definitivamente messo a punto con la collaborazione, e alla fine per opera, del suo ex-allievo Levi-Civita.<sup>40</sup> Caratteristica centrale dell’analisi tensoriale è la sua natura “assoluta”, cioè il fatto che le sue equazioni si conservano *formalmente invariate*, nel senso della condizione (III) del precedente capoverso, al cambiare del sistema di coordinate in cui si opera; per cui diventa superfluo, se non per finalità specifiche, riferirsi ad un sistema di coordinate piuttosto che ad un altro. L’analisi tensoriale costituisce insomma l’estrema glorificazione ed al contempo la caduta della coordinatazione, la grande intuizione di Cartesio e di Fermat: gli sviluppi della cosiddetta “Analisi su Varietà Differenziabili (astratte)” della prima metà del secolo XX si pongono infatti al di là di questo pur fondamentale strumento concettuale (Analisi Tensoriale – su varietà – cosiddetta “senza coordinate”), inquadrandosi consistentemente nella moderna geometria differenziale.

Nel seguito gli indici latini variano su 1, ..., 4 e quelli greci su 1, ..., 3. Nelle sue applicazioni dell’analisi tensoriale alla geometria delle ipersuperficie immerse in uno spazio euclideo (o più tardi pseudoeuclideo), Ricci aveva incontrato parecchie loro interessanti proprietà. In particolare, egli aveva trovato che, in forza delle cosiddette “identità di Bianchi” (cfr. S.sez. 3.4.2) – vincoli differenziali lineari del primo ordine tra le  $n^2(n^2-1)/12$  (20 per  $n = 4$ ) componenti algebricamente indipendenti del 4-tensore di Riemann  $\rho_{(4)}$  –, la combinazione lineare 2-tensoriale simmetrica  $E_{(2)} =: \rho_{(2)} - g_{(2)}\rho_{(0)}/2$  delle due tracce di  $\rho_{(4)}$  (la traccia 2-tensoriale  $\rho_{(2)}$  di componenti controvarianti  $\rho^{jh} \equiv g_{ik}\rho^{jikh}$ , o “2-tensore simmetrico di Ricci”, e l’invariante lineare  $\rho_{(0)} \equiv g_{jh}\rho^{jh}$  di quest’ultimo) era solenoidale, cioè aveva le sue 4 divergenze automaticamente e identicamente nulle ( $g_{(2)}$  essendo al solito il tensore fondamentale della varietà).

Pur mancando di una preparazione e di una mentalità specificamente matematiche, Einstein si rese conto dell’importanza che i risultati di Ricci e Levi-Civita potevano avere ai suoi fini, e si

<sup>39</sup> G. Ricci-Curbastro, Bull. des Sci. Math. (2), XVI, 167-189 (1892); anche in “Opere”, I, 288-310.

<sup>40</sup> G. Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita, “Méthodes de calcul différentiel absolu et leur applications”, in Math. Annalen, LIV, 125-201 (1901), ristampato separatamente da Blanchard (1923). Nuova versione allargata, ad opera del solo Levi-Civita, come “Lezioni di calcolo differenziale assoluto”, Stock (1925), traduzione inglese in Blackie (1927) e in Dover (ristampa).



sottopose ad un duro tirocinio per assimilare le tecniche del loro calcolo “assoluto”.<sup>41</sup> Dopo una serie di infruttuosi tentativi, egli imboccò finalmente la strada giusta per stabilire un collegamento tra la metrica dello spazio-tempo e la distribuzione in esso di energia e impulso. Precisamente, egli finì col fissare la sua attenzione sul soprannominato 2-tensore simmetrico-solenoidale  $E_{(2)}$  (detto più tardi “tensore di Einstein”, da cui il simbolo qui usato per denotarlo, o anche “tensore gravitazionale”), che in forza delle sue proprietà e di certe altre ragioni appariva un candidato ideale per essere supposto “universalmente” proporzionale al 2-tensore energetico  $T_{(2)}$ , espressione delle densità di energia-impulso e dei loro flussi nello spazio-tempo, e anch’esso simmetrico-solenoidale per definizione. Questo passo decisivo fu compiuto poco tempo prima della vittoriosa conclusione di una ricerca quasi decennale, conclusione che fu resa pubblica con una storica comunicazione all’Accademia Prussiana delle Scienze di Berlino il 25 novembre 1915 .

A partire dalla fine del 1914, e soprattutto nell’ultimo periodo prima del successo, assai fecondo per Einstein fu l’intenso scambio di idee avuto con i due matematici che con più interesse seguivano i suoi progressi nell’“Entwurf” (come Einstein stesso lo chiamava) della formulazione delle equazioni del campo gravitazionale; e cioè Levi-Civita (da Padova) e soprattutto Hilbert (da Gottinga). In particolare l’interazione Einstein-Hilbert è di tale importanza per la storia, e secondo alcuni per lo stesso positivo coronamento, della teoria della relatività generale, che sembra qui opportuno darne conto in sufficiente dettaglio.

Tra giugno e luglio del ’15, e su invito di Hilbert, Einstein trascorse una settimana a Gottinga, dove secondo il suo stesso ricordo tenne un ciclo di «sei seminari di due ore ciascuno» sulla relatività generale, soffermandosi in particolare sull’ancora aperto problema delle equazioni del campo.<sup>42</sup> Se da una parte questo incontro coinvolse definitivamente Hilbert nella ricerca einsteiniana, dall’altra esso è all’origine di uno dei più intriganti “gialli” della storia della Scienza. Da quel momento, Hilbert si impegnò infatti in una sua personale ricerca sul problema delle sopraddette equazioni, del quale giunse a soluzione verso il 12/13 novembre, dandone immediata notizia in un pubblico seminario a Gottinga il successivo 16 (seminario al quale Einstein *non fu* presente, nonostante il caloroso invito ricevuto). Il relativo articolo venne sottoposto per pubblicazione il 20 novembre, e apparirà a stampa nel marzo successivo con il titolo un po’ enfatico

---

<sup>41</sup> Un decisivo contributo alla sua formazione in tal senso venne ad Einstein dal vecchio amico e compagno di studi Grossmann (Marcel, 1878-1936), all’epoca direttore del Dipartimento Matematico del Politecnico di Zurigo, il quale finì per avere un ruolo non trascurabile nella elaborazione della teoria finale. Riferendosi a quell’esperienza di iniziazione, Einstein ebbe a dichiarare: «Mai prima d’ora, nella mia vita, ho dato tanta importanza a qualcosa, e sviluppato un così grande rispetto per la matematica, le cui parti più sottili, nella mia ignoranza, avevo in passato considerato come un semplice lusso! In confronto a questo problema, la vecchia teoria della relatività speciale è un gioco da bambini.» (da una lettera a Sommerfeld del 1912).

<sup>42</sup> Sarebbe di non piccolo interesse, per la storia della Scienza, disporre di una registrazione di quelle 12 ore di lezione einsteiniana. Non abbiamo idea di quanto la sua udienza capì; ma almeno Hilbert si rese lucidamente conto dell’immensa importanza del problema che il grande fisico andava laboriosamente illustrando. Come vedremo, di fatto Hilbert capì “anche troppo”.

“Die Grundlagen der Physik”.<sup>43</sup> Ma intanto, il 18 novembre, in un seminario all’Accademia Prussiana delle Scienze, Einstein comunicava la giustificazione della precessione del perielio di Mercurio (v. S.sez. 9.1.4) sulla base di una versione ancora provvisoria delle *sue* equazioni del campo; e pochi giorni dopo, appunto il 25 novembre, si ripresentava all’Accademia con la versione corretta e definitiva delle stesse equazioni.<sup>44</sup> Va da sé che le equazioni di Hilbert e quelle di Einstein risultano equivalenti, pur avendo una genesi differente. Paradossalmente, né Hilbert né Einstein conoscevano le identità di Bianchi, e quindi sulle prime essi non si resero conto che  $E_{(2)}$  era *automaticamente* solenoidale; ma mentre il primo *scoprì* da sé questa proprietà, chiudendo finalmente il cerchio, il secondo continuò a credere per qualche tempo che essa dovesse *imporsi* a  $E_{(2)}$  per soddisfare alle equazioni del campo, in quanto  $T_{(2)}$  era assunto solenoidale.

Vi è insomma abbastanza, nei fatti e nei documenti menzionati, per sollevare una questione non trascurabile (almeno agli occhi degli storici della scienza): *chi è il vero padre della teoria della relatività generale?* La querelle si è riaccesa in tempi recenti con toni vivacemente polemici.<sup>45</sup> Il nodo della discussione risiede, e probabilmente rimarrà, nella imperfetta conoscenza che abbiamo di quanto i progressi di Hilbert *influenzarono realmente* quelli di Einstein, e viceversa. Sia come sia, una attenta ricognizione dei documenti originali mostra che i due giunsero in pratica simultaneamente agli stessi risultati sostanziali, pur seguendo linee di pensiero diverse: di impronta decisamente assiomatico-deduttiva quella di Hilbert, più fisica e induttiva quella di Einstein. Un fatto è inoltre certo (lettere di Einstein agli amici H. Zangger e P. Ehrenfest), e cioè che mentre Hilbert sembrava capire benissimo il lavoro di Einstein, quest’ultimo aveva delle difficoltà con quello di Hilbert, trovandolo «oscuro e troppo audace». Aggiungiamo ancora una considerazione, e cioè che se Hilbert si fosse posto per suo conto il problema delle equazioni del campo gravitazionale nei termini in cui glielo pose Einstein in quella fatale estate del ’15, egli avrebbe certamente scoperto la relatività generale in modo autonomo, forte delle sue eccezionali capacità matematiche e della sua padronanza del calcolo delle variazioni e dell’algebra degli invarianti tensoriali (per inciso, a Gottinga Hilbert era anche in stretto contatto con E. Nöther, grande esperta dell’uno e dell’altra). Su questa base, sarebbe forse corretto attribuire al binomio Einstein-Hilbert, piuttosto che al solo Einstein, se non l’intera teoria della relatività generale almeno le equazioni del

<sup>43</sup> D. Hilbert, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **3**, 395 (1916); vedi anche lo stesso giornale **1**, 53 (1917), nonché in Math. Annalen **92**, 1 (1924).

<sup>44</sup> A. Einstein, “Feldgleichungen der Gravitation”, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. (pt 2), 844; l’articolo completo è quello già citato negli Annalen d. Physik **49** del 1916, possibilmente da completare con “Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie”, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. **2**, 1111 (1916).

<sup>45</sup> La più aggiornata referenza in tal senso è probabilmente “How were the Hilbert-Einstein Equations discovered?” di A.A. Logunov et al., arXiv:physics/0405075 v3, 2004 (41 pp, con la bibliografia essenziale).

campo che ne sono il naturale coronamento; ma ben pochi, come appunto gli autori appena citati, lo fanno.<sup>46</sup>

Dobbiamo adesso essere un po' più specifici, seppure al prezzo di anticipare concetti che introdurremo e approfondiremo nel seguito di questo capitolo. Ripetiamo innanzitutto che, secondo il modello relativistico-generale, lo spazio-tempo si identifica con una varietà 4-dim pseudoriemanniana di indice 3,  $L^4_3$ , e di metrica  $g_{(2)}$  non degenera, dunque con segnatura lorentziana (L sta appunto per Lorentz) convenientemente regolare. Tralasciando qui di occuparci delle sue presumibili proprietà *globali*,<sup>47</sup> la teoria *locale*, cioè limitata ad un aperto  $U \subset L^4_3$  dominio di una sua carta di coordinate  $x = (x^1, \dots, x^4)$ , resta sostanzialmente ispirata (oltre che al principio di equivalenza) alle due già menzionate idee complementari: (i) «la geometria intrinseca di U, definita dal (campo del) 2-tensore metrico  $g_{(2)}$ , è determinata, a meno di condizioni accessorie, dal (campo del) 2-tensore energetico totale  $T_{(2)}$ , supposto simmetrico e solenoidale»; e (ii) «il moto di un punto materiale test di massa trascurabile,<sup>48</sup> tra due punti di U congiungibili mediante traiettorie “materiali” ( $\equiv$  aventi tangenti *interne* al cono locale con vertice nel punto considerato), avviene lungo una geodetica tra quei punti».

Per quanto ragionevoli, la simmetria e la solenoidalità di  $T_{(2)}$  sono qui essenzialmente postulate. È tuttavia interessante osservare che il semplice modello di una polvere materiale disgregata distribuita in U con densità di energia  $c^2\mu^0$  ( $\mu^0 \equiv$  densità di massa di quiete  $\equiv$  densità di massa classica  $\mu^0$ ) e 4-velocità (v. App. 2.D)  $u^i = cdx^i/\sqrt{(-ds^2)}$  ( $ds = |g_{ik}dx^i dx^k|^{1/2}$  e quindi  $u_i u^i = g_{ik} u^i u^k = -c^2$ ), suggerisce l'espressione

---

<sup>46</sup> La vicenda provocò anche un certo risentimento da parte di Einstein, che inizialmente si sentì defraudato dal celebre collega di una sua pretesa esclusiva priorità; ma il disappunto fu rapidamente superato con l'alta dose di fair play che ci si poteva attendere dalla statura scientifica e umana dei due grandi uomini (come testimonia tra l'altro la loro corrispondenza privata). Comunque, nonostante i loro ottimi rapporti e la reciproca stima, e come era del resto naturale alla luce delle loro diverse attitudini e formazioni, essi non colmarono mai la distanza che separava i loro criteri di approccio ai problemi fisico-matematici. È anche noto che Hilbert soleva dire in tono scherzoso, parafrasando un detto memorabile in cui ci si riferiva a guerre e generali, che «die Physik ist für die Physiker viel zu schwer». Al di là della battuta, naturalmente egli intendeva con ciò affermare che i modelli elaborati e proposti dai fisici sollevano spesso, *una volta matematizzati*, questioni che superano di molto la loro competenza matematica. Hilbert aveva perfettamente ragione: il problema esiste, ed è oggi più che mai attuale e drammatico. Esso reclamerebbe infatti quella più efficace cooperazione tra le due comunità – dei fisici teorici da una parte e dei matematici dall'altra – che invece di rafforzarsi si fa di giorno in giorno obiettivamente più difficile. Sulla carta, i fisici-matematici dovrebbero colmare le distanze; ma quasi mai ci riescono fino in fondo, forse perché la maggior parte di loro non è capace di stare veramente “nel mezzo” tra le due squadre (un'impresa in ogni caso molto difficile).

<sup>47</sup> Quello delle proprietà globali della varietà spazio-temporale  $L^4_3$  diventerà presto il problema fondamentale della cosmologia relativistica-generale (usiamo questa espressione anche se dall'entrata in scena delle teorie quantistiche è diventato impossibile parlare di una cosmologia inquadrata in una teoria interamente macroscopica quale è la relatività generale). Va anche ricordato che, come era naturale, l'approccio einsteiniano alla sua teoria fu di tipo locale. L'interesse per i problemi globali su varietà astratte generiche, e soprattutto gli strumenti matematici necessari per affrontarli, cominciarono a svilupparsi seriamente un po' più tardi, anche indipendentemente dalla relatività generale.

<sup>48</sup> La massa del punto test deve essere supposta piccola per non perturbare la metrica di riferimento attraverso le equazioni del campo gravitazionale (5) che seguono. Ciò non significa che, venendo meno questa condizione “adiabatica”, il movimento del punto materiale non sarebbe ugualmente determinato: il suo calcolo sarebbe tuttavia assai più difficile, dovendosi allora determinare in modo consistente sia la metrica che il movimento del punto.

$$(1) \quad T^{ik} =: \mu^0 u^i u^k$$

per il relativo tensore energetico.<sup>49</sup> Richiedendo allora la solenoidalità di questo tensore simmetrico, cioè le

$$(2) \quad (\mu^0 u^i u^k)_{;i} = 0,$$

si ottiene

$$(3) \quad (\mu^0 u^i)_{;i} = 0, \quad ^{50}$$

e quindi

$$(4) \quad u^i u^k_{;i} = 0$$

se  $\mu^0 \neq 0$ . Queste ultime (4) mostrano che il campo di 4-velocità è geodetico, cioè si mantiene tangente a una geodetica di  $U$  (cfr. la (6.2.2, 7)), e quindi che la generica particella di polvere materiale si muove lungo questa geodetica. In altre parole, nel modello considerato la solenoidalità di  $T_{(2)}$  implica la (ii) del paragrafo precedente; e viceversa, la (ii) stessa implica la solenoidalità di  $T_{(2)}$  sotto la condizione (3) (cioè che il vettore 4-dim  $\mu^0 u^i$  sia solenoidale). Questo è conforme al cosiddetto “principio della geodetica spazio-temporale” della relatività generale, che degenera nella legge d’inerzia della relatività speciale (e anche della dinamica newtoniana) per  $T_{(2)} = 0$ . Quanto alla (3), nel limite classico ( $u^{1 \leq i \leq 3} \approx u^i$ ,  $u^i$  essendo le componenti della 3-velocità della generica particella, e  $u^4 \approx c$ ) essa si riduce alla legge di conservazione di massa  $\text{div}(\mu^0 u) + \partial_t \mu^0 = 0$ .

Come sappiamo, le  $4(4+1)/2 = 10$  componenti algebricamente indipendenti di  $T_{(2)}$  rappresentano la densità di energia ( $i = k = 4$ , una quantità “scalare”, cioè misurata da un unico numero reale), di impulso o momento ( $i = 1, 2, 3, k = 4$ , tre quantità scalari) e i loro flussi ( $i, k = 1, 2, 3$ , sei quantità scalari). In forza del teorema di Gauss generalizzato, le

$$(5) \quad T^{ik}_{;k} = 0$$

assicurano allora che le corrispondenti quantità integrali (cioè l’energia totale, l’impulso totale, ecc., in  $U$ , o nella sua parte di interesse) “si conservino”. Per questa ragione le (5) sono dette “equazioni di conservazione”.

L’anello mancante in questo quadro è quello di rendere concreto ed effettivo il principio (i) (di tre capoversi più sopra), plausibilmente sotto la forma di un sistema di 10 equazioni differenziali nelle 10 incognite  $g_{ik}$ . Ora le 20 componenti del tensore di Riemann  $\rho_{(4)}$  si esprimono come funzioni di quelle del tensore fondamentale  $g_{(2)}$  e delle loro derivate prime e seconde, essendo lineari in

<sup>49</sup> Vedi il già citato “The meaning of Relativity”, in cui, dopo aver calcolato l’espressione del tensore energetico *elettromagnetico* (nell’ambito della relatività ristretta), Einstein ne verifica il carattere (simmetrico e) privo di divergenza esternamente alle cariche elettriche (vedi l’eq. (47c) del testo einsteiniano), aggiungendo poi: «È molto difficile evitare di fare l’ipotesi che, anche in tutti gli altri casi, la distribuzione spaziale dell’energia sia data da un tensore simmetrico  $T_{\mu\nu}$ , e che tale tensore soddisfi la relazione (47c)». Immediatamente dopo, Einstein considera il caso della polvere materiale e dà l’espressione (1) del relativo tensore energetico (sua eq. (50)).

<sup>50</sup> Basta sviluppare il 1° membro della (2) e contrarlo con  $u_k$ . Questo dà  $0 = -(\mu^0 u^i)_{;i} + c^{-2} \mu^0 u^i u_{;k} u^k_{;i} \equiv -(\mu^0 u^i)_{;i}$ .

queste ultime. Lo stesso vale per le 10 componenti del 2-tensore-traccia  $\rho_{(2)}$  di  $\rho_{(4)}$ , simmetrico ma *non* necessariamente solenoidale, nonché per le 10 componenti del 2-tensore gravitazionale  $E_{(2)}$ , simmetrico e solenoidale. La già accennata idea di Einstein, maturata dopo lunga e strenua ricerca, fu quella di postulare la proporzionalità di  $E_{(2)}$  a  $T_{(2)}$  secondo un fattore costante universale che diremo qui  $-8\pi\kappa/c^4$ , con  $\dim(\kappa) = M^{-1}L^3T^{-2}$ .<sup>51</sup> Sotto la naturale richiesta che valga un “principio di corrispondenza” per il quale la dinamica einsteiniana deve confluire in quella newtoniana al più basso ordine significativo in  $\varphi/c^2$  (con  $\varphi \equiv$  energia potenziale gravitazionale newtoniana per massa unitaria) si riconosce allora che la costante  $\kappa$  deve identificarsi con la costante gravitazionale di Newton-Cavendish.<sup>52</sup> In conclusione, le equazioni einsteiniane si dovranno scrivere nella forma

$$(6) \quad E_{(2)} + (8\pi\kappa/c^4)T_{(2)} = 0,$$

dove come sappiamo  $E_{(2)}$  è una ben definita funzione di  $(g_{(2)}, \partial g_{(2)}, \partial^2 g_{(2)})$ , lineare nelle derivate seconde  $\partial^2 g_{(2)}$ , e  $T_{(2)}$  è una funzione data (via modellazione) di  $(x, g_{(2)}, \partial g_{(2)})$ .<sup>53</sup> Le 10 equazioni (6) nelle altrettante incognite  $g_{(2)}$  costituiscono un sistema differenzial-parziale quasi-lineare del 2° ordine, che si riconosce di tipo iperbolico. Il bilancio tra equazioni ed incognite nelle (6), corretto ad un esame superficiale (10 contro 10), sarà discusso più avanti (v. S.sez. 9.3.1). Infine si dovrà presupporre che la soluzione  $g_{(2)}$  delle (6) e relative condizioni accessorie rispetti la natura postulata di campo 2-tensoriale *uniformemente* non degenerare e lorentziano (la prima condizione assicura la seconda se questa vale in un punto della varietà, assunta connessa).

Naturalmente ci si aspetta, e così sappiamo essere, che la funzione  $E_{(2)}$  di  $g_{(2)}$  e sue derivate prime e seconde si annulli se queste derivate prime e seconde si annullano. Questo fatto assicura la necessaria coerenza con il quadro della relatività speciale, in cui per definizione il tensore energetico  $T_{(2)}$  è nullo in *tutto* lo spazio-tempo; ma non è detto che valga il contrario in un dominio *limitato* e semplicemente connesso, cioè che “ $T_{(2)} \equiv 0$ ” in quel dominio implichi che esista un riferimento per il quale  $g_{(2)}$  sia ivi costante. (La precisa risposta a ciò si trae dallo studio del corrispondente problema di Cauchy per il sistema (6).) Si osservi ancora che il sistema (6) è non lineare non soltanto perché le  $g_{(2)}$  e le  $\partial g_{(2)}/\partial x$  compaiono in modo non lineare in  $E_{(2)}$ , ma anche,

<sup>51</sup> Le componenti (di qualunque tipo) del tensore energetico hanno le dimensioni di una densità di energia (cioè  $ML^{-1}T^{-2}$ ) se quelle del tensore metrico sono, come è norma supporre e supporremo, adimensionali. Anche le componenti  $dx^i/ds = u^i/c$  risultano allora adimensionali. Su questa base, si verifica facilmente la correttezza della  $\dim(\kappa)$  riportata nel testo. (Più in generale, le componenti del tensore energetico hanno le dimensioni del prodotto di una densità di energia per le componenti omologhe – cioè della stessa natura covariante, controvariante o mista – del tensore metrico, o se si preferisce delle componenti omologhe del divettore delle 4-velocità.)

<sup>52</sup> Un valore abbastanza aggiornato di questa costante è di  $6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$  (G. Luther, W. Towler, 1982). Oltre che “di Newton”, la costante gravitazionale si dice anche “di Cavendish” dal nome del fisico inglese (1731-1810) che per primo la misurò nel 1798 trovando il valore incredibilmente preciso di  $6,754 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ . Sulla identificazione di  $\kappa$  con la costante di Newton-Cavendish, vedi S.sez. 9.3.2.

<sup>53</sup> Non ci diffondiamo qui sulla travagliata storia della “costante cosmologica” – riesumata e in gran parte riabilitata in tempi più recenti –, che fu presto aggiunta da Einstein nelle (6) nell’intento di giustificare un modello *stazionario* dell’universo, vedi S.sez. 9.3.2.

possibilmente, in  $T_{(2)}$ . Infine, la possibile dipendenza di  $T_{(2)}$  da  $g_{(2)}$  e derivate prime significa che il tensore energetico non possa, in generale, trattarsi come “termine libero” del sistema.<sup>54, 55</sup>

La soluzione del SDP iperbolico quasi-lineare del 2° ordine (6) sotto le convenienti condizioni accessorie costituisce il problema per eccellenza della teoria della relatività generale, oggetto ancora oggi di attiva ricerca analitica e computazionale. Un caso di grande interesse è quello del sistema ovunque (nel dominio convenuto) omogeneo associato al SDP (6), le cui soluzioni dipendono quindi esclusivamente dalle condizioni accessorie (iniziali e al contorno), ed hanno tipicamente natura di propagazione ondosa (“onde gravitazionali”, v. App. 7.A e 9.F). È molto significativo che il modulo della velocità di avanzamento normale in un punto del fronte di queste onde di gravità, ipersuperficie ( $\equiv$  superficie mobili) caratteristiche del SDP (6) attraverso le quali le derivate seconde di  $g_{(2)}$  possono essere discontinue (restando  $g_{(2)}$  continuo con le sue derivate prime), risulti uguale a quello della velocità della luce in quel punto.

Del SDP (6) si conoscono ormai molte soluzioni esatte, legate ad ipotesi limitative particolari: le più famose, e prime in ordine di tempo, sono le soluzioni statiche ottenute da Schwarzschild (Karl, 1873-1916) nel 1916, nel caso di un punto materiale, e rispettivamente di una palla materiale omogenea incompressibile, l’uno e l’altra immersi nello spazio-tempo vuoto e infinito.<sup>56</sup> Entrambe queste soluzioni prevedono la possibile esistenza di corpi non irraggianti alcuna forma di massa-energia – o “buchi neri” (S. Hawking, R. Penrose, 1965-70) – congetturalmente prodotti dal collasso gravitazionale di stelle di massa sufficientemente elevata. Un primo esempio di buco nero fu osservato nel 1971. Altri contributi fondamentali allo studio del SDP (6) furono quelli di Friedmann (Alexandr, 1888-1925), che per primo elaborò un modello cosmologico fondato sulle equazioni einsteiniane (1922, 1924) nel quale la densità di massa media

<sup>54</sup> Si dimostra che le equazioni associate omogenee ( $T_{(2)} \equiv 0$ ) delle (6), nel dominio  $U$ , equivalgono al seguente principio variazionale: «L’integrale  $\int_{U \setminus \rho_{(0)}} |g|^{1/2} d(x)$  è stazionario quando si richieda che le variazioni di  $g_{(2)}$  e delle sue derivate prime standard (quindi dei coefficienti di Christoffel di 1ª specie  $\Gamma_{ikj}$ ) si annullino sul contorno  $\partial U$  di  $U$ »; dove  $\rho_{(0)}$ , ricordiamo, è la traccia scalare del tensore di Riemann, e  $g$  sta per  $\det\{g_{ik}\}$ . Questo principio, una specializzazione del principio di azione stazionaria che Hilbert usò nella sua deduzione delle equazioni del campo, avrà un significativo ruolo ispirativo nei successivi e infruttuosi tentativi di Einstein (e non solo di lui) di costruire una “teoria unitaria”, cioè capace non solo di *rappresentare* ma anche di *geometrizzare* i fenomeni elettromagnetici, come la relatività generale fa con quelli gravitazionali, in uno spazio-tempo *non pseudoriemanniano*.

<sup>55</sup> L’essenza della situazione può riassumersi in un noto aforisma (J. Wheeler), al quale, nel gusto di chi scrive, converrebbero i toni di una “favola” gaddiana, e più o meno nel modo che segue (sia venia al goffo imitatore di quel Grande): “La materiaenergia apostrofò lo spaziotempo: ‘Io ti comandarò come piegarti’. Lo spaziotempo ne obiettò: ‘ed io ti ligherò a come muoverti’”. I due ruoli possono invertirsi, a preferenza del lettore. Va peraltro osservato che questo tipo di azione reciproca tra campo e sua sorgente (sotto condizioni accessorie “normali”) *non* è specifico della relatività generale; ciò che è specifico, in questo caso, è il fatto che il campo in questione è puramente geometrico.

<sup>56</sup> K. Schwarzschild, “Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 189 (1916); “Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie“, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. 424 (1916).

nell'universo era assunta costante e tutti gli altri parametri erano noti salvo la sua curvatura.<sup>57</sup> Il modello di Friedmann implica una dinamica dell'universo del tipo cosiddetto “big-bang” (locuzione dovuta a Hoyle (Fred, 1915-2001)), proposta esplicitamente da Lemaître (Georges, 1894-1966)<sup>58</sup> nel 1927 e ulteriormente studiata da Gamow (Georgy, 1904-1968) intorno al 1948. Esso fu dunque sostanzialmente formulato con circa sette anni di anticipo sulle osservazioni (divenute abbastanza convincenti intorno al 1929, ma iniziate parecchi anni prima) di Hubble (Edwin, 1888-1953). Dall'osservatorio di M.te Wilson, Hubble fornì le prime evidenze sperimentali dell'espansione cosmologica, governata dalla legge di approssimativa proporzionalità tra la velocità di allontanamento – e quindi tra lo spostamento verso il rosso della luce da loro emessa – e la distanza delle galassie lontane (nota appunto come legge di Hubble).<sup>59</sup>

Vari ardui problemi della cosmologia contemporanea restano aperti. Ad esempio, il problema della densità media di materia/radiazione, che discrimina tra un universo “chiuso” (cioè che nasce da una esplosione e termina con una implosione), ed un universo “aperto” in indefinita espansione (possibilità previste da Friedmann, e legate alla curvatura del cosmo), la questione della costante cosmologica (Lemaître), che sebbene appena diversa da zero interpreta l'esistenza di una “energia del vuoto”, .. e via elencando.<sup>60</sup> Almeno in parte, questi problemi sono legati alla mancanza di una teoria unitaria nella quale coabitino la fisica quantistica (microscopica) e la relatività generale (macroscopica);<sup>61</sup> e quindi alla nostra conoscenza indiretta e congetturale, accettando, come sembra da tempo necessario, il modello singolare del big-bang della fisica dei primi istanti di vita dell'universo. Inoltre, non è detto che le condizioni iniziali al momento del big-bang abbiano necessariamente lasciato tracce significative nell'universo attuale: un breve periodo di espansione rapidissima, o “inflazione” (A. Starobinskij, A. Guth), potrebbe averle quasi del tutto cancellate. Di fatto, l'ipotesi inflativa ha ormai una solida posizione all'interno del cosiddetto “modello cosmologico standard”; ma allora diventa naturale chiedersi quale microfisica abbia reso

<sup>57</sup> A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes” Z. Physik **10**, 377 (1922); “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”, Z. Physik **21**, 326 (1924).

<sup>58</sup> G. Lemaître, Ann. Soc. Sci. Bruxel., **A47**, 49 (1927); Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **91**, 483 (1931). Lemaître parlò di « atom primitif » a proposito di quello che si sarebbe poi detto “big-bang”, ma la sua espressione non ebbe successo, sebbene non fosse per nulla impropria. L'idea di chiamare (sprezzantemente) big-bang la grande esplosione iniziale, ormai definitivamente affermata, risale a F. Hoyle, l'uomo che più tenacemente avversò il modello “singolare” dell'universo.

<sup>59</sup> Se ci si riferisce alla notissima immagine intuitiva del palloncino di gomma che si gonfia progressivamente (ecco uno splendido esempio di didattica metaforica!) si intuisce che dei segni praticati sulla sua superficie si allontanano l'uno dall'altro con velocità *crescente* con la loro distanza.

<sup>60</sup> Una parte delle questioni nominate in questo e nel precedente paragrafo saranno approfondite nel seguito del capitolo e nell'App. Gen. F.

<sup>61</sup> L'analogia unificazione tra fisica quantistica e modello relativistico *speciale* è virtualmente compiuta nella moderna elettrodinamica quantistica. Si potrebbe aggiungere che in ultima analisi la relatività generale è una particolare teoria di gauge (non abeliana), e quindi sotto questo aspetto è legata ai moderni sviluppi della fisica teorica. La speranza della fisica contemporanea è quella di giungere a descrivere tutte le interazioni fondamentali nell'ambito di una *singola* teoria di gauge unificata.

possibile o determinò l'inflazione. Il problema delle condizioni iniziali torna così in primo piano, seppure in una accezione diversa da quella che si sarebbe formulata in ambito relativistico-generale puro.<sup>62</sup> (Questa è una buona occasione per sottolineare che ogni ipotetico tentativo di illustrare la cosmologia “moderna” – cioè, sviluppata all'incirca dopo il terzo decennio del '900 – in termini strettamente macroscopici sarebbe un non-senso logico e storico.)

Altre soluzioni delle equazioni einsteiniane sono quelle di tipo asintotico basate su procedure di linearizzazione ricorsiva, o di linearizzazione pura e semplice, del SDP (6); nonché quelle che possono calcolarsi numericamente in casi particolari. La ricerca fisico-matematica sul sistema delle equazioni del campo gravitazionale (esatte o approssimate) continua ad essere quanto mai viva: si stima che delle *parecchie migliaia* di articoli pubblicati sul solo tema delle sue soluzioni esatte, circa due terzi siano apparsi negli ultimi venti anni.<sup>63</sup>

#### 9.1.4) LA RELATIVITÀ E I FATTI OSSERVATIVI

Presenteremo adesso una succinta rassegna dei fatti sperimentali/osservativi che furono a fondamento della teoria della relatività (speciale e generale) o piuttosto che ne diedero successive convalide a posteriori. Va infatti subito riconosciuto (o alla luce di quanto già esposto) che la relatività è nel suo insieme *un esempio supremo di teoria fisico-matematica fondata su pochissimi fatti empirici specifici*, il cui assetto finale fu essenzialmente ottenuto con il solo mezzo di audaci generalizzazioni e di una possente capacità di sintesi.

Cominciamo con la relatività speciale. Anche se non è chiaro in quale misura (vedi la Sez. 2.2 per qualche dettaglio), è probabile che lo storico esperimento di Michelson e Morley, nelle sue successive versioni fino a quella del 1887, nonché gli esperimenti alternativi intesi allo stesso scopo e già menzionati, abbiano influenzato l'elaborazione della relatività speciale *meno* di quanto fece, nei suoi creatori<sup>64</sup>, la precognizione della teoria elettromagnetica di Maxwell e del suo *non* essere invariante rispetto alle trasformazioni galileiane delle coordinate e a quelle prerelativistiche dei

<sup>62</sup> Tra le altre, una generalizzazione relativistico-generale dell'equazione di Schrödinger è stata proposta J.A. Wheeler e B. De Witt, ma non si ha nessuna conferma osservativa della sua validità.

<sup>63</sup> Vedi in particolare la monumentale monografia di H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt: “Exact Solutions of Einstein's Field Equations”, Cambridge Un. Press, aggiornata nel 2003.

<sup>64</sup> Vale a dire, innanzitutto Einstein e Lorentz; e secondariamente, sotto il profilo dell'inquadramento matematico, Minkowski. Quanto a Poincaré, sembra che il fisico-matematico francese non ne capì abbastanza la *base fisica*, restando fedele all'idea dell'elettromagnetismo “appiattito” dal vento d'etere. In una lezione tenuta nel 1910, Poincaré si riferì alla scelta tra l'elettrodinamica di Lorentz e la relatività speciale come ad «una questione di gusti» (cfr. il cenno al “convenzionalismo” scientifico riportato in nota nella Sez. 1.1).



campi.<sup>65</sup> Come sappiamo, la costanza della celerità della luce nel vuoto, *fondamento empirico centrale* della teoria, è soltanto uno degli ingredienti logici sulla cui base si possono *dedurre* le trasformazioni di Lorentz; esso, e gli altri tre principi (di relatività, di linearità e di isotropia perpendicolare), furono tuttavia essenzialmente *presupposti* da Einstein, come avrebbe potuto esser fatto da chiunque altro sulla base delle stesse conoscenze sperimentali, a tutti accessibili. In altre parole, ciò che distinse Einstein dai fisici a lui contemporanei (con l'eccezione di Lorentz, che lo precedette sotto non pochi fondamentali profili) è *l'uso* che egli fece di quelle conoscenze, nulla di più e nulla di meno.

Le convalide sperimentali della relatività speciale sono ormai innumerevoli e, come si dice, “al disopra di ogni sospetto”: qualunque trattato istituzionale di fisica non troppo vecchio ne descrive gli esempi più significativi. Tra questi, basterà qui ricordare che la progettazione e realizzazione delle macchine acceleratrici, dagli anni '30 in qua, sarebbe impensabile senza tener conto della dinamica einsteiniana speciale. La ben nota “equivalenza” (= uguaglianza a meno del fattore  $c^2$ ) tra massa e energia è invece soltanto *compatibile* con la teoria, perché quest'ultima si limita ad imporne la validità a meno di una costante additiva arbitraria. Quindi in quella equivalenza va visto un addizionale colpo d'ala di Einstein, che la propose in una breve nota interrogativa dello stesso 1905<sup>66</sup>. La popolarissima<sup>67</sup> uguaglianza “energia  $e = (\text{massa di moto } m) \times (\text{quadrato della celerità della luce } c^2)$ ” che ne traduce il significato, avrà le sue prime conferme (sostanzialmente nella versione “di quiete”  $e^0 = m^0 c^2$ ) con gli studi sulla radioattività naturale e artificiale, nelle prime precise valutazioni del difetto di massa di certe reazioni nucleari (Cockcroft e Walton, 1932<sup>68</sup>), e ancora nella interpretazione dei meccanismi che presiedono allo splendore del sole (C.F. Von

<sup>65</sup> M. Polany, un noto fisico-chimico che aveva una lunga familiarità con Einstein, nel 1954 pubblicò con l'apparente approvazione di quest'ultimo la seguente discutibile affermazione: «L'esperimento di Michelson e Morley ebbe un effetto trascurabile sulla scoperta della relatività.» E proseguendo, un po' sopra le righe: «La consueta spiegazione data dai manuali di relatività come di una risposta teorica all'esperimento di Michelson e Morley è un'invenzione. È il prodotto di un pregiudizio filosofico. Quando Einstein scoprì la razionalità nella natura, senza l'aiuto di alcuna osservazione che non fosse già disponibile da almeno cinquant'anni, i nostri manuali positivisticci coprirono prontamente lo scandalo con una spiegazione convenientemente manipolata della sua scoperta.»

<sup>66</sup> A. Einstein, “Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?”, *Annal. der Physik* **18**, 639 (1905).

<sup>67</sup> Benché la  $e = mc^2$  sia diventata ormai una vera e propria icona mediatica, del suo significato è lecito dubitare che sia veramente compreso dalla maggior parte delle persone cosiddette “di media cultura”. Come abbiamo già riferito, lo stesso Einstein era ancora perplesso sulla sua precisa interpretazione a molti anni di distanza dalla prima (dubitativa) proposta.

<sup>68</sup> J.D. Cockcroft, G.T. Walton, *Proc. Roy. Soc. A*, **137**, 229 (1932). Per quanto meno clamorosa delle successive, fu questa la prima vera conferma della  $e = mc^2$ . Lo storico esperimento consistette nello studio del bilancio di massa della reazione  ${}_3^7\text{Li} + {}_1^1\text{H} = 2\,{}_2^4\text{He}$ , in cui un nucleo di litio-7 reagisce con un protone producendo due particelle  $\alpha$ . Nelle unità standard in cui un atomo di ossigeno ha massa 16, la massa di  ${}_3^7\text{Li}$  ammonta a 7,0166, quella di  ${}_1^1\text{H}$  a 1,0076, e quella di  ${}_2^4\text{He}$  a 4,0028. Quindi dopo la reazione manca una massa pari a 0,0186, che deve apparire come energia cinetica delle due  $\alpha$ . Tradotta in Joule, questa energia ammonta a  $2,781 \cdot 10^{-12}$  J. La misura fu condotta col “metodo del range”, e confermò in pieno questa previsione. (Nuove più precise misure mettono anche in conto l'energia cinetica del protone incidente.)

Weizsäcker e H.A. Bethe, 1938-39<sup>69</sup>). Altre conferme verranno più tardi dalle reazioni nucleari di fissione (Chicago, 2 dicembre 1942; Alamogordo (USA), 16 luglio 1945), e ancora dopo, di fusione (atollo di Bikini, con oltre venti esplosioni sperimentali tra il 1946 e il 1958).

Ben poco fondato sull'esperienza appare invece lo sviluppo della relatività generale, fino alla sua sostanziale messa a punto nel 1915/16. Con questa affermazione intendiamo ancora sottolineare che la teoria einsteiniana della gravitazione risultò dalla riflessione profonda, guidata dallo straordinario intuito di una sola mente (o al più di due, volendo mettere nel conto l'importante ma non decisivo contributo di Hilbert), su un ristretto numero di principi fisici ragionevoli. Di questi principi, quello dell'"equivalenza" (debole e forte), quello della necessità che la teoria generale si riducesse alla teoria speciale per tensore energetico totale nullo (e quindi che fosse l'esistenza di questo campo tensoriale a provocare il passaggio da uno spaziotempo pseudoeuclideo (piatto) ad uno spaziotempo pseudoriemanniano (curvo)), e infine quello che la teoria gravitazionale relativistica confluisse nella corrispondente teoria newtoniana al 1° ordine per piccolo  $\phi/c^2$ , furono probabilmente i più fecondi.

A differenza dalla teoria gravitazionale di Newton, che riassume i risultati di una lunga ed intensa campagna di osservazioni astronomiche (principalmente ad opera di T. Brahe, J. Kepler e dello stesso Newton); e ancor più, a differenza dalla teoria elettromagnetica di Maxwell (nella quale Cavendish, Coulomb (Charles, 1736-1806), Ampère (André, 1775-1836), Faraday (Michael, 1791-1867) e naturalmente Maxwell stesso giocarono analogo ruolo di sperimentatori), la relatività generale resta un esempio praticamente unico di teoria fisica "quasi-autoreferenziale" nel preciso senso più sopra specificato. Per quanto riguarda il principio dell'equivalenza debole, vi era in realtà la vasta campagna di misure di Eötvös (Roland, 1848-1919), che a cavallo tra i due secoli ne dimostrava la validità con sempre maggior precisione relativa (fino a  $10^{-7} \div 10^{-8}$ );<sup>70</sup> ma è del tutto fuori luogo proporre una possibile connessione genetica da quelle (o altre) misure allo sviluppo della relatività generale.<sup>71</sup> In modo non dissimile da quanto era già occorso con la costanza di  $c$  nei confronti della relatività speciale, Einstein partì infatti dal *presupposto*, di per sé abbastanza naturale, della equivalenza debole; della quale si era del resto ben consapevoli anche prima di Eötvös, come la stessa coppia newtoniana {legge dinamica, legge di gravitazione universale}

<sup>69</sup> La reazione nucleare in oggetto è quella della fusione di quattro  ${}^1_1\text{H}$  in un  ${}^4_2\text{He}$ . In realtà la reazione diretta non è possibile, ma Bethe (che ebbe anche per questo il Nobel nel 1967) suggerì che lo diventasse per il tramite di un nucleo di carbonio-12. Dapprima questo si fonde con tre protoni, producendo un nucleo di azoto-15; successivamente quest'ultimo si fonde a sua volta con il quarto protone, riproducendo l'originale carbonio-12 più il nucleo di elio-4.

<sup>70</sup> R. Eötvös, *Math. natur. Berichte Ungarn*, **8**, 65 (1891); *Ann. Phys. Chem.*, **59**, 354 (1896).

<sup>71</sup> A proposito del principio di equivalenza debole, lo stesso Einstein ebbe così ad esprimersi (in "On the Origins of the General Theory of Relativity"): «I did not seriously doubt its strict validity even without knowing the result of the beautiful experiment of Eötvös, which – if I remember correctly – I only heard of later».

implicava, seppur con una precisione che a quei tempi non superava  $10^{-5}$ .<sup>72</sup> Insomma, e in maggior misura che nel caso della relatività speciale, lo sviluppo della relatività generale procedette piuttosto da una sofisticata elaborazione concettuale di verità sperimentali all'epoca consolidate che da nuove osservazioni. Alla luce di questa circostanza, è certamente più appropriato occuparsi dei numerosi esperimenti ai quali a ragione si attribuisce un valore di *convalida* della teoria, che di presunti esperimenti che ne avrebbero in qualche modo “pilotato” la messa a punto a partire dai primi tentativi in tal senso (ca. 1907).<sup>73</sup>

Innanzitutto a se stesso, Einstein suggerì tre diverse “verifiche cruciali” della relatività generale, e cioè:

- (a) la precessione del perielio delle orbite dei pianeti, e specialmente di quella di Mercurio, che per le sue caratteristiche meglio si prestava alla possibile osservazione del fenomeno;
- (b) la deflessione dei raggi luminosi provenienti da stelle angolarmente prossime al bordo del Sole (in una data posizione della Terra lungo la sua orbita), e quindi l'apparente spostamento angolare di quelle stelle relativamente ad una situazione di non-allineamento (di fatto una *divergenza* angolare, perché la deflessione deve avere il Sole dalla parte della concavità del raggio luminoso), doppia di quella prevedibile sulla base della sola equivalenza massa-energia della relatività speciale;
- (c) lo spostamento verso il rosso (o “redshift”) dello spettro di radiazione elettromagnetica emessa da sorgenti massive (come il Sole, o assai meglio, come una “nana bianca”, molto più luminosa e pesante), dovuto al loro campo gravitazionale. #

Aggiungiamo qualche commento su questi esperimenti di convalida.

Su (a): Nel corso del XIX secolo, si era accertato<sup>74</sup> che il calcolo delle perturbazioni interplanetarie non rendeva completamente conto della precessione secolare dell'orbita di Mercurio: restava un difetto di circa 43'' d'arco su un totale effettivo di 575''. Già nel 1915, secondo quanto aveva annunciato all'Accademia prussiana delle Scienze, Einstein aveva ricavato dalle sue equazioni, seppur ancora non del tutto corrette, una semplice (e corretta) formula approssimata<sup>75</sup> che gli permetteva il calcolo del contributo relativistico-generale alla precessione dell'orbita di un

<sup>72</sup> Campagne sperimentali più recenti e sofisticate hanno migliorato il limite di Eötvös fino a circa  $10^{-10}$  (Dicke et al., 1960), e addirittura a  $10^{-11} \div 10^{-12}$  (Braginsky e Panov, 1971).

<sup>73</sup> Indubbiamente la relatività generale fornì ampio supporto all'importanza (se non al primato) del momento razionante – induttivo e deduttivo – dell'attività scientifica “esatta”, rispetto al suo momento strettamente osservativo-sperimentale. Questa opinione era del resto abbastanza in sintonia con lo spirito dei tempi, e fortemente rappresentata dai più autorevoli scienziati-filosofi a cavallo dei due secoli; in particolare dallo stesso Einstein, nonché da Poincaré, che ammoniva: «un insieme di fatti non è una scienza più di quanto un mucchio di mattoni sia una casa».

<sup>74</sup> Protagonista di queste laboriose valutazioni fu quel Le Verrier (Urban, 1811-1877) dell'Osservatorio astronomico di Parigi, che di lì a pochi anni sarebbe stato uno degli scopritori del pianeta Nettuno. Nel 1859 egli pubblicò una versione revisionata della teoria della precessione dell'orbita di Mercurio, scoprendovi una discrepanza apparentemente ineliminabile rispetto alle osservazioni del tempo. Quell'anomalia permaneva sostanzialmente immutata (dai 38'' di Le Verrier a quasi 43'') oltre mezzo secolo dopo.

<sup>75</sup> A. Einstein, “Erklärung der Perihelbewegung des Mercur aus der allgemeinen Relativitätstheorie”, Preuss. Akad. Wiss. Sitz., pt. 2, 831 (1915).

pianeta generico in funzione del suo semiasse maggiore, della sua eccentricità e del suo periodo. Applicata all'orbita di Mercurio, la formula in questione dava una buona giustificazione della discrepanza osservata.

Su (b): La divergenza angolare apparente – un effetto che può permettere la visione di oggetti luminosi situati marginalmente “dietro” il Sole – fu effettivamente osservata (isola Principe, 29 maggio 1919) in occasione di una eclisse solare totale, e stimata intorno al previsto ammontare di 1,75" d'arco, seppur con non poche incertezze. (Il mascheramento dell'astro è una condizione necessaria per osservare oggetti celesti nella direzione della sua altrimenti luminosissima periferia.) Al giorno d'oggi, il sopracitato valore di 1,75" è sufficientemente confermato da numerose e più precise misure.<sup>76</sup>

Su (c): Il redshift della nana bianca 40 Eridani B fu osservato nel 1954<sup>77</sup>, in buon accordo con il valore di circa  $10^{-5}$  previsto dalla teoria. Misure di questo tipo sono comprensibilmente delicate, dovendo esse venir depurate dal redshift Doppler (C. Doppler, 1803-1853) dovuto all'espansione cosmologica (altra conferma indiretta della teoria generale, via soluzioni di Friedmann). La disponibilità di una diagnostica estremamente sensibile ha poi permesso di sfruttare il redshift gravitazionale in un brillante esperimento<sup>78</sup> il cui risultato costituisce oggi una delle convalide più attendibili della relatività generale. In esso, vengono confrontate le frequenze di due sorgenti di radiazione elettromagnetica identiche, ma poste a quote diverse, una sulla cima e l'altra alla base di una torre alta circa venti metri. La differenza relativa risulta dell'ordine di  $10^{-15}$ , ma la sua precisa misura si scosta di un mero 1% da quanto prevede la teoria. #

Altri effetti relativistico-generalisti furono previsti e verificati con buona o accettabile precisione. Ci limiteremo qui a ricordarne tre, e cioè:

(d) l'esistenza di una “radiazione (elettromagnetica) cosmica di fondo” (CMB, Cosmic Microwave Background) a ca. 3 K, residuo fossile della congetturale grande esplosione iniziale, caratterizzata

---

<sup>76</sup> Vedi G.C. Mc Wittie, “General Relativity and Cosmology”, Wiley (1956), per le analoghe osservazioni effettuate in concomitanza con eclissi solari dal 1919 al 1952. Due altre osservazioni dello stesso tipo erano state tentate *prima* del 1919, nel 1912 in Brasile e nel 1914 in Crimea; ma entrambe si conclusero con un nulla di fatto, a causa delle avverse condizioni atmosferiche la prima, e dello scoppio della guerra mondiale la seconda. Il fallimento di questi due primi esperimenti sulla deflessione della luce ad opera della gravità solare fu in fondo un bene per Einstein, perché a quei tempi egli non aveva ancora sviluppato completamente la teoria relativistica della gravitazione, e la sua previsione sull'ammontare della deflessione la sottostimava di un fattore 2. Tra le convalide della relatività generale, la “retrodizione” della precessione di Mercurio (fu infatti fondata sulle effemeridi astronomiche già disponibili piuttosto che su nuove osservazioni), oltre che prima in ordine di tempo, fu anche molto più solida della “predizione” della deflessione della luce da parte del sole; ma curiosamente (anche se non troppo), mentre la notizia della prima rimase confinata agli ambienti scientifici, la seconda fu investita da un enorme clamore mediatico, che fece di Einstein una intramontabile star internazionale.

<sup>77</sup> D.M. Popper et al., Astr. Journ. **120**, 316 (1954). Per simili studi su nane bianche, vedi J.L. Greenstein, V. Trimble, Astr. Journ. **149**, 283 (1967).

<sup>78</sup> R. Pound, G. Rebka: “Apparent weight of photons”, Phys. Rev. Lett., **4**, 337 (1960), e successive versioni più sofisticate.

da un alto grado di isotropia e da una distribuzione energetica tipica dell'equilibrio termico, entrambe previste dai modelli evolutivi del cosmo includenti una fase inflativa;

(e) il ritardo di segnali elettromagnetici dovuto al loro attraversamento di una regione spaziale con forte campo gravitazionale (rispetto alle previsioni che non tengano conto di questo fatto);

(f) la possibile formazione di immagini multiple di oggetti celesti situati dietro grandi galassie, e più in generale, la possibilità che queste possano comportarsi come vere e proprie “lenti” attraverso le quali osserviamo oggetti più lontani. #

Come già (a) e (b), (e) e (f) devono classificarsi come effetti “ottici” della gravità. Seguono brevi commenti su (d), (e) e (f).

Su (d): La CMB fu scoperta in modo quasi casuale nel 1964 da A. Penzias (1933-) e R. Wilson (1936-) durante la calibrazione di un'antenna a microonde progettata per le comunicazioni satellitari, e mentre esperimenti mirati alla sua rivelazione erano già in via di realizzazione. La radiazione risultò avere un altissimo (entro ca.  $10^{-5}$ ) grado di isotropia ed un preciso (entro ca.  $10^{-4}$ ) spettro di equilibrio termico intorno alla temperatura di 2,728 K. La scoperta della CMB (per la quale Penzias e Wilson ricevettero il Nobel nel 1978) fu *veramente fondamentale*, segnando in pratica la fine della lunga diatriba tra i sostenitori della teoria del big-bang di Friedmann-Lemaître e quelli della “teoria dello stato stazionario”, proposta da Hoyle, Gold (Thomas, 1920-2004) e Bondi (Herman, 1919-2005).<sup>79</sup>

Su (e): Il ritardo dei segnali elettromagnetici fu osservato nel 1960 utilizzando intensi impulsi radar inviati verso Venere o Mercurio quando questi pianeti si trovavano al bordo del Sole, e da essi riflessi.

Su (f): La formazione di immagini multiple, effetto noto come “di lente gravitazionale”, fu osservata per la prima volta agli inizi degli anni '80 e riguardò una quasar situata appunto dietro una galassia abbastanza trasparente. #

Ulteriori importanti conferme sperimentali, sulle quali sorvoliamo, si sono registrate negli ultimi 2-3 decenni. Alcune implicazioni della teoria sono invece ancora oggetto di ricerca, prima tra tutte quella della rivelazione della radiazione di gravità che essa prevede; e ciò sia sotto la forma di tenuissime vibrazioni meccaniche di antenne massive (sopra-raffreddate) che come perturbazioni della metrica rivelabili da grandi (parecchi km) o grandissime (intersatellitari, attualmente in progetto) antenne interferometriche. Come naturale, il grande problema delle antenne terrestri è quello del rumore che maschera i possibili segnali utili, problema al quale si cerca di ovviare

---

<sup>79</sup> Alcune importanti divergenze tra le iniziali stime di Hubble sull'età dell'universo (ca 1,8 miliardi di anni) e quelle decisamente maggiori che dovevano presupporre sulla base di altre e indipendenti valutazioni furono gradualmente appianate dalle successive ricerche di W. Baade (1952, ca 3,6 miliardi di anni) e soprattutto di A. Sandage, che intorno al 1960 portò l'età in questione ad un valore compreso tra i 10 e i 20 miliardi di anni (le stime attuali si aggirano sui 14 miliardi). Questi valori corrispondono a dimensioni dell'universo potenzialmente visibile di circa  $10^{26}$  m.

mediante tecniche di coincidenza remota. Si può infine ricordare che recenti osservazioni della pulsar binaria PSR 1913+16 stabiliscono che questo sistema perde energia ad un tasso corrispondente con buona approssimazione all'emissione di onde di gravità secondo il modello relativistico.

Nel concludere questa breve sintesi, non possiamo non rimarcare che la teoria geometrica della gravitazione di Einstein (o secondo alcuni, di Einstein-Hilbert) è talmente attraente e profonda, e sembra andare così al cuore della fisica, che una sua ormai estremamente improbabile falsificazione – beninteso nella scala *macroscopica* alla quale essa deve essere riferita – costituirebbe senza dubbio un drammatico vulnus per la filosofia naturale contemporanea.

## 9.2 SULLA GEOMETRIA DI UNA VARIETÀ LORENTZIANA

Questa seconda sezione del capitolo approfondisce la conoscenza della geometria di una varietà lorentziana <sup>1</sup> 4-dim  ${}^rL^4$ , o più in generale  $(n \geq 2)$ -dim  ${}^rL^n$ , o più in generale ancora pseudoriemanniana  $(n \geq 2)$ -dim  ${}^rM^n$ . Il nuovo materiale è spesso interpolato ad un riepilogo di nozioni già illustrate sulla stessa materia.

Ricordiamo che con le nostre convenzioni la segnatura di una varietà lorentziana  $(n \geq 2)$ -dim è  $\langle n-1, 1 \rangle$  (piuttosto che  $\langle 1, n-1 \rangle$ ), e che la CdC  $r$  di una varietà pseudoriemanniana è assunta uguale a 3 per le necessità correnti, e quindi quella della sua metrica (o di qualunque altro tensore di rango  $\geq 1$ ) uguale a 2. Numereremo progressivamente le brevi sessioni contenenti le definizioni e i teoremi di interesse, spesso integrate(i) da commenti (C).

### 9.2.1) PARTE PRIMA: APPROFONDIMENTI ALGEBRICI

Cominceremo con alcuni teoremi sull'algebra delle forme bilineari-quadratiche che abbiamo enunciato senza dimostrazione nella S.sez. 2.3.1.

**§1. Teorema della base ortogonale** (v. S.sez. 2.3.1, (T7)): «In uno spazio semieuclideo  $n$ -dim  $\{E_{(n)}, B\}$  esiste una base  $B$ -ortogonale» (con  $E_{(n)}$  si è indicato lo spazio  $R$ -lineare  $n$ -dim supporto dello spazio semieuclideo in oggetto).

Dim: Si ottiene per induzione sulla dimensione  $n$ . Cominciamo col provare l'implicazione induttiva «Se il generico  $SS$   $(n-1)$ -dim di  $\{E_{(n)}, B\}$  ha una base ortogonale rispetto alla restrizione ad esso di  $B$ ,  $\{E_{(n)}, B\}$  ha una base  $B$ -ortogonale». Se  $B$  non è identicamente nulla su  $E_{(n)}$  (nel qual caso la tesi induttiva sarebbe ovvia) esiste un elemento  $e_n$  di  $E_{(n)}$  per cui  $(^\circ) Q(e_n) \neq 0$ . Poniamo  $H =: \text{vect}_{E_{(n)}}\{e_n\}$ ,  $SS$  1-dim di  $E_{(n)}$ . Il  $SS$   $(n-1)$ -dim di  $\{E_{(n)}, B\}$   $B$ -ortogonale a  $H$  è  $H^\perp = \{x(\in E_{(n)}) | \forall y(\in H) \{B(x, y) = 0\}\} \equiv \{x(\in E_{(n)}) | B(x, e_n) = 0\}$ , v. ancora S.sez. 2.3.1. Per la  $(^\circ)$ ,  $e_n \notin H^\perp$ , per cui  $H$  e  $H^\perp$  non possono avere che  $\{0\}$  in comune,  $(*) H \cap H^\perp = \{0\}$ . Ogni elemento di  $E_{(n)}$  è allora esprimibile come somma di un elemento di  $H$  e di un elemento di  $H^\perp$  entrambi unicamente determinati, ovvero  $(^+) E_{(n)} = H \oplus H^\perp$ , dove  $\oplus$  denota somma diretta esterna, cfr. S.sez. 8.3.1. D'altra parte per l'ipotesi induttiva  $H^\perp$  ha una base  $B$ -ortogonale (rispetto alla restrizione di  $B$

---

<sup>1</sup> Tale varietà potrebbe anche dirsi "einsteiniana"; ma questo attributo ha un significato più specifico in quanto la metrica einsteiniana è determinata dalle equazioni gravitazionali e dalle condizioni accessorie.

a  $H^\perp$ ), diciamo  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ . La  $(\dagger)$  equivale allora a dire che  $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\}$  è una base di  $E_{(n)}$ . Questa base è evidentemente B-ortogonale: infatti  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  è B-ortogonale (rispetto alla restrizione di B a  $H^\perp$ ; ipotesi induttiva), mentre ogni elemento di  $H^\perp$  è B-ortogonale a  $e_n$  per costruzione, ossia  $B(e_i, e_n) = 0 \forall i = 1, \dots, n-1$ . Il primo passo della tesi è così provato.

Ripetiamo ora lo stesso ragionamento sostituendo a  $E_{(n)}$  il suo generico SS  $(n-1)$ -dim, e a B la relativa restrizione a questo SS  $(n-1)$ -dim; e così via, fino a che retrocedendo perveniamo all'implicazione (vera) «se ogni SS 1-dim del generico SS 2-dim di  $\{E_{(n)}, B\}$  ha una base B-ortogonale (rispetto alla relativa restrizione di B), quel SS 2-dim di  $E_{(n)}$  ha una base B-ortogonale (rispetto alla restrizione ad esso di B).» In questo ultimo caso l'antecedente dell'implicazione è banalmente vera.<sup>2</sup> Concludiamo così che il generico SS 2-dim di  $E_{(n)}$ , e tornando ad avanzare il generico SS 3-dim di  $E_{(n)}$ , ..., e infine  $E_{(n)}$  stesso, hanno tutti una base B-ortogonale rispetto alle corrispondenti restrizioni di B, e nell'ultimo caso rispetto a B stesso. Il teorema della base B-ortogonale è così provato. #

(C) Una indicazione intuitiva della validità del teorema è data dal confronto tra il numero dei parametri disponibili e quello delle condizioni da soddisfare. Partendo da una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  di  $E_{(n)}$ , una base generica si ottiene da questa mediante una  $(n \times n)$ -matrice di automorfismo, mentre le condizioni di B-ortogonalità sono  $n(n-1)/2$ ; la differenza in oggetto è pertanto  $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ , positiva per ogni  $n > 1$  (questo fatto suggerisce che vi siano, come suol dirsi,  $\infty^{n(n+1)/2}$  possibili basi B-ortogonali di  $\{E_{(n)}, B\}$ ). §

**§2. Teorema del rango** (v. S.sez. 2.3.1, (T8)): «Per  $\{E_{(n)}, B\}$  generalmente semieuclideo, il numero degli elementi diagonali diversi da zero della matrice di B, in una base B-ortogonale, non dipende dalla base B-ortogonale prescelta.»

Dim: Sia  $\{e_1, \dots, e_n\} \equiv \{e\}$  una generica base di  $E_{(n)}$ . L'assioma (2.3.1, c4ter), che definisce il SS N di  $E_{(n)}$ , in forza della completezza di  $\{e\}$  su  $E_{(n)}$  può scriversi “ $\forall x (\in E_{(n)}) \{ \forall i (=1 \div n) \{ B(x, e_i) = 0 \} \Rightarrow x \in N \}$ ”. Posto  $x = \sum_{j=1}^n e_j x_j$ , e sottintendendo ormai l'universale rispetto a x, l'assioma diventa “ $\forall i (=1 \div n) \{ \sum_{j=1}^n B_{ij} x_j = 0 \} \Rightarrow x \in N$ ”. Se in particolare  $\{e\}$  è B-ortogonale, si è così ridotti a “ $\forall i \{ \sum_{j=1}^n B_{ij} x_j = 0 \} \Rightarrow x \in N$ ”. Questa dice che, in quella base B-ortogonale, gli  $x \neq 0$  di N hanno un numero di componenti non nulle uguale al più a quello degli elementi diagonali nulli della matrice di B, che è  $n - \rho \equiv \delta$ . Per la definizione,  $\delta$  è anche la dimensione di N. Proviamo ora che  $\rho$  non dipende dalla base B-ortogonale prescelta. Sia  $\{g\}$  una generica base di riferimento di  $E_{(n)}$ ,  $\{g'\}$

<sup>2</sup> Infatti nella implicazione “ $i \neq j \Rightarrow B(e_i, e_j) = 0$ ”, che è la definizione di ortogonalità della base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , l'antecedente è falso se  $n = 1$ , e quindi il conseguente è vero.



un'altra base e denotiamo con  ${}_gB$ ,  ${}_{g'}B$ , le matrici di  $B$  in quelle basi. Poiché  $\{g\}$  e  $\{g'\}$  sono legate da un automorfismo  $L$  secondo  $g' = L \circ g$  (pensando  $g$  e  $g'$  come  $n$ -righe), risulta:

$$(1) \quad {}_gB = {}^tL \circ {}_{g'}B \circ L,$$

(dove al solito il soprascritto sinistro  ${}^t$  vuol dire trasposto). Ma la  $(n \times n)$ -matrice  $L$  è regolare per definizione, e quindi  ${}_{g'}B$  e  ${}_gB$  hanno lo stesso rango (v. S.sez. 2.3.1, (T0)). Se in particolare  $g$  e  $g'$  sono entrambe  $B$ -ortogonali,  ${}_gB$  e  ${}_{g'}B$  sono entrambe diagonali, e il loro comune rango  $\rho$  è il comune numero dei loro elementi diagonali diversi da zero, qed. §

**§3. Teorema di Sylvester** (v. S.sez. 2.3.1, (T9)): «Per  $\{E_{(n)}, B\}$  generalmente semieucledio, il numero degli elementi diagonali maggiori di zero della matrice di  $B$ , in una base  $B$ -ortogonale, non dipende dalla base  $B$ -ortogonale prescelta.»

Dim: Siano  $\{e\}$  e  $\{e'\}$  due basi  $B$ -ortogonali arbitrarie di  $E_{(n)}$ , e ordiniamo gli indici di  $\{e\}$  in modo che  ${}_eB_{ii} > 0$  per  $0 \leq i \leq \pi \leq n$ , intendendosi che  ${}_eB_{ii}$  non è mai  $> 0$  se  $\pi = 0$  e non è mai  $\leq 0$  se  $\pi = n$ ; e similmente ordiniamo gli indici di  $\{e'\}$  con  $0 \leq \pi' \leq n$  in luogo di  $\pi$ . Sia poi  $F =: \text{vect}\{e_1, \dots, e_\pi\}$ ,  $G =: \text{vect}\{e_{\pi+1}, \dots, e_n\}$ ,  $F \perp G$  essendo uguale a  $\{0\}$  se  $\pi = 0$  [se  $\pi = n$ ]; ed allo stesso modo definiamo  $F'$ ,  $G'$  ponendo  $\{e'\}$  in luogo di  $\{e\}$  e  $\pi'$  in luogo di  $\pi$  (quindi essendo  $F' \perp G'$  uguale a  $\{0\}$  se  $\pi' = 0$  [se  $\pi' = n$ ]). Abbiamo allora  $Q(x) > 0$  per  $x \in F \setminus \{0\}$ , e  $Q(x) \leq 0$  per  $x \in G$ ; e similmente  $Q(x) > 0$  per  $x \in F' \setminus \{0\}$ , e  $Q(x) \leq 0$  per  $x \in G'$ . Da queste si deduce che  $F' \setminus \{0\} \cap G = \{0\}$  e  $F \setminus \{0\} \cap G' = \{0\}$ ; o equivalentemente, che  $F' \cap G = \{0\}$  e  $F \cap G' = \{0\}$ . Ora se  $H$  e  $H'$  sono due SS di  $E_{(n)}$  di dimensione  $p$  e rispettivamente  $p'$ , il SS somma  $H + H'$  ha, in generale, dimensione  $\leq p + p'$ ; ma se  $H \cap H' = \{0\}$ , allora  $H + H' = H \oplus H'$  ha dimensione  $p + p'$ , cfr. S.sez. 2.3.1, (T2). Pertanto  $\dim F' + \dim G = \pi' + (n - \pi)$  e  $\dim F + \dim G' = \pi + (n - \pi')$ . Poiché  $F'$  e  $G$  sono SS disgiunti di  $E_{(n)}$ ,  $\dim F' + \dim G \leq n$ , per cui  $\pi' - \pi \leq 0$ . Similmente ponendo  $F$  in luogo di  $F'$  e  $G'$  in luogo di  $G$ , si ottiene  $\pi - \pi' \leq 0$ . In conclusione  $\pi = \pi'$ , qed. #

(C1) Si noti che si passa dall'enunciato del teorema del rango a quello del teorema di Sylvester semplicemente sostituendo “diversi da zero” con “maggiori di zero”. #

(C2) Il teorema del rango e quello di Sylvester uniti tra loro affermano che, indipendentemente dalla base  $B$ -ortogonale prescelta,  $\pi \geq 0$  degli elementi della matrice di  $B$ , nella base  $B$ -ortogonale in oggetto, sono  $> 0$ ,  $\rho - \pi \geq 0$  sono  $< 0$ , e  $n - \rho \geq 0$  sono  $= 0$ . Ordineremo gli indici della base in modo che per primi vengano gli elementi diagonali  $> 0$  (sono  $\pi$ ), poi quelli  $< 0$  (sono  $\rho - \pi$ ), e infine quelli  $= 0$  (sono  $n - \rho$ ). La forma quadratica  $Q(x)$  si scrive allora, in quella base  $B$ -ortogonale,

$$(2) \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{\pi} B_{ii} x_i^2 + \sum_{j=\pi+1}^{\rho} B_{jj} x_j^2,$$

dove le varie componenti, di  $B$  e di  $x$ , hanno il significato usuale. (Se  $\pi = 0$  manca la prima somma a 2° membro e se  $\pi = \rho$  manca la seconda; infine, se  $\pi = 0 \underline{e} \pi = \rho$ ,  $Q(x)$  è identicamente nulla.) L'espressione a 2° membro della (2), lo ripetiamo, non dipende dalla base  $B$ -ortogonale prescelta. #

Come abbiamo visto nella S.sez. 2.3.1, secondo un corollario del teorema di Sylvester (vedi la (2.3.1, 18)), in una base  $B$ -ortogonale convenientemente normalizzata la (2) si riscrive ponendo  $+1$  in luogo dei  $B_{ii}$  della prima somma (se  $\pi > 0$ ) e  $-1$  in luogo dei  $B_{jj}$  della seconda somma (se  $\rho - \pi > 0$ ). Ricordiamo poi che una rappresentazione di  $Q(x)$  di questo tipo si dice canonica, e la corrispondente base normalizzata si dice  $B$ -canonica (o talvolta,  $B$ -semiortonormale). Passando da una base  $B$ -canonica a un'altra, in generale cambiano i valori delle componenti di  $x$ , ma non quello di  $Q(x)$ . Usualmente, il teorema di Sylvester viene direttamente riferito a questa situazione, nella quale esso recita: «la rappresentazione canonica di una forma quadratica  $Q(x)$  su  $E_{(n)}$  di rango  $0 \leq \rho \leq n$  (un intero base-indipendente) è data da

$$(2bis) \quad Q(x) = x_1^2 + \dots + x_\pi^2 - x_{\pi+1}^2 - \dots - x_\rho^2,$$

dove  $0 \leq \pi \leq \rho$  è un intero indipendente dalla base  $B$ -canonica  $\{e\}$  prescelta (al solito, se  $\pi = 0$  mancano i termini positivi, se  $\pi = \rho$  mancano quelli negativi, e se le due condizioni coesistono,  $Q(x)$  è identicamente nulla), e  $x_i$  è la componente di  $x$  rispetto a  $e_i$  secondo l'usuale sviluppo  $x = \sum_{i=1}^{\rho} e_i x_i$ .<sup>3</sup> Se  $\rho = n$ , la (2bis) generalizza il teorema di Pitagora ad un generico spazio pseudoeuclideo  $n$ -dim. §

§4. Si sarà notato che la precedente dimostrazione del teorema della base  $B$ -ortogonale non è costruttiva, in quanto non dà indicazioni pratiche per l'effettiva identificazione di una tale base quale essa sia. Descriveremo ora un metodo costruttivo in tal senso, dovuto a Gauss. Esso ci fornirà anche una dimostrazione costruttiva di esistenza alternativa a quella descritta in §1, e più comunemente considerata nella trattativa.

Siano  $e \equiv \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $e' \equiv \{e'_1, \dots, e'_n\}$  due basi qualsiasi di  $\{E_{(n)}, B\}$ , che a questo punto possiamo ormai supporre pseudoeuclideo ( $\rho = n$ ). Pensando  $e$ ,  $e'$  come  $n$ -righe, torniamo alle (3.1.1, 7), dove  $L$  è una certa  $(n \times n)$ -matrice di automorfismo. Siano poi  $x \equiv \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $x' \equiv \{x'_1, \dots, x'_n\}$  le componenti del generico vettore di  $E_{(n)}$  nella base  $e$  e rispettivamente  $e'$ , da pensare come  $n$ -colonne.<sup>4</sup> Segue dalla  $e \circ x = e' \circ x'$  che

$$(3) \quad x' = {}^c L \circ x,$$

<sup>3</sup> La (2bis) si ritrova immediatamente prendendo la  $Q$  della  $x = \sum_{i=1}^{\rho} e_i x_i$  e ricordando (v. S.sez. 2.3.1) che  $Q(e_i) = +1$  per  $i = 1, \dots, \pi$  e  $Q(e_j) = -1$  per  $j = \pi+1, \dots, \rho$ .

<sup>4</sup> In modo che le matrici  $e$  e  $x$ , o  $e'$  e  $x'$ , siano, come devono, naturalmente applicabili secondo  $e \circ x$ ,  $e' \circ x'$  (essendo inoltre  $e \circ x = e' \circ x'$ , base-indipendente).

dove  ${}^cL$  è la matrice cogrediente di  $L$  (trasposta dell'inversa  $\equiv$  inversa della trasposta). Infine, denotando con  $Q, Q'$  le matrici della forma quadratica associata nella base  $e$  e rispettivamente  $e'$ , abbiamo

$$(4) \quad Q' = L \circ Q \circ {}^tL,$$

secondo le (3.1.1, 8bis). La corrispondente forma quadratica è  $x \circ Q \circ {}^t x = x' \circ Q' \circ {}^t x'$ , base-indipendente. In effetti, sostituendo nel 2° membro di quest'ultima le (3) e (4), e tenuto conto della  ${}^t x' = {}^t x \circ {}^t cL = {}^t x \circ L^{-1}$ , abbiamo  $x' \circ Q' \circ {}^t x' = {}^c L \circ x \circ L \circ Q \circ {}^t L \circ {}^t x \circ L^{-1} = x \circ L^{-1} \circ L \circ Q \circ {}^t L \circ L^{-1} \circ x \equiv x \circ Q \circ {}^t x$ .

Il problema è dunque quello di individuare una trasformazione lineare non singolare  $x \mapsto x'$  (cioè una  ${}^cL$ ) tale che  $x' \circ Q' \circ {}^t x'$  sia una somma diagonale. Illustriamo un protocollo di azioni a questo scopo. Il caso  $n = 1$  è banale, perché  $Q(x) = ax_1^2$  (con  $a \neq 0$ , essendo  $\rho = 1$ ) è automaticamente una somma diagonale. Passando a  $n = 2$ , sia

$$(5) \quad Q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

la forma quadratica di partenza, di rango  $\rho = 2$ . Supponiamo dapprima (caso (I)) che “ $a \neq 0$  vel  $c \neq 0$ ” (ad es.  $a \neq 0$ ), e poniamo  $x'_1 =: x_1 + x_2b/a$ ,  $x'_2 =: x_2$ . Questa trasformazione  $x \mapsto x'$  è non singolare (il suo determinante vale 1) e la sua inversa è  $x_1 = x'_1 - x'_2b/a$ ,  $x_2 = x'_2$ . Sostituendo queste ultime nella (5), troviamo

$$(5bis) \quad Q(x') = ax'^2_1 + ((ac-b^2)/a)x'^2_2,$$

ove  $ac-b^2 \neq 0$  perché  $\rho = 2$ . Questa  $Q(x')$  è una somma diagonale, e sia  $Q'_{11} = a$  che  $Q'_{22} = (ac-b^2)/a$  sono, come devono essere, diversi da zero. Il caso (II), complementare al caso (I), è “ $a = 0$  et  $c = 0$ ”; allora deve essere  $b \neq 0$ , sempre perché  $\rho = 2$ . Porremo quindi  $x'_1 =: x_1 + x_2$ ,  $x'_2 =: x_1 - x_2$ . Anche questa trasformazione  $x \mapsto x'$  è non singolare (il suo determinante è  $-2$ ) e la sua inversa è  $x_1 = (x'_1+x'_2)/2$ ,  $x_2 = (x'_1-x'_2)/2$ . Sostituendo queste nella (5), abbiamo

$$(5ter) \quad Q(x') = b(x'^2_1 - x'^2_2)/2.$$

Anche questa somma è diagonale, e ora  $Q'_{11} = b/2$ ,  $Q'_{22} = -b/2$ , entrambi (come devono) diversi da zero. Un vantaggio di principio di questa procedura sta nel fatto che usando le precedenti trasformazioni lineari  $x \mapsto x'$ , sia nel caso (I) “ $a \neq 0$  vel  $c \neq 0$ ” che nel caso (II) “ $a = 0$  et  $c = 0$ ” (l'uno negazione dell'altro), *non* occorre calcolare la corrispondente matrice  ${}^cL$ , e da questa la corrispondente  $L$  per immetterla nella (4) e avere  $Q'$ , in quanto il risultato di queste operazioni è già in immediata evidenza.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Ad esempio nel caso (I) ( $a \neq 0$ )  ${}^cL$  ha  $(1, b/a)$  per 1ª riga e  $(0, 1)$  per 2ª riga, quindi  $L$  ha  $(1, 0)$  per 1ª riga e  $(-b/a, 1)$  per 2ª riga. Tenuto conto di questo, si trova  $Q'_{11} = L_{11}(Q_{11} {}^tL_{11} + Q_{12} {}^tL_{21})$  (perché  $L_{12} = 0$ )  $= Q_{11} = a$ ,  $Q'_{12} = L_{11}(Q_{11} {}^tL_{12} + Q_{12} {}^tL_{22}) = -ab/a + b = 0 = Q'_{21}$ ,  $Q'_{22} = L_{21}(Q_{11} {}^tL_{12} + Q_{12} {}^tL_{22}) + L_{22}(Q_{21} {}^tL_{12} + Q_{22} {}^tL_{22}) = -b^2/a + c = (ac-b^2)/a$ , come già si sapeva.

Il caso  $n = 2$  poteva essere tralasciato mirando direttamente ad un protocollo per induzione su  $n$  (con partenza da  $n = 1$ ), ma abbiamo preferito presentarlo “in chiaro” con i commenti del caso. Descriviamo ora il protocollo induttivo.

Caso (I):  $Q(x)$  contiene un quadrato (diciamo  $x_1^2$ ) e quindi si scrive, per  $n \geq 2$ :

$$(6) \quad Q(x) = a_1 x_1^2 + 2x_1 M(x_2, \dots, x_n) + N(x_2, \dots, x_n),$$

dove  $a_1 = Q_{11} \neq 0$ ,  $M$  è una forma lineare, e  $N$  una forma quadratica, negli argomenti indicati. La (6) si può riscrivere come

$$(6bis) \quad Q(x) = a_1 (x_1 + M/a_1)^2 - M^2/a_1 + N,$$

dove abbiamo trascurato di trascrivere gli argomenti  $x_2, \dots, x_n$  di  $M$  e di  $N$ . Per l'ipotesi induttiva, la forma quadratica  $N - M^2/a_1$  è esprimibile come  $\sum_{j=2}^n a_j x_j'^2$  per certi  $a_j$  e certe trasformate lineari  $x_j'$  delle  $x_2, \dots, x_n$ . Ponendo  $x_1' =: x_1 + M/a_1$ ,  $x_2' =: x_2$  (banalmente invertibili rispetto a  $x_1, x_2$ ), si ha

$$(7) \quad Q(x') = \sum_{j=1}^n a_j x_j'^2,$$

che è la tesi induttiva nel presente caso (I).

Caso (II):  $Q(x)$  non contiene il quadrato  $x_1^2$  (negazione del caso (I)); ma allora  $x_1$  deve comparire in un termine rettangolare, diciamo in  $x_1 x_2$ , perché se così non fosse  $x_1$  non comparirebbe mai, che è impossibile. Dunque  $Q(x)$  si scrive, per  $n \geq 3$ :

$$(8) \quad Q(x) = b x_1 x_2 + x_1 R(x_3, \dots, x_n) + x_2 S(x_3, \dots, x_n) + T(x_3, \dots, x_n),$$

dove  $b = 2Q_{12} \neq 0$ ,  $R$  e  $S$  sono forme lineari, e  $T$  una forma quadratica, negli argomenti indicati. La (8) si può riscrivere come

$$(8bis) \quad Q(x) = b[(x_1 + S/b)(x_2 + R/b) - RS/b^2] + T,$$

dove abbiamo trascurato di trascrivere gli argomenti  $x_3, \dots, x_n$  di  $R$ ,  $S$  e  $T$ . Per l'ipotesi induttiva, la forma quadratica  $T - RS/b$  è esprimibile come  $\sum_{j=3}^n a_j x_j'^2$  per certe  $a_j$  e certe trasformate lineari  $x_j'$  delle  $x_3, \dots, x_n$ . Ponendo  $x_1' =: x_1 + x_2 + (S+R)/b$ ,  $x_2' =: x_1 - x_2 + (S-R)/b$  (anche queste banalmente invertibili rispetto a  $x_1$  e  $x_2$ ), risulta  $(x_1 + S/b)(x_2 + R/b) = (x_1'^2 - x_2'^2)/4$ , per cui:

$$(9) \quad Q(x') = b(x_1'^2 - x_2'^2)/4 + \sum_{j=3}^n a_j x_j'^2 \equiv \sum_{j=1}^n a_j x_j'^2$$

con  $a_1 = b/4 = Q_{12}/2$ ,  $a_2 = -a_1$ . La (9) è la tesi induttiva nel caso (II). Abbiamo così completamente illustrato il **protocollo di Gauss**; <sup>6</sup> e in questo modo, disponiamo di una dimostrazione costruttiva del teorema della base ortogonale. Va tuttavia rilevato che il ricavare formule esplicite per ricorrenza mediante il metodo di Gauss (come abbiamo fatto per  $n = 2$ ) diventa molto laborioso già per piccoli valori di  $n > 2$  (il lettore può sperimentarlo per  $n = 3$ ). §

---

<sup>6</sup> Questi risultati coincidono con quelli esposti in chiaro per  $n = 2$ ; nel caso (I), con  $a_1 = Q_{11}$ ,  $M = Q_{12}x_2$ ,  $N = Q_{22}x_2^2$ ,  $a_2 = (Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2)/Q_{11}$ ; nel caso (II), con  $R, S$  e  $T$  uguali a zero,  $a_1 = Q_{12}/2$ ,  $a_2 = -a_1$ .

§5. Un metodo che supera queste difficoltà per la costruzione di una base canonica, e fornisce inoltre un risultato di grande portata pratica, è quello che illustreremo qui appresso, dovuto a Jacobi. Al solito, il problema della base canonica non esiste per  $n = 1$ , per cui supporremo sin d'ora  $n \geq 2$ . Il **metodo di Jacobi** presuppone tuttavia una condizione, e cioè che la  $(n \times n)$ -matrice di  $B$ , nella base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  di  $E_{(n)}$  da cui si parte, abbia i suoi minori principali “discendenti” a partire da  $B_{11}$  fino a quello di ordine  $n - 1$  incluso, diversi da zero.<sup>7</sup> Denoteremo questi minori con  $\Delta_1 = B_{11}$ ,  $\Delta_2 = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$ , e così via fino a  $\Delta_{n-1}$ . Data per soddisfatta questa condizione (**condizione di Jacobi**), che potremo scrivere nella forma  $\prod_{i=1}^{n-1} \Delta_i \neq 0$ , il metodo è molto naturale ed intuitivo. A partire dalla base di riferimento  $\{e_1, \dots, e_n\}$  di  $E_{(n)}$ , definiamo i vettori (elementi di  $E_{(n)}$ )  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  mediante il sistema

$$(10) \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1, \\ e'_2 &= \alpha^{(1)}_1 e_1 + e_2, \\ &\dots\dots \\ e'_n &= \alpha^{(n-1)}_1 e_1 + \alpha^{(n-1)}_2 e_2 + \dots + \alpha^{(n-1)}_{n-1} e_{n-1} + e_n, \end{aligned}$$

in cui  $\alpha^{(k)}_i$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $1 \leq i \leq k$ , sono  $1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$  coefficienti da determinare. La  $(n \times n)$ -matrice  $L$  che trasforma  $\{e_1, \dots, e_n\}$  in  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  è sottotriangolare, cioè ha nulli tutti gli elementi al disopra della diagonale principale, che è formata da  $n$  unità. Quindi il suo determinante vale 1, e le (10) sono (unicamente) invertibili rispetto alle  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Altrettanto è vero per le sole prime  $m$  equazioni del sistema (10), con  $1 \leq m \leq n$ , e questo implica che  $\text{vect}\{e'_1, \dots, e'_m\} = \text{vect}\{e_1, \dots, e_m\}$  per ogni tale  $m$ ; ovvero,  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  è una base di  $\text{vect}\{e_1, \dots, e_m\}$  come lo è  $\{e_1, \dots, e_m\}$ .

$n(n-1)/2$  è anche il numero delle coppie ordinate  $\langle i, j \rangle$  di interi  $i, j$  variabili tra 1 e  $n$  per cui è  $i < j$ , e quindi il numero degli elementi sottodiagonali di una  $(n \times n)$ -matrice simmetrica. In conclusione, e come è naturale, i coefficienti  $\alpha^{(k)}_i$  si ricavano imponendo le  $n(n-1)/2$  condizioni  $B'_{ij} \equiv B(e'_i, e'_j) = 0$  per  $i < j$ . Si arriva così, per ogni  $1 \leq k \leq n-1$ , al sistema lineare simmetrico non omogeneo di  $k$  equazioni nelle altrettante incognite  $\alpha^{(k)}_1, \dots, \alpha^{(k)}_k$ :

$$(11) \quad B_{11}\alpha^{(k)}_1 + \dots + B_{1k}\alpha^{(k)}_k = -B_{k+1,1}, \dots, B_{k1}\alpha^{(k)}_1 + \dots + B_{kk}\alpha^{(k)}_k = -B_{k+1,k}.$$

Questo sistema determina unicamente i coefficienti  $\alpha^{(k)}_1, \dots, \alpha^{(k)}_k$  perché il suo determinante è il  $k$ -mo (per  $1 \leq k \leq n-1$ ) minore principale discendente  $\Delta_k$  della  $(n \times n)$ -matrice simmetrica  $\{B_{ij}\}_{i,j=1, \dots, n}$ , per ipotesi diverso da zero (condizione di Jacobi). La base  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ,  $B$ -ortogonale

<sup>7</sup> Ricordiamo che tali minori principali discendenti di ordine 1, ...,  $n$  di una data  $(n \times n)$ -matrice  $A$  sono i determinanti della matrice che si ottiene dalla  $(n \times n)$ -matrice di partenza cancellandovi tutte le righe e colonne salvo la prima (riga e colonna, quindi  $A_{11}$ ), salvo le prime due (righe e colonne, quindi  $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ ), .., salvo le prime  $n-1$  (righe e colonne), e infine non cancellandone alcuna (con il che si è ridotti al determinante della stessa matrice  $A$ ).

per costruzione, è così determinata dalle (10) inserendovi i coefficienti  $\alpha^{(k)}_1, \dots, \alpha^{(k)}_k$  desunti dai sistemi (11) per ogni  $1 \leq k \leq n-1$ . Denoteremo con  $\Delta'_k$  il k-mo minore principale discendente della matrice diagonale  $B' = L \circ B \circ L^t$ . Poiché anche la matrice delle sole prime  $1 \leq m \leq n$  equazioni ha determinante 1, risulta (\*)  $\Delta'_m = \Delta_m$  per ogni tale m. Ma  $\Delta'_m = \prod_{i=1}^m B'_{ii}$ , e quindi, in forza della (\*),

$$(12) \quad B'_{11} = \Delta_1 \quad (m = 1), \quad B'_{11}B'_{22} = \Delta_2 \quad (m = 2), \quad \dots, \quad B'_{11} \dots B'_{nn} = \Delta_n \quad (m = n);$$

ovvero, equivalentemente, avendo posto  $\Delta_0 = 1$ ,

$$(13) \quad B'_{11} = \Delta_1/\Delta_0, \quad B'_{22} = \Delta_2/\Delta_1, \quad \dots, \quad B'_{nn} = \Delta_n/\Delta_{n-1},$$

in cui  $\Delta_n = \det\{B\}$ .

Si noti che tutti i denominatori delle frazioni a 2° membro delle uguaglianze (13) sono diversi da zero in forza della condizione di Jacobi; ma anche i primi membri lo sono, salvo possibilmente quello dell'ultima (cioè  $B'_{nn}$ ), perché non abbiamo escluso la possibilità che il rango  $\rho$  di B sia  $n-1$ , e quindi che  $\Delta_n = 0$ . Compreso questo caso, le (13) forniscono tuttavia gli elementi diagonali della matrice di B nella base B-ortogonale  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  *senza aver calcolato quest'ultima*. (Se interessa, tale base è comunque determinata mediante le (10), una volta calcolati i coefficienti  $\alpha^{(k)}_{1 \leq i \leq k}$  per ogni  $1 \leq k \leq n-1$ , mediante le (11).) §

§6. Esaminiamo ora alcune importanti conseguenze del risultato di Jacobi (13). Supponendo  $\rho = n$  per evitarci alcune banali complicazioni di esposizione, possiamo contare le frazioni a 2° membro delle (13) che sono  $> 0$ ; questo non è altro che l'indice (positivo)  $\pi$  della forma, che non dipende dalla base B-ortogonale usata, in virtù del teorema di Sylvester. Si può così enunciare il corollario:

Cr1: «Se esiste una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  di  $E_{(n)}$  rispetto alla quale i minori principali discendenti  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  della forma non singolare B sono tutti  $\neq 0$ , allora l'indice  $\pi$  della forma è uguale al numero degli n rapporti  $\Delta_m/\Delta_{m-1}$ , per  $1 \leq m \leq n$ , che sono positivi; e viceversa, se l'indice della forma non singolare B è  $0 \leq \pi \leq n$ , allora esiste una base di  $E_{(n)}$  rispetto alla quale  $\pi$  degli n rapporti  $\Delta_m/\Delta_{m-1}$  ( $1 \leq m \leq n$ ) sono positivi.» Dim: esercizio. #

Come caso particolare di Cr1, abbiamo il corollario:

Cr2: «La forma B è definita positiva sse, in una certa base di  $E_{(n)}$ , gli n rapporti  $\Delta_m/\Delta_{m-1}$  (con  $1 \leq m \leq n$ ), o equivalentemente gli n  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , sono tutti positivi.» Dim: esercizio.

Quest'ultimo asserto è noto come **criterio di Sylvester**. #

Un corollario dello stesso tipo, sempre basato sulle (13), è:

Cr3: «L'indice  $\pi$  della forma non singolare B su  $E_n$  è  $n-1$  (ovvero,  $\{E_{(n)}, B\}$  è lorentziano) se e solo se, in una certa base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  di  $E_{(n)}$ , la restrizione della forma a  $\text{vect}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  è definita positiva, e  $\Delta_n < 0$ .» Dim: esercizio. #

Ancora una conseguenza del criterio di Sylvester è la seguente:

Cr4. «Se la forma quadratica che ha per matrice una data matrice simmetrica  $A$  non singolare è definita positiva, quella che ha per matrice  $A^{-1}$  è anch'essa definita positiva.» Dim: esercizio. #

Un teorema (T) dell'algebra delle matrici simmetriche afferma che: «se i primi  $n - 1$  minori principali discendenti di una arbitraria  $(n \times n)$ -matrice simmetrica  $A$  sono positivi, e  $A_{nn} < 0$ , allora (condizione sufficiente!)  $\det\{A\} < 0$ .»

Dim: Sia  $A_{(n-1)}$  la matrice che si ottiene da  $A$  sopprimendone l'ultima riga e l'ultima colonna, per ipotesi a determinante  $> 0$  e quindi non singolare. Sia poi  $(a, A_{nn})$  l'ultima riga di  $A$ , dove  $a$  è una  $(n-1)$ -riga. Si può allora provare <sup>8</sup> che

$$(14) \quad \det\{A\} = \det\{A_{(n-1)}\} [A_{nn} - {}^t a \circ A_{(n-1)}^{-1} \circ a],$$

dove  ${}^t a$  è la  $(n-1)$ -colonna trasposta di  $a$ , e  $A_{(n-1)}^{-1}$  è la matrice inversa di  $A_{(n-1)}$ . In forza di Cr4, è  ${}^t a \circ A_{(n-1)}^{-1} \circ a \geq 0$ , l'uguaglianza valendo sse  $a = 0$ . La tesi segue dal fatto che  $\det\{A_{(n-1)}\} > 0$ . #

(C) La tesi continua a valere se  $A$  è non singolare e in luogo di  $A_{nn} < 0$  si assume la più debole  $A_{nn} \leq 0$ . Infatti il contenuto delle [ ] nella (14) deve allora essere  $< 0$  perché  $A_{nn}$  e  ${}^t a \circ A_{(n-1)}^{-1} \circ a$  non possono essere simultaneamente nulli: questo comporterebbe che l'ultima riga di  $A$  sia nulla, mentre  $\det\{A\} \neq 0$  per ipotesi. #

Da Cr3 seguono poi:

Cr5: « $\{E_{(n)}, B\}$  è lorentziano se (condizione sufficiente), in una certa base di  $E_{(n)}$ , i primi  $n - 1$  minori principali discendenti di  $B$  sono positivi, e  $B_{nn} < 0$ .» #

Cr6: Il criterio di Sylvester ha un'altra interessante conseguenza attinente all'algebra delle matrici simmetriche. Siano  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base di  $\{E_{(n)}, B\}$  e  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  i minori principali discendenti di  $B$  in quella base. Secondo il criterio di Sylvester, la  $\forall(i=1 \div n)\{\Delta_i > 0\}$  equivale a che  $B$  sia definita positiva su  $E_{(n)}$ . Operiamo ora una permutazione arbitraria sugli elementi di  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , e sia  $\{^*e_1, \dots, ^*e_n\}$  la base permutata. Ovviamente  $E_{(n)} = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\} = \text{vect}\{^*e_1, \dots, ^*e_n\}$ . Siano  $^*\Delta_1, \dots, ^*\Delta_n$  i minori principali discendenti di  $B$  nella base permutata; allora  $^*\Delta_n \equiv \Delta_n$ , mentre in generale  $^*\Delta_i \neq \Delta_i$  per  $1 \leq i \leq n-1$ . Il fatto che  $B$  sia definita positiva su  $E_{(n)}$  non dipende dalla base cui si fa riferimento; e quindi,

$$(15) \quad \text{“}^*\Delta_n \equiv \Delta_n > 0\text{”} \Rightarrow \text{“}\forall(i=1, \dots, n-1)\{^*\Delta_i > 0\} \Leftrightarrow \forall(i=1, \dots, n-1)\{\Delta_i > 0\}\text{”}.$$

<sup>8</sup> Si veda ad es. in R.K.S. Rathore: “Linear Algebra and Applied Matrix Theory”, Chpt. 3 (Canonical Factorizations), [rksr@iitk.ac.in](mailto:rksr@iitk.ac.in). La verifica diretta della (14) per  $n = 2$  è banale: detta al solito  $(a, b)$  la 1<sup>a</sup> riga e  $(b, c)$  la 2<sup>a</sup> riga di  $A$ , il 2° membro della (14) diventa  $a(c - a^{-1}b^2)$ . Se  $a > 0$  e  $c \leq 0$ , la tesi  $\det A < 0$  segue immediatamente. Ma questo tipo di prova diretta diventa già laborioso per  $n = 3$ : per ottenere la tesi  $\det\{A\} < 0$ , occorre esaminare separatamente ben sei casi, e cioè, detta  $\{a_{ik}\}_{i,k=1,2,3}$  la matrice  $A$ , i casi: 1)  $a_{13}a_{23} = 0$ ; 2)  $a_{12} = 0$ ; 3)  $a_{13}a_{23} > 0$  et  $a_{12} < 0$ ; 4)  $a_{13}a_{23} < 0$  et  $a_{12} > 0$ ; 5)  $a_{13}a_{23} > 0$  et  $a_{12} > 0$ ; 6)  $a_{13}a_{23} < 0$  et  $a_{12} < 0$ .

Evidentemente anche la (15) è un teorema dell'algebra matriciale, valido per matrici quadrate simmetriche qualsiasi. <sup>9</sup> §

### 9.2.2) PARTE SECONDA: APPROFONDIMENTI ANALITICI

Per gli scopi presenti, in cui sviluppiamo una trattazione locale dei problemi, la varietà  $L^4$  potrebbe assumersi elementare, sebbene questa limitazione sia presuntivamente impropria dal punto di vista fisico. In ogni caso  $x \equiv \langle x^1, \dots, x^4 \rangle$  denoterà la coordinata del punto di  $L^4$  di interesse nella carta corrente. Gli indici tensoriali si riferiranno a questa carta, quindi alle basi canoniche  $\{dx^i\}_{i=1+4}$  e  $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1+4}$ . Al solito, la metrica  $g_{(2)}$  della  $L^4$  si deve presupporre *uniformemente* non singolare: cioè  $\det\{g_{ik}\}_{i,k=1+4}$ , che nel seguito scriveremo brevemente  $[g]$ , deve essere  $\neq 0$  in tutta la  $L^4$ . Come abbiamo già osservato, questa proprietà è carta-indipendente: infatti la legge di trasformazione dai  $g_{ik}$  ai  $g'_{ij}$ , doppiamente covariante, implica che  $[g'] \equiv \det\{g'_{ik}\}_{i,k=1+4} = (\det\{\partial(x)/\partial(x')\})^2 [g]$ , e lo jacobiano quadrato  $(\det\{\partial(x)/\partial(x')\})^2$  è per definizione  $> 0$ . Ciò prova che in effetti non soltanto la non-singularità di  $g_{(2)}$ , ma anche il segno del suo determinante è carta-indipendente.

La dimensione pari di  $L^4$  implica che  $[g]$  sia funzione pari delle  $g_{ik}$ , e quindi che scambiando  $g_{(2)}$  con  $-g_{(2)}$  (una scelta convenzionale) non si altera il valore di  $[g]$ .

Seguono definizioni (già note e no), teoremi e commenti.

§1. Sia  $v = v(x) \neq 0$  un campo vettoriale (brevemente, un vettore) di  $L^4$ . Esso si dice isotropo (o light-like) se  $g_{ik}v^i v^k = 0$ .

(C) Alcuni autori dicono  $v$  “nullo” anziché “isotropo”; una scelta a nostro avviso poco felice, perché confondibile con  $v = 0$  (che ha ben diverso significato). Una possibile alternativa è quella di nominare  $v$  come “di magnitudine nulla”. # §

§2. Se  $v$  non è isotropo, se ne può introdurre l'indicatore  $\varepsilon = \varepsilon(v) = \pm 1$  richiedendo che  $\varepsilon(v)g_{ik}v^i v^k$  sia  $> 0$ . Ovviamente, “ $\varepsilon(v) = +1$  [−1]”  $\Leftrightarrow$  “ $v$  è space-like [time-like]”.

(C) È chiaro che  $\varepsilon(v)g_{ik}v^i v^k \equiv |g_{ik}v^i v^k|$ ; ma usando tale valore assoluto, si perde cognizione del segno di  $g_{ik}v^i v^k$ , e questo può essere svantaggioso in certe circostanze. Un esempio della utilità dell'indicatore è quello di cui nell'App. 4.A, ove l'indicatore è stato introdotto. §

<sup>9</sup> La verifica diretta della (15) nel caso elementare  $n = 2$  è al solito banale. Ancora denotando con (a,b) la 1<sup>a</sup> riga, e con (b,c) la 2<sup>a</sup> riga, della matrice simmetrica di partenza, vi è allora una sola possibile permutazione, quella che comporta lo scambio tra a e c, e la (15) diventa “ $ac - b^2 \equiv ca - b^2 > 0 \Rightarrow “a > 0 \Leftrightarrow c > 0”$ ”. Sia infatti, ad esempio,  $a > 0$ , e supponiamo (per assurdo)  $c \leq 0$ ; questa ipotesi contraddice la  $ac - b^2 > 0$ , da cui “ $a > 0 \Rightarrow c > 0$ ”, qed. Tuttavia sarebbe molto laborioso, e praticamente impossibile, verificare la (15) in analogo modo diretto per  $n$  abbastanza maggiore di 2.



§3. Sia  $I \equiv (u_1, u_2)$ , con  $u_1 < u_2$ , un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una applicazione di  $I$  in  $\mathbb{R}^n$  di CdC  $h \geq 1$ , e tale che la n-colonna (o la n-riga)  $\{d_u\varphi\}$ ,  $\varphi(u) = x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle \in \mathbb{R}^n$ , abbia rango 1 in  $I$ .  $\Gamma =: \varphi(I)$  si dice una **h-curva normale di  $\mathbb{R}^n$** . Sia  $I'$  un altro simile intervallo aperto di  $\mathbb{R}$ , e  $K: I \rightarrow I'$  un h-diffeomorfismo di  $I$  su  $I'$ . Allora  $\varphi' =: \varphi \circ K^{-1}: I' \rightarrow \mathbb{R}^n$  fornisce la stessa h-curva  $\Gamma$  precedente sotto **riparametrizzazione** (da  $u \in I$  a  $u' = K(u) \in I'$ ) attraverso  $K$ . Infatti  $d_{u'}K^{-1} = (d_uK)^{-1} \neq 0$  in  $I'$  e rispettivamente in  $I$  (per definizione di diffeomorfismo); quindi  $\varphi(u) = \varphi'(u'=K(u))$  e  $d_{u'}\varphi' = d_{u'}K^{-1}d_u\varphi$ , per cui anche  $\{d_{u'}\varphi'\}$  ha rango 1 in  $I'$ . In conclusione  $\Gamma = \varphi(I) = \varphi'(I')$ .

La riparametrizzazione  $K$  di  $\Gamma$  si dice **equivversa [antiversa]** se  $d_uK > 0$  [se  $d_uK < 0$ ] in  $I$ . Le stesse definizioni e conclusioni valgono se in luogo di  $\mathbb{R}^n$  vi è il dominio di una carta di una generica varietà differenziabile n-dim di CdC  $\geq h$ . §

§4. Si supponga ora tale varietà di CdC  $h$  pseudoriemanniana con metrica  $g_{ik} = g_{ik}(x)$  nella data carta (quindi le  $g_{ik}(x)$  hanno CdC  $h - 1$ ). Se

$$(1) \quad g_{ik}(x)d_u x^i d_u x^k \neq 0$$

lungo la h-curva normale  $\Gamma$ , una riparametrizzazione equivversa di  $\Gamma$  di CdC  $h$  è offerta dalla

$$(2) \quad s = s(u) = \int_{u_1}^{u_1 \leq u \leq u_2} |g_{ik}(x(t))d_t x^i(t)d_t x^k|^{1/2} dt,$$

o equivalentemente dalla

$$(2') \quad d_u s = |g_{ik}d_t x^i d_t x^k|^{1/2}$$

sotto la condizione iniziale  $s(u_1) = 0$ . ( $d_u s(u)$  ha CdC  $h-1$ , e quindi  $s(u)$  ha effettivamente CdC  $h$ .)

(C) La richiesta (1) si collega al fatto che il valore assoluto di una generica funzione  $C^1$  è continuo ma non necessariamente  $C^1$  dove la funzione si annulla; quindi, senza la clausola (1),  $s \leftrightarrow u$  non sarebbe un 1-diffeomorfismo. Si noti anche che  $|g_{ik}d_t x^i d_t x^k|^{1/2} dt$  non varia [cambia segno] a fronte di una riparametrizzazione 1-diffeomorfa equivversa [antiversa]  $t \leftrightarrow t'$ , perché  $|dt'/dt|dt = dt' \text{sign}(dt'/dt)$ . §

§5. Torniamo ora alla (3.3.2, 9) come definizione formale della derivata covariante di un  $(\kappa \geq 0)$ -tensore (di CdC 1) di una varietà p.riemanniana (di CdC 2) in termini dei Chr2, a loro volta definiti formalmente in termini della metrica e delle sue derivate parziali. Se  $\tau_{\dots}$  è componente (generalmente mista) di un tale  $\kappa$ -tensore, alla luce della (3.3.2, 9)  $\tau_{\dots/d}$  è componente di un  $(\kappa+1)$ -tensore con gli stessi indici di covarianza/controvarianza di  $\tau_{\dots}$  più un (ultimo) indice ( $_d$ ) di covarianza.

Sempre la (3.3.2, 9) mostra che l'operatore  $_d$  è lineare e leibniziano. Ricordiamo inoltre che (denotando, come è talvolta comodo, la derivata parziale standard rispetto a  $x^d$  come  $_{,d} g_{ik/d} = g_{ik,d} - (\Gamma_{kid} + \Gamma_{ikd}) \equiv 0$  (teorema di Ricci); e che, similmente,  $g_i^k{}_{/d} \equiv 0$  e  $g^{ik}{}_{/d} \equiv 0$ ).

(C) Oltre alla disponibilità dei Chr2, la derivabilità covariante presuppone soltanto la derivabilità ordinaria della componente tensoriale derivanda. Come è naturale, usualmente se ne richiede la CdC 1. §

§6. Nelle condizioni di cui in §5, sia  $\Gamma$  una 1-curva normale  $x = x(u)$ . Se  $\tau_{\dots} = \tau_{\dots}(x)$  è la componente  $\dots$  di un campo  $\kappa$ -tensoriale di CdC 1, la  $\tau_{\dots}/_d d_u x^d$  è la “u-derivata assoluta (o geodetica) lungo  $\Gamma$ ” della  $\tau_{\dots}$  (v. S.sez. 8.1.3); evidentemente, questa è componente di un  $\kappa$ -tensore con gli stessi indici di covarianza/controvarianza di  $\tau_{\dots}$ . Anche la derivata assoluta è lineare e leibniziana; essa si denota  $D_u \tau_{\dots}$  (o talvolta  $\delta_u \tau_{\dots}$ ; nella S.sez. (8.1.3) abbiamo anche scritto  $(D_u \tau_{(\kappa)})_{\dots}$  in luogo di  $D_u \tau_{\dots}$ ). A rigore questa notazione è incompleta, perché non reca traccia esplicita di  $\Gamma$ ; ma se opportuno, essa si può completare scrivendo  ${}^\Gamma D_u$  invece di  $D_u$ . Se  ${}^\Gamma D_u \tau_{\dots} = 0$ ,  $\tau$  si dice “trasportato parallelamente” (secondo Levi-Civita; o anche “traslato”) lungo  $\Gamma$ ” (v. S.sez. 8.1.3). Ricordiamo che il prodotto interno  $v^i w_i$  di due vettori entrambi traslati lungo  $\Gamma$  è costante; quindi lo è anche  $u^i u_i$  se  $u$  è un vettore traslato.

Sia ora  $\Gamma$  una 2-curva normale  $x = x(u)$ . Se

$$(3) \quad D_u d_u x \ (\equiv {}^\Gamma D_u d_u x) = 0,$$

cioè se il vettore tangente a  $\Gamma$ ,  $d_u x$ , è traslato lungo  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  si dice una “geodetica” di  ${}^{\mathbb{R}^2} L^n$ , e le  $n$  equazioni (3) si dicono appunto “equazioni geodetiche” (v. S.sez. 8.1.2). Le geodetiche sono dunque curve “traslate lungo se stesse”.

Le (3) sono equazioni differenziali ordinarie quasi-lineari del 2° ordine in forma normale, e scritte in modo esplicito hanno la forma:

$$(3') \quad d_u^2 x^i + \Gamma_{jk}^i d_u x^j d_u x^k = 0.$$

Infatti  $D_u d_u x^i = (d_u x^i)/_d d_u x^d = [\partial_d (d_u x^i) + d_u x^r \Gamma_{rd}^i] d_u x^d$ . Ma  $\partial_d (d_u x^i) d_u x^d = d_u^2 x^i$ , qed. Come ci si aspetta, SDO come (3) o (3') *non* restano invariati in forma, in generale, a fronte di una trasformazione diffeomorfa della variabile indipendente ( $u$  nel caso in questione). Poiché le equazioni sono del 2° ordine, converrà prevedere un 2-diffeomorfismo  $u \leftrightarrow u'$ .

Scrivendo al solito  $x'(u')$  per  $x(u(u'))$ , e sempre sottintendendo il superscritto  ${}^\Gamma$  in  $D$ , si trova  $D_{u'} d_{u'} x' = (d_{u'} u)^2 (D_u d_u x - d_{u'} x' d_u^2 u')$ ; quindi alla  $D_u d_u x = 0$  corrisponde la  $D_{u'} d_{u'} x' = - (d_{u'} u)^2 d_{u'} x' d_u^2 u'$ , diversa dalla  $D_u d_u x = 0$  salvo che per diffeomorfismi  $u \leftrightarrow u'$  *lineari affini con fattore  $\neq 0$*  (per i quali è  $d_u^2 u' = 0$ ). La classe di equivalenza dei parametri per i quali il SDO (3) o (3') di una geodetica è del tipo  $D_u d_u x = 0$  si dice **classe dei parametri affini a s** (sottintendendo “lineari” e “con fattore  $\neq 0$ ”), o semplicemente dei parametri **speciali**, ed è completamente definita da un suo rappresentante.

Per le proprietà generali dei SDO del tipo (3'), essi hanno una e una sola soluzione assegnando due convenienti condizioni accessorie (teorema di Cauchy); ad esempio le condizioni iniziali  $x^i(u=u_1)$ ,  $d_u x^i(u=u_1)$  (allora la soluzione esiste unica in un intorno di  $u_1$ ), oppure le condizioni agli estremi  $x^i(u=u_1)$ ,  $x^i(u=u_2)$  (la soluzione esiste unica se gli estremi non sono troppo lontani), ecc. §

§7. Teorema T1. « $g_{ik}(x)d_u x^i d_u x^k = \text{cost}$  (rispetto a  $u$  affine) è un integrale primo del SDO geodetico (3  $\equiv$  3').»

Dim.: Per brevità, conviene scrivere  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(x, d_u x)$  per  $g_{ik}(x)d_u x^i d_u x^k$ . Per ipotesi, valgono le (3); quindi, e ricordando che  $D_u g_{ik} = 0$ , si ha  $0 = 2g_{ik}d_u x^i D_u d_u x^k = D_u g_{ik}d_u x^i d_u x^k + 2g_{ik}d_u x^i D_u d_u x^k \equiv D_u \mathcal{M} = d_u \mathcal{M}$  (perché  $\mathcal{M}$  è uno scalare); quindi la tesi. #

Le geodetiche si possono dividere in tre classi, a seconda che la associata costante  $\mathcal{M}$  sia  $> 0$ ,  $= 0$ , o  $< 0$ .<sup>10</sup> Nel caso di  $L^4$ , le geodetiche della prima classe si dicono **spaziali** (o space-like), quelle della seconda classe **isotrope** (o “nulle”), e quelle della terza classe **temporali** (o time-like).

Teorema T2: «Le equazioni geodetiche (3  $\equiv$  3') sono equazioni di EL del problema variazionale con lagrangiana  $\mathcal{M}$

$$(4) \quad \delta \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{M}(x, d_u x) du = 0,$$

(e per prefissati valori agli estremi  $x(u_1) \equiv x_1$  e  $x(u_2) \equiv x_2$ ).»

Dim.: le equazioni di EL per la (4) sono

$$(4') \quad 0 = d_u(\partial \mathcal{M} / \partial (d_u x^i)) - \partial \mathcal{M} / \partial x^i = d_u(2g_{ik}d_u x^k) - \partial g_{jk} / \partial x^i d_u x^j d_u x^k;$$

quindi, denotando per brevità con  $x^{\bullet i}$  la  $d_u x^i$  e ancora con  $_{,i}$  la derivata parziale standard rispetto a  $x^i$ , abbiamo  $0 = d_u(2g_{ik}x^{\bullet k}) - g_{jk,i}x^{\bullet j}x^{\bullet k} \equiv 2g_{ik}x^{\bullet \bullet k} + (g_{ik,j} + g_{ij,k} - g_{jk,i})x^{\bullet j}x^{\bullet k}$  (perché  $d_u g_{ik} = g_{ik,j}x^{\bullet j}$ , e  $2d_u g_{ik}x^{\bullet k} = (g_{ik,j} + g_{ij,k})x^{\bullet j}x^{\bullet k}$ ). Contraendo questa con  $g^{ih}$  e ricordando le definizioni dei Chr1 e Chr2 si ottiene  $0 = d_u x^{\bullet h} + \Gamma_{jk}^h x^{\bullet j}x^{\bullet k}$ , cioè le (3'), qed. §

§8. Sia  $\Gamma$  è una geodetica non isotropa. Usando il suo arco  $s$  come parametro, in forza della (2') si ha immediatamente  $1 = |g_{ik}d_s x^i d_s x^k|^{1/2}$ , e quindi  $g_{ik}d_s x^i d_s x^k = \varepsilon$ , dove  $\varepsilon$  è l'indicatore di  $d_s x$  (costante lungo  $\Gamma$ !). Posto  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, x^{\bullet}) = |\varepsilon \mathcal{M}(x, x^{\bullet})|^{1/2}$ , si ha  $\mathcal{M} = \varepsilon \mathcal{L}^2$ , e dunque:

$$(5) \quad 0 = d_u(\partial \mathcal{M} / \partial x^{\bullet i}) - \mathcal{M}_{,i} = \varepsilon [d_u(2\mathcal{L} \partial \mathcal{L} / \partial x^{\bullet i}) - 2\mathcal{L} \mathcal{L}_{,i}].$$

Ma  $\mathcal{M}$ , quindi anche  $\mathcal{L}$ , è costante lungo la geodetica  $\Gamma$ , per cui  $2\mathcal{L}$  può essere portato fuori dalle [ ]; e poiché per ipotesi  $\mathcal{L} \neq 0$  ( $\Gamma$  è non isotropa!), si vede che  $\mathcal{L}$  soddisfa, oltre che alle (5), anche alle

$$(6) \quad 0 = d_u(\partial \mathcal{L} / \partial x^{\bullet i}) - \mathcal{L}_{,i}.$$

<sup>10</sup> Poiché  $\mathcal{M}$  è costante lungo una geodetica  $\Gamma$ , per l'appartenenza di questa alla sua classe è sufficiente che  $\mathcal{M}$  sia  $> 0$ ,  $= 0$ , o  $< 0$  in un punto di  $\Gamma$ .

Queste sono le equazioni di EL del problema variazionale con lagrangiana  $\mathcal{L}$ :

$$(7) \quad \delta \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{L}(x, x^{\bullet}) du = 0.$$

Il 1° membro della (7) può essere anche scritto come  $\delta \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{L}(x, d_s x) ds = \delta \int_{s_1}^{s_2} s^2 ds$ , perché  $\mathcal{L}(x, d_s x) = 1$ .

Si conclude così con il teorema

T3: «i due problemi variazionali a estremi prefissati (4) e (7) danno luogo ad equazioni di EL *equivalenti* (le (5) e le (6)) sse  $\mathcal{L} \neq 0$  ( $\Leftrightarrow \mathcal{M} \neq 0$ ).»

Quanto a una geodetica isotropa, essa può anche definirsi come limite di una successione di estremali del problema (7) con valori costanti non nulli  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}_n \rightarrow 0$ .

(C) Il fatto che abbiamo appena provato – che i problemi variazionali (4) e (7), con lagrangiane diverse ma legate dalla  $\mathcal{M} = \varepsilon \mathcal{L}^2 \neq 0$  danno luogo allo stesso SDO di EL merita un modesto approfondimento, anche alla luce di quanto già esposto in proposito nella S.sez. 6.2.2.

In quella sede, abbiamo definito le geodetiche come estremali del problema  $\delta \int \mathcal{L} du = 0$  con lagrangiana  $\mathcal{L} = |\varepsilon g_{hk}(x(u)) d_u x^h(u) d_u x^k(u)|^{1/2}$  (precisamente, il caso considerato era quello di una geodetica temporale,  $\varepsilon = -1$ ), e parametro  $u$  arbitrario (sotto la solita condizione  $|d_u x| > 0$  lungo le curve di confronto ammissibili). Scegliendo  $u$  *affine* (a  $s$ ), si perveniva al SDO (3'). Ora, otteniamo lo stesso SDO (3') partendo dalla  $\delta \int \mathcal{M} du = 0$ , con  $\mathcal{M} = \varepsilon \mathcal{L}^2 \neq 0$  e parametro  $u$  (apparentemente) arbitrario.

Una giustificazione alternativa di questo risultato è la seguente. La lagrangiana  $\mathcal{M}$  è una forma quadratica nelle  $d_u x$ ; quindi, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee,  $x^{i\bullet} \partial \mathcal{M} / \partial x^{i\bullet} = 2\mathcal{M}$ . Lungo la geodetica (dove  $(\partial \mathcal{M} / \partial x^{i\bullet})^{\bullet} = \partial \mathcal{M} / \partial x^i$ ),  $\mathcal{M}^{\bullet} = x^{i\bullet} \partial \mathcal{M} / \partial x^i + x^{i\bullet\bullet} \partial \mathcal{M} / \partial x^{i\bullet} = x^{i\bullet} (\partial \mathcal{M} / \partial x^{i\bullet})^{\bullet} + x^{i\bullet\bullet} \partial \mathcal{M} / \partial x^{i\bullet} = (x^{i\bullet} \partial \mathcal{M} / \partial x^{i\bullet})^{\bullet} = 2\mathcal{M}^{\bullet}$ , ovvero  $\mathcal{M}^{\bullet} = 0$ .<sup>11</sup> Si ritrova così che  $\mathcal{M} = \text{cost}$  è un integrale primo del SDO (3'). Inoltre, il segno della costante  $\mathcal{M}$  è (quello di)  $\varepsilon$ ; allora  $u$  è automaticamente affine a  $s$  perché  $\mathcal{M} = g_{hk} d_u x^h d_u x^k = \varepsilon (ds/du)^2$ , cioè  $(ds/du)^2 = \varepsilon \mathcal{M} = \text{cost} > 0$ , qed. §

<sup>11</sup> Lo stesso argomento varrebbe a provare che  $\mathcal{M}^{\bullet} = 0$  se  $\mathcal{M}$  fosse omogenea nelle  $x^{\bullet}$  di qualunque grado  $> 2$ .

### 9.2.3) TETRADI E MATRICI LORENTZIANE, TRASPORTO ALLA FERMI-WALKER

§1. Come sappiamo, su quattro vettori *non isotropi*  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$  linearmente indipendenti di uno spazio (o di una varietà) lorentziano(a) tre (diciamo  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_3$ ) sono space-like, e il rimanente  $\Lambda_4$  è time-like. Se in particolare  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$  sono mutuamente ortogonali, e inoltre i vettori space-like sono unitari e il vettore time-like pseudounitario, allora la quaterna o **tetrade**  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_4$  si dice **pseudortonormale** (pON) o **lorentziana**. Siano  $a, b, c, \dots$  indici correnti su  $(1, \dots, 4)$ , corsivi per non essere confusi con indici tensoriali, e poniamo  $\delta_{ab} \equiv \delta^{ab} =: \varepsilon(a)\delta_{ab}$  con  $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = 1$ ,  $\varepsilon(4) = -1$  (**simbolo di pseudoKronecker**). Si verifica facilmente che

$$(1) \quad \delta_{ab}\delta^{bc} = \delta_a^c;$$

e quindi, se si vuole che valga una formula analoga a quella valida per il simbolo di Kronecker, cioè del tipo  $\delta_{ab}\delta^{bc} = \delta_a^c$  (sotto la convenzione di Einstein anche per gli indici corsivi) si deve porre  $\delta_a^c = \delta_a^c$ .

Il carattere pON della tetrade  $\Lambda_a$  si può esprimere nella forma

$$(2) \quad g_{ik}\Lambda_a^i\Lambda_b^k = \Lambda_a^i\Lambda_{bi} = \delta_{ab},$$

dove gli indici dritti corrono anch'essi su  $(1, \dots, 4)$  (avendo il significato standard di indici covarianti o controvarianti), e naturalmente anche per essi si è usata la convenzione di Einstein.

Poniamo ora  $\Lambda^a =: \delta^{ab}\Lambda_b$ , quindi  $\Lambda_a = \delta_{ab}\Lambda^b$ : i vettori  $\Lambda^a$  sono cioè certe combinazioni lineari invertibili dei vettori  $\Lambda_b$ . Per essi, risulta  $\Lambda^{ai}\Lambda_{bi} = \delta^{ac}\Lambda_c^i\delta^{bd}\Lambda_{di} = \delta^{ac}\delta^{bd}\delta_{cd} = \delta_a^a\delta^{bd} = \delta^{ab}$ , e dunque anche la tetrade  $\Lambda^a$  è pON. La (2) equivale a questo punto alla

$$(3) \quad \Lambda_a^i\Lambda^b_i = \delta_a^b,$$

perché il suo 1° membro è  $\Lambda_a^i\delta^{bc}\Lambda_{ci} = \delta_{ac}\delta^{cb} = \delta_a^b$ . Infine contraendo  $\Lambda_a^i\Lambda^a_j$  con  $\Lambda^b_i$ , oppure con  $\Lambda_b^j$ , si ottiene, ad es. nel primo caso,  $\Lambda_a^i\Lambda^a_j\Lambda^b_i = \delta_a^b\Lambda^a_j$  (in forza della (3)) =  $\Lambda^b_j$ ; quindi  $\Lambda_a^i\Lambda^a_j$  agisce su  $\Lambda^b_i$  (per contrazione rispetto a  $i$ ) trasformandolo in  $\Lambda^b_j$ . Ma  $\Lambda^b$  è arbitrario, e questo può aversi sse

$$(4) \quad \Lambda_a^i\Lambda^a_j = \delta_j^i.$$

Si noti la “simmetria” (per scambio degli indici corsivi con quelli dritti) tra la (3) e la (4). §

§2. È possibile definire un prodotto interno *ordinato* di una tetrade pON per un'altra, il risultato essendo una (4×4)-matrice di reali. Di questo fatto la (3) è un esempio (almeno in parte, trattandosi del prodotto interno di una tetrade per se stessa). Siano dunque  $\Lambda$  e  $\Pi$  due tetradi pON: per definizione, il prodotto interno (ordinato)  $\Lambda_a^i\Pi^b_i$  è l'elemento  $L_a^b$  della (4×4)-matrice-prodotto, e risulta  $\Lambda_a = L_a^b\Pi_b$  (o  $\Lambda = L \circ \Pi$  in notazione matriciale). Similmente abbiamo  $\Pi_b = L^a_b\Lambda_a \equiv {}^tL_b^a\Lambda_a$ , dove il superscritto sinistro  $^t$  significa al solito trasposizione (o  $\Pi = {}^tL \circ \Lambda$  in notazione matriciale). Per l'arbitrarietà di  $\Lambda$  o di  $\Pi$ , il confronto della  $\Lambda = L \circ \Pi$  con la  $\Pi = {}^tL \circ \Lambda$  prova che

$$(5) \quad {}^tL \circ L = L \circ {}^tL = \mathbf{1}$$

dove  $\mathbf{1}$  è la (4×4)-matrice unitaria. Quindi  $L$  è non singolare unitaria ( $(\det L)^2 = 1$ ), equiversa o antiversa a seconda che  $\det L$  sia  $\pm 1$ , e la trasposta di  $L$  coincide con la sua inversa.

Abbiamo già incontrato matrici che trasformano triadi ortonormali (ON) in triadi ON e soddisfano ad una relazione del tipo (5) (cfr. (1.2.4, 2) e (1.3.1, 3)), e le abbiamo dette “ortonormali”. La (5) illustra il caso di matrici  $L$  che trasformano tetradi **lorentziane** in tetradi lorentziane, e che diremo matrici **lorentziane**. La matrice  $L$  si dice “associata” alla coppia ordinata (CO) di tetradi lorentziane  $\langle \Pi, \Lambda \rangle$  in quanto applicata alla prima produce la seconda; quindi la sua trasposta è associata alla CO  $\langle \Lambda, \Pi \rangle$ . (L’essersi qui limitati a triadi ortonormali e a tetradi lorentziane non rappresenta una reale limitazione, l’estensione a n-adi dell’uno o dell’altro tipo essendo immediata.) §

§3. Sia  $v$  un vettore arbitrario della varietà lorentziana  $L^4$ , e sia  $\Lambda_a$  una sua tetrade lorentziana. Rappresentando  $v$  come combinazione lineare dei  $\Lambda_a$  con coefficienti  $v^a$  secondo la

$$(6) \quad v = v^a \Lambda_a$$

si trova subito (+)  $v^a = v^i \Lambda_a^i$ ; infatti  $v^i = v^a \Lambda_a^i$  secondo la (6), e sostituendo in questa la (+) per  $v^a$  si ha appunto  $v^j \Lambda_a^j \Lambda_a^i = v^j \delta_j^i = v^i$ . Vale a dire, la rappresentazione (6) di  $v$  è completa (oltre che unica in forza dell’indipendenza lineare dei vettori  $\Lambda_a$ ).<sup>12</sup> La tetrade  $\Lambda_a$  è dunque a tutti gli effetti una 4-base locale lorentziana della varietà (mentre  $\Lambda^a$  ne è una 4-cobase locale lorentziana). In quanto base,  $\Lambda_a$  permette di rappresentare univocamente un *qualsiasi* vettore (anche isotropo) della varietà “per componenti tensorialmente invarianti” secondo la (6); e similmente per la cobase  $\Lambda^a$ , secondo la

$$(6') \quad w = w_b \Lambda^b.$$

Si noti poi che

$$(7) \quad v^a w_a = v_i \Lambda^{ai} w^j \Lambda_{aj} = v_i w^j \delta_j^i = v^i w_i;$$

cioè, la forma bilineare  $v^a w_a$  perde traccia della base-cobase tetrade cui si riferiscono  $v^a$  e  $w_a$ , esattamente come l’analoga forma  $v^i w_i$  perde traccia della base-cobase canonica cui si riferiscono  $v^i$  e  $w_i$ . Inoltre i due invarianti,  $v^a w_a$  rispetto alla base tetrade, e  $v^i w_i$  rispetto alla base canonica, hanno lo stesso valore numerico. Le (6) e (6') sono le espressioni di più basso rango di analoghe relazioni valide per ( $\kappa \geq 2$ )-tensori. Ad esempio, avendo posto  $\tau_{ab} = \tau_{ij} \Lambda_a^i \Lambda_b^j$  e  $\sigma^{ab} = \sigma^{hk} \Lambda_h^a \Lambda_k^b$ , abbiamo

$$(8) \quad \tau_{ab} \sigma^{ab} = \tau_{ij} \Lambda_a^i \Lambda_b^j \sigma^{hk} \Lambda_h^a \Lambda_k^b = \tau_{ij} \sigma^{hk} \delta_h^i \delta_k^j = \tau_{ij} \sigma^{ij};$$

e così via.

<sup>12</sup> L’unicità di  $v$  scende dall’implicazione “ $v^a \Lambda_a^i = 0$ ”  $\Rightarrow$  “ $v = 0$ ”, che a sua volta si prova contraendone l’antecedente con  $\Lambda_b^i$  e tenendo conto della (3).

(C) Con un po' di pratica, il gioco degli indici corsivi e la loro interazione con quello analogo degli indici dritti (covarianti e controvarianti) si impara agevolmente. Gli invarianti “rispetto alla base tetraedica” uguagliano gli “invarianti rispetto alla base canonica”, ad esempio secondo quanto illustrano la (7) e la (8). Chiave di tali manipolazioni formali sono da una parte la regola (di abbassamento dell'indice corsivo)  $v_a = \delta_{ab}v^b$ , e dall'altra l'analogha regola (di abbassamento dell'indice dritto)  $v_i = g_{ik}v^k$ , e le loro inverse  $v^a = \delta^{ab}v_b$  e rispettivamente  $v^i = g^{ik}v_k$ . §

§4. Sia  $\Gamma$  una 4-curva normale time-like di  $r \geq 4$ , e siano  $b, c, d$  la 1<sup>a</sup>, la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup> curvatura lungo di essa. Sia  $s$  il parametro-arco lungo  $\Gamma$  e  $A = d_s x$  il suo pseudoversore tangente ( $A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = -1$ ). Introduciamo altri tre vettori  $B, C, D$  lungo  $\Gamma$  governati dalle formule generalizzate di Frenet-Serret (vedi App. Sp. 4.A per il caso generale):

$$(9_1) \quad D_s A = bB,$$

$$(9_2) \quad D_s B = bA + cC,$$

$$(9_3) \quad D_s C = -cB + dD,$$

$$(9_4) \quad D_s D = -dC,$$

sotto i tre vincoli di unitarietà

$$(10_{1,2,3}) \quad B_i B^i = C_i C^i = D_i D^i = 1. \quad ^{13}$$

Come sappiamo,  $B, C$  e  $D$  sono la 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> normale a  $\Gamma$ , tutte ortogonali a  $A$  e tra loro; vale a dire,  $(A, B, C, D)$  è una tetraedica pON.

Osserviamo che se gli elementi  $\Lambda_a$  di una tetraedica pON sono traslati ( $\equiv$  trasportati parallelamente) lungo  $\Gamma$  la tetraedica resta pON; e se un vettore  $v$  è similmente traslato lungo  $\Gamma$  le sue componenti (tensorialmente invarianti)  $v^a$  rispetto a  $\Lambda_a$  (vedi § 3.) restano costanti. Tuttavia la tetraedica pON  $(A, B, C, D)$  non è traslata; infatti  $A$  resta tangente, mentre *non* resterebbe tale (a meno che  $\Gamma$  non fosse geodetica, ciò che escludiamo qui) se fosse traslata. <sup>14</sup> Questo fatto ha suggerito un altro tipo di trasporto lungo  $\Gamma$ , che mantiene la tangenza di  $A$ . Precisamente, con lo pseudoversore tangente  $A$  e la 1<sup>a</sup> normale  $B$  si può formare il 2-tensore antisimmetrico  $H^{ij} =: A^i B^j - A^j B^i$ ; il generico vettore  $v$  si dice allora **trasportato secondo Fermi e Walker** <sup>15, 16</sup> (FW-trasportato) lungo  $\Gamma$  se

$$(11) \quad D_s v^i = b H^{ij} v_j.$$

<sup>13</sup> Se consideriamo il sistema (9) come sistema di equazioni di evoluzione sotto i vincoli (10) lungo  $\Gamma$  (data), abbiamo 3 + 3 incognite ( $B, C, D; b, c, d$ ) e sette equazioni. In effetti,  $A$  è nota, le (9<sub>1</sub>) e (10<sub>1</sub>) danno  $B$  e  $b$  (che si suppone  $> 0$ ), le (9<sub>2</sub>) e (10<sub>2</sub>) danno  $C$  e  $c$  ( $> 0$ ), le (9<sub>3</sub>) e (10<sub>3</sub>) danno  $D$  e  $d$  ( $> 0$ ): la (9<sub>4</sub>) sembra di troppo. Ma come si verifica facilmente, essa è conseguenza delle equazioni precedenti.

<sup>14</sup> Avremmo infatti, in tal caso,  $D_s A = 0$ , incompatibile con la  $D_s A = bB$  se  $b > 0$ .

<sup>15</sup> E. Fermi, Atti R. Accad. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **31**, 21, 51 (1922). Praticamente questo è l'unico contributo di Fermi alla relatività generale, scritto quando l'autore aveva venti anni e la relatività generale ne aveva sette scarsi.

<sup>16</sup> A.G. Walker, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **52**, 345 (1932). Sul contributo di Walker, vedi poco oltre.

È immediato vedere che la (11) è soddisfatta da  $v = A$ : il pseudoversore tangente  $A$  è automaticamente FW-trasportato.

Come nel caso del trasporto parallelo, il prodotto interno di due vettori  $v, w$  FW-trasportati è costante:  $d_s(v_i w^i) = D_s(v_i w^i) = v_i D_s w^i + w_i D_s v^i = b(v_i w_j + v_j w_i) H^{ij} \equiv 0$ . Quindi se una tetraed pON è FW-trasportata, resta pON, e le componenti tensorialmente invarianti rispetto ad essa di un vettore FW-trasportato restano costanti. Se in particolare  $v$  è FW-trasportato mantenendosi ortogonale a  $\Gamma$  ( $A^i v_i = 0$ ), risulta:

$$(12) \quad D_s v^i = b A^i B^j v_j.$$

La (12) è la legge di trasporto di fatto considerata da Fermi (**trasporto alla Fermi**, o **F-trasporto**) ed è un caso speciale, sotto l'addizionale condizione  $A^i v_i = 0$ , della (11); la generalizzazione della (12) nella (11) è essenzialmente il contributo di Walker alla definizione del FW-trasporto. Se  $\Gamma$  è geodetica,  $b = 0$ , e  $B$  è indeterminato (per definizione restando unitario e ortogonale a  $A$ ); tuttavia la definizione del FW-trasporto conserva senso, riducendosi a quella del trasporto parallelo. Si noti infine che non è necessario supporre che le tre prime curvatures di  $\Gamma$  siano  $> 0$  per introdurre il FW-trasporto.

È importante calcolare la  $D_s$  di una tetraed  $\Lambda_a$  pON e FW-trasportata lungo  $\Gamma$  del tipo  $A\delta_{a4}$ ,  $A$  essendo al solito il pseudoversore tangente a  $\Gamma$ . In virtù della completezza di  $\Lambda_a$ , possiamo sempre scrivere  $D_s \Lambda_a = Q_{ab} \delta^{bc} \Lambda_c$ , dove il fattore  $\delta^{bc}$  è stato aggiunto per miglior convenienza, e la matrice  $Q_{ab}$  è da determinare. Moltiplicando  $D_s \Lambda_a$  per  $\Lambda_{di}$ , si trova  $\Lambda_{di} D_s \Lambda_a^i = Q_{ab} \delta^{bc} \Lambda_c^i \Lambda_{di} = Q_{ab} \delta^{bc} \delta_{cd} = Q_{ab} \delta^b_d = Q_{ad}$ . Essendo  $\Lambda_a$  FW trasportata, abbiamo  $D_s \Lambda_a^i = b H^{ij} \Lambda_{aj}$ . Ma  $\Lambda_{aj} = A_j \delta_{a4}$ , e da un facile calcolo segue

$$(13) \quad Q_{ad} = b(B_a \delta_{d4} - B_d \delta_{a4}),$$

dove  $B_a = B_i \Lambda_a^i$ .  $Q_{ad}$  è dunque antisimmetrica, ed ha soltanto tre dei suoi sei elementi indipendenti diversi da zero, ad esempio quelli del tipo sottodiagonale  $Q_{4\alpha}$  con  $\alpha = 1, 2, 3$ , che valgono  $bB_\alpha/2$ .

(C) La precedente tetraed pON FW-trasportata  $\Lambda_a$  fornisce in particolare la *triade* ON  $\Lambda_{\alpha=1,2,3}$ , che è la naturale generalizzazione relativistica della triade ON newtoniana “orientata alle stesse fisse” per un osservatore avente  $\Gamma$  (time-like) come sua linea d’universo. Questo fatto, che rende conto dell’importanza della nozione di trasporto alla Fermi-Walker in RG, andrebbe opportunamente discusso. Ci limiteremo qui a qualche osservazione, rimandando il lettore alle trattazioni specializzate e ai lavori citati di Fermi e di Walker. Si consideri un osservatore in moto lungo  $\Gamma$  con velocità 4-dim  $u = u(\tau)$ ,  $\tau$  essendo il suo tempo proprio, rispetto ad un riferimento inerziale  $\mathfrak{S}$ . In un riferimento inerziale di quiete istantanea  $\mathfrak{S}'$  rispetto all’osservatore, il pseudoversore  $\Lambda'_4(\tau)$  è per definizione parallelo a  $u(\tau)$ , e precisamente  $\Lambda'_4 = u/c$  (perché  $\Lambda'_4 \cdot \Lambda'_4 = -1$  e  $u \cdot u = -c^2$ ). La



$\tau$ -derivata assoluta di  $\Lambda'_4$  è  $D_\tau \Lambda'_4 = D_\tau \mathbf{u}/c = \mathbf{a}/c$ , dove  $\mathbf{a}$  è l'accelerazione 4-dim dell'osservatore rispetto a  $\mathfrak{S}$ , ortogonale a  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$ ). Se ci si chiede quali siano le analoghe  $D_\tau \Lambda'_{1,2,3}$ , è ovvio che le condizioni

$$(14) \quad \Lambda'_a \cdot \Lambda'_b = \delta_{ab} \varepsilon(a),$$

$\varepsilon(1,2,3) = 1$ ,  $\varepsilon(4) = -1$ , sono soltanto dei vincoli cui le  $\Lambda'$  devono sottostare, e non ci possono essere di aiuto. Dobbiamo cioè fare delle richieste specifiche sulla evoluzione delle  $\Lambda'$  lungo  $\Gamma$ . Si richiederà che  $D_\tau \Lambda'_a$  giaccia nel 3-piano di  $\mathbf{u}$  e di  $\mathbf{a}$ , e che sia nulla sse  $\Lambda'_a$  è ortogonale a entrambe (“non-rotazione” della tetrad). Le (14) implicano che  $\Lambda'_a \cdot D_\tau \Lambda'_b + \Lambda'_b \cdot D_\tau \Lambda'_a = 0$ . Queste condizioni sono abbastanza stringenti da suggerire che  $D_\tau \Lambda'_a$  sia proporzionale a  $(\Lambda'_a \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\Lambda'_a \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}$ . Il fattore di proporzionalità si determina facendo  $a = 4$ , e vale  $c^{-2}$ . Si conclude così che

$$(15) \quad D_\tau \Lambda'_a = c^{-2} [(\Lambda'_a \cdot \mathbf{a})\mathbf{u} - (\Lambda'_a \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}].$$

Questa (15) (che riproduce la  $D_\tau \Lambda'_4 = \mathbf{a}/c$  per  $a = 4$ ) è identica alla definizione (11) per un vettore 4-dim  $\mathbf{v}$  FW-trasportato. Per verificarlo, basta porre, nella (11),  $(1/c)D_\tau$  in luogo di  $D_s$ ,  $\Lambda'_a$  in luogo di  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}/c$  in luogo di  $\mathbf{A}$ , e  $\mathbf{a}/c^2$  in luogo di  $b\mathbf{B}$ . §

#### 9.2.4) COMPLEMENTI SUL TENSORE DI RIEMANN

§1. Riepiloghiamo per cominciare alcune nozioni sul tensore di Riemann. Nello stesso spirito con cui siamo ripartiti dalla (3.3.2, 9) in (9.2.2, §5), ripartiamo dalla (3.4.2, 3) considerandola come definizione formale del tensore di Riemann  $\rho_{(4)}$ , in termini dei Chr2 e loro derivate prime, in una varietà pseudoriemanniana n-dim di CdC  $r = 3$ .<sup>17</sup> I quattro tipi di simmetria cui soddisfa  $\rho_{(4)}$ , e cioè le quattro relazioni (l'ultima delle quali diremo ormai “identità ciclica”):

$$(1_1) \quad \rho_{ijhk} = -\rho_{jihk} = -\rho_{ijkh} = \rho_{hkij},$$

$$(1_2) \quad \rho_{ijhk} + \rho_{ihkj} + \rho_{ikjh} = 0,$$

restano ovviamente valide, e riducono il numero delle componenti algebricamente indipendenti di  $\rho_{(4)}$  da  $n^4$  a  $n^2(n^2-1)/12$ , e quindi a 20 per  $n = 4$ .<sup>18</sup> Restano altresì valide le formule di commutazione (3.4.2, 6), alle quali fanno riscontro formule di commutazione per derivate assolute:

<sup>17</sup> In realtà le (seconde) identità di Bianchi coinvolgono le derivate prime di  $\rho_{(4)}$ , ma questo non comporta che debba essere  $r \geq 4$ , vedi S.sez. 3.4.2.

<sup>18</sup> Questo particolare risultato si può giustificare, indipendentemente dalla procedura generale, mediante il seguente semplice ragionamento riportato ad es. in Synge (vedi Bibl. Gen. B, vol. 2). Si introduca la  $(6 \times 6)$ -matrice simmetrica  $R_{AB}$  (con  $A, B = 1, \dots, 6$ ) secondo lo schema  $23 \leftrightarrow 1, 31 \leftrightarrow 2, 12 \leftrightarrow 3, 14 \leftrightarrow 4, 24 \leftrightarrow 5, 34 \leftrightarrow 6$ , per cui ad esempio  $R_{12} = \rho_{2331}$ ,  $R_{66} = \rho_{3434}$ , ecc. In questo modo tutte le componenti di  $\rho_{(4)}$  soddisfacenti alle simmetrie (1<sub>1</sub>) sono rappresentate in termini della matrice  $R_{AB}$ , che ha  $6(6+1)/2 = 21$  componenti. L'identità ciclica (1<sub>2</sub>) costituisce un vincolo aggiuntivo, e le componenti indipendenti si riducono a 20.

ad esempio, nel caso più semplice di un vettore  $w$ , e ponendo per brevità  $U =: \partial_{uX}$  e  $V =: \partial_{vX}$ ,  
 $D_{uv} = D_u D_v$  et sim.,

$$(2) \quad (D_{uv} - D_{vu})w^i = -\rho_{j\ hk}^i w^j U^h V^k.$$

(Qui  $D_{uv}$  sta ovviamente per  $D_u D_v$ , ecc.) Ricordiamo infine le identità (differenziali) di Bianchi (3.4.2, 10), che riducono l'indipendenza *funzionale* delle componenti di  $\rho_{(4)}$ .

A prima vista le (1) sembrano di natura piuttosto peculiare, ma non è così: infatti il 4-tensore  $\pi_{(4)} \equiv \pi_{pqrs} =: \pi_{pr}\pi_{qs} - \pi_{ps}\pi_{qr}$ , dove  $\pi_{(2)}$  è un 2-tensore simmetrico *generico*, soddisfa le stesse (1). Sia ora  $g_{(4)}$  definito in termini di  $g_{(2)}$  (2-tensore metrico) come  $\pi_{(4)}$  è definito in termini di  $\pi_{(2)}$  (cfr. la (8.2.1, 6),  $g_{ijhk} = g_{ih}g_{jk} - g_{ik}g_{jh}$ ). Siano poi  $\xi, \eta$  due vettori entrambi  $\neq 0$  (cioè le righe  $(\xi_1 \dots \xi_4)$ ,  $(\eta_1 \dots \eta_4)$  abbiano rango 1) e tali che lo scalare  $g_{ijhk}\xi^i\eta^j\xi^h\eta^k$  sia diverso da zero. Condizione sufficiente a ciò è che  $\xi$  e  $\eta$  *non* siano paralleli, cioè che *non* esista un reale  $k \neq 0$  per cui ad es.  $\eta = k\xi$ . Ma la stessa condizione è anche necessaria, come ci si aspetta se ci si riferisce ad uno spazio euclideo o antieuclydeo (metrica definita positiva o negativa). Non altrettanto ovvio è che la necessità valga in un generico spazio pseudoeuclideo (metrica indefinita), e in particolare minkowskiano; ma le dimostrazioni sono analoghe. Ricordiamo la dimostrazione nel caso euclideo usando la metrica pitagorica e riferendoci per semplicità ad un *piano* ( $n = 2$ ). In questo caso risulta  $g_{ijhk}\xi^i\eta^j\xi^h\eta^k = \xi_i\xi^i\eta_j\eta^j - (\xi_h\eta^h)^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) - (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)^2 = (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$ ; dunque l'annullarsi di  $g_{ijhk}\xi^i\eta^j\xi^h\eta^k$  equivale alla  $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$ , che è appunto la condizione di parallelismo per vettori  $\neq 0$ . Nel caso del piano minkowskiano, e usando la metrica pseudopitagorica, abbiamo  $g_{ijhk}\xi^i\eta^j\xi^h\eta^k = (\xi_1^2 - \xi_2^2)(\eta_1^2 - \eta_2^2) - (\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2)^2 = -(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2$  (la comparsa del segno meno, rispetto al caso euclideo, non può qui meravigliare), e quindi giungiamo alla stessa conclusione, *qed*. La facile generalizzazione di questo risultato ad uno spazio euclideo o pseudoeuclideo (nonché ad una varietà p.riemanniana) ( $n \geq 3$ )-dim è lasciata al lettore.

Mediante la (3.5.4, 1), si può definire la curvatura sezionale  $K(x|\xi, \eta) = K(x|\eta, \xi)$ , in  $x$  e per la coppia di vettori  $\neq 0$  e non paralleli  $(\xi, \eta)$ , anche per una varietà lorentziana o generalmente p.riemanniana. Dalla (3.5.4, 1) stessa si vede subito che se  $(\dagger) \rho_{ijhk}(x) = k g_{ijhk}(x)$ , con  $k =$  reale costante ( $\equiv$  indipendente da  $x$ ) in un aperto, allora è ivi  $K(x|\xi, \eta) = k$ ; cioè, la curvatura sezionale è indipendente sia da  $x$  che dalla giacitura  $(\xi, \eta)$ , essendo simultaneamente *costante e isotropa*. Viceversa, se in un aperto viene meno la dipendenza da  $x$  di  $K(x|\xi, \eta)$ , questo può avvenire soltanto se in quell'aperto vale la  $(\dagger)$ , e si ricade nel caso precedente. Insomma la costanza della curvatura sezionale in un aperto ne implica l'isotropia. Il teorema di Schur (v. S.sez. 8.2.1) è stato enunciato per una varietà riemanniana, ma vale anche per una varietà p.riemanniana, ed afferma

l'implicazione contraria: se la curvatura sezionale è *ovunque* isotropa, allora è anche *ovunque* costante.

Per mezzo del simbolo completamente antisimmetrico 4-dim  $\Upsilon_{ijhk} \equiv \Upsilon^{ijhk}$ , si definisce al solito modo (v. S.sez. 3.2.2) il pseudotensore di Ricci  $\varepsilon^{ijhk} =: \sqrt{|[g]|} \Upsilon^{ijhk}$ ; e con questo, il **doppio duale** (alla Hodge) del tensore di Riemann, diciamo  ${}^* \rho^{ijhk} = \varepsilon^{ijpq} \rho_{pqrs} \varepsilon^{rshk} / 4$ . Questo è un vero 4-tensore (proprio per il suo essere *doppio* duale) ed ha le stesse simmetrie (1) di  $\rho_{(4)}$ ; quindi ha lo stesso numero 20 di componenti algebricamente indipendenti, ed è ugualmente adatto a rappresentarlo.

Un altro 4-tensore adatto a rappresentare il tensore di Riemann è quello definito dalle

$$(3) \quad \sigma_{ijhk} =: -(\rho_{ihjk} + \rho_{ikjh})/3;$$

esso ha le simmetrie (che ovviamente non dipendono dal fattore  $-1/3$  nella sua definizione)

$$(4_1) \quad \sigma_{ijhk} = \sigma_{jihk} = \sigma_{ijkh} = \sigma_{hkij},$$

$$(4_2) \quad \sigma_{ijhk} + \sigma_{ihkj} + \sigma_{ikjh} = 0.$$

Le (4<sub>1</sub>) corrispondono alle (1<sub>1</sub>) senza segni meno, mentre le (4<sub>2</sub>) sono formalmente identiche alle (1<sub>1</sub>). La verifica delle (4) procede dalla definizione tenendo conto delle (1<sub>1</sub>) soltanto. Le (1<sub>2</sub>) permettono invece di invertire le (3) come

$$(3') \quad \rho_{ijhk} = \sigma_{ikhj} - \sigma_{ihkj}.^{19}$$

Il 4-tensore  $\sigma_{(4)}$  si dice **tensore di Riemann simmetrizzato**. Immaginando  $\rho_{(4)}$  definito in termini di  $\sigma_{(4)}$  secondo le (3'), e  $\sigma_{(4)}$  soddisfacente alle simmetrie (4), si ritroverebbero le simmetrie (1) per  $\rho_{(4)}$ , oltre alla (3) come inversa delle (3').

Tornando al tensore di Riemann, ricordiamo che il suo annullarsi in un aperto equivale alla "piattezza" dell'aperto, cioè all'esistenza di una metrica costante (teorema di Riemann, che vale anche per varietà pseudoriemanniane). Sempre mediante definizioni formali identiche a quelle usate nella S.sez. 3.4.2, al tensore di Riemann si associano la sua 1<sup>a</sup> traccia, o 2-tensore simmetrico di Ricci  $\rho_{ij}$ , e la sua 2<sup>a</sup> traccia  $\rho$  o scalare (o invariante) di curvatura; e infine il 2-tensore simmetrico  $S_{ij} = \rho_{ij} - g_{ij}\rho/2$ , automaticamente solenoidale in forza delle identità di Bianchi. Riferendoci alla varietà lorentziana  $L^4$ , abbiamo denotato il precedente tensore simmetrico  $S_{(2)}$  solenoidale con  $E_{(2)}$ , nominandolo come tensore di Einstein.

(C) Nel definire il tensore di Ricci, parecchi autori contraggono il 1° e il 3° indice anziché il 2° ed il 3°, col risultato di invertirne il segno. Una conseguenza vistosa di questa diversa convenzione è la corrispondente inversione di segno nelle equazioni gravitazionali (9.1.3, 6). §

<sup>19</sup> Se si ignorasse il fattore  $-1/3$  nel 2° m. della (3), un fattore  $-3$  comparirebbe nel 2° m. della (3').

§2. Veniamo ora ad una applicazione del tensore di Riemann fondata sulla (2), il sistema DP cosiddetto della “deviazione geodetica”. Sia  $x = x(u,v)$  una 2-subvarietà di CdC 3 di  $L^4$ ; essa potrà considerarsi come famiglia continua di curve  $\Gamma$  contrassegnate ciascuna dal valore del parametro  $v$  e con parametro  $u$  variabile lungo  $\Gamma$ . Come nella (2), torniamo a porre  $U = \partial_u x$ ,  $V = \partial_v x$ . Ci interessa lo scostamento tra  $\Gamma(v)$  e  $\Gamma(v+\delta v)$ , cioè  $\delta x = V(u,v)\delta v$ . Poiché  $D_u V = D_v U$ <sup>20</sup>, per la (2) abbiamo

$$(5) \quad D_u^2 V^i = D_{uv} U^i = D_{vu} U^i - \rho_{j\ hk}^i U^j U^h V^k.$$

Supponiamo adesso che ciascuna delle curve  $\Gamma(v)$  (per  $u$  corrente) sia geodetica, e che il parametro  $u$  lungo di essa appartenga alla classe dei parametri speciali, per cui l’equazione geodetica è  $D_u U = 0$ . Allora il primo termine a 3° membro della (5) è zero, e si è ridotti al sistema DP lineare fuchsiano di quattro equazioni nelle altrettante incognite  $V^{1 \leq i \leq 4}$ :

$$(6) \quad D_u^2 V^i + \rho_{j\ hk}^i U^j U^h V^k \equiv D_u^2 V^i + K_k^i V^k = 0,$$

dove si è introdotto il 2-tensore misto  $K_k^i = : \rho_{j\ hk}^i U^j U^h$ . In notazione non indiciale, questa diventa

$$(6') \quad D_u^2 V + K \circ V = 0.$$

La (6') è l’annunciata equazione vettoriale DP della **deviazione geodetica**. Con l’ausilio di due condizioni accessorie (ad esempio l’assegnazione di  $V$  agli estremi della geodetica  $v = \underline{v}$ , diciamo  $V_1 =: V(u_1, \underline{v})$  e  $V_2 =: V(u_2, \underline{v})$ ), la sua soluzione dà lo scostamento  $\delta x$  (o deviazione) lungo tutta la geodetica conoscendo quest’ultima, cioè  $x(u_1 \leq u \leq u_2, \underline{v})$ , e il tensore di Riemann lungo di essa,  $\rho_{j\ hk}^i(x(u, \underline{v}))$ . La soluzione della (6') può ottenersi mediante tecniche standard via funzione di Green  $G(u, u')$ ; e questo, si dimostra facilmente, trasforma la (6') nella seguente equazione vettoriale integrale lineare (non trascrivendo la dipendenza da  $\underline{v}$ , e per brevità con  $k$  in luogo di  $1/(u_2 - u_1)$ ):

$$(7) \quad V(u') = k(u_2 - u')V_1 + k(u' - u_1)V_2 + \int_{u=u_1}^{u_2} G(u, u') K(u) \circ V(u) du,$$

ove  $u_1 \leq u' \leq u_2$ . Questa (7) si presta bene ad essere risolta per approssimazioni successive. Si tenga presente che  $G(u, u_1) \equiv 0$ ,  $G(u, u_2) \equiv 0$ , per cui la (7) diventa l’identità  $V_1 \equiv V_1$  [ $V_2 \equiv V_2$ ] per  $u' = u_1$  [per  $u' = u_2$ ].

In particolare, per parametro  $u$  lungo la geodetica può scegliersi la sua lunghezza  $s$ . Moltiplicata per  $\delta v$ , e scrivendo  $\delta x$  in luogo di  $V\delta v$ , la (6) diventa così

$$(8) \quad D_s^2 \delta x^i = -\rho_{j\ hk}^i U^j U^h \delta x^k,$$

che è la forma più comune in cui essa è presentata. Invece che passando attraverso la più generale (2) (in cui figurano tre vettori generalmente distinti  $w$ ,  $U$ ,  $V$ ), la (8) può anche ottenersi direttamente, differenziando l’equazione geodetica (9.2.2, 3'); vale a dire, riscrivendola con  $x + \delta x$  in luogo di  $x$ , e facendo la differenza, al 1° ordine in  $\delta x$ , tra le due equazioni. Per snellire i calcoli, è

<sup>20</sup> Infatti  $D_u(\partial_v x^i) = \partial_u \partial_v x^i + \partial_v x^r \Gamma_{r\ q}^i \partial_u x^q$ , e questa espressione non varia a fronte dello scambio di  $u$  con  $v$ , anche per la simmetria dei Chr2 rispetto agli indici inferiori.

utile lavorare in coordinate localmente inerziali (questo non infirma la validità del risultato finale). L'importanza della equazione della deviazione geodetica (8) sta nel fatto che essa permette una diagnostica diretta del tensore di Riemann misurando le accelerazioni *relative* di punti materiali che percorrono geodetiche vicine, cioè utilizzando la stessa equazione per date  $D_s^2\delta x$  e  $\delta x$ . Sorge allora una naturale questione: qual è il minimo numero di punti materiali da osservare per determinare completamente il tensore di Riemann, che ha venti componenti indipendenti in presenza di materia-energia e dieci nel vuoto? Il problema è stato affrontato e completamente risolto in tempi relativamente recenti: <sup>21</sup> quel minimo numero, necessario e sufficiente, è 6 nel primo caso, e 4 nel caso del vuoto. §

Chiudiamo segnalando la possibilità di “applicare” tra loro due generiche curve time-like mediante geodetiche isotrope che le intersecano entrambe. Siano  $\Gamma$  e  $\Lambda$  le due curve, e sia  $x \in \Gamma$ . Allora c'è una e una sola geodetica isotropa orientata al passato (ad esempio) che partendo da  $x$  interseca  $\Lambda$ , diciamo in  $y$ ; e questa è anche la sola geodetica isotropa orientata al futuro che partendo da  $y$  interseca  $\Gamma$  in  $x$ . In altre parole l'applicazione  $x \leftrightarrow y$  è biiettiva. Se  $s_\Gamma$  e  $s_\Lambda$  sono i parametri lunghezza lungo  $\Gamma$ , e rispettivamente lungo  $\Lambda$ , supposti equiversi (ad esempio entrambi orientati al futuro), allora deve essere  $ds_\Lambda/ds_\Gamma > 0$  in forza della biunivocità.

---

<sup>21</sup> I. Ciufolini, M. Demianski: “How to measure the curvature of space-time”, Phys. Rev. D 34, 1018 (1986). (In realtà questo risultato si riferisce ad una equazione di deviazione geodetica leggermente più generale della (8).)

## 9.3 LA TEORIA RELATIVISTICA GENERALE

### 9.3.1) PRELIMINARI

Come abbiamo largamente anticipato, la relatività generale (RG) si deve considerare una teoria geometrica fondata sull'assunta connessione tra le proprietà metriche di una varietà differenziabile lorentziana 4-dim  $rL^4$  (con  $r \geq 1$  da precisare) – lo spazio-tempo – e la densità di materia (o di radiazione) e suoi flussi in essa presenti. Questa connessione è espressa dalle equazioni di Einstein-Hilbert (9.1.3, 6) <sup>1</sup>, secondo le quali il (campo di) <sup>2</sup> 2-tensore di Einstein  $E_{(2)}$  della varietà è proporzionale, via un fattore universale costante  $-K < 0$ , al 2-tensore energetico  $T_{(2)}$ , dato sulla varietà come funzione delle coordinate, e (possibilmente) della metrica e delle sue derivate prime:

$$(1) \quad E_{(2)} + KT_{(2)} = 0,$$

ove  $K = 8\pi\kappa/c^4$  e  $\kappa$  è la costante di Newton-Cavendish. Giustificeremo più avanti l'assunzione di questo valore per  $K$ . Poiché  $\dim T_{(2)} = ML^{-1}T^{-2}$ , e  $\dim E_{(2)} = L^{-2}$  se il tensore fondamentale è supposto come è usuale senza dimensioni, deve essere  $\dim K = M^{-1}L^{-1}T^2$ . Tenuto conto delle dimensioni di  $\kappa$ , si verifica subito che l'espressione di  $K$  ha le dimensioni corrette.

Ricordiamo che  $E_{(2)}$  e  $T_{(2)}$  sono entrambi solenoidali (oltre che simmetrici); il primo per costruzione, e il secondo perché deve a priori soddisfare le equazioni di conservazione. Quindi le (1) funzionalmente indipendenti sono soltanto  $10 - 4 = 6$ . D'altra parte le incognite del problema, le componenti del 2-tensore fondamentale  $g_{(2)} = g_{(2)}(x \equiv x^{1 \leq i \leq 4})$ , sono 10, per cui a prima vista sembrano esserci 4 incognite di troppo. Tuttavia  $g_{(2)}$  interessa soltanto al fine di determinare l'invariante scalare  $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ , e poiché le 4 coordinate  $x$  sono definite a meno di una loro trasformazione regolare arbitraria, sfruttando quest'ultima e l'associata legge di trasformazione per i 2-tensori possiamo sempre imporre 4 vincoli addizionali alle 10 componenti di  $g_{(2)}$  *senza modificare il  $ds^2$* , addirittura fissando il valore di 4 di esse. <sup>3</sup> In definitiva, il bilancio “equazioni indipendenti vs. incognite indipendenti” (6 contro 6) è rispettato dalle (1).

---

<sup>1</sup> Un'idea felice, nell'opinione di chi scrive, è quella di nominare le equazioni di EH come “equazioni geometrodinamiche”. Nello stesso spirito, e altrettanto felicemente, la stessa RG si potrebbe allora denominare “geometrodinamica”. Il suggerimento sembra dovuto a J. Wheeler (vedi una prossima nota). Esistono infatti censure più o meno dotte, ma certamente fondate, sulla adeguatezza del termine “relatività” alla teoria einsteiniana.

<sup>2</sup> Nel seguito ci risparmieremo una precisazione di questo tipo, perché tutti i tensori nominati sono da intendere come “campi tensoriali” definiti sulla varietà spazio-tempo.

<sup>3</sup> Ad esempio si vedrà come sia sempre possibile imporre a  $g_{(2)}$  le 4 condizioni  $g_{t4} = 0$  ( $t = 1,2,3$ ) e  $g_{44} = -1$ , ove ( $t$ ) è indice di coordinata spaziale, e (4) è l'indice della coordinata temporale römeriana *ct*.

Esprimendo  $E_{(2)}$  e  $T_{(2)}$  in termini dei loro argomenti – cioè di  $g_{(2)}$ ,  $\partial g_{(2)}$  e  $\partial^2 g_{(2)}$  (dove  $\partial g_{(2)}$  [ $\partial^2 g_{(2)}$ ] denota l'insieme delle x-derivate prime [seconde] di  $g_{(2)}$ ) nel primo caso, e di  $x$ ,  $g_{(2)}$  e  $\partial g_{(2)}$  nel secondo <sup>4</sup> – concludiamo che le (1) costituiscono un SDP del 2° ordine nelle  $g_{(2)}$ , quasi-lineare (perché le  $\partial^2 g_{(2)}$  figurano linearmente in  $E_{(2)}$ ), e comunque riducibile a forma normale (perché la matrice che moltiplica  $\partial^2 g_{(2)}$  è non singolare). Questo SDP si verifica poi essere di tipo iperbolico.

Espressa in unità m.k.s., la costante  $K$  è un numero piccolissimo, sia perché lo è per suo conto  $\kappa$  ( $\approx 10^{-11}$ ), sia soprattutto per la presenza di  $c^4$  ( $\approx 8,1 \cdot 10^{33}$ ) a suo denominatore. (Di fatto, in dette unità risulta  $K \approx 3 \cdot 10^{-44}$ .) Questo significa che, sempre in unità m.k.s.,  $T_{(2)}$  dovrebbe essere dell'ordine reciproco – come è largamente irrealistico sulla superficie terrestre – affinché  $E_{(2)}$  sia dell'ordine di  $1 \text{ m}^{-2}$ , e spiega perché fu possibile sviluppare teorie fisico-matematiche estremamente importanti prima che la RG fosse formulata. Questa situazione può tuttavia cambiare radicalmente nello spazio-tempo cosmico, in particolare quando ci si pongano domande sulla sua struttura globale. Non a caso i cosmologi contemporanei, nonché quelli delle ultime generazioni, sono o sono stati tutti precipuamente interessati alla RG.

Ma il discorso si allarga quasi senza limiti, ben oltre la RG, se si toccano i problemi tipici della moderna cosmologia. Questa sottosezione introduttiva 9.3.1 può essere il luogo adatto ad accennare di che si tratta. Con ogni evidenza la RG, riassunta nel SDP (1) e nelle associate equazioni geodetiche che governano il moto della materia/radiazione, è una teoria strettamente macroscopica. Al contrario, la moderna cosmologia deve essere considerata una fisica per così dire “di tutte le scale”, da quella cosmica a quella macroscopica-terrestre e a quelle di ordine inferiore o molto inferiore: vale a dire, da un lato essa non può rinunciare alla RG, ma dall'altro questa non le è più sufficiente se, come è naturale, si vuole disporre di rappresentazioni del cosmo aggiornate agli sviluppi della fisica in generale.

Una lunga esperienza ha insegnato ai fisici a privilegiare l'approccio cosiddetto riduzionistico <sup>5</sup> ai loro problemi, almeno finché questo sia possibile; e in tal senso, essi sono sempre stati “naturalmente” difesi dalla tentazione di ricercare rappresentazioni *onnicomprendenti*, o olistiche, del mondo fisico. (In questa tentazione sono invece caduti innumerevoli filosofi di tutti i tempi.) Durante la lunga stagione riduzionistica, che dura tuttora, teorie fisico-matematiche

---

<sup>4</sup> La reale dipendenza di  $T_{(2)}$  da  $\partial g_{(2)}$  è questionabile, ed è stata ammessa perché il problema di risolvere le (1) lo permette in modo naturale.

<sup>5</sup> Questo attributo non ha un significato univoco nel linguaggio filosofico, ma è qui da intendere nel senso che è usuale nelle scienze fisiche. Vale a dire, l'approccio riduzionistico ad un sistema fisico complesso consiste nel decomporlo in più semplici unità, con il programma e nella speranza di descrivere poi il sistema originale in termini delle leggi che governano le unità componenti. Di norma, il fisico è consapevole delle insidie che questa “decomposizione della conoscenza” del mondo fenomenico comporta, ma le accetta con la dovuta prudenza perché è altrettanto consapevole dei suoi meriti in fatto di concreto progresso conoscitivo. Procedure di decomposizione tipiche consistono appunto in convenienti separazioni di scale.

fondamentali sono state formulate e sono ormai solidamente affermate. Nel loro insieme, esse costituiscono un formidabile capitale di conoscenza scientifica esatta, del quale è quasi superfluo ricordare qui gli oggetti essenziali: la geometria euclidea, la cinematica newtoniana, la meccanica newtoniana dei sistemi discreti e continui, la teoria newtoniana della gravitazione, la termodinamica, l'elettromagnetismo maxwelliano, la meccanica statistica, la relatività speciale e quella generale, la meccanica quantistica e la riduzione a questa della chimica fenomenologica, l'elettrodinamica quantistica e la teoria elettrodebole.

L'approccio riduzionistico alla conoscenza del mondo fisico è stato insomma altamente remunerativo; ma alla fine esso ha anche aperto, nel modo più naturale, questioni "di collegamento" (tra le diverse teorie-componenti) che erano meno sentite in passato. Con questo, le tentazioni olistiche di cui si diceva più sopra si sono progressivamente spostate entro l'orizzonte delle scienze esatte, in una prospettiva che per la prima volta appare non insensata. Non sono pochi, infatti, i teorici contemporanei dei fondamenti della fisica convinti che la ricerca futura presto o tardi troverà la chiave di accesso ad un quadro comprensivo di *tutte* le leggi di natura, dal quale sarà possibile derivare – mediante meccanismi logicamente ineccepibili, e ovviamente al di qua della barriera della complessità – l'inevitabilità di tutto quanto riusciamo ad osservare in modo affidabile e ripetibile; all'ideale cioè di una teoria fisico-matematica predittiva "finale" <sup>6</sup> le cui unità componenti saranno tra loro collegate in un unico quadro logico-assiomatico.

Gli esiti dei tentativi dei fisici di affacciarsi alla "terra incognita" di una tale teoria universale sono stati finora sistematicamente ridimensionati dal progresso delle conoscenze e i tentativi stessi riconosciuti come velleitari. L'ostacolo fondamentale che si frappone tra l'attuale situazione e l'ambiziosissimo obiettivo appena delineato ha la sua radice nella possibilità di unificare le due teorie portanti della fisica contemporanea: da un lato la relatività generale della quale ci avviamo ad occuparci specificamente, e dall'altro quella teoria quantistica che (un po' avventurosamente) cominciò ad essere formulata più o meno una decina di anni più tardi. Esse appaiono per il momento assai difficilmente conciliabili; e molti teorici della fisica fondamentale trovano ormai questo stato di cose intellettualmente intollerabile.

Poiché non è possibile rinunciare né all'una né all'altra teoria senza distruggere la fisica quale ci è presentemente nota, si può essere ragionevolmente certi che la soluzione del problema – quando ci si arriverà – comporterà una revisione importante di alcune delle idee che sono oggi alla base della modellazione del mondo fisico. È allora abbastanza naturale pensare che soltanto all'energia di Planck le particelle elementari rivelino la loro vera natura, interagendo robustamente attraverso la gravità, e che tutto si ridurrà ancora, a quel punto, ad una questione di geometria, di

---

<sup>6</sup> L'acronimo inglese che si usa per essa è "TOE", Theory Of Everything".



una geometria “quanto-gravitazionale”.<sup>7</sup> Purtroppo questa geometria resta per il momento sostanzialmente elusiva; anche se negli ultimi 10/15 anni sono apparsi alcuni segni incoraggianti, o forse qualcosa di più, sulla possibilità di finalmente superare il punto morto della “grande” fisica teorica contemporanea, l’estrema difficoltà unificare in modo convincente relatività generale e teorie quantistiche. Va da sé che questa affascinante materia, alla quale la comunità dei fisici di una presunta “teoria del tutto” (o TOE) lavora accanitamente da decenni, esula completamente dai limiti del nostro libro.

### 9.3.2) FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE PRIMA

Una delle intuizioni chiave di Einstein, sulla quale di solito non si insiste abbastanza, fu quella di non essersi attardato più di un tanto nel pensare allo spazio-tempo pseudoeuclideo della relatività speciale (RS) come supporto dei fenomeni che occorrono in presenza di materia-energia e relativi flussi, ma di essere passato senza esitazioni, dopo un paio di tentativi insoddisfacenti, ad un supporto molto più generale, ad una varietà differenziabile pseudoriemanniana di segnatura  $\langle 3,1 \rangle$ . Questo suscita particolare ammirazione se si considera che Einstein – fisico di genio come pochi altri – certamente non era un matematico: come abbiamo accennato (v. S.sez. 9.1.3), egli dovette anzi affrontare un duro sforzo di apprendistato nei confronti della stessa geometria di Riemann – un prodotto essenzialmente ottocentesco – quando aveva da un pezzo passato i trent’anni. Di tale geometria, Einstein conservò sempre una visione relativamente intuitiva e lontana dagli sviluppi già disponibili dopo il secondo decennio del secolo: ad esempio, e a nostra conoscenza, concetti fondamentali come quello di fibrato tangente di una varietà differenziabile astratta non compaiono mai nei suoi lavori, né tanto meno vi sono utilizzati. Ma è probabile che l’eccezionale fiuto “fisico” di cui Einstein era dotato lo abbia tenuto a prudente distanza da idee – per quanto attraenti dal punto di vista matematico – che gli sembravano troppo lontane dalla realtà fenomenica per essergli veramente utili.

Proponiamo adesso l’illustrazione di un percorso, di necessità induttivo ma per quanto possibile ragionevole, che dalla relatività speciale porti a quella generale: un’impresa didattica non facile, come testimonia la significativa difformità delle sue diverse versioni disponibili (ma non

---

<sup>7</sup> La “teoria quantistica della gravità” (o più precisamente, la teoria dei campi fermionici nel continuo spazio-temporale incurvato dalla gravità) ha cominciato ad essere seriamente affrontata soltanto verso la fine della seconda guerra mondiale, quasi negli anni cinquanta. Come abbiamo accennato nella S.sez. 9.1.3, una figura di primo piano, indiscusso pioniere e caposcuola in questo campo è stato Wheeler (John, 1911-2008), uno dei più autorevoli fisici teorici americani dello scorso secolo.

sempre) nella trattativa corrente. Per cominciare, riassumiamo e commentiamo brevemente le basi concettuali della RS. Dal punto di vista della sua rappresentazione matematica, lo spazio-tempo RS – o spazio di Minkowski – è una varietà 4-dim liscia e senza bordi  ${}^{\infty}L_0^4$ , con metrica di segnatura lorentziana  $\langle 3,1 \rangle \equiv (+,+,+,-)$  (nella convenzione adottata qui) e tensore di Riemann identicamente nullo. Essa ammette per definizione un atlante “(RS)-canonico” di carte totali ( $\equiv$  ciascuna delle quali la mappa per intero) di coordinate  $\langle X^i \rangle_{i=1 \div 4} \in \mathbb{R}^4$ , con  $X^i = \Lambda^i(P)$ ,  $P \equiv$  “punto” di  ${}^{\infty}L_0^4$ ,  $\Lambda \equiv$  mappa della carta in oggetto, e  $\mathbb{R}^4 = \Lambda({}^{\infty}L_0^4) \equiv$  codominio comune di tutte le carte dell’atlante canonico. La funzione di transizione da una carta (senza apice) ad un’altra (con apice) dell’atlante canonico (ovviamente, tutte le carte di questo sono totalmente congiunte) è per definizione lineare affine, cioè

$$(1) \quad X'^i = L^i_j X^j + A^i,$$

(dove gli indici latini vanno da 1 a 4, e si somma sugli indici ripetuti),  $\{L^i_j\}_{i,j=1 \div 4}$  essendo una  $(4 \times 4)$ -matrice non singolare e  $\{A^i\}_{i=1 \div 4}$  una 4-colonna. La (1) è una biiezione (lineare affine) di  $\mathbb{R}^4$  su se stesso, e precisamente la  $\Lambda' \circ \Lambda^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ .

In ogni carta dell’atlante canonico, il tensore metrico vale per definizione

$$(2) \quad G_{ik} = \varepsilon(i)\delta_{ik},$$

con  $\varepsilon(i) = 1$  per  $i = 1, 2, 3$ , e  $\varepsilon(4) = -1$ , tensore che ha appunto segnatura  $\langle 3,1 \rangle$ . Va da sé, allora, che il corrispondente tensore di Riemann è identicamente nullo, a ciò bastando la *costanza* della metrica in tutto  ${}^{\infty}L_0^4$ . Ovvie conseguenze della (2) sono che

(A): la forma quadratica  $G_{ik}dX^i dX^k$ , e

(B): la forma quadratica  $-G_{44}dX^4 dX^4$ ,<sup>8</sup>

siano entrambe definite positive. (Nella (A) e nel seguito, gli indici greci vanno da 1 a 3 e si somma sugli indici ripetuti.)

Ciò equivale (Sylvester) a che i primi tre minori principali discendenti di  $G_{ik}$  ( $G_{11}$ ,  $G_{11}G_{22} - G_{12}^2$ , ecc.) siano  $> 0$ , e rispettivamente a che  $G_{44}$  sia  $< 0$ ; quindi implica (v. S.sez. 9.2.1, (T)) che  $\det\{G_{ik}\} < 0$ . Come è ovvio, le condizioni (A) e (B) sono più deboli della (2).

La trasformazione (1) è pseudopitagorica, e deve lasciare invariato, nel passaggio da carta a carta dell’atlante canonico, la quantità  $\Delta S^2 =: G_{ik}\Delta X^i \Delta X^k = \sum_{i=1}^3 (\Delta X^i)^2 - (\Delta X^4)^2$ , dove  $\Delta$  è simbolo di differenza. Questa proprietà è garantita dalle (2.C, 13), cioè dalle dieci condizioni di pseudortonormalità delle matrici lorentziane  $\varepsilon(k)L^k_m L^m_j = \varepsilon(m)\delta_{mj}$ . Vi sono dunque 10 vincoli sui 16 coefficienti  $L^i_j$ , nei quali restano liberi  $16 - 10 = 6$  parametri. La generica carta dell’atlante

<sup>8</sup> Ricordiamo che il carattere pseudortonormale della metrica fa sì che lo spostamento dall’alto in basso o viceversa di un indice greco (che va da 1 a 3) non ha conseguenze sulla relativa componente, mentre un analogo spostamento dell’indice 4 ne cambia il segno.

canonico è perciò caratterizzata da 10 parametri: i 6 parametri liberi nella matrice  $\{L_j^i\}$  più i 4 parametri  $\{A^i\}$ . In forza della non-singularità della matrice  $\{L_j^i\}$ , l'insieme delle trasformazioni (1) costituisce un gruppo continuo a 10 parametri, il gruppo di Poincaré.

Abbiamo così ricapitolato l'apparato formale della RS. Passando agli aspetti interpretativi della teoria, cioè al significato fisico-operativo degli oggetti formali introdotti, le  $X^{1 \leq i \leq 3}$  si identificano con le coordinate cartesiane-ortogonali, nello spazio fisico 3-dim, di un reticolo rigido di orologi identici, normali e ortocroni, sincronizzati tra loro mediante la procedura indicata da Einstein (v. App. 2.B), e fondata sullo scambio di segnali luminosi tra un orologio e l'altro; mentre  $X^4$  è identificato con  $c$  ( $\equiv$  celerità della luce nel vuoto) volte il tempo segnato dal generico orologio del reticolo. Queste interpretazioni presuppongono l'esistenza e la disponibilità di campioni di lunghezza ( $\equiv$  barrette rigide) e di tempo ( $\equiv$  orologi normali ortocroni), da pensarsi come oggetti primitivi.<sup>9</sup> Si ottiene così una corrispondenza biunivoca, nella carta corrente di mappa  $\Lambda$  dell'atlante canonico, tra il generico "evento" ( $\equiv$  qualcosa che accade in un dato luogo e in un dato istante, osservabile e controllabile) e la quadrupla  $\{X^i\}$ , ovvero tra quell'evento e il "punto"  $P = \Lambda^{-1}(\langle X^i \rangle) \in {}^\infty L_o^4$ . Infine, da una parte l'effettiva struttura delle matrici  $\{L_k^i\}$ , e dall'altra la legge dinamica RS (2.2.2, 6) *in assenza di forza*, provano che in ogni carta dell'atlante canonico la legge di moto del generico punto materiale test *libero* (di massa non troppo grande) è del tipo lineare affine  $X^i = V^i X^4 + X_o^i \forall t$ , dove le  $V^i$  (adimensionali) e le  $X_o^i$  (lunghezze) sono 6 costanti. Vale a dire, il moto di quel punto è rettilineo uniforme, o inerziale, e la sua linea oraria è una geodetica di  ${}^\infty L_o^4$ . Evidentemente, questa proprietà resta immutata passando da una carta all'altra dell'atlante canonico.

È precisamente da questo quadro formale e interpretativo che si devono prendere le mosse nell'intento di costruire induttivamente una teoria relativistica della gravitazione, o Relatività Generale. Innanzitutto terremo ferma l'idea (comune alla RS, in cui la gravità è assente) che dal punto di vista della sua rappresentazione matematica lo spazio-tempo relativistico generale (RG) sia una varietà metrica 4-dim differenziabile connessa<sup>10</sup>  ${}^r L^4$ , non più necessariamente liscia ( $r \geq 1$  ma in generale  $< \infty$ ), né necessariamente senza bordi. Il suo atlante sarà supposto del tipo generale considerato nella S.sez. 4.1.1, né si supporrà che necessariamente esistano carte totali.

Ad evitare precisazioni pedantesche, da qui in avanti converremo di denotare allo stesso modo la componente (di un certo tipo) di un tensore – ad esempio  $\tau_{ik}$  –, dove  $i$  e  $k$  sono dei naturali

<sup>9</sup> Benché non sia essenziale, l'orientamento del reticolo può infine convenirsi fisso, ad es. destro (altra nozione da pensarsi come primitiva); e questo corrisponde alla condizione che il determinante della parte spaziale della matrice  $\{L_k^i\}$ ,  $\det \{L_k^i\}$ , sia  $> 0$ .

<sup>10</sup> Si ricordi (cfr. App. Gen. B) che in una varietà differenziabile, quindi topologica, la connessione è *equivalente* alla arco-connessione.

compresi tra 1 e  $n$  ( $n$  essendo la dimensione della varietà-supporto), e il loro insieme  $\{\tau_{ik}\}_{i,k=1 \div n}$  (o in breve  $\{\tau_{ik}\}$ ). Ovviamente questo non abolisce la distinzione tra i due oggetti  $\tau_{ik}$  e  $\{\tau_{ik}\}_{i,k=1 \div n}$ , ma implica la corretta interpretazione dello stesso simbolo che li rappresenta. Lo stesso varrà per le coordinate di una varietà, per gli elementi di una matrice, ecc. Questo tipo di convenzione è del resto praticato comunemente nella letteratura specifica di ogni livello, didattica e non.

Sia  $C = (U, \lambda)$  la generica carta di  ${}^rL^4$  di dominio  $U \subset {}^rL^4$  e mappa  $\lambda$ ,  $p \in U$ ,  $x = \lambda(p) \in R^4$  (o  $x^i = \lambda^i(p) \in R$ ), e  $g_{ik} = g_{ik}(x)$  le componenti covarianti del 2-tensore metrico nella carta  $C$ . Si assumerà che  ${}^rL^4$  ammetta un atlante (al quale esclusivamente ci riferiremo nel seguito, e che potrebbe denominarsi come atlante “(RG)-canonico” di  ${}^rL^4$ ) nella cui generica carta

- (a): i primi tre minori principali discendenti di  $\{g_{ik}\}$  ( $g_{11}$ ,  $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ , ecc.) sono  $> 0$ , e  
 (b):  $g_{44} < 0$ .

Quindi  $\det\{g_{ik}\} < 0$  (v. ancora S.sez. 9.2.1, (T)) e  $\{g_{ik}\}$  ha segnatura  $\langle 3,1 \rangle$  in ogni carta dell’atlante canonico. Per il teorema di Sylvester, le condizioni (a) e (b) sono carta-indipendenti per carte congiunte. Esse separano l’insieme ordinato dei 4 indici  $\langle i \rangle = 1, 2, 3, 4$  nell’insieme (qui non necessariamente ordinato)  $\{i\} \equiv \{1, 2, 3\}$  e  $i = 4$ ; e già su questa base possiamo distinguere le quattro coordinate  $x^{1 \leq i \leq 4}$  nelle  $\{x^1, x^2, x^3\}$ , che convenzionalmente diremo coordinate “spaziali”, e  $x^4$ , che convenzionalmente diremo coordinata “temporale”. Evidentemente, le condizioni (a) e (b) costituiscono l’estensione RG delle (A) e (B) che abbiamo enunciato a carico del tensore metrico RS (2).

Al di là di questa analogia, la determinazione delle  $g_{ik} = g_{ik}(x)$  è invece molto meno diretta che nel caso RS, dove  $g_{ik} \equiv G_{ik}$  è un dato esplicito e costante, comune a tutte le carte dell’atlante RS-canonico. Precisamente, supponendo  $r \geq 4$ ,<sup>11</sup> si supporrà che le dieci  $g_{ik} = g_{ik}(x)$  siano soluzioni di un particolare SDP (\*) del 2° ordine quasi-lineare costituito *dalla uguaglianza di due 2-tensori simmetrici e solenoidali*. Questo SDP è per definizione carta-indipendente, con ciò intendendosi che se  $g_{(2)}(x)$  è soluzione del SDP (\*) riferito alla carta  $C$ ,  $g'_{(2)}(x')$  (trasformato di  $g_{(2)}$  nella carta  $C'$ ) sia soluzione del SDP (\*) stesso trascritto nella carta  $C'$ . Nello stesso senso carta-indipendenti devono poi essere le condizioni accessorie associate al SDP (\*).<sup>12</sup> Ricordiamo infine che l’assunta solenoidalità comune ai due tensori simmetrici nei due membri del SDP (\*) fa sì che soltanto 6 delle

<sup>11</sup> In pratica, l’esistenza di un campo tensoriale (su una data varietà  $r$ -differenziabile), come ad es.  $g_{ik}$ , continuo, implica che si assuma  $r \geq 1$ ; di quello delle sue derivate prime [secondo] implica che si assuma  $r \geq 2$  [ $r \geq 3$ ], e così via. Quindi il requisito che esistano le 4 divergenze di un campo tensoriale simmetrico lineare affine nelle  $\partial^2 g$ , implica che si assuma  $r \geq 4$ .

<sup>12</sup> Questa proprietà di carta-indipendenza, o di covarianza, o di omogeneità che si voglia dire, è uno dei principi-cardine della RG, come di qualunque teoria fisico-matematica formalizzata entro la geometria delle varietà astratte: ogni relazione fisicamente significativa deve essere indipendente dalla scelta della carta in cui essa si esprime.

10 equazioni siano indipendenti, ma che questo non infirma il corretto bilancio equazioni vs. incognite se le  $\{g_{ik}\}$  sono usate soltanto per esprimere la metrica  $ds^2$ .

Tenuto ora conto della (9.3.1, 1), il SDP (\*) deve avere una struttura del tipo

$$(3) \quad \mathcal{A}\partial^2 g + \mathcal{B} = C,$$

dove  $\mathcal{A}\partial^2 g$  è una forma lineare nelle  $\partial^2 g$  con coefficienti  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(g)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(g, \partial g)$  (senza tuttavia che  $\mathcal{A}\partial^2 g$  e  $\mathcal{B}$  siano necessariamente l'uno e l'altro 2-tensori), e  $C = C(x, g, \partial g)$ . (Il fatto che  $\mathcal{A}$  non dipenda da  $\partial g$  può sembrare imprevisto, e se del resto fosse vero il contrario, ciò non modificherebbe la natura del SDP (3).) Se le  $\partial g$  sono *identicamente* nulle,  $\partial g \equiv 0$ , sempre tenuto conto delle (9.3.1, 1)  $\mathcal{B} \equiv 0$ , e quindi l'intero 1° membro delle (3) è  $\equiv 0$ . Inoltre la matrice dei coefficienti  $\mathcal{A}$  risulta non singolare (condizione di “normalità” del SDP (3)).<sup>13</sup> In definitiva il SDP (3) si riduce ad una identità del tipo  $0 \equiv 0$  se  $\partial g \equiv 0$  e  $C \equiv 0$ . Questo suggerisce immediatamente un approccio asintotico alla soluzione del SDP (3), in cui si inserisca un fattore di piccolezza  $\varepsilon$  a fattore di  $C$  e si sviluppi la soluzione  $g_{ik}$  in una serie asintotica di potenze di  $\varepsilon$  il cui termine di ordine zero sia del tipo RS. Infine si supporrà che una soluzione delle (3) esista anche in presenza delle richieste (a), (b), e che essa diventi unica sotto le convenienti condizioni accessorie. Queste ultime andranno imposte, come di norma, su sottovarietà  $(m \leq 3)$ -dim di  ${}^1L^4$ , ad esempio nell'origine spaziale e per ogni tempo.

### 9.3.3) FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE SECONDA

Abbiamo così descritto a grandi linee l'apparato matematico in cui si inquadra la RG, senza specificare in modo esplicito e completo le funzioni  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $C$  quando si passi all'effettivo SDP (1) (sappiamo comunque, e invitiamo il lettore a ricontrollarlo, che quelle funzioni soddisfano tutte le condizioni che abbiamo nominato). Il necessario passo successivo consiste nello specificare a cosa corrispondono, dal punto di vista fisico-operativo, gli oggetti formali introdotti.<sup>14</sup>

<sup>13</sup> Ricordiamo che Hilbert giunse allo stesso risultato usando un principio di azione, il che almeno spostò l'indagine induttiva sulla identificazione di tale azione. Su questa base, fu poi ancora Hilbert a riconoscere che il 1° membro delle (3) non poteva constare di dieci componenti 2-tensoriali funzionalmente indipendenti.

<sup>14</sup> Come abbiamo ampiamente illustrato nella Introduzione 0.1, l'interazione tra momento interpretativo-modellizzante e momento matematico-formalizzante – nella elaborazione di una teoria fisica – è molto complessa e difficile da descrivere. Qualche rara volta, il primo momento ispira e letteralmente “genera” il secondo; ma molto più spesso la modellazione trova la teoria matematica nella quale verrà a formalizzarsi già pronta, e allora si tratterà di utilizzare quest'ultima nel più proficuo ed efficace dei modi. La laboriosa messa a punto della RG si conforma bene al secondo tipo di percorso: all'epoca in cui essa fu sviluppata, la teoria delle varietà differenziabili metriche (entro la quale la RG si formalizza) quale oggi la conosciamo era essenzialmente disponibile, ma come era da attendersi fu utilizzata in modo rudimentale e incompleto. Come già nel caso della RS, per una miglior efficacia la nostra presente esposizione cerca di attenersi a una linea *logica* piuttosto che *storica*.

Al primo posto abbiamo le coordinate  $x \equiv x^{1 \leq i \leq 4}$  nella carta corrente  $C$ . Come nel caso  $RS$ , partiremo dall'idea di un continuo di orologi puntiformi. L'orologio corrente della carta  $C$ , diciamo  $\mathfrak{o}$ , è contrassegnato dall'etichetta  $x^1 \in \lambda^1(U)$  (ovviamente i tre reali sono ora ordinati), non necessariamente legata alla sua posizione nello spazio fisico, e segna il tempo  $x^4/c$ . Questi orologi  $\mathfrak{o}$  non sono necessariamente identici tra loro né normali, ma marciano tutti senza mai fermarsi dal passato al futuro.<sup>15</sup> Passare dalla carta  $C = (U, \lambda)$  alla carta congiunta  $C'(U', \lambda')$  significa passare ad un altro continuo di orologi con altra etichetta e altro ritmo di marcia (ma mai interrotta, e sempre orientata dal passato al futuro), di tale natura che, per  $\lambda^{-1}(x) = \lambda'^{-1}(x') = p \in U \cap U'$ , la funzione di transizione invertibile  $x' = \lambda'(\lambda(x)) \equiv x'(x) \leftrightarrow x = \lambda(\lambda'(x')) \equiv x(x')$  sia di CdC  $r$  (agli stretti fini presenti,  $r \geq 1$  sarebbe sufficiente). Secondo la teoria delle varietà differenziabili, questo implica che valgono le relazioni

$$(1) \quad dx^{ij} = \partial x^{ij} / dx^i dx^i \leftrightarrow dx^i = \partial x^i / dx^{ij} dx^{ij},$$

sotto la  $\det\{\partial(x')/\partial(x)\} \det\{\partial(x)/\partial(x')\} = 1$ . Inoltre l'assunto equicronismo degli orologi delle due carte implica che

$$(2) \quad \partial x'^4 / \partial x^4 > 0 \text{ e } \partial x^4 / \partial x'^4 > 0.$$

Con queste definizioni, le coordinate nella generica carta acquistano un significato operativo preciso: la terna ordinata delle prime tre è l'etichetta incollata al corrispondente orologio  $\mathfrak{o}$ , mentre la quarta è il "tempo" (generalmente non normale) da esso indicato, moltiplicato per  $c$ . Potremo dire **coordinate osservative** le  $x^i$  così definite, in quanto legate alla nostra comune esperienza di osservatori: di fronte ad un continuum di orologi etichettati, siamo in grado di leggere sia l'etichetta  $x^1$  dell'orologio corrente che l'ora  $x^4/c$  da esso segnata.

Un tipo di  $r$ -diffeomorfismo  $x' = x'(x) \leftrightarrow x = x(x')$  meno generale del precedente è quello in cui le coordinate spaziali  $x'^1$  dipendono soltanto dalle coordinate spaziali  $x^k$ , cioè in cui  $\partial x'^1 / \partial x'^4 \equiv 0$ . In questo caso anche  $\partial x'^k / \partial x'^4 \equiv 0$ , e inoltre  $0 < \partial x^4 / \partial x'^4 \equiv (\partial x'^4 / \partial x^4)^{-1}$  e  $\det\{\partial x' / \partial x'^k\}$  (che deve essere  $\neq 0$ )  $\equiv (\det\{\partial x'^k / \partial x^1\})^{-1}$ . Questo consegue da un semplice teorema algebrico che recita:

T1. «Se una matrice quadrata non singolare  $A$  ha, diciamo, l'ultima colonna nulla salvo l'ultimo elemento  $a$ , allora anche la sua inversa  $B$  ha l'ultima colonna nulla salvo l'ultimo elemento  $b$ , e  $b = 1/a$ ; e inoltre, il minore ( $\neq 0$ ) di  $a$  nella matrice  $A$  è reciproco del minore di  $b$  nella matrice  $B$ ».

Supponiamo adesso di avere fissato la dipendenza dai loro argomenti dei due membri del SDP (9.3.2, 3) come nella  $RG$ , identificando quindi il suo 1° membro con il 2-tensore  $E_{(2)} = E_{(2)}(g, \partial g, \partial^2 g)$  e il suo 2° membro con il 2-tensore  $-KT_{(2)} = -KT_{(2)}(x, g, \partial g)$ ,  $K = \text{costante} > 0$

<sup>15</sup> Quest'ultima condizione non è strettamente necessaria, ma rinunciandovi non si ottiene nulla di significativo in termini di generalità. Invece la condizione che gli orologi marcino senza mai fermarsi (durante i tempi di interesse) è irrinunciabile.

data. È chiaro che per avere il significato fisico-operativo di questi due oggetti basta (ma occorre) avere quello delle  $g_{ik}$ . Einstein risolve questo problema ricorrendo al principio di equivalenza<sup>16</sup>. Nella teoria newtoniana della gravità, un sistema di riferimento situato in un campo gravitazionale *uniforme* (nello spazio) e *costante* (nel tempo), quello della ben nota “cabina di ascensore fermo” della pratica didattica, equivale – dal punto di vista dei processi fisici che vi si osservano, – allo stesso sistema senza campo gravitazionale, ma uniformemente accelerato, con l’appropriata accelerazione, rispetto alle “stelle fisse”. Ispirandosi a questo fatto, Einstein assume che anche in RG *tutti* i processi fisici osservabili nei due sistemi siano governati dalle stesse leggi. In ultima analisi, il valore euristico del principio di equivalenza einsteiniano è tutto qui; ma è chiaro che già così siamo sostanzialmente oltre i confini della RS. La RS è corretta soltanto in assenza di campi gravitazionali, quando valgono le trasformazioni di Lorentz tra riferimenti in moto relativo uniforme.

Formuliamo adesso la nozione matematica di **dominio infinitesimo**  $\delta$  di una varietà topologica  $m$ -dim  ${}^0M^m \equiv M$ . Questa nozione è ovvia quando la varietà è  $R^m$ : se  $x$  e  $y$  sono punti di  $R^m$ , e  $|x-y|$  è la loro distanza pitagorica (o una distanza topologicamente equivalente, come ad esempio la distanza uniforme  $\max_{i=1+m}|x^i-y^i|$ ),  $\delta \subset R^m$  è infinitesimo se  $\forall (x \in \delta, y \in \delta) \{ |x-y| \rightarrow 0 \}$ . Il dominio  $\delta$  di  $M$  si definisce allora come infinitesimo, e si scrive  $\delta \rightarrow 0$ , se  $\delta \subset U$  e  $\lambda(\delta) \rightarrow 0$  in una carta  $C(U, \lambda)$  di  $M$ . La definizione non dipende dalla carta: per una carta  $C'(U', \lambda')$  congiunta a  $C$ , se  $\delta \subset U \cap U'$ , “ $\lambda(\delta) \rightarrow 0$ ” equivale a “ $\lambda'(\delta) \rightarrow 0$ ” ( $\lambda(x) = \lambda'(x')$ ). Lasciamo al lettore la prova di questo elementare asserto, per la quale è sufficiente la continuità della funzione di transizione tra le due carte (non a caso abbiamo introdotto  $M$  come varietà topologica). Sotto  $\delta \rightarrow 0$ , una carta di dominio  $\delta$  si potrà dire **germe di carta**.

Se la varietà  $M$  è differenziabile ( $r \geq 1$ ), per  $\delta$  “piccolo” e  $\subset U \cap U'$  potremo scrivere l’uguaglianza approssimativa

$$(3) \quad \Delta x'^j \approx \partial x'^j / \partial x^i|_{\underline{x}} \Delta x^i,$$

dove  $x' = \lambda'^{-1}(\lambda(x))$ ,  $\partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}}$  è per definizione non singolare,  $\underline{x}$  è (praticamente) arbitrario in  $\lambda(\delta)$ , e  $\Delta x'^j$ ,  $\Delta x^i$  hanno significato ovvio. Per  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow d$ , e la (3) e la sua inversa diventano formalmente la prima e la seconda delle (1) (ovviamente facendovi  ${}^rM^m = {}^rL^4$ ).

---

<sup>16</sup> In realtà il principio di equivalenza non gode di universale consenso tra i fisici matematici: ad esempio, J. Synge appena lo nomina, e con evidente sufficienza, nella sua vasta monografia sulla RG (4<sup>th</sup> print. 1971, p. 133), ed alcuni relativisti ne limitano la portata, o addirittura confessano di non capirlo. L’opinione corrente è che esso possa essere accettato senza riserve, soprattutto in chiave induttiva. Si veda anche, tre pagine appresso, la formulazione matematica del principio. Einstein aveva un prezioso indizio in un fatto scoperto da Galileo: cioè, che il moto, sotto l’effetto della gravità di un corpo abbastanza piccolo, è indipendente dalla sua natura. Fu probabilmente questo, attraverso le appropriate generalizzazioni, a suggerirgli che la gravità poteva essere una proprietà dello spazio-tempo.

Una uguaglianza approssimativa del tipo (3), o la corrispondente uguaglianza-limite per  $\delta \rightarrow 0$ , non presuppone necessariamente che le  $x'$  siano coordinate di una carta  $C'$  congiunta a  $C$ : una simile

$$(3') \quad \Delta X^j \approx \partial X^j / \partial x^i|_{\underline{x}} \Delta x^i,$$

o la corrispondente uguaglianza-limite per  $\delta \rightarrow 0$ , si può scrivere per un arbitrario germe di  $(r \geq 1)$ -diffeomorfismo  $X: \lambda(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Questo germe è interamente descritto dagli  $m^2$  reali  $\partial X^j / \partial x^i|_{\underline{x}}$ , arbitrari entro la condizione di non-singularità della loro matrice.

Nonostante la loro somiglianza formale, le

$$(4) \quad dx'^j = \partial x'^j / \partial x^i dx^i,$$

$$(4') \quad dX^j = \partial X^j / \partial x^i|_{\underline{x}} dx^i,$$

non devono essere confuse. La prima vale per  $x$  nel dominio  $\lambda(U \cap U')$ , e fa parte a tutti gli effetti della teoria delle varietà differenziabili; la seconda vale soltanto per  $x$  nel dominio infinitesimo  $\lambda(\delta)$  intorno a  $\underline{x}$ , ed è sostanzialmente estranea a quella teoria (almeno, al livello della presente esposizione). Detto diversamente,  $dX^j$  non è il differenziale della coordinata  $j$ -ma di una carta di varietà differenziabile:  $\partial X^j / \partial x^i|_{\underline{x}}$  sono soltanto gli elementi della matrice non singolare che trasforma le  $dx^i$  nelle  $dX^j$  intorno a  $x = \underline{x}$ , secondo il germe di  $r$ -diffeomorfismo  $X: \lambda(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Si tratta ora di specificare le variabili  $X$  in modo che abbiano un preciso e conveniente significato operativo. A questo scopo, si consideri (con Einstein) una piccola porzione dello spazio-tempo che sia sottratta all'azione del campo gravitazionale effettivamente esistente. Secondo il principio di equivalenza, ciò è quanto avviene, per un breve tempo, in una piccola capsula spaziale in "caduta libera" nel campo stesso (e non rotante rispetto alle stelle fisse). Per l'osservatore che vi risiede, tutto si svolge soddisfacendo le leggi della RS: un punto materiale libero test (di massa non troppo grande) si muove di moto inerziale, vale l'elettromagnetismo classico, .. ecc. È questo una sorta di "aggiornamento" einsteiniano – *mutatis mutandis* – della situazione descritta da Galileo, in cui l'osservatore era immaginato a bordo di un vascello (in quel caso *non* infinitesimo) procedente senza scosse su un mare perfettamente calmo, e nessuna osservazione fisica all'interno del vascello poteva rivelare il suo moto inerziale.<sup>17</sup>

A bordo della piccola capsula spaziale (non rotante), e per il breve tempo permesso, si possono scegliere  $\infty^6$  riferimenti lorentziani-pseudopitagorici *differenziali*: dei sei parametri liberi, tre rappresentano l'orientamento spaziale della capsula e tre la sua velocità, l'uno e l'altra rispetto al

<sup>17</sup> Riferito dal giovanissimo W. Pauli (1921), il principio di equivalenza recita: «Per ogni regione spazio-temporale infinitamente piccola (così piccola che sia in essa trascurabile la variazione della gravità), esiste sempre un sistema  $K_0$  di coordinate  $X^{1 \leq i \leq 4}$  nel quale è assente ogni effetto della gravità, sia sul moto di punti materiali che su qualunque altro fenomeno fisico. ... Il sistema di coordinate locale  $K_0$  è idealmente realizzabile mediante una scatola abbastanza piccola non soggetta a forze diverse dalla gravità, e che seguendo quest'ultima, cada liberamente.» ("Relativitätstheorie", in Encyclopædie der mathematische Wissenschaften, Band 5, Art. 19, Leipzig, 1921).



riferimento lorentziano inerziale del laboratorio. Dei dieci parametri di Poincaré, mancano le quattro origini perché siamo interessati soltanto alle *differenze* tra coordinate omologhe (ed è in questo senso che abbiamo più sopra usato l'attributo "differenziali"). Fissati quei sei parametri, il riferimento differenziale lorentziano in oggetto è completamente definito, e le  $dX^{1 \leq i \leq 4}$  sono operativamente definite come differenze infinitesime tra coordinate omologhe.

Diremo **infinitesimo inerziale** (I,I; scriviamo così, e non II, per ragioni di migliore intelligibilità tipografica) un riferimento differenziale come il precedente, perché in esso vale la legge d'inerzia. D'altra parte le  $dX$  e le  $dx$  devono essere in corrispondenza biunivoca attraverso gli eventi: all'evento  $P = \Lambda^{-1}(X)$  corrisponde lo stesso evento  $p = \lambda^{-1}(x)$ , e quindi  $x = \lambda(\Lambda^{-1}(X)) = x(X)$  e  $X = \Lambda(\lambda^{-1}(x)) = X(x)$ . Ma, ricordiamo, sia le  $dX$  che le  $dx$  sono ormai operativamente definite, e quindi i *germi* di funzioni  $x(X)$  e  $X(x)$  sono *osservabili*, risultando uno inverso dell'altro (per  $X$  in  $\Lambda(\delta)$  e rispettivamente per  $x$  in  $\lambda(\delta)$ , con  $\delta \rightarrow 0$ ). Questo comporta che siano osservabili le matrici non singolari  $\partial(X)/\partial(x)|_{\underline{x} \in \lambda(\delta)}$  e  $\partial(x)/\partial(X)|_{\underline{X} \in \Lambda(\delta)}$ , risultando l'una inversa dell'altra in  $\underline{x} \leftrightarrow \underline{X}$ .

Tutto ciò equivale al seguente asserto: «per ogni punto  $\underline{p}$  di  ${}^1L^4$  fissato ad arbitrio, esistono (infiniti) riferimenti  $X \equiv X^{1 \leq i \leq 4} = X(x)$  (dove  $x \equiv x^{1 \leq i \leq 4}$  è il riferimento corrente), invertibili in  $x = x(X)$ , per i quali (i): la corrispondente metrica in  $\underline{X} = \Lambda^{-1}(\underline{p})$ ,  $G_{ik}|_{\underline{X}}$ , è pseudopitagorica,  $G_{ik}|_{\underline{X}} = \varepsilon(i)\delta_{ik}$ , e (ii):  $(\partial G_{ik}/\partial X^j)|_{\underline{X}} = 0$ ; ovvero, in  $\underline{X}$  sono nulli i corrispondenti Chr1 e Chr2<sup>18</sup> .» Naturalmente non sono nulle, in generale, le derivate (in  $\underline{X}$ ) di questi Chr1 e Chr2, perché il tensore di Riemann di  ${}^1L^4$  non è in generale nullo in  $\underline{X}$ . In conclusione, se si usa il riferimento  $X$  è come se in un piccolo intorno di  $\underline{p}$  valga la RS.

Per l'assunto equicronismo degli orologi dei riferimenti deve poi risultare (cfr. le (2))

$$(2') \quad \partial X^4/\partial x^4|_{\underline{x}} > 0 \quad \text{e} \quad \partial x^4/\partial X^4|_{\underline{X}} > 0.$$

Per brevità, nel seguito scriveremo  $C^i_j$  in luogo di  $\partial X^i/\partial x^j|_{\underline{x}}$  e  $D^j_i$  in luogo di  $\partial x^j/\partial X^i|_{\underline{X}}$ , quindi  $C^i_j D^j_h = \delta^i_h$ . Sotto le precedenti condizioni, che devono essere verificate per costruzione, il tensore metrico di  ${}^1L^4$ , nella carta corrente  $x$ , viene allora *definito* dalla

$$(5) \quad g_{ik} = C^j_i C^h_k G_{jh} = C^j_i C^k_j - C^4_i C^4_k,$$

dove si è usata la (9.3.2, 2). Le (5) valgono per ogni  $\underline{x}$  di  $\lambda(U)$  (perché  $\delta \subset U$  è per il resto arbitrario), e per ogni carta dell'atlante canonico di  ${}^1L^4$ .<sup>19</sup>

<sup>18</sup> Sarà utile rileggere l'ultimo paragrafo della S.sez. 8.2.1, dove abbiamo introdotto i riferimenti localmente inerziali (in cui sono appunto nulli tutti i simboli di Christoffel).

<sup>19</sup> Riferendoci ad una generica varietà metrica  $(n \geq 2)$ -dim, è ben naturale che, se  $g_{(2)}(x)$  è il suo tensore metrico nella carta  $(x)$ , generalmente non esista una carta congiunta  $(x')$  tale che in essa  $g'_{(2)}(x')$  assuma valori prescritti nell'aperto di transizione. Infatti si tratterebbe di determinare  $n$  funzioni  $x'(x)$  in modo di soddisfare le corrispondenti  $n(n+1)/2$  uguaglianze; e  $n < n(n+1)/2$  per  $n \geq 2$ . Questo spiega in particolare perché si debba ricorrere a riferimenti inerziali infinitesimi  $(dX)$  nel caso di una data varietà lorentziana di partenza: le  $n(n+1)/2$  precedenti uguaglianze diventano appunto le (5). Tuttavia si può tentare di risolvere il problema in via approssimata rappresentando  $x'$  in serie di potenze

Nello stesso spirito, se  $T_{j1 \dots ja}^{k1 \dots kb} = T_{j1 \dots ja}^{k1 \dots kb}(X)$  sono componenti di un campo (a+b)-tensoriale di dato significato fisico nella carta lorentziana  $(\delta_0 \subset {}^\circ L_0^4, \Lambda)$ , il suo significato operativo nella carta corrente  $C$  di  ${}^r L^4$  è *definito* mediante la naturale generalizzazione della (5):

$$(6) \quad t_{i1 \dots ia}^{k1 \dots kb} =: C_{i1 \dots ia}^{j1 \dots ja} T_{j1 \dots ja}^{h1 \dots hb} D_{h1 \dots hb}^{k1 \dots kb} \quad 20$$

Se in particolare facciamo  $i = k = 4$  nella (5), otteniamo

$$(5') \quad g_{44} = \sum_{\iota=1}^3 C_{\iota 4}^4 C_{\iota 4}^4 - (C_{4 4}^4)^2.$$

Lungo la linea oraria dell'orologio  $\mathcal{O}$  della carta  $C$ , è  $dx^1 = 0$  per ogni  $\iota$ , e  $dx^4 > 0$ . Quindi secondo la (4')  $dX^1 = C_{\iota 4}^4 dx^4$  e  $dX^4 = C_{4 4}^4 dx^4$ . Ma  $dX^1/dX^4$  è la  $\iota$ -ma componente cartesiana ortogonale della velocità, in unità  $c$ , di  $\mathcal{O}$  nel riferimento differenziale  $I, I$   $dX^{1 \leq i \leq 4}$ , per cui, assimilando  $\mathcal{O}$  ad un punto materiale per quanto riguarda il moto, il quadrato di  $dX^1/dX^4$  deve essere  $< 1$ ; ovvero  $\sum_{\iota=1}^3 C_{\iota 4}^4 C_{\iota 4}^4 / (C_{4 4}^4)^2 < 1$ . Riprendendo la precedente (5'), risulta allora

$$(7) \quad g_{44} < 0,$$

in accordo con la condizione (9.3.2, b)) assunta a priori nella descrizione della struttura formale della RG. (Si noti tuttavia che la stessa disuguaglianza (7) sarebbe conseguita dalla (5) se in luogo delle (2') vigessero le disuguaglianze opposte, cioè se il generico orologio  $\mathcal{O}$  marciasse (senza fermarsi) dal futuro al passato.)

Dalla  $g_{ik} = C_{i 4}^j C_{k 4}^h G_{jh}$  (eq. (5)), o dalla inversa

di  $x$  secondo la  $x^{i'} - x^{i'_0} = A_{k'}^{i'} x^k + B_{hk'}^{i'} x^h x^k + C_{hkj}^{i'} x^h x^k x^j + \dots$ , dove  $x^{i'_0}$  è il valore di  $x^{i'}$  per  $x = 0$ , e i coefficienti  $B_{hk}^{i'}$ ,  $C_{hkj}^{i'}$ ,  $\dots$ , sono simmetrici rispetto agli indici inferiori. Si imporrà poi che  $g_{(2)} = G_{(2)}$  per  $x = 0$  al più basso ordine, che  $\partial_j g_{(2)} = 0$  per  $x = 0$  all'ordine successivo, .. e così via. Al 1° passo, abbiamo da soddisfare  $n(n+1)/2$  uguaglianze, e i coefficienti  $A_{k'}^{i'}$  disponibili sono  $n^2$ ; quindi l'operazione è possibile, e addirittura ci avanzano  $n(n-1)/2$  coefficienti. Al 2° passo, le derivate prime di  $g_{(2)}$  da uguagliare a 0 in  $x = 0$  sono  $n^2(n+1)/2$ , e i coefficienti  $B_{hk}^{i'}$ , tenuto conto della loro simmetria negli indici inferiori, sono ugualmente  $n^2(n+1)/2$ ; il bilancio è dunque in parità. Al 3° passo le derivate seconde (di  $g_{(2)}$ ) da uguagliare a 0 in  $x = 0$  sono (in forza del teorema di Schwarz)  $n^2(n+1)^2/4$ , mentre i coefficienti  $C_{hkj}^{i'}$ , sempre tenuto conto della simmetria negli indici inferiori, sono soltanto  $n^2(n+1)(n+2)/3!$ , un numero minore di  $n^2(n+1)^2/4$  per  $n \geq 2$ . L'operazione è dunque impossibile per  $n \geq 2$ , e dobbiamo fermarci al 2° passo. È interessante calcolare l'ammanco di coefficienti al 3° passo: esso è  $n^2(n+1)^2/4 - n^2(n+1)(n+2)/6 = n^2(n^2-1)/12$ , precisamente il numero delle componenti indipendenti del tensore di curvatura! Questo è molto suggestivo, potendosi interpretare nel senso che le derivate seconde di  $g_{(2)}$  che *non* si possono annullare in  $x = 0$  contengano l'informazione presente nel tensore di curvatura. La precedente analisi qualitativa ci consente poi di valutare l'ordine di grandezza della dimensione lineare  $L$  della piccola scatola in caduta libera nominata nel testo. Essa deve evidentemente essere molto minore del rapporto tra una componente tipica del tensore metrico ed una sua derivata tipica (supponendo al solito che le coordinate siano lunghezze). In definitiva, nella scatola in caduta libera di dimensione lineare  $\approx L$ , e quindi nel corrispondente riferimento inerziale infinitesimo, le leggi della relatività speciale valgono a meno di un errore relativo  $O(L\partial g/g)$ ; e il valore di  $L$  deve garantire che questo numero sia accettabilmente piccolo. Un analogo ragionamento porta a valutare la finestra temporale permessa. Questo contribuisce a chiarire il significato di riferimento inerziale infinitesimo.

<sup>20</sup> Applicata alla carta congiunta con apice, la (5) dà  $g'_{mn} = C_{m 4}^j C_{n 4}^h G_{jh}$ , e questa assicura che  $g'_{mn} = \partial x^i / \partial x'^m \partial x^k / \partial x'^n g_{ik}$ , secondo l'usuale legge di trasformazione tra componenti covarianti di 2-tensori. Inoltre, se si definisce similmente  $g'^{ik} =: G'^{jh} D_{j 4}^i D_{h 4}^k$  (con  $G'^{jh} = \varepsilon(j)\delta^{jh}$ ), si trova  $g'^{ik} g_{pk} = \delta_{p'}^i$ , perché  $G'^{jh} G_{ph} = \delta_{p'}^j$ . E ancora, se si sposta verticalmente un indice nel 1° membro della (6), ad es. il 1° indice controvariante  $k_1$  in basso come  $i_{a+1}$ , e si applica ancora la (6) al nuovo tensore, ciò equivale a contrarre il vecchio con  $g_{k_1 i(a+1)}$ , perché la corrispondente operazione su  $T_{j_1 \dots j_a}^{h_1 \dots h_b}$  equivale a contrarlo con  $G_{h_1 j(a+1)}$ . Insomma, e come ci si poteva aspettare, non nasce alcun conflitto tra le *definizioni* (5) e (6) e la teoria dei campi tensoriali su varietà differenziabili metriche.

$$(5\text{bis}) \quad G_{jh} = D_j^i D_h^k g_{ik},$$

si deduce la **relazione d'invarianza**

$$(8) \quad g_{ik} dx^i dx^k = G_{jh} dX^j dX^h,$$

valida per il generico germe di carta intorno a  $\underline{p}$  e il generico riferimento differenziale I,I associato; nonché, ormai banalmente, la simile relazione d'invarianza tra carte congiunte

$$(9) \quad g'_{ik} dx'^i dx'^k = g_{ik} dx^i dx^k.$$

Siano ora P e Q due eventi distinti e infinitamente vicini dello spazio-tempo, cioè appartenenti ad un dominio infinitesimo di  ${}^4L$ . Sarà utile rendere intuitivamente concreti tali P e Q pensandoli come lampi istantanei che poi si propagano in ogni direzione spaziale. Ci si chiede allora quale lampo occorra per primo, se la domanda ha senso, in termini delle coordinate di P e di Q in un riferimento I,I. Per brevità, porremo  $dL_{QP} \equiv dL_{PQ} =: [\sum_{i=1}^3 (X_Q^i - X_P^i)^2]^{1/2} (\geq 0)$  e  $dX_{QP}^4 \equiv -dX_{PQ}^4 =: X_Q^4 - X_P^4$ . Nel seguito, l'assenza di pedici in dL e in  $dX^4$  equivarrà alla presenza di  $QP$ .

È chiaro che P *precede* Q sse

$$(10_1) \quad dX^4 > dL (\geq 0),$$

e che P *segue* Q sse

$$(10_2) \quad dX^4 < -dL (\leq 0).$$

È anche chiaro che le (10<sub>1</sub>) e le (10<sub>2</sub>) si escludono a vicenda, per cui il loro insieme equivale a

$$(10) \quad \text{"}(dX^4 < -dL) \underline{\vee} (dX^4 > dL)\text{"},$$

dove  $\underline{\vee}$  sta per la disgiunzione esclusiva "aut", ed ancora dL è supposto  $\geq 0$ .

Se vale la (10), la coppia (non ordinata) {P,Q} si dirà "di tipo  $\tau$ " ( $\tau$  come "tempo"), un asserto di significato assoluto perché non cambia al cambiare del riferimento differenziale I,I. Per brevità, scriveremo come "1\*" il predicato "{P,Q} è di tipo  $\tau$ ". È facile accertare che, se 1\*, esiste uno ed un solo riferimento differenziale I,I in cui le coordinate *spaziali* di P e Q coincidono. Si ha così il significato di  $dX^4$ : se 1\*, e P precede Q, esso è il tempo che passa dal lampo P al lampo Q misurato nel riferimento differenziale I,I in cui essi sono colocali ( $\equiv$  occorrono nella stessa posizione spaziale). Alle stesse condizioni, P e Q possono poi pensarsi come estremi di un tratto infinitesimo di linea oraria di un punto materiale orientata dal passato al futuro. (Prescindendo da questioni di segno, quanto sopra può ripetersi sostituendo  $|dX^4|$  a  $dX^4$ , abolendo "e P precede Q", sostituendo "dal lampo P al lampo Q" con "tra i due lampi", e infine cancellando "orientata dal passato al futuro".)

La coppia {P,Q} si dirà invece "di tipo  $\sigma$ " ( $\sigma$  come "spazio") se non è di tipo  $\tau$ , e se P e Q *non* sono estremi di un tratto infinitesimo di linea oraria di un fotone. Nomineremo come "2\*" il

predicato “ $\{P,Q\}$  è di tipo  $\sigma$ ”. Si noti che  $2^*$  non è la negazione di  $1^*$  (negazione che è invece “ $\{P,Q\}$  non è di tipo  $\tau$ ”), ed equivale a (con  $\wedge \equiv$  “et”)

$$(11) \quad “(dL > 0) \wedge (-dL < dX^4 < dL)”$$

un altro asserto di significato assoluto. E ancora facile accertare che, se  $2^*$ , esiste uno ed un solo riferimento differenziale I,I in cui le coordinate *temporali* di P e Q coincidono. Si ha così il significato di  $dL$ : esso è la distanza (spaziale) tra i due lampi nel riferimento differenziale I,I in cui essi sono simultanei. (Si noti anche che, se  $2^*$ , i due lampi “non possono comunicare tra loro”, perché ciò implicherebbe l’esistenza di segnali di velocità maggiore di  $c$  in un riferimento inerziale.)

Infine la coppia  $\{P,Q\}$  si dirà “di tipo  $\lambda$ ” ( $\lambda$  come “luce”) se, essendo  $dL > 0$ ,

$$(12') \quad “(dX^4 = -dL) \underline{\vee} (dX^4 = dL)”$$

(la possibilità  $dL = 0$  va esclusa perché allora avremmo  $dX^4 = 0$ , e quindi  $dX^i = 0$ , cioè  $P = Q$  in contraddizione con l’ipotesi che P e Q siano distinti). La (12') può quindi anche risciversi come

$$(12) \quad “(dL > 0) \wedge [(dX^4 = -dL) \underline{\vee} (dX^4 = dL)]”.$$

Scriveremo come “ $3^*$ ” il predicato “ $\{P,Q\}$  è di tipo  $\lambda$ ”, ancora di significato assoluto. È evidente che i predicati ( $1^*, 2^*, 3^*$ ) si escludono a vicenda, e coprono tutte le possibilità.

Si prova senza difficoltà che la (10) *equivale* alla

$$(10bis) \quad dL^2 - (dX^4)^2 < 0;$$

che la (11) *equivale* alla

$$(11bis) \quad dL^2 - (dX^4)^2 > 0;$$

e infine che la (12) *equivale* alla

$$(12bis) \quad dL^2 = (dX^4)^2 > 0.$$

In forza della relazione di invarianza (8), nella generica carta C potremo dunque scrivere:

$$(13_1) \quad 1^* \Leftrightarrow g_{ik} dx^i dx^k < 0;$$

$$(13_2) \quad 2^* \Leftrightarrow g_{ik} dx^i dx^k > 0;$$

$$(13_3) \quad 3^* \Leftrightarrow g_{ik} dx^i dx^k = 0.$$

È ancora evidente che le tre relazioni a 2° membro di queste equivalenze, che si escludono a vicenda, coprono tutte le possibilità comunque si scelgano i quattro  $dx^i$  (purché non tutti nulli).

Possiamo anche affermare che se, nella carta C,  $dx^i = 0 \forall i = 1,2,3$ , allora  $1^*$ . Questo segue dalla definizione delle coordinate osservative. Se infatti  $\forall i \{dx^i = 0\}$ , allora siamo sulla linea oraria di un orologio  $O$  di C, e come abbiamo visto ciò porta alla tesi. In definitiva  $\forall i \{dx^i = 0\}$  implica “ $(dX^4 \neq 0) \wedge (0 > g_{ik} dx^i dx^k \equiv g_{44} (dX^4)^2)$ ”, ovvero

$$(\alpha) \quad \forall t \{dx^t = 0\} \Rightarrow g_{44} < 0.$$

Poiché l'antecedente dell'implicazione  $(\alpha)$  può sempre essere assunta, ritroviamo ancora la (7) (o la (9.3.2, (b))).

Supponiamo ora che  $X^i$  e  $X^i + dX^i$  siano le coordinate degli estremi di un tratto infinitesimo di linea oraria di un fotone; allora, e solo allora,  $dL^2 - (dX^4)^2 = 0$ , e vale il predicato 3\*. Per la relazione di invarianza (8), lo stesso si può ripetere sostituendo alle  $X$  le coordinate  $x$  di una carta  $C$ , e a  $dL^2 - (dX^4)^2$ ,  $g_{ik}dx^i dx^k$ . In conclusione, vale l'equivalenza

$$(\gamma) \quad \text{“nella carta } C, x^i, x^i + dx^i \text{ sono le coordinate degli estremi di un tratto infinitesimo di linea oraria di un fotone”} \Leftrightarrow \text{“} g_{ik}dx^i dx^k = 0 \text{”}.$$

Supponiamo infine che, nella carta  $C$ , sia  $dx^4 = 0$  (quindi che  $\exists t \{dx^t \neq 0\}$ ), e che  $x^i, x^i + dx^i$  non siano le coordinate degli estremi di un tratto infinitesimo di linea oraria di un fotone. Allora i predicati 1\* e 3\* vanno scartati; vale quindi 2\*, e quindi “ $dx^4 = 0$ ” implica “ $(\exists t \{dx^t \neq 0\}) \wedge (0 < g_{ik}dx^i dx^k = g_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa)$ ”; ovvero

$$(\beta) \quad \text{“} dx^4 = 0 \text{”} \Rightarrow \text{“} g_{\iota\kappa}dx^\iota dx^\kappa \text{ è una forma quadratica definita positiva”}$$

Poiché l'antecedente della  $(\beta)$  può sempre essere assunta, ritroviamo così la (9.3.2, (a)) anch'essa introdotta assiomaticamente nella descrizione della RG.<sup>21</sup>

Per maggiore comodità del lettore, scriviamo qui esplicitamente le disuguaglianze (9.3.2, (a)):

$$(14_1) \quad g_{11} > 0,$$

$$(14_2) \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0,$$

$$(14_3) \quad g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{23}g_{31} - (g_{23}^2g_{11} + g_{31}^2g_{22} + g_{12}^2g_{33}) > 0.$$

Come sappiamo, le (14) implicano anche le più generali  $g_{\iota\iota} > 0$ ,  $g_{\iota\iota}g_{\kappa\kappa} - (g_{\iota\kappa})^2 > 0$  per ogni  $\iota, \kappa = 1, 2, 3$  con  $\iota \neq \kappa$ . Queste ristabiliscono la conveniente simmetria tra i tre indici spaziali.

In conclusione le quattro disuguaglianze (14) e (7) devono essere soddisfatte a priori dal tensore metrico in ogni carta dell'atlante canonico di  ${}^1L^4$ . (Sulla carta-indipendenza di quelle disuguaglianze abbiamo già detto, alla luce del teorema di Sylvester.) Inoltre la  $\det\{g_{ik}\} < 0$  scende a questo punto anche indipendentemente da (9.2.1, T), conseguendo dalla mera non-singularità della matrice  $\partial(X)/\partial(x)|_{\underline{x}}$ : basta prendere il determinante dei due membri della (5) per avere  $\det\{g_{ik}\} = (-1)[\partial(X)/\partial(x)|_{\underline{x}}]^2 < 0$ . Infine la forma quadratica di matrice  $\{g_{ik}\}$  ha segnatura  $\langle 3,1 \rangle$  cioè è lorentziana (cfr. (9.2.1, Cr 5)).

<sup>21</sup> Si noti anche che le tre relazioni logiche  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sono banalmente soddisfatte in un generico riferimento differenziale I.I.

Naturalmente i vincoli (7,14) equivalgono a corrispondenti vincoli sugli elementi della matrice  $\partial(X)/\partial(x)$ : ad esempio la  $g_{44} < 0$  equivale alla

$$(15_1) \quad \sum_{i=1}^3 C_4^i C_4^i - (C_4^4)^2 < 0,$$

che implica  $C_4^4 \neq 0$  (ovvero  $C_4^4 > 0$  in forza dell'assunto ortocronismo);

la  $g_{11} > 0$  equivale alla

$$(15_2) \quad \sum_{i=1}^3 C_1^i C_1^i - (C_1^1)^2 > 0,$$

..., e così via per le rimanenti (15<sub>3</sub>, 15<sub>4</sub>). Queste (15  $\equiv$  15<sub>1 $\leq$ h $\leq$ 4</sub>) si possono anche tradurre in equivalenti e simili vincoli sugli elementi della matrice inversa  $\partial(x)/\partial(X)$ . Ci riferiremo a queste ultime come alle (15'  $\equiv$  15'<sub>1 $\leq$ k $\leq$ 4</sub>).

Le trasformazioni da una carta  $dx$  a una carta  $dx'$  appartengono al gruppo dei germi di 1-diffeomorfismi intorno al punto-base. È allora naturale chiedersi se esistono trasformazioni dell'atlante canonico che, soddisfacendo alle (9.3.2, (a),(b)), costituiscano ancora un gruppo, cioè costituiscano un sottogruppo dei sopraddetti germi di 1-diffeomorfismi. La risposta è positiva, come si vede pensando alla trasformazione  $dx \mapsto dx'$  attuata secondo il percorso  $dx \mapsto dX \mapsto dX' \mapsto dx'$ . Qui le trasformazioni  $dx \mapsto dX$  soddisfano alle (9.3.2.,(a),(b)) e formano un gruppo; le trasformazioni  $dX \mapsto dX'$  sono lorentziane, e quindi ancora vi soddisfano (cfr. App. 2C, (12)), e infine le trasformazioni  $dX' \mapsto dx'$  sono del tipo inverso a quello delle  $dx \mapsto dX$ , e quindi appartengono allo stesso gruppo. Questo prova le proprietà di gruppo dell'insieme delle trasformazioni uno-a-uno  $dx \leftrightarrow dx'$  dell'atlante canonico soddisfacenti alle (9.3.2.,(a),(b)).

Nello spazio pseudoeuclideo 4-dim di segnatura  $\langle 3,1 \rangle$  delle  $X^i$ , l'equazione  $G_{ik} X^i X^k = 0$  rappresenta un (doppio) cono 3-dim retto-sferico con il vertice nell'origine. La sezione di questo 3-cono con il 3-piano  $X^4 = \text{cost} \neq 0$  è una sfera 2-dim, e quella con il 3-piano  $X^1 = \text{cost} \neq 0$  (per  $i = 1,2,3$ ) è un iperboloido a due falde retto. Infine la sezione del detto 3-cono con il 3-piano parallelo alla sua generatrice  $X^1 = X^4 + \text{cost}$  (con  $\text{cost} \neq 0$ ) è un paraboloido ellittico retto.<sup>22</sup> Una trasformazione lorentziana  $X \mapsto X'$  lascia questo quadro invariato nello spazio  $X'$ .

Esso cambia, invece, ma *non* dal punto di vista topologico, passando allo spazio dei differenziali  $dX^i$  e da questo a quello dei differenziali  $dx^i$  mediante le trasformazioni inverse delle

---

<sup>22</sup> È immediato e quasi banale visualizzare la situazione passando all'analogo caso 3-dim con  $1 \leq i \leq 2$ . Allora il 3-cono ed i vari 3-piani si riducono ad un 2-cono retto-circolare standard e rispettivamente a 2-piani standard; la sfera 2-dim si riduce ad un cerchio, l'iperboloido a due falde retto ad un'iperbole retta, e infine il paraboloido ellittico retto ad una parabola. Questo è del tutto elementare, e noto dai tempi dell'Accademia platonica; in particolare, per opera di Menecmo, e più tardi di Euclide e soprattutto di Apollonio (262 – 190 a.C.). Invece l'analogo caso 2-dim degenera completamente dallo stesso punto di vista: il cono si riduce ad una coppia di rette passanti per l'origine, perpendicolari tra loro e inclinate di  $\pi/4$  sugli assi coordinati, e le sue sezioni con rette perpendicolari agli assi stessi, oppure parallele alle generatrici, si riducono a coppie di punti o rispettivamente a punti singoli. Cade con ciò la possibilità di distinguere l'interno dall'esterno del cono.

(4') sotto le (15'). Vale a dire, nello spazio  $dx$  la sezione del 3-cono  $g_{ik}dx^i dx^k = 0$  (non più necessariamente retto-sferico) con il 3-piano (non passante per l'origine)  $dx^4 = 0$  diventa in generale un ellissoide, quella con il 3-piano  $dx^1 = 0$  (non passante per l'origine) un paraboloido a due falde generalmente non-retto, .. ecc. Infine, un  $dx$  per cui  $g_{ik}dx^i dx^k < 0$  è *interno* al cono, uno per cui  $g_{ik}dx^i dx^k = 0$  è *sul* cono, ed uno per cui  $g_{ik}dx^i dx^k > 0$  è ad esso *esterno*.

Quanto precede vale qualunque sia il riferimento differenziale I,I associato al punto  $p$  di  ${}^1L^4$ . Possiamo ridurre questa libertà imponendo che il riferimento in questione, oltre che I,I, sia anche, approssimativamente, di quiete istantanea rispetto all'orologio  $o$  della carta  $C$ ; lo nomineremo allora come riferimento **infinitesimo inerziale di quiete**, I,IQ. Questo significa che i tre rapporti  $dX^1/dX^4|_{\underline{x}}$ , misurati lungo la linea oraria di  $o$ , devono essere  $\approx$  nulli ( $o$  deve essere  $\approx$  fermo nel riferimento I,IQ). Come al solito, l'intero ragionamento diventa rigoroso nel limite  $\delta \rightarrow 0$ . Quindi sotto la prima (2'), cioè  $C^4_4 > 0$  (ma  $C^4_4 \neq 0$  basterebbe), le  $dX^1/dX^4|_{\underline{x}} = 0$  equivalgono alle

$$(16) \quad C^1_4 = 0.$$

Infatti  $dX^1 = C^1_j dx^j = C^1_4 dx^4$  (perché  $dx^1 = 0$  per un dato orologio  $o$ ) e  $dX^4 = C^4_j dx^j = C^4_4 dx^4$  (per la stessa ragione), da cui  $0 = dX^1/dX^4|_{\underline{x}} = C^1_4/C^4_4$ ; ma  $C^4_4 > 0$ , e segue la (16). Come è facile immaginare, l'uso di riferimenti I,IQ snellisce alcuni calcoli. Infine è sempre possibile, con una conveniente rotazione *una tantum*, fissare anche i residui tre parametri liberi nel riferimento differenziale I,IQ, in modo da rendere unico tale riferimento. L'idea più naturale è quella di imporre il parallelismo con il riferimento del laboratorio.<sup>23</sup> Il riferimento si dirà allora (infinitesimo, inerziale, di quiete) **parallelo**: I,IQP.

#### 9.3.4) FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE TERZA

Muniti del sottogruppo del gruppo dei germi di 1-diffeomorfismi che soddisfano le condizioni (9.3.3, 15) o (9.3.3, 15'), tratteremo ora di due importanti rimanenti questioni: quella dell'espressione dell'elemento di distanza spaziale  $d\sigma$  tra due punti-istanti infinitamente vicini  $P$  e  $Q$  di coordinate  $x^i$  e risp.  $x^i + dx^i$ , e quella della condizione che assicura la loro simultaneità.

Per quanto riguarda la prima questione, useremo l'idea della cronometrizzazione alla Born di cui abbiamo detto nella S.sez. 2.3.2 riferendoci allo spazio di Minkowski. Passando alla varietà  ${}^1L^4$ , denotiamo con  $P_\sigma$  e  $Q_\sigma$  i punti spaziali corrispondenti a  $P$  e a  $Q$ , di coordinate  $x^i$  e rispettivamente  $x^i + dx^i$ . Se immaginiamo di inviare un segnale luminoso da  $Q_\sigma$  a  $P_\sigma$ , dove venga

<sup>23</sup> Questo si potrà effettuare, ad esempio, mirando ad astri lontani, visibili sia dalla capsula che dal laboratorio.

riflesso istantaneamente verso  $Q_\sigma$ , secondo Born potremo assumere per distanza spaziale  $d\sigma$  tra  $P_\sigma$  e  $Q_\sigma$  il tempo impiegato dal segnale per questo percorso nei due sensi, moltiplicato per  $c/2$ . L'equazione di 2° grado in  $dx^4$  che governa la propagazione del segnale è dunque

$$(1) \quad g_{ik}dx^i dx^k + 2g_{i4}dx^i dx^4 + g_{44}(dx^4)^2 = 0.$$

Si vede subito che sotto le (9.3.3, 7,14), il discriminante della (1) è  $> 0$  (infatti  $-g_{44}g_{ik}dx^i dx^k > 0$ , e  $g_{i4}g_{k4}dx^i dx^k$  è un quadrato); quindi le due radici della (1) hanno segno opposto. Diremo  $dx^4_+$  quella positiva e  $dx^4_-$  quella negativa. Partendo da  $Q_\sigma$  all'istante  $dx^4_-$ , il segnale arriva in  $P_\sigma$  all'istante 0 e ritorna in  $Q_\sigma$  all'istante  $dx^4_+$  (oppure partendo da  $Q_\sigma$  all'istante  $-dx^4_+$  arriva in  $P_\sigma$  all'istante 0 e ritorna in  $Q_\sigma$  all'istante  $-dx^4_-$ )<sup>24</sup>. In entrambi i casi, il segnale impiega per l'intero percorso avanti e indietro il tempo proprio  $dT = (1/c)(dx^4_+ - dx^4_-)\sqrt{-g_{44}}$ . Risulta così, secondo il criterio di Born,

$$(2) \quad d\sigma = cdT/2 = (1/2)(dx^4_+ - dx^4_-)\sqrt{-g_{44}}.$$

Passando al calcolo delle  $dx^4_\pm$ , abbiamo

$$(3) \quad dx^4_\pm = \{-g_{i4}dx^i \pm [(g_{i4}g_{k4} - g_{44}g_{ik})dx^i dx^k]^{1/2}\}/g_{44},$$

e quindi, da una parte

$$(4_+) \quad (dx^4_+ + dx^4_-)/2 = -(g_{i4}dx^i)/g_{44},$$

e dall'altra

$$(4_-) \quad (dx^4_+ - dx^4_-)/2 = [(g_{i4}g_{k4} - g_{44}g_{ik})dx^i dx^k]^{1/2}/g_{44}.$$

In definitiva, quadrando la (2), risulta

$$(5) \quad d\sigma^2 = [(dx^4_+ - dx^4_-)/2]^2 (-g_{44}) = (g_{ik} - g_{i4}g_{k4}/g_{44})dx^i dx^k,$$

ove come abbiamo appena osservato la forma quadratica a 3° membro è definita positiva. La (5) suggerisce di introdurre il 2-tensore (simmetrico) 3-dim metrico "spaziale"

$$(6) \quad \gamma_{ik} =: g_{ik} - g_{i4}g_{k4}/g_{44},$$

per il quale

$$(7) \quad d\sigma^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k.$$

La (6) pone in evidenza il legame tra la metrica  $\{g_{ik}\}_{i,k=1 \div 4}$  della varietà 4-dim lorentziana  ${}^4L$  e la metrica "spaziale"  $\{\gamma_{ik}\}_{i,k=1 \div 3}$ . Naturalmente si è autorizzati a parlare di un tale 2-tensore 3-dim soltanto se ci si limita a trasformazioni separabili del tipo  $x'^i = x'^i(x^k, x^4)$  invertibili rispetto alle  $x^k$ , e  $x'^4 = x'^4(x^k, x^4)$  invertibile rispetto a  $x^4$ . Il legame tra  $\gamma^* =: \det\{\gamma_{ik}\}$  e  $g =: \det\{g_{ik}\}$  è semplicemente  $g = g_{44}\gamma^*$  (verifica lasciata al lettore). Si noti ancora che  $\gamma_{ik} \equiv g_{ik}$  se  $g_{i4} \equiv 0$  per ogni  $i = 1, 2, 3$ . In un sistema di coordinate in cui questa condizione è ovunque soddisfatta, la linea coordinata  $x^4$  è

<sup>24</sup> Occorre un momento di riflessione per capire che le due possibilità indicate nel testo sono tutte e sole quelle di cui occorre tener conto.



ovunque ortogonale alle linee coordinate  $x^l$ . Metriche (o riferimenti) in cui sussistono le  $g_{i4} \equiv 0$  si dicono **tempo-ortogonali**. Banalmente, la metrica canonica della RS è tempo-ortogonale.

L'espressione (6) del 2-tensore metrico spaziale  $\gamma_{ik}$  si può giustificare in modo più semplice e diretto utilizzando un riferimento differenziale I,I di quiete, o I,IQ, per il quale vale la (9.3.3, 16). Innanzitutto, l'elemento quadrato spaziale  $d\sigma^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k$  viene uguagliato *per definizione* a  $\delta_{ik}dX^i dX^k$ . Questo significa che le barrette rigide dell'osservatore inerziale sono sensibili alla contrazione di Lorentz (rispetto al riferimento di laboratorio) e ad essa soltanto. Sostituendo  $dX^i$  con  $C^i_j dx^j = C^i_\lambda dx^\lambda$  (vedi la (9.3.3, 16)), otteniamo  $d\sigma^2 = \gamma_{ik}dx^i dx^k = \delta_{ik}C^i_\lambda C^k_\mu dx^\lambda dx^\mu$ , ovvero  $\gamma_{ik} = C^\lambda_i C^\lambda_k$  (somma su  $\lambda$ ). D'altra parte secondo la (9.3.3, 5)  $g_{ik} = C^\lambda_i C^\lambda_k - C^4_i C^4_k$ ; e facendo in questa  $i = \iota$  e  $k = \kappa$ ,

$$(8) \quad g_{\iota\kappa} = \gamma_{\iota\kappa} - C^4_\iota C^4_\kappa.$$

Per determinare i  $C^4_\iota$ , facciamo  $i = \iota$  e  $k = 4$  nella (9.3.3, 5); ancora per la (9.3.3, 16), abbiamo

$$(9) \quad g_{\iota 4} = -C^4_\iota C^4_4.$$

Similmente, facciamo  $i = 4$  e  $k = 4$  nella (9.3.3, 5); ancora per la (9.3.3, 16), otteniamo  $g_{44} = -(C^4_4)^2$ . Ma  $C^4_4 > 0$  per l'assunta ortocronia, e quindi ritroviamo la (9.3.3, 7). Segue dalla (9) che  $C^4_\iota = -g_{\iota 4}/\sqrt{-g_{44}}$ , e infine, dalla (8), la (6), qed.

Si verifica facilmente, a questo punto, che  $\gamma_{\eta\kappa} g^{\iota\kappa} = \delta_\eta^\iota$ ; vale a dire, che nello spazio 3-dim le matrici simmetriche  $\gamma_{ik}$  e  $g^{\eta\lambda}$  sono inverse una dell'altra. Questo scende sviluppando la  $g^{ik} g_{jk} = \delta_j^i$  per  $i = \iota, j = \eta$  (si ottiene  $g^{\iota\nu} g_{\eta\nu} + g^{\iota 4} g_{\eta 4} = \delta_\eta^\iota$ ) e per  $i = \iota, j = 4$  (si ottiene  $g^{\iota\nu} g_{4\nu} + g^{\iota 4} g_{44} = 0$ ), e poi eliminando le  $g^{\iota 4}$  tra le due precedenti uguaglianze (si ottiene  $(g_{\eta\nu} - g_{\eta 4} g_{4\nu}/g_{44}) g^{\iota\nu} = \delta_\eta^\iota$ , qed).

La condizione  $g_{ik} dx^i dx^k > 0$  è più forte della  $\gamma_{ik} dx^i dx^k > 0$ , e questo si può vedere direttamente come segue. Diciamo  $[g_{ik}]$  la forma quadratica costruita con i  $g_{ik}$ ,  $[\gamma_{ik}]$  quella costruita con i  $\gamma_{ik}$ , e  $[g_{i4}g_{k4}/g_{44}]$  quella costruita con i  $g_{i4}g_{k4}/g_{44}$ . Allora  $[g_{ik}] = [\gamma_{ik}] + [g_{i4}g_{k4}/g_{44}]$ ; ma  $[g_{i4}g_{k4}/g_{44}]$  è definita negativa, quindi “[ $g_{ik}$ ] è definita positiva”  $\Leftrightarrow$  “[ $\gamma_{ik}$ ] + [ $g_{i4}g_{k4}/g_{44}$ ] è definita positiva”  $\Rightarrow$  “[ $\gamma_{ik}$ ] è definita positiva”, come asserito.

Trascrivendo le tre condizioni di Sylvester su  $\gamma_{ik}$  abbiamo:

$$(10_1) \quad \gamma_{11} > 0,$$

$$(10_2) \quad \gamma_{11}\gamma_{22} - (\gamma_{12})^2 > 0,$$

$$(10_3) \quad \gamma^* > 0,$$

in termini di elementi  $g_{ik}$ , e tenendo conto della (9.3.3, 7), si trova che le (10) equivalgono alle:

$$(11_1) \quad g_{11}g_{44} - (g_{14})^2 < 0,$$

$$(11_2) \quad g_{11}g_{22}g_{44} + 2g_{12}g_{24}g_{41} - (g_{24})^2g_{11} + g_{41})^2g_{22} + g_{12})^2g_{44} < 0,$$

$$(11_3) \quad g < 0;$$

quindi l'insieme delle (9.3.3, 7,14) implica l'insieme delle (9.3.3, 7) e delle (11).

Veniamo ora alla seconda questione di cui al primo capoverso della presente sottosezione, quella della simultaneità dei due punti-istanti infinitamente vicini (di  ${}^1L^4$ ) P e Q. In un riferimento differenziale I,I dX, P (di coordinate X) e Q (di coordinate X + dX) sono simultanei sse  $dX^4 = 0$ . In questa condizione,  $ds^2 = G_{ik}dX^i dX^k = G_{ik}dX^i dX^k \equiv dX_i dX^i$ . Ma nel riferimento dX è anche  $d\sigma^2 = G_{ik}dX^i dX^k = dX_i dX^i$ . Dunque P e Q sono simultanei nel riferimento I,I dX sse

$$(12) \quad d\sigma^2 = ds^2.$$

Useremo il criterio (12) nella generica carta dx. Dobbiamo imporre che la (12) sia una identità nelle  $dx^i$  quando  $dx^4$  sia una opportuna combinazione lineare delle  $dx^i$  stesse, diciamo  $dx^4 = \alpha_i dx^i$ . Sostituendo questa posizione nella (12), si trova che deve essere

$$(13) \quad (2g_{i4} + g_{44}\alpha_i)\alpha_\kappa + g_{i4}g_{\kappa 4}/g_{44} = 0$$

per ogni  $i, \kappa = 1, 2, 3$ . Facendo in questa  $i = \kappa$  e risolvendo la risultante equazione di 2° grado, si trova  $\alpha_i = -g_{i4}/g_{44}$ ; ed è immediato verificare che questa posizione soddisfa la (13) anche per  $i \neq \kappa$ . Quindi  $dx^4 = -g_{i4}dx^i/g_{44}$ ; ma secondo la (4<sub>+</sub>) questa espressione è uguale a  $(dx^4_+ + dx^4_-)/2$ , dove  $dx^4_+$  e  $dx^4_-$  sono le due radici della (1) introdotte più sopra. In conclusione, i punti-istanti P (di coordinate x) e Q (di coordinate x + dx) sono simultanei sse

$$(14) \quad dx^4 = -g_{i4}dx^i/g_{44} = (dx^4_+ + dx^4_-)/2.$$

Se poi la carta dx è tempo-ortogonale, la (14) dà  $dx^4 = 0$ . È facile capire che la (14) riflette il criterio di sincronizzazione tra orologi inerziali in posizioni diverse (e non di necessità infinitamente vicine) proposto da Einstein nel lavoro del 1905 (cfr. S.sez. 2.2.1). Resta da osservare che la (14) non è in generale integrabile: la sincronizzazione di orologi lungo una curva chiusa finita è generalmente impossibile in relatività generale.

In relatività speciale, e in una qualunque carta differenziale infinitesima dX (ma anche in una qualunque carta tout court) dell'atlante canonico RS, il quadrato della celerità della luce è dato dal rapporto  $dX_i dX^i/dT^2$  quale si desume dalla

$$(15) \quad 0 = G_{ik}dX^i dX^k = G_{ik}dX^i dX^k + G_{44}(dX^4)^2 = dX_i dX^i - c^2 dT^2;$$

ossia è (ovviamente) uguale a  $c^2$ . Cerchiamo ora l'espressione di tale quadrato della celerità della luce, dicendolo  $\mathcal{V}^2$ , nella generica carta dx. In tale carta, abbiamo

$$(16) \quad 0 = g_{ik}dx^i dx^k = g_{ik}dx^i dx^k + 2g_{i4}dx^i dx^4 + g_{44}(dx^4)^2,$$

ove per definizione  $dx^4 = cdt$ . Posto  $\mathcal{V}^i =: dx^i/dt$  (componente (<sup>i</sup>) del **vettore** velocità della luce) e  $\gamma_i =: g_{i4}/\sqrt{-g_{44}}$ , questa si scrive anche, per le (8),

$$(17) \quad 0 = (\gamma_{i\kappa} - \gamma_i \gamma_\kappa) \mathcal{V}^i \mathcal{V}^\kappa + 2c\gamma_i \mathcal{V}^i \sqrt{-g_{44}} + c^2 g_{44}.$$

Ora  $\gamma_{ik}\mathcal{V}^i\mathcal{V}^k$  è proprio  $\mathcal{V}^2$ ; e se  $n$  è il versore di  $\mathcal{V}$  (cioè  $n^i = \mathcal{V}^i/|\mathcal{V}| \equiv \mathcal{V}^i/\sqrt{(\gamma_{ik}\mathcal{V}^i\mathcal{V}^k)}$ ), la (17) si riscrive come

$$(18) \quad [1 - (\gamma_i n^i)^2]\mathcal{V}^2 + 2c\gamma_i n^i \sqrt{(-g_{44})}|\mathcal{V}| + c^2 g_{44} = 0,$$

un'equazione di 2° grado in  $|\mathcal{V}|$ . Il coefficiente  $1 - (\gamma_i n^i)^2$  di  $\mathcal{V}^2$  nella (18) è  $> 0$ : infatti, contraendo la  $\gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k = g_{ik}$  con un qualunque *bi-versore* spaziale di componenti  $\xi^i \xi^k$  abbiamo  $1 - (\gamma_i \xi^i)^2 = g_{ik} \xi^i \xi^k > 0$  in forza delle (9.3.3, 14). Segue che le due radici della (18) hanno segni opposti; quindi dobbiamo scartare quella negativa in quanto  $|\mathcal{V}|$ , essendo un modulo, deve essere  $\geq 0$ . Le due radici sono  $|\mathcal{V}|_{\pm} = \pm c\sqrt{(-g_{44})}/(1 \pm \gamma_i n^i)$ , dove si deve leggere simultaneamente  $+$  o  $-$  nei due  $\pm$  a 2° membro, e i due denominatori sono entrambi  $> 0$  perché  $-1 < \gamma_i n^i < 1$ . Si conclude che

$$(19) \quad |\mathcal{V}| = c\sqrt{(-g_{44})}/(1 + \gamma_i n^i);$$

vale a dire, salvo che in riferimenti tempo-ortogonali ( $\gamma_i = 0$ ) la celerità della luce  $|\mathcal{V}|$  dipende dalla direzione orientata (di componenti  $n^i$ ) del relativo vettore. Naturalmente la (19) dà  $|\mathcal{V}| = c$  ponendovi  $g_{44} = -1$  e  $\gamma_i = 0$  per ogni  $i$ ; ma in generale, nel punto-base di  ${}^rL^4$  al quale ci stiamo riferendo, non esiste una carta di dominio non infinitesimo e contenente il punto-base in cui si abbia uniformemente  $g_{44} = -1$  e  $\gamma_i = 0$  per ogni  $i$ . Una tale carta non esiste se in  ${}^rL^4$  vi è della materia-radiazione (anche se non ve ne è nel punto-base). Questa è una conseguenza delle equazioni (9.1.3, 5) di EH, che in generale fanno perdere a  ${}^rL^4$  la proprietà necessaria e sufficiente affinché vi esistano *regioni finite* ( $\equiv$  *non infinitesime*) *piatte*.

Possiamo ormai facilmente verificare che i dieci elementi del tensore metrico  $g_{ik}$  sono determinabili mediante misure, *tenendo conto della osservabilità delle coordinate*  $X$  e  $x$  (o piuttosto  $dX$  e  $dx$ ), e quindi delle  $\partial(X)/\partial(x)|_{\underline{x}}$  (coefficienti  $C$ ) o delle  $\partial(x)/\partial(X)|_{\underline{X}}$  (coefficienti  $D$ ). Innanzitutto, ricordiamo che  $g_{44} = C^i_4 C^4_i - (C^4_4)^2$ , o più semplicemente  $g_{44} = -(C^4_4)^2$  in un riferimento LIQ. In secondo luogo, i sei elementi  $\gamma_{ik}$  si possono ricavare dalle misure di  $d\sigma^2$  lungo le linee coordinate o da quelle dell'angolo che esse formano tra loro. Ad esempio, lungo la linea  $(x^1)$  si ha  $d\sigma^2 = \gamma_{11}(dx^1)^2$ , da cui si trae  $\gamma_{11}$  (che risulta così  $> 0$  in accordo con la (10<sub>1</sub>)). Oppure, dalla  $\cos\vartheta_{12} = \gamma_{12} dx^1 dx^2 / [\sqrt{(\gamma_{11})} dx^1 \sqrt{(\gamma_{22})} dx^2] = \gamma_{12} / \sqrt{(\gamma_{11}\gamma_{22})}$ , che dà il coseno dell'angolo tra la linea  $(x^1)$  e la linea  $(x^2)$ , si ha  $\gamma_{12}$ . Si noti che  $1 > \cos^2\vartheta_{12} = \gamma_{12}^2 / (\gamma_{11}\gamma_{22})$  in accordo con la (10<sub>2</sub>). Quanto ai tre elementi  $g_{i4}$ , si possono ricavare da misure della velocità della luce lungo le linee coordinate. Ad esempio, detta  $\mathcal{V}_1$  questa velocità nella direzione orientata della linea  $(x^1)$  (per la quale  $n^i = \delta^i_1$ ), la (19) dà  $\gamma_1 = g_{14} / \sqrt{(-g_{44})} = c\sqrt{(-g_{44})} / \mathcal{V}_1 - 1$ , da cui si trae  $g_{14}$ . Si noti che, come ci si aspetta,  $\gamma_1 = 0$  se  $g_{44} = -1$  e  $\mathcal{V}_1 = c$ . Infine conoscendo le  $\gamma_i$ , le  $g_{ik}$  si ricavano mediante le (6).

Per concludere questa sottosezione, riassumiamo come segue, in forma assiomatica, le proprietà dello spazio-tempo  ${}^rL^4$  che dobbiamo richiedere sulla base di quanto abbiamo fin qui esposto:

**A<sub>1</sub>.** « ${}^rL^4$  è una varietà differenziabile 4-dim connessa e di CdC  $r \geq 4$ , dotata di tensore metrico soddisfacente alle (9.3.3, 7,14); le sue carte congiunte  $r$ -compatibili devono rispettare queste disuguaglianze ed essere equicrone.»

A queste condizioni, le trasformazioni infinitesime ammissibili costituiscono un sottogruppo del gruppo dei germi di  $r$ -diffeomorfismi, all'interno del quale sono conservate la nozione di coordinate spaziali e temporale, nonché la nozione di passato/futuro.<sup>25</sup> Ovviamente, il problema della struttura *globale* della  ${}^rL^4$  non è stato considerato.

### 9.3.5) FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE QUARTA

Quando I. Newton iniziò a riflettere sulla fisica del suo tempo, e in particolare sul moto dei pianeti e sulla natura della loro interazione (questo avveniva almeno venti anni prima della pubblicazione dei Principia), si trovò ad affrontare due grandi problemi complementari. Il primo era del tutto generale, riguardando il moto di un punto materiale di massa (inerziale) data e soggetto ad una forza data. La soluzione fu offerta dalla 2<sup>a</sup> legge fondamentale della dinamica, per formulare la quale Newton dovette sviluppare una versione semiintuitiva, ma efficace, di “calcolo infinitesimale” (che ancora non esisteva come oggi lo conosciamo).<sup>26</sup> Il secondo problema era invece più specifico: si trattava di stabilire come la mutua attrazione tra due corpi di masse (gravitazionali) date, *di piccole dimensioni rispetto alla loro distanza*, dipendesse dalle variabili in gioco. Data l'esiguità della forza, le misure “di laboratorio” erano difficili e delicate; per cui Newton iniziò una attenta ricognizione delle osservazioni sul moto dei pianeti a lui disponibili (oltre ad aggiungerne di sue personali), prime fra tutte quelle accumulate nella vasta “banca dati” – diremmo oggi – di Brahe e di Keplero. Ma soprattutto, Newton (che ovviamente non partiva da zero in questa ricerca) combinò la più accreditata tra le leggi d'interazione – quella di una forza

<sup>25</sup> Dovrebbe essere chiaro che la geometria di una varietà differenziabile pseudoriemanniana  ${}^rM^n$  con metrica ovunque non singolare  $\{g_{ik}(x)\}_{i,k=1+\dots,n}$  è sostanzialmente indifferente ad un cambiamento (globale) di segno di questa, secondo la  $g_{(2)} \rightarrow -g_{(2)}$ . Il segno di  $g_{(2)}$  è dunque oggetto di una convenzione da fissare una volta per tutte. Può essere utile segnalare la parità di altri oggetti della teoria rispetto a  $g_{(2)}$ . Abbiamo: 1) segnatura: dispari, nel senso che passa da  $\langle p,q \rangle$  a  $\langle q,p \rangle$ ; 2)  $\det\{g_{ik}\}_{i,k=1+\dots,n}$ : pari se  $n$  è pari, dispari se  $n$  è dispari; 3)  $g^{ik}$ : dispari; 4)  $g_i^k$ : pari; 5)  $\Gamma_{ihk}$ : dispari; 6)  $\Gamma_i^h k$ : pari; 7)  $\rho_i^k{}_{jh}$ : pari; 8)  $\rho_{ikjh}$ : dispari; 9)  $\rho_{ik}$ : pari; 10)  $\rho$ : dispari; 11)  $S_{ik}$  (tensore di Ricci, che è il tensore di Einstein  $E_{ik}$  se  ${}^rM^4$  è lo spazio-tempo einsteiniano): pari.

<sup>26</sup> Ovviamente a quei tempi non esisteva nemmeno il concetto di equazione differenziale (ordinaria), e tanto meno quello di sistema di tali equazioni. Ma non esisteva nemmeno la moderna nozione di limite  $(\varepsilon,\delta)$ ; e quindi nemmeno quella di derivata, che Newton sostituiva con quella ancora perfettibile di “flussione”.

diretta lungo la congiungente i due corpi, proporzionale al prodotto delle loro masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza, e da niente altro influenzata – con la sua legge dinamica, e *riuscì a risolvere il problema differenziale del 2° ordine che ne derivava*: un’impresa a dir poco eroica a quei tempi. Il risultato fu una teoria predittiva di straordinaria portata e successo, che oggi chiamiamo “teoria (newtoniana) della gravitazione universale”. Naturalmente l’identità tra massa gravitazionale e massa inerziale era un ingrediente fondamentale della teoria, ma era tacitamente data come ovvia. Fu così che le leggi di Keplero diventarono *teoremi* della teoria newtoniana della gravitazione universale. Un fatto al quale non si poteva attribuire alcuna importanza, tanto appariva naturale, era poi che in quella teoria sia lo spazio che il tempo si comportavano come semplici “palcoscenici” sui quali si producevano gli “attori” della dinamica, e in generale tutti i fenomeni fisici che vi avevano luogo.

Già agli occhi di Newton, tuttavia, il meraviglioso strumento predittivo appena forgiato presentava un punto debole: come poteva prodursi un’interazione *istantanea e a distanza*, apparentemente in assenza di un mezzo interposto? Era questo tipo di forza in qualche modo imparentato con le cosiddette forze “apparenti” – quella centrifuga e quella complementare (Coriolis) – che si manifestano nei sistemi di riferimento in rotazione, e in particolare in rotazione uniforme? (Si ricordi il ben noto esperimento newtoniano del secchio rotante intorno al suo asse, in cui il pelo dell’acqua diventa concavo verso l’alto.) Newton rinunciò a rispondere a questi interrogativi, accontentandosi di osservare che quelle forze esistevano, agivano nei modi descritti, e spiegavano i moti dei corpi celesti: «non invento ipotesi» («*hypotheses non fingo*») fu la sua celebre presa di posizione a riguardo.

Partendo da un’analisi sostanzialmente operazionalista<sup>27</sup> delle nozioni di spazio e di tempo, il lavoro einsteiniano del 1905 offre due progressi fondamentali rispetto alla dinamica di Newton: da una parte lo spazio assoluto ed il tempo assoluto spariscono come entità separate per fondersi

---

<sup>27</sup> L’operazionismo, o operazionalismo, è una corrente della filosofia naturale legata al positivismo viennese, di cui si fece paladino di primo piano, a partire dagli anni venti, il fisico americano W. Bridgman (1882-1961, Nobel per la Fisica nel 1946). Secondo le tesi di Bridgman, il significato di un concetto fisico coincide con l’insieme delle operazioni (incluse le operazioni mentali) mediante le quali esso viene osservato e/o misurato. Ad esempio il concetto di lunghezza coincide con le operazioni delle quali consiste la misurazione di una lunghezza, descritte mediante protocolli (ragionevolmente) inequivocabili. Non è affatto fuori luogo affermare che il lavoro di Einstein del 1905 fu anche un brillante esercizio operazionistico ante litteram, applicato alle nozioni di distanza spaziale e di intervallo temporale. Molto tempo dopo, tuttavia, lo stesso Einstein rinnegò l’approccio operazionista alla fisica: «forse una volta usavo anch’io quella filosofia insensata, e ci ho pure scritto sopra, ma è insensata lo stesso» (da una conversazione con W. Heisenberg (1926), e da questi riferita in “Encounters with Einstein and other Essays on People, Places and Particles”, Princeton Un. Press 1983). Secondo l’Einstein del 1926, una teoria fisica può contenere delle grandezze non osservabili “in linea di principio”: una posizione che nel giro di pochi anni condurrà alla critica cosiddetta “EPR”. In realtà, un punto di vista operazionista veramente radicale è troppo rigido, finendo col non lasciar spazio, nello sviluppo scientifico, sia alle ipotesi che ad ogni “concetto generale”. L’operazionismo ha comunque avuto un effetto salutare sulla scienza, segnando uno dei momenti più fecondi della moderna epistemologia; perché ha imposto protocolli e definizioni incontrovertibili, e soprattutto, perché ha scoraggiato la componente letteraria della filosofia, le esercitazioni verbali incontrollate.

nello spazio-tempo pseudoeuclideo (o minkowskiano) della RS; e dall'altra la legge dinamica viene aggiornata con l'introduzione di una opportuna "massa di moto", dipendente dalla velocità del corpo ( $\equiv$  punto materiale) considerato. La nuova geometria – formalmente non molto difforme dalla geometria euclidea 4-dim<sup>28</sup> – è naturalmente esente da difetti logici, ma la fisica che in essa si formalizza, la fisica RS, pur similmente esente da difetti logici, soffre di alcune limitazioni a priori. Vale a dire, i soli sistemi di riferimento ammissibili sono quelli della classe "inerziale" pseudopitagorica – identificata da un suo rappresentante di cui si *presuppone* l'esistenza – ed il passaggio dall'uno all'altro avviene mediante le trasformazioni di Lorentz. (Come sappiamo, questo comporta una revisione delle nozioni di simultaneità e di colocalità tra due eventi; revisione necessaria, e che evidentemente non è una limitazione ma un perfezionamento.) Ma un'altra più seria limitazione, legata alla precedente, affligge la RS: la fisica che è ammesso considerare nei riferimenti inerziali minkowskiani deve essere a suo modo "trascurabile". Questo significa che le masse, le energie, le forze (incluse le forze gravitazionali), i campi elettromagnetici, ecc. devono essere "piccoli", tanto quanto basta a non "deformare" lo spazio-tempo RS che li accoglie, non perturbando sostanzialmente la sua piattezza. È ovvio che a queste condizioni lo spazio-tempo RS unificato continua a comportarsi da palcoscenico, né più né meno come lo spazio assoluto ed il tempo assoluto newtoniani considerati separatamente.

Questo quadro cambia radicalmente, da un punto di vista concettuale, con la RG. Lo spazio-tempo  ${}^{\mathfrak{L}}L^4$  diventa parte integrante – al contempo influenzata dai, e influenzante i – fenomeni fisici macroscopici che vi hanno luogo (non necessariamente nello stesso punto-istante): lo spazio-tempo da un lato, ed i fenomeni fisici dall'altro, si sono infatti inestricabilmente allacciati in un doppio legame. Il primo legame si realizza attraverso il SDP (9.3.1, 1), che stabilisce come i fenomeni fisici – essenzialmente, i moti della materia (e/o della radiazione; nel seguito trascureremo questa precisazione) – influenzano le proprietà metriche di  ${}^{\mathfrak{L}}L^4$ . La rappresentazione di questi fenomeni è completamente delegata alla modellazione del 2-tensore energetico  $T_{(2)}$ . Il secondo legame stabilisce invece come le proprietà metriche di  ${}^{\mathfrak{L}}L^4$  influiscono sul moto di un punto (o di un continuo) materiale.

Se il 2-tensore  $T_{(2)}$  rappresenta *soltanto* "azioni" gravitazionali (questo è il caso di gran lunga più importante) la "reazione" dello spazio-tempo sul moto della materia dice come "la materia agisce sulla materia attraverso la gravità, condizionandone il moto", e la dissimmetria tra azione e reazione è a questo punto cancellata. Vale a dire, il "percorso di influenza" ( $T_{(2)} \approx \triangleright (g_{(2)}) \approx \triangleright T_{(2)}$ ) è in generale chiuso su se stesso anche attraverso il campo di moto.

---

<sup>28</sup>Al punto che le due geometrie si identificano formalmente mediante l'artificio di introdurre l'unità immaginaria a fattore del tempo.

Tuttavia in alcuni casi importanti la modellazione di  $T_{(2)}$  *non* include il campo di moto, perché  $T_{(2)}$  non ne dipende esplicitamente.

Come in poche altre circostanze analoghe, è difficile risalire il prodigioso percorso induttivo che condusse Einstein a formulare la RG, e in particolare a individuarne la chiave nel SDP (9.3.1, 1). Nella sensazione di chi scrive, un primo passo fondamentale dovette essere quello di individuare nel 2-tensore energetico, soggetto alle note “leggi di conservazione”, il responsabile dell’azione esercitata dalla materia/radiazione sulle proprietà dello spazio-tempo. Il secondo passo fu quello di capire che queste proprietà dovevano essere del 2° ordine differenziale sulla metrica, e non di più, e quindi che dovevano influenzare al più il 4-tensore di Riemann della varietà. Il terzo passo fu quasi certamente suggerito dalla semplicità, e consistette nel supporre che una qualche traccia 2-tensoriale del 4-tensore di Riemann fosse proporzionale (secondo un fattore che doveva essere universale) nel tensore energetico. A questo punto le maggiori difficoltà sarebbero state superate, perché tutti gli indizi puntavano su  $E_{(2)}$ , che era automaticamente solenoidale. (Tuttavia il reale ragionamento di Einstein su questo punto sembra essere stato un altro.)<sup>29</sup> Superfluo aggiungere che questa ricostruzione congetturale della riflessione einsteiniana ne sdrammatizza molto la vera natura, che in gran parte ignoriamo e che certamente ebbe ben poco di “lineare”.

Secondo la teoria delle varietà pseudoriemanniane, è

$$(1) \quad E_{(2)} = \rho_{(2)} - \rho_{(0)}g_{(2)}/2,$$

dove  $\rho_{(2)}$  è il 2-tensore di Ricci e  $\rho_{(0)}$  ne è l’invariante lineare; quindi  $E_{(2)}$  è funzione nota di  $g_{(2)}$ ,  $\partial g_{(2)}$  e  $\partial^2 g_{(2)}$ , lineare non singolare nelle  $\partial^2 g_{(2)}$ . In realtà, ed Einstein se ne rese conto molto presto, era possibile aggiungere a  $E_{(2)}$  un termine del tipo  $-Cg_{(2)}$  (il segno  $-$  ha origini storiche) ove  $C$  è una costante universale di dimensioni  $L^{-2}$ , la cosiddetta **costante cosmologica**, senza venir meno a nessuno dei requisiti precedenti. Infatti  $g_{(2)}$  è (simmetrico e) solenoidale: come ben sappiamo,  $g_{ik/d} \equiv 0$ , e quindi  $g_{ik}^{/k} \equiv 0$ . Ora, l’aggiunta di  $-Cg_{(2)}$  a  $E_{(2)}$  modifica le equazioni (9.3.1, 1) nel vuoto in

$$(2) \quad E_{(2)} = Cg_{(2)},$$

rendendo possibile una curvatura non nulla dello spazio-tempo *in assenza* di materia. Fu questa, essenzialmente, la ragione che indusse Einstein alla modifica delle (9.3.1, 1) nelle

$$(3) \quad E_{(2)} - Cg_{(2)} = -KT_{(2)}.$$

Qualche tempo dopo (ne vedremo più avanti il perché) Einstein si pentì, riconoscendo nell’aggiunta del termine cosmologico alle (9.3.1, 1) «la più grossa sciocchezza» della sua carriera

---

<sup>29</sup> Un teorema provato molto più tardi (D. Lovelock, Journ. Math. Phys. **13**, 874 (1972)) afferma che in una varietà differenziabile  $\mathbb{R}^3M^4$  (ma soltanto 4-dim!), un 2-tensore simmetrico solenoidale dipendente dal tensore fondamentale  $g_{(2)}$  e dalle sue derivate non oltre il 2° ordine deve avere la struttura  $aE_{(2)} + bg_{(2)}$  con  $a$  e  $b$  costanti. Quindi quella che Einstein intuì come una ragionevole possibilità è in realtà conseguenza stretta di ipotesi inevitabili.

scientifico. Secondo considerazioni ragionevoli, il termine  $-Cg_{(2)}$  nella (3) avrebbe potuto essere importante soltanto su scala cosmica, e sicuramente non all'interno del sistema solare. Di fatto, la sorte del SDP (3) (con  $C \neq 0$ ) ha avuto alterna fortuna, tornando al centro di un dibattito non banale in tempi molto più recenti, sia sul piano della cosmologia teorica che su quello dell'astrofisica osservativa. Ricordiamo infine che  $g_{(2)}$ , e quindi l'intero 1° membro delle (3), è completamente definito dal punto di vista operativo dalle (9.3.3, 5) e dal carattere osservabile della matrice non singolare  $\partial(X)/\partial(x)|_{\underline{x}}$ .

Dopo che fu acquisita, la laboriosa identificazione del 2-tensore da uguagliare a  $-KT_{(2)}$  divenne presto un fatto compiuto sul quale poco si tornò a discutere; Einstein stesso lo paragonò al «lato di bel marmo» (1° membro) delle equazioni di campo (3). Curiosamente, invece, molto si sarebbe dovuto lavorare sull'altro «lato» delle stesse (3), il 2-tensore energetico  $T_{(2)}$ . In effetti, la determinazione di  $T_{(2)}$  in casi di interesse applicativo concreto è spesso un problema complesso. Fanno eccezione alcune situazioni particolari, prima fra tutte quella della materia disgregata. Alla determinazione di  $T_{(2)}$  dedicheremo lo spazio necessario nel seguito del capitolo. Si noterà infine che la (3) *non* è omogenea dal punto di vista della parità rispetto a  $g_{(2)}$  se  $C \neq 0$ : infatti  $E_{(2)}$  è pari per la sua definizione, mentre  $T_{(2)}$  lo deve essere per il suo significato fisico. Questo comporta che a fronte di un cambiamento (convenzionale) di segno del 2-tensore metrico si cambi il segno della costante cosmologica, una necessità evidentemente vuota di ricadute concrete.<sup>30</sup>

Dimenticando la costante cosmologica (quindi riducendo la (3) alla usuale

$$(3') \quad E_{(2)} = -KT_{(2)},$$

consideriamo ora più da vicino il tensore  $E_{(2)}$  della (1). È immediato verificare che

$$(4) \quad \text{“}\rho_{(2)} = 0\text{”} \Leftrightarrow \text{“}E_{(2)} = 0\text{”}.$$

L'implicazione verso destra è ovvia. Quanto a quella verso sinistra, prendendo l'invariante lineare  $E_{(0)} \equiv E$  di  $E_{(2)}$ , si ha  $E = g_{ik}(\rho^{ik} - \rho g^{ik}/2) = \rho - 4\rho/2 = -\rho$ , in accordo con la relazione generale  $S = \rho(1-n/2)$  valida nel caso n-dim (v. S.sez. 3.4.2, ove si era scritto S in luogo di E nel caso di una varietà generica). Segue che  $E_{(2)} = 0$  implica  $\rho = 0$ ; ma allora la  $E_{(2)} = 0$  implica anche  $\rho_{(2)} = 0$ , e l'equivalenza (4) è dimostrata. Ragionamenti analoghi provano che la (3') è equivalente alla

$$(3'') \quad \rho_{(2)} = -K(T_{(2)} - g_{(2)}T/2),$$

---

<sup>30</sup> Nella letteratura corrente, le equazioni di campo sono presentate con tutta la difformità che si potrebbe desiderare. Questo è talvolta causa di fastidiosi seppur banali controlli e perdite di tempo. La ragione è nel fatto che non sempre il tensore di Riemann, o il tensore di Ricci, o lo stesso tensore energetico, sono definiti allo stesso modo: il loro segno può cambiare in base a convenzioni diverse. Ricordiamo qui le convenzioni adottate in questo libro. Il tensore di Riemann è definito dalle (3.4.2, 5); il tensore di Ricci si ottiene contraendo il *secondo* e il *terzo* indice di questo tensore; e il tensore energetico ha il segno per cui la sua versione nella materia disgregata è quella data in (9.1.3, 1). Con queste convenzioni, il 2° membro delle (3) si deve scrivere come è stato fatto, con un segno meno davanti a  $K > 0$ .



ove  $T$  sta qui per l'invariante lineare  $g^{ik}T_{ik}$ . Questa conferma che l'annullarsi di  $T_{(2)}$  implica quello di  $\rho_{(2)}$ , e quindi, attraverso la (3), quello di  $E_{(2)}$ , come è attestato direttamente dalla (3') stessa. Si noti infine che, prendendone l'invariante lineare, sia la (3') che la (3'') conducono concordemente alla

$$(4) \quad \rho = KT.$$

Se si suppone  $E_{(2)} = 0$ , per la (3'') il 4-tensore di Riemann  $\rho_{(4)}$  si riduce al suo componente di Weyl senza tracce  $\chi_{(4)}$  (vedi (3.4.2, 17)), cioè vale l'implicazione " $E_{(2)} = 0$ "  $\Rightarrow$  " $\rho_{(4)} = \chi_{(4)}$ ". Tornando alla (3'), se in essa si pone  $T_{(2)} = 0$  (queste sono 10 condizioni algebriche), le componenti algebricamente libere di  $\rho_{(4)}$  da  $16 \cdot 15/12 = 20$  si riducono a  $4 \cdot 5/2 = 10$ ; infatti  $\chi_{(4)}$  soggiace alle stesse simmetrie/antisimmetrie di  $\rho_{(4)}$  e *in più* ai 10 vincoli  $\chi_{(2)} \equiv 0$  (la traccia  $\chi_{(2)}$  di  $\chi_{(4)}$ , ottenuta per contrazione del secondo e terzo indice, è manifestamente simmetrica). Viceversa, per definizione " $\rho_{(4)} = \chi_{(4)}$ "  $\Rightarrow$  " $\rho_{(2)} = 0$ " ( $\Rightarrow$  " $\rho = 0$ "), e così anche " $\rho_{(4)} = \chi_{(4)}$ "  $\Rightarrow$  " $E_{(2)} = 0$ ". In forza della (3'), si conclude con l'equivalenza

$$(5) \quad \text{"}\rho_{(4)} = \chi_{(4)}\text{"} \Leftrightarrow \text{"}T_{(2)} = 0\text{"}.$$

Ovviamente il fatto che  $\rho_{(4)}$  si riduca al suo componente di Weyl in un aperto della varietà  ${}^1L^4$  non implica che esso si annulli in quell'aperto, e quindi che  ${}^1L^4$  sia ivi piatta secondo il teorema di Riemann (v. S.sez. 3.4.2). In parole: secondo la (3'), un aperto di  ${}^1L^4$  vuoto di materia ( $T_{(2)} = 0$ ) non è necessariamente piatto (cioè  $\rho_{(4)}$  non vi è identicamente nullo), mentre un suo aperto piatto è necessariamente vuoto di materia; ovvero, un aperto di  ${}^1L^4$  può ben essere sede di un campo gravitazionale anche se è vuoto di materia. Tornando a ricordare che le (3') algebricamente indipendenti sono 10 mentre le componenti algebricamente indipendenti di  $\rho_{(4)}$  sono 20, si conclude che la possibile esistenza di un campo gravitazionale in un punto-istante ove  $T_{(2)} = 0$ , è permessa, in ultima analisi, dalla disuguaglianza  $10 < 20$ .<sup>31, 32</sup>

<sup>31</sup> Questo suggerisce un confronto tra  $n(n+1)/2$  (numero delle componenti algebricamente indipendenti di  $S_{(2)}$ , l'analogo del tensore gravitazionale in  $n$  dimensioni) e  $n^2(n^2-1)/12$  (numero delle componenti algebricamente indipendenti del tensore di Riemann  $\rho_{(4)}$ ). I due valori di  $n(n+1)/2$  e di  $n^2(n^2-1)/12$  sono, nell'ordine: per  $n = 1$ , (1,0), per  $n = 2$ , (3,1), per  $n = 3$ , (6,6); mentre per  $n \geq 4$   $n(n+1)/2$  è *minore* di  $n^2(n^2-1)/12$ . Si vede così che  $n = 4$  è il *minimo* valore di  $n$  per cui vale la  $n(n+1)/2 < n^2(n^2-1)/12$ , e si conclude che  $n = 4$  è la *minima dimensione di una varietà nella quale non vale l'implicazione* " $S_{(2)} \equiv 0$ "  $\Rightarrow$  " $\rho_{(4)} \equiv 0$ " (che equivale a "la varietà in oggetto è piatta", teorema di Riemann). Considerando poi il caso critico  $n = 3$ , l'annullarsi di  $S_{(2)}$  significa che  $\rho_{(4)}$  non ha tracce, e quindi si riduce al suo componente di Weyl  $\chi_{(4)}$ . Ma per  $n = 3$   $\chi_{(4)}$  è *identicamente nullo*, quindi per  $n = 3$  la sopraddetta implicazione è vera. In termini crudi, in un mondo immaginario a  $2 + 1$  dimensioni (due spaziali e una temporale) non potrebbero esistere onde gravitazionali in un dominio vuoto di energia-materia. Ma in un mondo siffatto non potrebbero esistere molte altre cose...

<sup>32</sup> A rischio di ripeterci: poiché  $E_{(2)}$  ha identicamente nulle le sue quattro divergenze (vedi (3.4.2, 16)) in forza delle identità di Bianchi, se ammettiamo la validità delle (3'), la stessa proprietà deve valere per  $T_{(2)}$ ; ma queste condizioni sono proprio quelle "leggi di conservazione" che hanno suggerito la selezione dell'operatore  $E_{(2)}$  agente su  $g_{(2)}$ .

Passiamo ora ad approfondire l'induzione della (3') su base variazionale, e cominciamo con la loro versione omogenea  $T_{(2)} = 0$ . Si tratta del problema cui si è accennato nella nota (<sup>54</sup>) della Sez. 9.1: scrivendo ormai  $g$  per  $\det\{g_{ik}\}$ , vogliamo cioè dimostrare l'equivalenza

$$(6) \quad \left\langle \int_U \rho \sqrt{(|g|)} d(x) = \text{staz!} \right\rangle \Leftrightarrow \left\langle E_{(2)} = 0 \right\rangle^{33}$$

in  $U$ ", dove  $d(x)$  sta al solito per  $\prod_{i=1}^4 dx^i$ , quando i valori di  $g_{(2)}$  e di  $\partial g_{(2)}$  sul contorno  $\partial U$  di  $U$  siano fissati, ovvero sotto  $\delta g_{(2)}|_{\partial U} \equiv 0$ ,  $\delta \partial g_{(2)}|_{\partial U} \equiv 0$ . (Ricordando che il prodotto  $\sqrt{(|g|)} d(x)$  è l'elemento di estensione della varietà, e tenendo conto della invarianza dello scalare  $\rho$ , il valore del prodotto  $\rho \sqrt{(|g|)} d(x)$  risulta carta-indipendente.) Calcoliamo la variazione dell'integrale a 1° membro della (6) corrispondente alla variazione  $\delta g_{ik}$ , sotto tali condizioni. Poiché  $\delta$  passa sotto l'integrale, abbiamo  $\delta(\rho \sqrt{|g|}) = \delta \rho \sqrt{|g|} + \rho \delta \sqrt{|g|}$ . Ora  $\delta \sqrt{|g|} = -\sqrt{(|g|)} g_{ik} \delta g^{ik} / 2$  (cfr. 3.3.2, 18), quindi

$$(7) \quad \delta(\rho \sqrt{|g|}) = \sqrt{(|g|)} (\rho_{ik} - \rho g_{ik} / 2) \delta g^{ik} + \sqrt{(|g|)} \delta \rho_{ik} g^{ik}.$$

Affermiamo che il contributo dell'ultimo termine a 2° membro della (7), quando integrato su  $U$ , è nullo. Per provarlo, conviene usare coordinate localmente geodetiche, quindi coefficienti di Christoffel  $\Gamma_{ik}^h$  localmente nulli. Poiché  $\partial_h \equiv \partial / \partial x^h$  e  $\delta$  commutano, si ha

$$(8) \quad \delta \rho_{ik} = \partial_k \delta \Gamma_{ih}^h - \partial_h \delta \Gamma_{ik}^h,$$

in cui la *variazione*  $\delta$  dei Chr2  $\Gamma_{ik}^h$ ,  $\delta \Gamma_{ik}^h$ , è come sappiamo un tensore triplo due volte covariante e una volta controvariante. Tornando a coordinate generali, e quindi a derivate covarianti, le precedenti (8) diventano

$$(9) \quad \delta \rho_{ik} = (\delta \Gamma_{ih}^h)_{/k} - (\delta \Gamma_{ik}^h)_{/h}.$$

Le (9) sono note come **equazioni di Palatini**. Si ha così  $\sqrt{(|g|)} \delta \rho_{ik} g^{ik} = \sqrt{(|g|)} J^h_{/h}$ , avendo posto  $J^h =: \delta \Gamma_{ik}^k g^{ih} - \delta \Gamma_{ik}^h g^{ik}$ . Ma  $\sqrt{(|g|)} J^h_{/h} = \partial_h (\sqrt{(|g|)} J^h)$  (vedi ancora la (3.3.2, 18); e integrando questa su  $U$  si trova un integrale sul contorno  $\partial U$  (3-dim) di  $U$  di una combinazione lineare delle  $\sqrt{(|g|)} J^h$ . Ora le  $J^h$  sono lineari nelle variazioni di  $g_{(2)}$  e  $\partial g_{(2)}$ , per ipotesi identicamente nulle su  $\partial U$ . Infatti,  $\delta \Gamma_{ik}^h = \delta (g^{hj} \Gamma_{ijk}) = \delta g^{hj} \Gamma_{ijk} + g^{hj} \delta \Gamma_{ijk} \equiv g^{hj} \delta \Gamma_{ijk}$  su  $\partial U$ . Esprimendo poi  $\Gamma_{ijk}$  in termini di  $\partial g_{(2)}$  e prendendone la variazione  $\delta$  si trova che anche  $\delta \Gamma_{ijk} \equiv 0$  su  $\partial U$ . La tesi segue dal teorema di Gauss-Ostrogradskij, qed.

In definitiva, abbiamo

$$(10) \quad \delta \int_U \rho \sqrt{(|g|)} d(x) = \int_U \sqrt{(|g|)} E_{ik} \delta g^{ik} d(x),$$

che prova l'equivalenza (6) in forza dell'arbitrarietà delle  $\delta g^{ik}$  in  $U$  (lemma fondamentale del CdV).

In realtà Hilbert, al quale come si è detto (cfr. Sez. 9.1) è dovuto il principio variazionale appena illustrato (**principio di azione di Hilbert**), si è limitato a scrivere le relative equazioni di EL

<sup>33</sup> In forza della  $g < 0$  in  $U$ , altrettanto frequentemente si usa scrivere  $\sqrt{(-g)}$  in luogo di  $\sqrt{(|g|)}$ .

per una generica integranda di azione  $F$ , funzione, oltre che delle variabili indipendenti, delle incognite e delle loro derivate prime e seconde (cfr. le (7.1.1, 6), con gli opportuni adattamenti). Sostituendo nelle risultanti equazioni di EL tale  $F$  con l'effettiva  $\rho\sqrt{(|g|)}$  (che, si noti, *non* dipende esplicitamente da  $x$ ), si trova appunto che  $E_{(2)} = 0$ . Di fatto Hilbert è andato più in là delle equazioni di campo omogenee, mediante l'aggiunta alla  $\rho$  di una funzione  $KL$  ( $K$  essendo la costante universale nella (3') e  $L$  una ulteriore lagrangiana, la "lagrangiana di massa") funzione delle coordinate, di  $g_{(2)}$  e di  $\partial g_{(2)}$ . La derivata variazionale  $E_{(2)}F$  (vedi ancora la (7.1.1, 6)) acquista così un termine aggiuntivo  $K[\partial(L\sqrt{(|g|)})/\partial g^{ik} - \partial^*/\partial x^h(\partial(L\sqrt{(|g|)})/\partial g^{ik,h})]$  (dove la derivata  $\partial^*/\partial x^h$  è sostanziale, e  $g^{ik,h}$  sta per la derivata standard di  $g^{ik}$  rispetto a  $x^h$ ); e tale termine aggiuntivo viene naturalmente identificato con  $\sqrt{(|g|)}T_{ik}$ . Questo aspetto del lavoro di Hilbert è tuttavia meno interessante, nel senso che alla necessaria modellazione di  $T_{(2)}$  si sostituisce quella non meno problematica della lagrangiana di massa  $L$ .

Ovviamente il 2-tensore energetico totale  $T_{(2)}$ , simmetrico e solenoidale, ha un ruolo fondamentale nelle equazioni (3'). Di esso abbiamo fin qui considerato, a titolo di esempio elementare, soltanto l'espressione valida per la materia disgregata, vedi la (9.1.3, 1). Avremo pertanto bisogno di un'analisi più generale di questo campo  $T_{(2)}$ . Ciò non ci impedisce tuttavia di proseguire lo studio dei fondamenti della relatività generale trattando  $T_{(2)}$  come un generico campo dato (via modellazione, e sotto i vincoli della simmetria e della solenoidalità) come funzione nota di  $(x, g_{(2)}, \partial g_{(2)})$ .

Veniamo ormai all'ultimo problema fondamentale ancora aperto, al "segmento di influenza"  $(g) \approx \triangleright (T)$ , cioè a come le proprietà metriche di  ${}^4L$  influenzano il campo di moto della materia. Ancora muovendo dal quadro della RS, sappiamo che in assenza di forze – e specificamente in assenza di forze gravitazionali – secondo quella teoria un punto materiale test di (piccola) massa si muove di moto rettilineo uniforme, cioè lungo una geodetica di un qualsiasi riferimento inerziale pseudopitagorico. Ragionevolmente, postuleremo dunque che il punto materiale test in questione, indipendentemente dalla sua massa, *si muova lungo una geodetica anche nel caso RG*, quindi lungo una geodetica di  ${}^4L$ ; restando inteso che se la massa è abbastanza grande, la metrica di  ${}^4L$  deve risentirne. Si deve cioè raggiungere una sorta di "simmetria" in cui la massa agisce sulla metrica, e la metrica agisce sul moto della massa. Formalizzeremo questo assunto nel seguente **assioma della geodetica spazio-temporale**:

**A<sub>2</sub>.** «Un punto materiale test di massa arbitraria si muove tra due punti-istanti distinti dati in  ${}^4L$  (e tra loro non troppo lontani) in modo che la sua linea d'universo sia la geodetica, unicamente determinata, tra quei punti-istanti, orientata dal passato al futuro, vedi le (8.1.2, 1).» (Qui la metrica

si intende “compatibile” con l’esistenza della massa test; ma se si vuole evitare questa complicazione, basterà pensare alla massa test come abbastanza piccola.)

All’assioma  $A_2$  si aggiunge poi, a questo punto senza altri commenti, l’**assioma complementare**  $A_{2bis}$  che da esso si ottiene sostituendovi “fotone di energia arbitraria” a “punto materiale di massa arbitraria” e “geodetica isotropa” (cioè, di pseudolunghezza nulla) a “geodetica”. Ricordiamo in proposito che, *nel presente contesto macroscopico*, un fotone può considerarsi come il limite di un punto materiale di massa di quiete  $m^0$  e velocità  $v$ , allorché  $m^0$  e  $1 - v^2/c^2$  tendono simultaneamente a zero in modo tale che  $m^0(1-v^2/c^2)^{-1/2}$  tenda ad un limite finito  $m > 0$ . Moltiplicato per  $c^2$ , tale limite è l’energia del fotone. Ignorando la quantizzazione, l’energia del fotone può assumere qualsiasi valore positivo.

Come dobbiamo, ci resta da giustificare il valore della costante di proporzionalità  $K$  che abbiamo anticipato nella S.sez. 9.1.3. Utilizzeremo allo scopo il principio di corrispondenza, secondo cui al più basso ordine significativo la (3’) deve confluire nella teoria gravitazionale newtoniana classica. Questo si può fare studiando un qualsiasi problema in cui  $T_{(2)}$  sia assunto abbastanza piccolo, assimilandolo al corrispondente problema classico e confrontando i risultati. Consideriamo dunque un punto materiale test di massa (convenzionalmente) unitaria soggetto ad una debole energia potenziale gravitazionale *indipendente dal tempo*  $\chi = \chi(x^{1 \leq i \leq 3})$ , a sua volta dovuta ad una distribuzione di materia disgregata *immobile* di densità (classica)  $\mu^0 = \mu^0(x^1)$ , quindi soluzione dell’equazione di Poisson

$$(11) \quad \nabla^2 \chi = 4\pi\kappa\mu^0,$$

dove  $\nabla^2$  è l’operatore di Laplace nelle coordinate spaziali  $x^1$ ,  $\kappa$  è la solita costante di Newton-Cavendish, e il soprascritto  $(^0)$  ricorda che la densità  $\mu$  è quella di quiete.<sup>34</sup> Classicamente, il moto del punto test è quello che estremizza il funzionale di azione  $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x^1, v^k) dt$ , dove  $\mathcal{L}(x^1, v^k) = -\chi(x^1) + v^2/2$  è la lagrangiana del punto, e  $v^{1 \leq k \leq 3}$  sono le componenti della sua velocità. Banalmente,  $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x^1, v^k) dt = 0 \Leftrightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} [1 - \mathcal{L}(x^1, v^k)/c^2] c dt = 0$ . Se, come supporremo, i rapporti  $|\chi|/c^2$  e  $v^2/(2c^2)$  sono entrambi molto minori di 1, si può scrivere  $1 - \mathcal{L}(x^1, v^k)/c^2 \approx [(1+2\chi(x^1)/c^2) - v^2/c^2]^{1/2}$ . Con questo piccolo stratagemma l’integranda nell’ultima equazione variazionale diventa la radice quadrata di una forma quadratica nelle  $dx^i$ , positiva lungo la linea d’universo di una particella materiale; e alla luce dell’assioma  $A_2$  l’equazione stessa può trascriversi nella forma  $\delta \int_{s_1}^{s_2} s^2 ds = 0$ , con  $ds = [-ds^2]^{1/2}$ , dove

$$(12) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k - [1+2\chi(x^1)/c^2](dx^4)^2,$$

<sup>34</sup> La (11) si intende completata dalle convenienti condizioni al contorno (tipicamente di normalità all’infinito); ma come vedremo queste non hanno gioco nel presente ragionamento.

e  $dx^4 = cdt$ . La metrica tempo-ortogonale ( $g_{i4} = 0$ ) (12), alla quale si può sempre ricorrere, dà per  $g_{44} = g_{44}(x^1)$  il valore  $-[1+2\chi(x^1)/c^2]$ , che differisce dal suo valore imperturbato  $-1$  per  $-2\chi(x^1)/c^2$ , un numero per ipotesi molto minore di 1 in valore assoluto.<sup>35</sup>

Dobbiamo ora costruire il 2-tensore di Einstein  $E_{(2)} = \rho_{(2)} - \rho g_{(2)}/2$  corrispondente alla metrica tempo-ortogonale

$$(12bis) \quad g_{ik} = (g_{ik}, g_{i4} = g_{4i} = 0, g_{44} = -[1+2\chi/c^2]),$$

sapendo che in queste condizioni i  $g_{ik}$  sono le componenti covarianti della metrica spaziale  $\gamma_{ik}$ . Invece che a  $\chi$ , nel seguito converrà riferirsi alla celerità della luce  $|\mathcal{V}| = |\mathcal{V}|(x^1) = c\sqrt{-g_{44}(x^1)} = c[1+2\chi(x^1)/c^2]^{1/2}$ , cfr. la (9.3.4, 19). Calcoliamo le componenti covarianti significative del tensore di Riemann in termini di tale  $|\mathcal{V}|$ , che per brevità scriveremo  $\mathcal{V}$ . Abbiamo innanzitutto, per i Chr1:  $\Gamma_{i4k} = 0$ ;  $\Gamma_{ik4} = 0$ ;  $\Gamma_{4i4} = \mathcal{V}\mathcal{V}_{/i}/c^2$ ;  $\Gamma_{44i} = -\mathcal{V}\mathcal{V}_{/i}/c^2$ ;  $\Gamma_{444} = 0$ . Troviamo quindi, con un po' di lavoro,  $\rho_{i4\eta\kappa} = 0$ ;  $\rho_{i44\kappa} = -\mathcal{V}\mathcal{V}_{/i\kappa}/c^2$ ;  $\rho_{44i4} = 0$ ;  $\rho_{4444} = 0$ . Da queste, per contrazione con il tensore metrico, abbiamo:  $\rho_{ik} = \rho_{ijhk}g^{jh} = \mathcal{V}_{/ik}/\mathcal{V} + Q_{ik}$  con  $Q_{ik} =: g^{\lambda\mu}\rho_{i\lambda\mu\kappa}$  (la simmetria di questo  $\rho_{ik}$  essendo evidente);  $\rho_{i4} = \rho_{4i} = 0$ ;  $\rho_{44} = -\mathcal{V}\nabla^2\mathcal{V}/c^2$ ; e infine  $\rho = 2\nabla^2\mathcal{V}/\mathcal{V} + Q$ , dove  $Q$  è l'invariante lineare (spaziale) di  $Q_{ik}$ ,  $g^{ik}Q_{ik}$ . Possiamo così finalmente determinare le componenti covarianti di  $E_{(2)}$ , che risultano:

$$(13_1) \quad E_{ik} = \mathcal{V}_{/ik}/\mathcal{V} + Q_{ik} - (\nabla^2\mathcal{V}/\mathcal{V} + Q/2)g_{ik};$$

$$(13_2) \quad E_{i4} = E_{4i} = 0;$$

$$(13_3) \quad E_{44} = (1/2)Q\mathcal{V}^2/c^2.$$

Si noti che non ci sono approssimazioni nei calcoli fin qui effettuati: le  $E_{ik}$  date dalle (13) sono cioè quelle “esatte” della **statica einsteiniana**, espresse in termini di  $\mathcal{V}$  e  $Q$  per la metrica tempo-ortogonale indipendente dal tempo (12bis). Notiamo ancora che la metrica (12bis) è **statica**, perché, secondo l'uso, così si dice una metrica generica che sia simultaneamente **stazionaria** ( $\equiv$  indipendente dal tempo) e tempo-ortogonale.

Passiamo ora al 2-tensore energetico. La materia disgregata del presente modello è immobile, e dunque la (9.1.3, 1),  $T^{ik} = c^2\mu dx^i/ds dx^k/ds$ , ci anticipa che soltanto la  $T^{44}$  può essere diversa da zero. La stessa condizione sussiste per le componenti covarianti  $T_{ik}$ ; soltanto la  $T_{44}$  può essere diversa da zero (basta scrivere  $T_{jh} = T^{ik}g_{ij}g_{kh}$  per avere  $T_{\lambda\mu} = T^{44}g_{4\lambda}g_{4\mu} = 0$  e  $T_{4\lambda} = T^{44}g_{44}g_{4\lambda} = 0$ ), e precisamente si ha  $T_{44} = T^{44}(g_{44})^2 = T^{44}(\mathcal{V}/c)^4$ . Del resto, assumendo la validità delle equazioni del campo, già le  $E_{i4} = 0$  implicano, se  $K \neq 0$ ,  $T_{i4} = 0$ , e quindi anche  $T^{i4} = 0$ . Ma allora, se  $dx^4/ds \neq 0$  (in effetti questo è un numero poco dissimile da 1) la stessa (9.1.3, 1) dà  $\mu dx^i/ds = 0$ ,

<sup>35</sup> Beninteso le parti sono qui invertite: nel senso che, dal punto di vista relativistico, l'equazione variazionale “esatta” è la  $\delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0$ , mentre quella “approssimata” è la  $\delta \int_{t_1}^{t_2} [1 - \mathcal{L}(x^1, v^k)/c^2] cdt = 0$ .

da cui segue che  $T^{\iota\kappa} = 0$  (per ogni  $\iota, \kappa = 1, 2, 3$ ). Infine ancora la (9.1.3, 1) dice che  $T^{44} = c^2\mu(dx^4)^2/(-ds)^2$ ; ma  $(dx^4)^2/(-ds)^2 = c^2/\mathcal{V}^2$ , per cui  $T^{44} = c^4\mu/\mathcal{V}^2$ , e  $T_{44} = \mu\mathcal{V}^2$ .

Siamo ora in grado di scrivere la componente  $(_{44})$  delle (3'): poiché  $\mathcal{V} \neq 0$ , essa si riduce a

$$(14) \quad Q + 2c^2\mu K = 0.$$

Da questa, dobbiamo eliminare  $Q$  mediante le componenti  $(_{\iota\kappa})$  delle (3'), che sono le  $0 = E_{\iota\kappa} + KT_{\iota\kappa} = E_{\iota\kappa}$ . Allo scopo, basta contrarre queste equazioni con  $g^{\iota\kappa}$ ; il risultato è  $0 = \nabla^2\mathcal{V}/\mathcal{V} + Q - 3(\nabla^2\mathcal{V}/\mathcal{V} + Q/2)$ , da cui si ha subito

$$(15) \quad Q = -4\nabla^2\mathcal{V}/\mathcal{V}.$$

Sostituendo la (15) nella (14), troviamo così finalmente

$$(16) \quad \mu c^2 K \mathcal{V} / 2 = \nabla^2 \mathcal{V}.$$

Nella nostra approssimazione, la  $\mu$  che figura nella (16) può confondersi con la densità di quiete  $\mu^0$ , e  $\mathcal{V} \approx c(1 + \chi/c^2)$ . Quest'ultima relazione approssimata ci conferma che  $\mathcal{V}/c$  è un numero molto prossimo a 1, che si riduce a 1 in assenza di campo gravitazionale. Inoltre nella stessa approssimazione  $\nabla^2\mathcal{V} \approx \nabla^2\chi/c$ ; e sostituendo questa posizione nella (16), otteniamo

$$(17) \quad \nabla^2\chi = \mu^0 c^4 K / 2.$$

Confrontando questa (17) con la (11), si ottiene finalmente il valore di  $K = 8\pi\kappa/c^4$ , qed.

Se, alternativamente, si rinuncia alle espressioni esatte (13) di  $E_{(2)}$  valide nel caso statico, ponendo fin dal principio  $g_{ik} = G_{ik} + \eta_{ik}$  con  $\eta_{ik} \ll 1$ , e sviluppando linearmente in  $\eta_{ik}$  l'espressione di  $\rho_{ik}$ , si trova facilmente, nella convenuta approssimazione,

$$(18) \quad \rho_{ik} = \partial\Gamma_{ij}^j/\partial x^k - \partial\Gamma_{ik}^j/\partial x^j = (1/2)G^{jh}\partial^2\eta_{ik}/\partial x^j\partial x^h + (1/2)[\partial^2\eta/\partial x^i\partial x^k - \partial^2\eta_i^j/\partial x^j\partial x^k - \partial^2\eta_k^j/\partial x^i\partial x^j],$$

dove  $\eta_i^j =: G^{js}\eta_{is}$  e  $\eta =: G^{jh}\eta_{jh}$ . Poiché  $\eta_{(2)}$  è per ipotesi indipendente da  $x^4$ , in particolare risulta  $\rho_{44} = (1/2)G^{\iota\kappa}\partial^2\eta_{44}/\partial x^\iota\partial x^\kappa = \nabla^2 g_{44}/2 = -\nabla^2\mathcal{V}^2/(2c^2) = -\nabla^2\chi/c^2$ . Sostituendo questo risultato nella (3'') (in cui nella stessa approssimazione a  $g_{44}$  può sostituirsi  $G_{44} = -1$ , e a  $\mu, \mu^0$ ), tenendo anche conto che  $T = -\mu c^2 \approx -\mu^0 c^2$ , si ritrova la (17).

È opportuno un breve commento. Il valore  $8\pi\kappa/c^4$  ottenuto per  $K$  consegue dal principio di corrispondenza applicato al SDP geometrodinamico e al particolare modello considerato, in cui lo spazio-tempo è deformato, rispetto alla struttura di spazio pseudoeuclideo RS, dalla presenza di polvere materiale disgregata immobile con densità  $\mu^0$ . Se studiando in modo simile un *diverso* modello particolare di  $T_{(2)}$  trovassimo per  $K$  un valore diverso, in assenza di errori banali questo significherebbe che quel modello di  $T_{(2)}$  è inaccettabile, oppure che la teoria RG manca di coerenza interna. (Sorvoliamo sugli argomenti che si potrebbero portare a sostegno della impossibilità che si verifichi l'ultima ipotesi.) D'altra parte il modello della polvere disgregata immobile è per il momento l'unico modello affidabile di cui disponiamo.

In definitiva possiamo completare come segue, in forma assiomatica, le nostre conclusioni sul sistema geometrodinamico:

**A<sub>3</sub>.** «La metrica  $g_{(2)}$  dello spazio-tempo  ${}^4L$ , soddisfa, almeno in una scala spazio-temporale non troppo grande, il SDP del 2° ordine quasi-lineare iperbolico (3'), in cui  $K$  è la costante  $8\pi\kappa/c^4$ . Se poi ammettiamo una costante cosmologica  $\neq 0$ , al SDP (3') si deve sostituire il SDP (3).»

Gli assiomi (**A<sub>1</sub>** (v. S.sez. 9.3.4), **A<sub>2</sub>**, **A<sub>2bis</sub>**, **A<sub>3</sub>**) costituiscono la presente versione della base fondativa della RG.

Nel concludere questa sezione, ricordiamo ancora che secondo l'analisi caratteristica del sistema geometrodinamico (abbiamo affrontato questo problema in termini generali nella App. Spec. 7.A), i fronti di discontinuità delle sue soluzioni (o onde gravitazionali) viaggiano con velocità di avanzamento normale uguale alla celerità *locale* della luce. Sparisce con ciò quell'azione a distanza *istantanea* che tanto insospettiva l'intuizione di Newton. Sulle onde gravitazionali si troverà qualche ulteriore informazione nella App. 9.F.

## 9.4 APPLICAZIONI E COMPLEMENTI I

Con questa Sez. 9.4 iniziamo lo studio di alcune importanti conseguenze degli assiomi (9.3,  $\mathbf{A}_1 \div \mathbf{A}_3$ ) che sono stati posti a fondamento della relatività generale. Inoltre, poiché la formulazione dell'assioma  $\mathbf{A}_3$  sulle equazioni di campo (9.3.5, 3') è incompleta finché non si specifica come si definisce il tensore energetico in casi di interesse applicativo concreto, una parte della sezione e delle appendici speciali sarà dedicata alla messa a punto, parzialmente induttiva, di questa definizione.

### 9.4.1) ANALISI GEODETICA IN RIFERIMENTI NON INERZIALI

Per cominciare, richiamiamo l'attenzione del lettore su una semplice identità, valida in qualunque riferimento  $x^i = (x^1, x^4=ct)$  in cui le  $x^i$  sono lunghezze. Per una data metrica (adimensionale)  $g_{(2)} = g_{(2)}(x)$ , sia al solito  $\gamma_{ik} =: g_{ik} + \gamma_i \gamma_k$ ,  $\gamma_i =: g_{i4}/\sqrt{-g_{44}}$ ,  $d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$ , e  $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ . Mediante conteggi banali, si verifica allora che  $ds^2 - d\sigma^2 = (g_{i4} dx^i)^2 / g_{44}$ .

Avendo posto  $g_{44} = - (1+2\chi/c^2)$ ,  $\chi = \chi(x)$  si nomina come **potenziale gravitazionale scalare**. Similmente, le tre  $\gamma_i$  si nominano come componenti del **potenziale gravitazionale vettore**. Evidentemente l'ultima riga (o l'ultima colonna) della matrice  $\{g_{ik}\}_{i,k=1+4}$  è unicamente determinata dai potenziali gravitazionali, scalare e vettore, e viceversa. Si noti che  $\chi =_{\text{dim}} L^2 T^{-2}$  e  $\gamma_i =_{\text{dim}} 1$ .

Studieremo ora la traiettoria di un punto materiale test (di piccola massa) in certi riferimenti non inerziali, ovvero, le geodetiche di certe varietà spazio-temporali non piatte. Rinunceremo di norma – ad esempio nella seguente sessione §1 – all'uso di coordinata römeriana immaginaria.

§1. Un caso che per la sua accessibilità intuitiva è stato molto studiato è quello di un sistema di **riferimento  $\mathfrak{s}$  rotante** con velocità angolare costante  $\omega > 0$  attorno all'asse  $Z$  del riferimento “di laboratorio”  $\mathfrak{S}$ , supposto inerziale. (La costanza di  $\omega$  è ovviamente da riferire al tempo (normale) di  $\mathfrak{S}$ .) In  $\mathfrak{S}$ , converrà far uso di coordinate spaziali cilindriche  $(R, \Theta, Z)$ , ponendo  $X^{1 \leq i \leq 4} \equiv (R, \Theta, Z, cT)$ , dove  $T$  è il tempo di  $\mathfrak{S}$ . Similmente, useremo coordinate spaziali cilindriche  $(r, \vartheta, z=Z)$  nel riferimento rotante  $\mathfrak{s}$ , ponendo  $x^{1 \leq i \leq 4} \equiv (r, \vartheta, z, ct)$ , dove  $t$  è il tempo di  $\mathfrak{s}$  (da definire). Se supponiamo che i due riferimenti  $(r, \vartheta, z)$  e  $(R, \Theta, Z)$  coincidano al tempo  $T = 0$ , le  $x$  spaziali sono legate alle  $X$  spaziali dalle

$$(1_1) \quad r = R,$$



$$(1_2) \quad \vartheta = \Theta - \omega T,$$

$$(1_3) \quad z = Z.$$

Inoltre converremo di porre

$$(1_4) \quad t = T.$$

In realtà nel seguito potremo ignorare la (1<sub>3</sub>) e la stessa coordinata  $z = Z$ , limitandoci a riferimenti  $\mathfrak{S} \equiv (R, \Theta, cT)$  (inerziale) e  $\mathfrak{s} \equiv (r, \vartheta, ct)$  (rotante) legati dalle (1<sub>1</sub>, 1<sub>2</sub>, 1<sub>4</sub>) (con  $r = R > 0$ ).

La velocità rispetto a  $\mathfrak{S}$  del punto di coordinate fisse  $(r, \vartheta)$  in  $\mathfrak{s}$  è tangenziale ed uguale a  $Rd_T\Theta = r\omega < c$ ; quindi sarà necessario limitare il piano rotante ad un disco aperto (cioè privato del bordo)  $\mathcal{D}$  di raggio  $c/\omega$ . Evidentemente, una barretta-campione rotante disposta lungo un raggio di  $\mathcal{D}$  non subisce contrazione di Lorentz; mentre la subisce, per un fattore

$$(2) \quad \gamma_\omega^{-1} = \gamma_\omega^{-1}(r) =: (1 - r^2\omega^2/c^2)^{1/2} < 1,$$

una barretta tangenziale a distanza  $r$  dal centro. Per la (2), avvicinandosi al bordo  $\partial\mathcal{D}$  di  $\mathcal{D}$  (dove  $r = c/\omega$ ), la lunghezza della barretta tangenziale tende a zero come  $(1-h^2)^{1/2}$  per  $h \rightarrow 1$ .<sup>1</sup> Quindi la geometria di  $\mathcal{D}$  non può essere euclidea: la circonferenza di un suo cerchio concentrico di raggio  $0 < r < c/\omega$ , misurata in  $\mathfrak{s}$ , è lunga  $2\pi\gamma_\omega > 2\pi r$ . Infine, la parte spaziale  $d\sigma^2$  di  $ds^2$ , misurata con la barretta tangenziale contratta, e nella carta spaziale  $(r, \theta)$ , è

$$(3) \quad d\sigma^2 = dr^2 + \gamma_\omega^2(r)r^2d\vartheta^2.$$

In forza della (1<sub>4</sub>), gli orologi di  $\mathfrak{s}$  (supposti indifferenti alle accelerazioni) non possono essere normali come quelli di  $\mathfrak{S}$ . Infatti il ritmo di marcia di un orologio normale rotante a distanza  $r$  dal centro di  $\mathcal{D}$  è *minore* (Lorentz) per un fattore  $\gamma_\omega^{-1}(r) < 1$ , di quello degli orologi immobili di  $\mathfrak{S}$ . Per rendere valida la (1<sub>4</sub>), occorrerà dunque supporre che il ritmo di marcia degli orologi di  $\mathfrak{s}$  da collocare a distanza  $r$  dal centro sia *preventivamente aumentato* del fattore  $\gamma_\omega(r) > 1$ .

Sotto queste condizioni, si verifica senza difficoltà che l'invariante  $ds^2$ , cioè

$$(4) \quad ds^2 = dR^2 + R^2d\Theta^2 - c^2dT^2$$

in  $\mathfrak{S}$  e nella carta  $(R, \Theta, cT)$ , diventa

$$(4') \quad ds^2 = dr^2 + r^2d\vartheta^2 + 2\omega(r^2/c)d\vartheta cdt - (1 - r^2\omega^2/c^2)c^2dt^2$$

in  $\mathfrak{s}$  e nella carta  $(r, \vartheta, ct)$ . Questo corrisponde alle seguenti componenti covarianti dei tensori fondamentali, in  $\mathfrak{S}$  e rispettivamente in  $\mathfrak{s}$ ,

$$(5) \quad G_{11} = 1, \quad G_{22} = R^2, \quad G_{44} = -1, \quad G_{12} = 0, \quad G_{14} = 0, \quad G_{24} = 0;$$

$$(5') \quad g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{44} = -(1 - r^2\omega^2/c^2) = -\gamma_\omega^{-2}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{14} = 0, \quad g_{24} = r^2\omega/c.$$

---

<sup>1</sup> Che la lunghezza della barretta radiale rotante non subisca variazioni "classiche" presuppone che essa abbia densità evanescente, in modo da non essere deformata dalle forze d'inerzia centrifughe. L'ipotesi che la barretta sia "infinitamente rigida" ci darebbe la stessa garanzia, ma è relativisticamente inaccettabile (ad esempio perché implicherebbe una velocità di propagazione infinita degli sforzi lungo di essa).

Si noterà che le  $g_{ik}$  tendono come devono alle  $G_{ik}$  per  $r\omega/c \rightarrow 0$ , e che sia le  $G_{ik}$  che le  $g_{ik}$  soddisfano alle (9.3.3, 8), (9.3.3, 14). Queste metriche  $G_{ik}$  e  $g_{ik}$  corrispondono a coefficienti  $\Gamma_{\iota} =: G_{\iota 4}/\sqrt{-G_{44}}$  (con  $\iota = 1, 2$ ) nulli e rispettivamente a coefficienti  $\gamma_{\iota}$  uguali a  $\delta_{\iota 2}(1-\omega^2 r^2/c^2)^{-1/2}\omega r^2/c$ ; quindi a coefficienti di metrica spaziale (vedi le (9.3.4, 6)) “maiuscoli”

$$(6) \quad \Gamma_{11} = 1, \quad \Gamma_{22} = R^2, \quad \Gamma_{12} = 0,$$

e rispettivamente “minuscoli”

$$(6') \quad \gamma_{11} = 1, \quad \gamma_{22} = r^2/(1-r^2\omega^2/c^2) = r^2\gamma_{\omega}^2, \quad \gamma_{12} = 0.$$

Come devono, i coefficienti (6') tendono ai coefficienti (6) per  $r\omega/c \rightarrow 0$ . In conclusione, la **metrica del riferimento rotante**  $g_{ik}$  non è del tipo tempo-ortogonale (a causa del  $g_{24}$  diverso da zero), e la metrica spaziale (6'), che conferma la precedente espressione (3) di  $d\sigma^2$ , non è euclidea.

A questo punto possiamo calcolare le geodetiche nel disco  $\mathcal{D}$  (privato anche del suo centro), di metrica spaziale  $d\sigma^2 = \gamma_{\iota\kappa}dx^{\iota}dx^{\kappa}$  (sempre con  $\iota, \kappa = 1, 2$ ) nel riferimento rotante. Secondo (9.2.2, §7, (T2)), le equazioni di EL del problema sono

$$(7) \quad d_{\sigma}(\gamma_{\iota\kappa}d_{\sigma}x^{\kappa}) = (1/2)\partial\gamma_{\lambda\mu}/\partial x^{\lambda}d_{\sigma}x^{\lambda}d_{\sigma}x^{\mu}.$$

Qui si manifesta il vantaggio di avere usato coordinate polari ( $x^1 \equiv r, x^2 \equiv \vartheta$ ) nel disco rotante  $\mathcal{D}$ . Infatti nessuna delle tre componenti  $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}$  dipende da  $\vartheta$ , e pertanto la (7) con  $\iota = 2$  porge, per integrazione rispetto a  $\sigma$ ,

$$(8) \quad \gamma_{2\kappa}d_{\sigma}x^{\kappa} = \gamma_{22}d_{\sigma}x^2 = r^2\gamma_{\omega}^2(r)d_{\sigma}\vartheta = \text{cost}_{\sigma},$$

dove  $\text{cost}_{\sigma}$  è un parametro costante, con dimensione lunghezza, lungo la geodetica. Detto  $\alpha$  questo parametro, per definizione  $d_{\sigma}\vartheta \equiv 0$  lungo un generico raggio di  $\mathcal{D}$ ; e quindi quel raggio è geodetico con costante  $\alpha = 0$ . Si tenga presente che ogni raggio ha lo stesso  $\alpha = 0$ . Viceversa, se  $\alpha = 0$ ,  $d_{\sigma}\vartheta \equiv 0$  perché  $r^2\gamma_{\omega}^2(r) > 0$ , e quindi la geodetica è un raggio. Vale a dire, da una parte tutti i raggi di  $\mathcal{D}$ , e dall'altra solo i raggi di  $\mathcal{D}$ , sono geodetiche con  $\alpha = 0$ . Ma cosa sappiamo delle altre geodetiche di  $\mathcal{D}$ ?

Per definizione è  $\gamma_{\iota\kappa}d_{\sigma}x^{\iota}d_{\sigma}x^{\kappa} = 1$ , e dunque

$$(9) \quad (d_{\sigma}r)^2 + r^2\gamma_{\omega}^2(r)(d_{\sigma}\vartheta)^2 = 1.$$

Questa relazione dà, a meno del segno, la  $d_r\vartheta \equiv d_{\sigma}\vartheta/d_{\sigma}r$  lungo la **geodetica del riferimento rotante**, e quindi permette di scrivere una equazione differenziale normale del 1° ordine (e non del 2° ordine) che la descrive. Precisamente, con qualche passaggio si trova

$$(10) \quad d_r\vartheta = \pm |\alpha| |1 - \alpha^2 \lambda^2(r)|^{-1/2} \lambda^2(r),$$

dove per brevità si è scritto  $\lambda^2 = \lambda^2(r)$  per la  $1/(r^2\gamma_{\omega}^2)$ . La (10) conferma che un raggio ( $d_r\vartheta \equiv 0$ ) è una geodetica con  $\alpha = 0$ , e viceversa che una soluzione della (10) con  $\alpha = 0$  è un raggio. Se il punto  $(r, \vartheta)$  tende a  $\partial\mathcal{D}$  lungo una geodetica,  $\lambda^2 \rightarrow 0$ , e secondo la (10) la geodetica arriva su  $\partial\mathcal{D}$  sotto un

angolo retto, come è vero in particolare per ogni raggio. La (10) mostra anche che la generica geodetica con  $\alpha \neq 0$  è composta di due rami simmetrici rispetto ad un raggio di mezzeria, e quindi interseca quest'ultimo raggio sotto un angolo retto. Il punto di intersezione, diciamo in  $r = r^*$ , si ottiene subito dalla (8) facendovi  $d_\sigma r = 0$ , per cui si trova  $r^{*2} = \alpha^2 / (1 + \alpha^2 \omega^2 / c^2)$ .

Infine, poiché il 2° membro della (10) non contiene  $\vartheta$ , la (10) stessa si integra con una quadratura per separazione di variabili. Se per brevità diciamo  $k = k(r)$  il suo 2° membro assoluto, e poniamo  $\vartheta = 0$  sul raggio di mezzeria, otteniamo

$$(11) \quad \vartheta(r) = \pm \int_{r' \rightarrow r^*}^r k(r') dr'.$$

Qui si è scritto  $r' \rightarrow r^*$  per il limite inferiore, perché  $k(r)$  diverge per  $r$  tendente a  $r^*$  come  $(1-h^2)^{-1/2}$  per  $h^2 \rightarrow 1$ , sebbene il limite dell'integrale per  $r \rightarrow r^*$  esista finito. La geodetica arriva poi sul bordo  $\partial\mathcal{D}$  quando  $r$  diventa  $c/\omega$  e  $k$  si annulla. Pertanto la (11) dà le anomalie  $\pm \underline{\vartheta}$  degli estremi della geodetica su  $\partial\mathcal{D}$  secondo la

$$(12) \quad \underline{\vartheta} = \int_{r' \rightarrow r^*}^{r'=c/\omega} k(r') dr'.$$

Il calcolo della  $\vartheta(r)$  (11) non è difficile, e dà

$$(13) \quad \vartheta = \vartheta(r) = \pm [\cos^{-1}(r^*/r) - r^* \omega^2 c^{-2} \sqrt{(r^2 - r^{*2})}],$$

dove  $\cos^{-1}$  denota arcocoseno. (Se poi non si identifica l'origine angolare con il semiasse di simmetria della geodetica, occorrerà aggiungere una seconda costante arbitraria nella (13), scrivendovi  $\vartheta - \vartheta_0$  in luogo di  $\vartheta$ .) Non entriamo qui in una ulteriore analisi delle curve di equazione (13) e parametro  $\alpha \neq 0$ ; ma è chiaro che se  $\alpha \rightarrow 0$  la geodetica degenera nel raggio  $\vartheta = 0$  contato due volte (dal bordo al centro e di nuovo al bordo). Ci interessa invece osservare che uno studio più approfondito del campo geodetico in  $\mathcal{D}$  mostra che questo disco ha le proprietà formali del piano iperbolico (v. App. 8.A); ad esempio, la somma  $H$  degli angoli di un triangolo geodetico di  $\mathcal{D}$  è strettamente compresa tra 0 e  $\pi$ .<sup>2</sup> §

**§2.** L'esempio appena illustrato, fondato sulle trasformazioni  $(1_1, 1_2, 1_4)$ , mostra che – come il piano euclideo  $(\mathbb{R}, \Theta)$  – il disco non euclideo  $(0 < r < c/\omega, \vartheta)$  è “rigido” nel senso che la distanza spaziale  $\int d\sigma$  tra due suoi punti arbitrari, calcolata lungo la geodetica (unica) per quei punti, non dipende da  $t$ . Il fatto che la distanza spaziale tra due punti sia unicamente definita non può accogliersi sempre su una varietà pseudoriemanniana lorentziana, salvo il caso che la varietà sia (spazialmente) 1-dim: se essa è più che 1-dim possono nascere problemi di integrabilità rispetto a  $d\sigma$ . La stessa limitazione

<sup>2</sup> Un esempio di triangolo geodetico di  $\mathcal{D}$  con  $H = 0$  è quello che ha per vertici i punti di  $\partial\mathcal{D}$  con anomalie  $-\pi/2, 0, +\pi/2$  (un lato di questo triangolo è dunque il diametro di estremi  $(\omega/c, -\pi/2), (\omega/c, \pi/2)$ ). Invece i triangoli geodetici tracciati in un piccolo intorno del centro ( $r\omega/c$  molto minore di 1) tendono ad essere euclidei, quindi con  $H \cong \pi$ , perché come già osservato la metrica spaziale di  $\mathcal{D}$  tende a diventare euclidea in quel limite. Gli archi di geodetica compresi tra le due intersezioni ad angolo retto con  $\partial\mathcal{D}$  hanno la concavità costantemente rivolta verso l'esterno.

sussiste per la definizione di **distanza spaziale secondo Born** (detta anche del **bouncing photon**, o del “fotone rimbalzante”). La distanza di Born del punto-orologio (2) dal punto-orologio (1) è  $c/2$  volte il tempo proprio di (1) che trascorre tra l’emissione da (1) di un fotone e il suo ritorno in (1) dopo essere stato riflesso da (2). L’unicità di questo tempo proprio sussiste in generale soltanto se le linee di universo dei due orologi sono abbastanza vicine. Si può anche verificare che le due definizioni di distanza tendono ad equivalersi se i punti-orologi, o meglio le loro linee di universo, tendono ad identificarsi.

Per definizione, un **sistema rigido di orologi** è quello per cui la distanza spaziale tra due qualsiasi di essi, calcolata lungo la geodetica che li unisce, non dipende dal tempo. Questa nozione va dunque accolta con le necessarie limitazioni in relatività, se gli orologi non giacciono su una varietà 1-dim e il loro insieme è abbastanza “esteso”. Sistemi rigidi estesi di orologi sono quelli della relatività speciale; ma essi sono sostanzialmente 1-dim (oltre che inerziali). La teoria relativistico-generale della rigidità alla Born di sistemi estesi più che 1-dim di orologi è ben sviluppata, ma non può essere esposta abbastanza brevemente per essere accolta in queste pagine. Ci limitiamo a segnalare, a questo proposito, che in essa giocano un ruolo importante i contributi del giovane Fermi (1922) dei quali abbiamo accennato nella S.sez. 9.2.3, §4.

È invece semplice esplorare la natura di certe particolari trasformazioni dal riferimento *inerziale* spazialmente 1-dim  $\mathfrak{S} \equiv (X, T)$  al riferimento generalmente *non inerziale* (anch’esso spazialmente 1-dim)  $\mathfrak{s} \equiv (x, t)$ . Un primo esempio in questo senso è quello della trasformazione:

$$(14) \quad X = X(x, t) = x + \mathbf{a}t^2/2, \quad T = T(x, t) = t,$$

ove  $\mathbf{a} \neq 0$  è una costante con la dimensione di un’accelerazione, e si suppone che  $|\mathbf{a}t| < c$ . Tenuto conto che  $c$  è un tempo comune  $t = T$ , il riferimento  $\mathfrak{s}$  viaggia rispetto a  $\mathfrak{S}$  con velocità  $(dX/dT)_{x=\text{cost}} = \partial X/\partial t = \mathbf{a}t$  e accelerazione  $(d^2X/dT^2)_{x=\text{cost}} = \partial^2 X/\partial t^2 = \mathbf{a}$ , entrambe indipendenti da  $x$ , ossia è **uniformemente accelerato**. Le componenti covarianti del tensore fondamentale  $g_{ik}$  ( $i, k = 1$  o  $4$ ) si calcolano con la solita procedura a partire da quelle di  $G_{ik} = \text{diag}(1, -1)$ , e risultano essere

$$(15) \quad g_{11} = 1, \quad g_{14} = g_{41} = \mathbf{a}t/c, \quad g_{44} = -1 + \mathbf{a}^2 t^2/c^2.$$

Si vede così che la trasformazione (14) non è né stazionaria né tempo-ortogonale. Ad essa corrispondono un potenziale (gravitazionale) scalare  $\chi = -c^2(1 + g_{44})/2 = -\mathbf{a}^2 t^2/2$  e un potenziale vettore  $\gamma_1 = (\mathbf{a}t/c)(1 - \mathbf{a}^2 t^2/c^2)^{-1/2}$ . Infine la metrica spaziale è  $\gamma_{11} = g_{11} + \gamma_1^2 = (1 - \mathbf{a}^2 t^2/c^2)^{-1}$ , e quindi  $\mathfrak{s}$  non è rigido (la distanza  $d\sigma$  tra due punti  $x, x + dx$  cresce infatti con  $t$  come  $(1 - \mathbf{a}^2 t^2/c^2)^{-1/2}$ ).

Sempre sotto la  $|\mathbf{a}t| < c$ , passiamo ora con una ulteriore trasformazione dalle  $(x, t)$  alle  $(x', t')$  definite dalle

$$(16) \quad x' = x'(x, t) = x, \quad t' = t'(x, t) = t \exp[-\mathbf{a}(x + \mathbf{a}t^2/2)/c^2].$$

Al solito, il calcolo delle  $g'_{ik}$  si effettua differenziando le (16) e sostituendole nella  $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = g'_{ik}dx'^i dx'^k$ . Si trova  $dt = (1 - a^2 t^2 / c^2)^{-1} (dx' at / c^2 + dt' \exp[a(x + at^2/2) / c^2])$ , e quindi

$$(17) \quad g'_{11} = (1 - a^2 t^2 / c^2)^{-1}, \quad g'_{14} = g'_{41} = 0, \quad g'_{44} = -(1 - a^2 t^2 / c^2)^{-1} \exp[2a(x + at^2/2) / c^2],$$

dove  $t$  e  $x$  vanno espressi come funzioni di  $(x', t')$ . Secondo la seconda delle (17), la metrica  $g'_{(2)}$  è tempo-ortogonale.

Questo fatto – l'essere passati da una metrica non tempo-ortogonale ad una metrica tempo-ortogonale operando la trasformazione  $(x, t) \mapsto (x', t')$  – è più generale di quanto l'esempio riportato lasci pensare, e vale la pena di studiarlo più a fondo nel caso (3+1)-dim standard. Supponiamo dunque di avere una carta lorentziana ( $x \equiv x^{1 \leq i \leq 3}$ ,  $x^4 \equiv ct$ ) generalmente non tempo-ortogonale, quindi con le tre  $\gamma_i$  non tutte nulle, e di operare una trasformazione  $(x, ct) \mapsto (x' \equiv x'^{1 \leq i \leq 3}, ct')$  del tipo

$$(18) \quad x' = x, \quad x'^4 \equiv ct' = f(x, ct),$$

dove  $f$  è una funzione da determinare – se possibile – in modo che le tre nuove  $\gamma'_i$  siano nulle. Partiamo dalla identità riportata all'inizio di questa sezione,  $ds^2 - d\sigma^2 = (g_{i4}dx^i + g_{44}dx^4)^2 / g_{44}$ , riscriviamola nel riferimento con apice, ed uguagliamo le due espressioni. Si vede facilmente che le  $\gamma_{ik}$  si trasformano come le componenti covarianti di un 2-tensore 3-dim sotto le (18) – o più in generale sotto le

$$(18') \quad x' = x'(x), \quad ct' = f(x, ct) -^3;$$

quindi le due espressioni di  $d\sigma^2$  si possono eliminare dall'uguaglianza risultante. Imponendo che le tre  $\gamma'_i$  siano nulle, si trova così  $g'_{44}(dx'^4)^2 = [g_{44}dx^4 + \gamma_i \sqrt{(-g_{44})} dx^i]^2 / g_{44} \equiv [dx^4 - \gamma_i dx^i / \sqrt{(-g_{44})}]^2 g_{44}$ , ovvero

$$(19) \quad dx'^4 = \pm \sqrt{(g_{44}/g'_{44})} [dx^4 - \gamma_i dx^i / \sqrt{(-g_{44})}].$$

Questa deve uguagliare la  $df \equiv \partial f / \partial x^i dx^i$ , per cui  $\partial f / \partial x^4 = \pm \sqrt{(g_{44}/g'_{44})}$  e  $-\partial f / \partial x^i = \pm \sqrt{(g_{44}/g'_{44})} \gamma_i / \sqrt{(-g_{44})}$ . Devono quindi essere soddisfatte le tre EDP lineari in  $f$

$$(20) \quad \partial f / \partial x^i + \partial f / \partial x^4 \gamma_i / \sqrt{(-g_{44})} = 0.$$

Vale allora il seguente teorema:

T. «Supposte le  $\gamma_i$  e  $g_{44}$  di CdC 1 nel dominio della carta di riferimento  $(x, ct)$ , una soluzione  $f = f(x, ct)$  delle (20) ivi di CdC 2 e con  $\partial f / \partial x^4 \neq 0$  esiste sse le funzioni  $\Lambda_{ik} =:$

<sup>3</sup> Usiamo la notazione  $\wp_i^h$  per  $\partial x^h / \partial x^i$  (e simili) introdotta con le (8.2.1, 3). Allora secondo la prima (18'),  $\wp_{4'}^4 = 0$ . Quindi  $g'_{i4} = \wp_{4'}^4 (\wp_i^\lambda g_{\lambda 4} + \wp_i^4 g_{44})$ , ossia  $g'_{44} = (\wp_{4'}^4)^2 g_{44}$  e  $g'_{i4} = \wp_{4'}^4 (\wp_i^\lambda g_{\lambda 4} + \wp_i^4 g_{44})$ ; cioè,  $\gamma'_i = = \text{sign}(\wp_{4'}^4) [\wp_i^\kappa \gamma_\kappa - \wp_i^4 \sqrt{(-g_{44})}]$ . Allora  $\gamma'_{ik} = g'_{ik} + \gamma'_i \gamma'_\kappa = \wp_i^p \wp_\kappa^q g_{pq} + [\wp_i^\lambda \gamma_\lambda - \wp_i^4 \sqrt{(-g_{44})}] [\wp_\kappa^\lambda \gamma_\lambda - \wp_\kappa^4 \sqrt{(-g_{44})}]$ , che è a sua volta uguale a  $\wp_i^\lambda \wp_\kappa^\mu \gamma_{\lambda\mu}$ , qed.

$\equiv: [\partial/\partial x^i + \gamma_i/\sqrt{-g_{44}}]\partial/\partial x^4](\gamma_k/\sqrt{-g_{44}})$  sono simmetriche (in quel dominio) rispetto agli indici  $(i,k)$ : vale a dire, sse  $\Lambda_{12} = \Lambda_{21}, \Lambda_{23} = \Lambda_{32}, \Lambda_{31} = \Lambda_{13}$ .»<sup>4</sup>

Dim. La prova della parte “solo se” (necessità) di (T) è quasi banale, ed è lasciata al lettore come esercizio. La prova della parte “se” (sufficienza) è invece meno semplice, e per essa si rinvia alla letteratura specializzata. #

È immediato verificare che le sopradette condizioni di simmetria sulle  $\Lambda_{ik}$ <sup>5</sup> (tre nel caso (3+1)-dim) sono banalmente soddisfatte nel caso delle (15). Infatti la sola variabile spaziale è allora  $x \equiv x^1$ , e la richiesta in oggetto è vuota. Inoltre risulta  $f = f(x^1) = c \exp[-a(x+at^2/2)/c^2]$ . Questa è  $C^2$ , e  $\partial f/\partial t = \exp[-a(x+at^2/2)/c^2](1-a^2t^2/c^2) > 0$  perché per ipotesi  $|at| < c$ . Invece nel caso del sistema rotante considerato in §1, si verifica che, in  $\mathcal{D}$ ,  $\Lambda_{12} = (2r\omega/c)(1-r^2\omega^2/c^2)^{-2}$ , mentre  $\Lambda_{21} = 0$ . È quindi esclusa la possibilità di eliminare il carattere non tempo-ortogonale della trasformazione  $(1_1, 1_2, 1_4)$  mediante una ulteriore trasformazione del tipo previsto nel precedente paragrafo.

Se invece permettiamo la più generale trasformazione (di CdC 1)  $x'^i = f^i(x^k)$  ( $i, k = 1, \dots, 4$ ), allora possiamo sempre annullare, in un dominio non infinitesimo, tutti e quattro i potenziali gravitazionali. Esaminiamo infatti quali equazioni corrispondono alle richieste  $g'_{i4} = 0$  e  $g'_{44} = -1$ . Dalle  $g'^{ir}g'_{4r} = \delta^i_4$  abbiamo  $-g'^{i4} = \delta^i_4 = 0$ , e  $g'^{44}g'_{44} = \delta^4_4 = 1$ ; cioè,  $(^\circ) \partial f^i/\partial x^r \partial f^4/\partial x^m g'^{rm} = 0$  e rispettivamente  $(*) \partial f^4/\partial x^r \partial f^4/\partial x^m g'^{rm} = -1$ . Ora la  $(*)$  è una EDP (non lineare) di tipo ben noto nell'unica incognita  $f^4$ , e la sua teoria insegna che essa ha infinite soluzioni (basta assegnare  $f^4 = \text{cost}$  su una 3-superficie arbitraria e proseguire in direzione normale intorno ad essa). Similmente, per data  $f^4$  ognuna delle tre  $(^\circ)$  è una EDP lineare che fornisce una soluzione con metodi standard. In conclusione, le quattro richieste  $g'_{i4} = 0$  e  $g'_{44} = -1$  sono soddisfacibili in infiniti modi, e la tesi è provata. §

**§3.** L'equazione della dinamica relativistica speciale (2.2.2, 7) può scriversi  $m^0 w/\gamma = f$ , dove  $w \equiv d^2_\tau x$  è l'accelerazione propria del punto considerato,  $m^0$  è la sua massa di quiete,  $f$  è la forza agente su di esso, e  $\gamma = [1-(d_t x)^2/c^2]^{-1/2}$ . L'accelerazione  $w/\gamma = d_t(\gamma d_t x)$  si dice **accelerazione propria di quiete**, o in breve “accelerazione di quiete”, del punto. Essa è cioè l'accelerazione propria misurata in un riferimento di quiete istantanea ( $\gamma = 1$ ), da cui il nome. Un punto che sotto le condizioni iniziali  $x = 0, d_t x = 0$  per  $t = 0$  si muove con accelerazione di quiete costante, quindi sotto la spinta di una forza costante, si dice in **moto iperbolico incipiente** (o in breve “moto iperbolico”), e questo per la ragione che segue. Se tutto si svolge lungo l'asse  $(x)$  (quindi con  $x$  denotiamo ora la coordinata del punto lungo quell'asse), detta  $a$  l'accelerazione di quiete (parallela a  $(x)$ ) costante,

<sup>4</sup> Si può aggiungere che sotto trasformazioni del tipo (18) sussiste la formula di trasformazione  $(\Lambda'_{ik} - \Lambda'_{ki}) = \varphi_4^4(\Lambda_{ik} - \Lambda_{ki}) \equiv \partial f/\partial x^4(\Lambda_{ik} - \Lambda_{ki})$ . Questa assicura l'equivalenza della simmetria delle  $\Lambda$  e delle  $\Lambda'$  se  $\partial f/\partial x^4 \neq 0$ .

<sup>5</sup> Esse sono dette condizioni di **Weyssenhoff**, vedi J. v. Weyssenhoff, Bull. Acad. Pol., Ser. A, 252 (1937).

l'equazione dinamica  $d_t(\gamma dx) = f/m_0 = a$  si integra elementarmente una prima volta, e sotto la condizione iniziale  $d_t x = 0$  per  $t = 0$  dà  $\gamma dx = at$ . Richiedendo poi che  $x = 0$  per  $t = 0$ , da questa si trae la soluzione

$$(21) \quad x = x(t) = (c^2/a)[(1+a^2t^2/c^2)^{1/2} - 1],$$

che è un'iperbole del piano  $(x,t)$  (il discriminante della (21) è  $> 0$ , valendo  $c^2$ ). Finché  $|at| \ll c$ , la (21) può scriversi, trascurando le potenze di  $at/c$  superiori alla seconda,

$$(22) \quad x = x(t) \approx (c^2/a)[1+a^2t^2/(2c^2) - 1] \equiv at^2/2,$$

che è la legge di moto incipiente classica sotto accelerazione costante  $a$ .

Un'applicazione di notevole interesse della teoria relativistica generale è lo studio della trasformazione da un riferimento (rigido)  $\mathfrak{s} \equiv (x,ct)$  la cui origine spaziale  $x = 0$  sia in moto iperbolico incipiente rispetto al riferimento standard di laboratorio  $\mathfrak{S} \equiv (X,cT)$  lungo il comune asse  $(x) = (X)$ , e sotto la condizione  $t = 0 \Leftrightarrow T = 0$ ; vale a dire, la determinazione delle funzioni  $X = X(x,t)$  e  $T = T(x,t)$  che competono alla situazione descritta. Più in generale, ci si può chiedere quali debbano essere le sopraddette funzioni  $X(x,t)$ ,  $T(x,t)$  quando l'origine spaziale di  $\mathfrak{s}$  (sempre coincidente con quella di  $\mathfrak{S}$  al tempo  $t = T = 0$ ) sia in moto incipiente di CdC 2 e per il resto arbitrariamente dato per  $t$  in un intervallo aperto  $I$  intorno a  $t = 0$  rispetto a  $\mathfrak{S}$  (lungo l'asse  $(x) \equiv (X)$ ). (Volendo, alle coordinate spaziali  $X$  e  $x$  si può sottintendere che siano aggiunte le coordinate spaziali ortogonali  $Y \equiv y$  e  $Z \equiv z$ .)

Una soluzione di questo problema è stata proposta da Møller nel 1943, ed è espressa dalle seguenti (v. App. 9.D)

$$(23_1) \quad X = X(x,t) = c \int_{t'=0}^t \text{Sh}\theta(t') dt' + x \text{Ch}\theta(t),$$

$$(23_2) \quad T = T(x,t) = \int_{t'=0}^t \text{Ch}\theta(t') dt' + (x/c) \text{Sh}\theta(t),$$

dove  $\theta = \theta(t)$  è una funzione di CdC 1 che va a zero con  $t$  e determinata in termini del moto (dato) dell'origine spaziale di  $\mathfrak{s}$  rispetto a  $\mathfrak{S}$ . È immediato verificare che, secondo le (23),  $X(x,0) = x$  e  $T(x,0) = 0$ ; cioè, che i due riferimenti coincidono al tempo  $t = 0$ .

Se si passa al caso particolare dell'origine di  $\mathfrak{s}$  in moto iperbolico incipiente con accelerazione di quiete costante  $a$ , allora (si dimostra, v. ancora App. 9.D)  $\theta(t) = at/c$  (una funzione che appunto va a zero con  $t$ ), e quindi le (23) diventano:

$$(24_1) \quad X(x,t) = (c^2/a)[(1+ax/c^2)\text{Ch}(at/c) - 1],$$

$$(24_2) \quad T(x,t) = (c/a) \text{Sh}(at/c)(1+ax/c^2).$$

Se in queste (24) si fa  $a \rightarrow 0$  si trova la trasformazione identica  $X = x$ ,  $T = t$ , come deve essere. Farà comodo, nel seguito, scrivere  $v = v(t)$  per  $at/c$ . Differenziando le (24) si ottiene

$$(25_1) \quad dX = c(1+ax/c^2)Shv \, dt + Chv \, dx,$$

$$(25_2) \quad dT = (1+ax/c^2)Chv \, dt + c^{-1}Shv \, dx;$$

e sostituendo queste espressioni nella  $ds^2 = dX^2 - c^2dT^2$ , con qualche passaggio si trova la relazione

$$(26) \quad ds^2 = dx^2 - c^2dt^2(1+ax/c^2)^2.$$

Abbiamo così determinato le componenti covarianti del tensore fondamentale nel riferimento  $(x,t)$ , che sono

$$(27) \quad g_{11} = 1, \quad g_{14} = g_{41} = 0, \quad g_{44} = -(1+ax/c^2)^2. \quad ^6$$

La metrica (27) è stazionaria (il tensore  $g_{ik}$  non dipende da  $t$ ) ed anche tempo-ortogonale ( $g_{14} = 0$ ); quindi è statica alla luce della definizione di questa proprietà. La trasformazione  $(x,t) \mapsto (X,T)$  (24) si dice talvolta **trasformazione speciale di Møller**, e può considerarsi la più semplice trasformazione tra le due coordinate (spaziale e temporale) al di là di quella speciale di Lorentz. Una volta che vi sia specificata la funzione  $\theta(t)$ , la (23) si dice invece **trasformazione di Møller**. La trasformazione di Møller (speciale o non) è “omogenea” nel senso che  $X(0,0) = 0$ ,  $T(0,0) = 0$ .

Per  $x = 0$ , e al più basso ordine significativo nel limite  $v \rightarrow 0$ , le (24) danno

$$(28_1) \quad X(0,t) \approx at^2/2,$$

$$(28_2) \quad T(0,t) \approx t.$$

Si ritrova così la legge di moto classica, secondo  $\mathfrak{S}$ , per l'origine del sistema  $\mathfrak{s}$ :  $X \approx aT^2/2$ ,  $dX/dT \approx aT$ . Facendo poi  $dx = 0$  nelle (25) (punto fisso in  $\mathfrak{s}$ ), si ha

$$(29) \quad (dX/dT)_{x=\text{cost}} = cThv,$$

che è la velocità di quel punto, sempre secondo  $\mathfrak{S}$ , in funzione di  $t$ , come si vede indipendente dal valore di  $x$ . Per piccolo  $v$ , la (29) dà poi  $(dX/dT)_{x=\text{cost}} \approx at \approx aT$ .

Il tempo  $t$  può essere eliminato tra le (24); così facendo, si trova

$$(30) \quad X = X(x,T) = (c^2/a)\{[(1+ax/c^2)^2 + (aT/c)^2]^{1/2} - 1\}.$$

La correttezza della (30) si conferma sostituendovi  $T$  mediante la (24<sub>2</sub>) ed eliminando un inaccettabile doppio segno. Il risultato è appunto la (24<sub>1</sub>). Inoltre, derivando parzialmente rispetto a  $T$  la (30) si ha:

$$(31) \quad \partial X/\partial T = aT[(1+ax/c^2)^2 + (aT/c)^2]^{-1/2}.$$

Questa deve coincidere con la (29), per cui

$$(32) \quad (aT/c)[(1+ax/c^2)^2 + (aT/c)^2]^{-1/2} = Thv,$$

o equivalentemente,

---

<sup>6</sup> Come si verifica con un facile calcolo a partire dalla (3.4.2, 3), la varietà di metrica (27) ha curvatura gaussiana costante negativa pari a  $-a^2/c^4$ .



$$(32') \quad 1 + (\mathbf{a}T/c)^2/(1+\mathbf{a}x/c^2)^2 = Ch^2v.$$

Le (32, 32') sono relazioni tra  $x$ ,  $t$  e  $T$  che si possono anche ottenere eliminando la  $X$  tra le (24).

Quali sono le geodetiche della varietà di metrica (27)? Ovvero, come si muove secondo  $\mathfrak{s}$  un punto materiale di piccola massa? Allo scopo, utilizziamo le

$$(33) \quad d_\tau(g_{ik}d_\tau x^k) = (1/2)\partial g_{jh}/\partial x^i d_\tau x^j d_\tau x^h$$

(cfr. (9.2.2, §7, (T2)) con il tempo proprio  $\tau$  come variabile indipendente lungo la geodetica, quindi sotto il vincolo

$$(34) \quad g_{ik}d_\tau x^i d_\tau x^k = -c^2.$$

Facendo  $i = 1$  nelle (33) (con  $x^1 = x$ ), abbiamo  $d_\tau^2 x$  per il 1° membro e  $-(1+\mathbf{a}x/c^2)\mathbf{a}(d_\tau t)^2$  per il 2°; quindi l'equazione geodetica ricercata è

$$(35) \quad d_\tau^2 x + (1+\mathbf{a}x/c^2)\mathbf{a}(d_\tau t)^2 = 0.$$

Di questa equazione in  $x$  ci interessa la versione in cui al tempo proprio  $\tau$  si sostituisca il tempo-coordinata  $t$ . Per ottenerla, facciamo  $i = 4$  nelle (33) (con  $x^4 = ct$ ). Poiché nessun coefficiente della metrica dipende da  $t$ , il 2° membro della (33) è zero, e restiamo con  $d_\tau(g_{44}d_\tau t) = 0$ ; quindi  $g_{44}d_\tau t$  è una costante lungo la geodetica. Questa costante, diciamola  $-A$ , si determina mediante la condizione iniziale. È conveniente introdurre il valore  $x_0$  di quell' $x$  per cui  $v =: d_\tau x = 0$ : allora  $(g_{44})_0(d_\tau t)_0 = -A$ , ove  $(\ )_0$  sta per  $(\ )_{x=x_0}$ . Ma  $(g_{44})_0 = -(1+\mathbf{a}x_0/c^2)^2$ , e  $(d_\tau t)_0 = |1+\mathbf{a}x_0/c^2|^{-1}$ ,<sup>7</sup> per cui  $A = |1+\mathbf{a}x_0/c^2|$ . In definitiva abbiamo  $d_\tau t = (1+\mathbf{a}x/c^2)^2/A$ , e con questa possiamo determinare  $(^\circ) d_\tau^2 \tau = (2/A)(1+\mathbf{a}x/c^2)\mathbf{a}d_\tau x/c^2$ .<sup>8</sup> D'altra parte sussiste l'ovvia identità  $d_\tau^2 - d_\tau^2 \tau d_\tau = (d_\tau \tau)^2 d_\tau^2$ , che applicata a  $x$  dà  $d_\tau^2 x - d_\tau^2 \tau d_\tau x = (d_\tau \tau)^2 d_\tau^2 x$ . Sostituendo quest'ultima nella (35) e utilizzando la  $(^\circ)$ , troviamo finalmente la desiderata equazione della geodetica con variabile indipendente  $t$ :

$$(36) \quad d_t^2 x - 2(\mathbf{a}/c^2)(1+\mathbf{a}x/c^2)^{-1}(d_t x)^2 + \mathbf{a}(1+\mathbf{a}x/c^2) = 0.$$

Si noti che in questa (36) l'incognita  $x$  compare insieme alle sue  $t$ -derivate prima e seconda (quest'ultima linearmente, come deve); e come ci si poteva attendere, la costante  $A$  è sparita.

Contando il tempo  $t$  dall'istante in cui è  $d_t x = 0$  (e quindi  $x = x_0$ ), si verifica senza difficoltà che la soluzione della (36) è

$$(37) \quad x = x(t) = (c^2/\mathbf{a})[(1+\mathbf{a}x_0/c^2)\text{Sech}v - 1],$$

per cui  $x(0) = x_0$ , come richiesto. La  $t$ -derivata della (37) è

$$(38) \quad v \equiv d_t x = d_t x(t) = -c(1+\mathbf{a}x_0/c^2)\text{Th}v\text{Sech}v,$$

<sup>7</sup> Dalla (34) si ha la relazione equivalente  $(d_\tau t)^2[-g_{44} - v^2/c^2] = 1$ , quindi  $(d_\tau t)_0^2 = (1+\mathbf{a}x_0/c^2)^{-2}$ . Ma  $d_\tau t$  deve essere comunque positiva, per cui  $(d_\tau t)_0 = |1+\mathbf{a}x_0/c^2|^{-1}$ .

<sup>8</sup> Si noti che a 2° membro della  $(^\circ)$  soltanto il fattore  $\mathbf{a}/c$  ha dimensioni, e precisamente dell'inverso di un tempo, come è per il 1° membro.

che si annulla per  $t = 0$ , come richiesto. Per  $|t| \rightarrow \infty$ ,  $|\text{Th}v| \rightarrow 1$  e  $\text{Sech}v \rightarrow 0$ , ovvero  $d_t x(t \rightarrow \pm\infty) = 0$ . Ciò avviene in  $x = x_\infty = -c^2/a$ ; questo valore di  $x$  è la coordinata della cosiddetta **parete singolare**, alla quale il punto materiale in moto geodetico si avvicina per  $|t| \rightarrow \infty$ , indipendentemente dalla sua posizione iniziale. La celerità  $|v|$  del punto, che per ipotesi parte da fermo, ha un (unico) valore stazionario (un massimo), per il  $t$  per cui  $d_t(\text{Th}v\text{Sech}v) = 0$ , cioè per  $\text{Sech}v(-\text{Th}^2v + \text{Sech}^2v) = 0$ . Poiché a quel  $t$  è certamente  $\text{Sech}v \neq 0$ , in esso deve essere  $\text{Th}^2v = \text{Sech}^2v = 1/2$ , cioè  $\text{Th}v = \pm 1/\sqrt{2}$  e  $\text{Sech}v = 1/\sqrt{2}$ . Il  $|t|$  corrispondente vale  $(c/|a|)\text{Sech}^{-1}(1/\sqrt{2}) = (c/|a|) \cdot 0,88137 \dots$ ,<sup>9</sup> e quindi  $|v|_{\max}$  è data, per la (38), da

$$(39) \quad |v|_{\max}/c = |1 + \mathbf{a}x_0/c^2| |\text{Th}v| \text{Sech}v = |1 + \mathbf{a}x_0/c^2|/2.$$

Se in particolare il punto parte dall'origine ( $x_0 = 0$ ), la sua massima celerità raggiunge il valore  $c/2$ . Si noti che se  $x_0 > c^2/a$  il valore di  $|v|$  può ben superare  $c$ ; tuttavia non  $c$ , ma  $\mathcal{V} = c|1 + \mathbf{a}x/c^2|$  (cfr. la (9.3.4, 19)) è la celerità della luce in  $x$  quando la metrica è data dalle (27). Segue che il rapporto tra la massima celerità del punto e la celerità della luce  $\mathcal{V}^*$  ove esso raggiunge la massima celerità, diciamo in  $x^*$ , è  $|v|_{\max}/\mathcal{V}^* = (1/2)|1 + \mathbf{a}x_0/c^2|/|1 + \mathbf{a}x^*/c^2|$ . Ma secondo la (37) è  $1 + \mathbf{a}x^*/c^2 = (1 + \mathbf{a}x_0/c^2)/\sqrt{2}$ , per cui  $|v|_{\max}/\mathcal{V}^* = 1/\sqrt{2} < 1$ .

È anche possibile calcolare il tempo proprio  $\tau$  dell'orologio che si muove del moto (37) rispetto a  $\mathfrak{s}$  (quindi che parte da fermo da  $x_0$  al tempo  $t = 0$ ), in particolare imponendo che sia  $\tau = 0$  per  $t = 0$ . Basta utilizzare la relazione  $d\tau = dt[(1 + \mathbf{a}x/c^2)^2 - v^2/c^2]^{1/2}$ , ed integrarla da 0 a  $t$  dopo aver sostituito  $x$  mediante la (37) e  $v$  mediante la (38). Effettuati i facili calcoli, si trova

$$(40) \quad \tau = \tau(t) = |1 + \mathbf{a}x_0/c^2| \int_{t=0}^t \text{Sech}^2(\mathbf{a}t'/c) dt' = |1 + \mathbf{a}x_0/c^2| (c/a) \text{Th}v(t),$$

dove  $v = v(t)$  è la solita abbreviazione per  $\mathbf{a}t/c$ . La (40) conferma che  $\tau(t)$  e  $t$  hanno lo stesso segno. Se in particolare la posizione iniziale dell'orologio è nell'origine di  $\mathfrak{s}$ , allora  $x_0 = 0$ , e

$$(40_0) \quad \tau_0 = \tau_0(t) = (c/a) \text{Th}v(t). \quad \S$$

#### 9.4.2) IL PARADOSSO DEI GEMELLI E LA SUA "SOLUZIONE" SECONDO MØLLER

Siamo ora in grado di affrontare la discussione della più celebre "avventura metaforica" della teoria relativistica, il cosiddetto **paradosso dei gemelli** (o fuor di metafora, **degli orologi identici**). Il quale "paradosso", come vedremo tra breve, non è per nulla un fatto paradossale; ma si traduce piuttosto, se inteso come verità osservata, in una convalida della teoria stessa. Vale a dire, l'effetto fisico in questione è paradossale soltanto se giudicato in un'ottica classica. Anche se ci

<sup>9</sup>  $\text{Sech}^{-1}$  è l'arcosecante iperbolica.

sarebbero alternative meno laboriose, per la sua chiarezza seguiremo qui, sostanzialmente, la versione del problema proposta da Møller. Inoltre sarà alla fine chiaro che il paradosso consegue in essenza dalla teoria relativistica speciale, e non da quella generale.

Essendo dato il riferimento inerziale standard  $\mathfrak{S} \equiv (X, Y, Z, cT)$  (coordinata römeriana reale), si considerino due sistemi materiali identici  $c, C$  (i gemelli della metafora, o i due orologi normali identici), entrambi fermi nell'origine spaziale  $A \equiv (X=Y=Z=0)$  di  $\mathfrak{S}$ . Si supponga che al tempo  $T = 0$  il gemello  $c$  parta da  $A$  per un viaggio lungo l'asse ( $X$ ) (diciamo, in direzione positiva) raggiungendo così un punto  $D > 0$  (qui e nel seguito le lettere  $A, B, C, D$ , oltre che certi punti dell'asse ( $X$ ), denotano anche la loro coordinata  $X$ ). In  $D$ ,  $c$  inverte la rotta ripercorrendo all'indietro il viaggio di andata fino a tornare a fermarsi in  $A$ .<sup>10</sup> Nel frattempo, il gemello  $C$  è rimasto fermo in  $A$ . Orbene, al loro rincontrarsi in  $A$  i gemelli constatano che  $c$  è *meno* invecchiato di  $C$ , come se il viaggiare avesse rallentato il suo tempo interno!

Questo *fatto* è ormai confermato da numerosi esperimenti – ovviamente sostituendo i gemelli con orologi normali identici – ed è spiegato dalla teoria relativistica come illustreremo nel seguito della sezione. Innanzitutto è necessario descrivere con precisione il viaggio di  $c$  (come visto da  $\mathfrak{S}$ ) per farci intorno dei calcoli; ma come si intuirà senza grandi difficoltà, un modello del viaggio vale l'altro, almeno entro limiti, per il prodursi dell'effetto. Un possibile modello è il seguente. Supponiamo che  $c$ , partendo da fermo al tempo  $T = 0$ , subisca una prima fase di moto iperbolico incipiente con accelerazione (di quiete) costante  $\mathbf{a} > 0$ , al termine della quale raggiunge una “velocità di crociera”  $0 < V^\circ < c$  in un punto  $B > A$ .  $c$  prosegue poi con questa velocità  $V^\circ$  fino ad un punto  $C > B$ , e in  $C$  inizia a decelerare con accelerazione  $-\mathbf{a}$ , fino a fermarsi in  $D > C$ . Il viaggio continua “all'indietro” con le stesse modalità: da  $D$  a  $C$  con accelerazione  $-\mathbf{a}$ , da  $C$  a  $B$  con velocità  $-V^\circ$ , e da  $B$  a  $A$  con accelerazione  $\mathbf{a}$ , fino a fermarsi in  $A$ . In questo modello si immagina dunque che  $c$ , considerato come punto materiale, subisca l'azione di una forza costante (parallela all'asse ( $X$ )): positiva nei tratti  $A \rightarrow B$  e ritorno (cioè  $B \rightarrow A$ ), uguale ed opposta alla precedente nei tratti  $C \rightarrow D$  e ritorno, e nulla nei tratti  $B \rightarrow C$  e ritorno. Si noti anche che la velocità di  $c$ , diversamente dalla sua accelerazione, non è mai discontinua, essendo per ipotesi nulla in  $D$  (oltre che in  $A$ ).

Sia  $\mathfrak{s} \equiv (x, y=Y, z=Z, ct)$  il riferimento la cui origine “o” ( $x = 0$ ) coincide permanentemente con la posizione di  $c$ . Visto da  $\mathfrak{S}$ , il moto di  $c$  tra  $A$  e  $B$  è descritto dalla (9.4.1, 30) con  $x \equiv 0$ , quindi dalla

<sup>10</sup> Una possibile “specularità” tra il viaggio di andata e quello di ritorno di  $c$  non è strettamente necessaria al prodursi dell'effetto paradossale. Essa implicherebbe che la velocità di  $c$  cambi bruscamente segno in  $D$  se non è ivi nulla.

$$(1) \quad X = X(T) = (c^2/a)[(1+a^2T^2/c^2)^{1/2} - 1].$$

Rileviamo che la (1) deriva dalle (9.4.1, 24), cioè dalla trasformazione speciale di Møller. La velocità  $V = dX/dT$  di  $c$  al tempo  $T$ , sempre tra A e B, è data da

$$(2) \quad V = V(T) = aT(1+a^2T^2/c^2)^{-1/2},$$

ovvero

$$(2bis) \quad aT/c = (V/c)(1-V^2/c^2)^{-1/2}.$$

Pertanto  $c$  raggiunge la sua velocità di crociera  $V^\circ$ , in B, al tempo

$$(3) \quad T' = (V^\circ/a)(1-V^{\circ 2}/c^2)^{-1/2},$$

in cui compare il fattore di Lorentz  $(1-V^{\circ 2}/c^2)^{-1/2}$ .

$c$  prosegue poi con questa velocità fino C, impiegando il tempo

$$(4) \quad T'' = |BC|/V^\circ,$$

e decelera fino a fermarsi in D impiegando un altro tempo  $T'$ . Per la specularità del moto tra l'andata e il ritorno, l'intero viaggio di  $c$  dura quindi, secondo  $\mathfrak{S}$ , il tempo

$$(5) \quad \Delta T = 2(2T' + T'')$$

con  $T'$  e  $T''$  dati dalla (3) e rispettivamente dalla (4).

Calcoliamo ora la durata del viaggio misurata con il tempo proprio di  $c$ . Quando  $c$  raggiunge B, questo tempo proprio è per definizione:

$$(6) \quad \tau' = \int_{T=0}^{T'} [1-V^2(T)/c^2]^{1/2} dT = \int_{T=0}^{T'} [1+a^2T^2/c^2]^{-1/2} dT = (c/a) \text{Sh}^{-1}(aT'/c),$$

dove  $\text{Sh}^{-1}$  è l'arcoseno iperbolico. Il tempo proprio di  $c$  che trascorre nel suo trasferimento da B a C,  $\tau''$ , è semplicemente  $T''$  moltiplicato per  $(1-V^{\circ 2}/c^2)^{1/2}$ , ossia

$$(7) \quad \tau'' = T''(1-V^{\circ 2}/c^2)^{1/2};$$

e infine il tempo proprio della fase di decelerazione da C a D è ancora  $\tau'$ . In definitiva la durata del viaggio di  $c$ , misurata con il suo tempo proprio, è

$$(8) \quad \Delta \tau = 2(2\tau' + \tau''),$$

con  $\tau'$  e  $\tau''$  dati dalla (6) e rispettivamente dalla (7).

Non sarebbe difficile provare, sostituendo  $T'$ ,  $T''$  nella (5) mediante le (3, 4), e  $\tau'$ ,  $\tau''$  nella (8) mediante le (6, 7), che  $\Delta \tau < \Delta T$ :  $c$  è dunque *meno* invecchiato di  $C$ . Benché ormai determinata, l'espressione precisa del rapporto  $\Delta \tau/\Delta T < 1$  in funzione dei tre parametri indipendenti del viaggio (diciamo, di  $a$ ,  $V^\circ$  e  $|BC|$ ) non è di grande interesse ai fini presenti. D'altra parte  $\Delta \tau/\Delta T$  può essere facilmente valutato nel caso limite in cui  $a \rightarrow \infty$  a  $V^\circ$  invariato; vale a dire, supponendo che  $c$  sia soggetto a forze di accelerazione/decelerazione infinite (senza subire danni). Si trova allora immediatamente che  $T' \rightarrow 0$  (come  $a^{-1}$ ) e  $\tau' \rightarrow 0$  (ancora come  $a^{-1}$ ), quindi che  $\Delta \tau/\Delta T \rightarrow \tau''/T'' = (1-V^{\circ 2}/c^2)^{1/2}$ . In questo caso limite il rapporto  $\Delta \tau/\Delta T$  è quindi uguale a  $(1-V^{\circ 2}/c^2)^{1/2} < 1$ .

Quella che abbiamo così illustrato è la parte “concettualmente facile” della discussione del (falso) paradosso dei gemelli; facile in quanto il fenomeno è visto nel riferimento *inerziale*  $\mathfrak{S}$ . Si dovrebbe anche aggiungere che il risultato  $\Delta\tau/\Delta T < 1$  può apparire inaspettato soltanto ad un esame superficiale: infatti le storie di  $c$  e di  $C$  sono obiettivamente diverse ( $c$  subisce accelerazioni, mentre  $C$  non ne subisce), venendo così a mancare quella simmetria di principio, tra  $c$  e  $C$ , che ci potrebbe dare per giustificata l’attesa di un rapporto  $\Delta\tau/\Delta T = 1$ . Come tuttavia vedremo, e potrebbe intuirsi sin d’ora, seguendo questa idea ci metteremmo su una falsa strada.

La stessa conclusione vale se il fenomeno è visto nel riferimento *non inerziale*  $\mathfrak{s}$ , nella cui origine  $c$  è fermo. In questo caso chi compie il viaggio (di andata all’indietro e di ritorno in avanti se  $\mathbf{a} > 0$ , come continueremo a supporre) è  $C$  agli occhi di  $\mathfrak{s}$ , e la discussione diventa un po’ più impegnativa. Ma possiamo ben prevedere che il risultato non cambi, perché  $\Delta\tau$  e  $\Delta T$  sono i tempi propri di  $c$  e rispettivamente di  $C$  trascorsi tra la loro separazione e la loro riunione, e questi tempi propri non possono essere influenzati dalla scelta del riferimento.

Procediamo dunque all’esame del viaggio di  $C$  visto da  $\mathfrak{s}$ , nella cui origine permane  $c$ . Ricordando che  $\mathfrak{s}$  ha la metrica (9.4.1, 27), tempo-ortogonale e con  $g_{44} = -(1+\mathbf{a}\mathbf{x}/c^2)^2$ , il moto di  $C$  rispetto a  $\mathfrak{s}$ , nella prima fase di accelerazione, è retto dalla (9.4.1, 37) con  $x_0 = 0$ , quindi dalla

$$(9) \quad x = x(t) = (c^2/\mathbf{a})(\text{Sech}v(t) - 1)$$

con  $v(t) =: \mathbf{a}t/c$ , perché  $C$  parte da fermo rispetto a  $\mathfrak{s}$  e la sua posizione iniziale in  $\mathfrak{s}$  è  $x = x_0 = 0$ . Ovviamente il tempo  $t$  coincide ora con il tempo proprio di  $c$  che nella prima analisi avevamo denotato con  $\tau$ .<sup>11</sup> La (9) vale dunque tra  $t = 0$  e  $t = \tau'$ , e fornisce come deve valori negativi di  $x(t)$ . Al tempo  $t = t' = \tau'$ ,  $C$  ha velocità  $-V^\circ$ . Successivamente, procede con questa velocità costante per un tempo  $t'' = \tau''$ , e infine decelera per un tempo  $t''' = t'$ , fino a fermarsi. Valendo la (6) e la (3), abbiamo:

$$(10) \quad \mathbf{a}T'/c = \text{Sh}v' = (V^\circ/c)(1-V^{\circ 2}/c^2)^{-1/2}$$

(con  $v' = v(t') \equiv \mathbf{a}t'/c$ ), e per la seconda di queste (10),

$$(11) \quad V^{\circ 2}/c^2 = \text{Sh}^2v'/(1+\text{Sh}^2v') \equiv \text{Th}^2v'.$$

Calcoliamo adesso i tempi propri di  $C$  come li giudica  $\mathfrak{s}$ , diciamo  $\mathcal{T}'$  per  $t = t'$ ,  $\mathcal{T}''$  per  $t = t''$  e  $\mathcal{T}'''$  per  $t = t'''$ . Qui interviene un elemento di diversità rispetto all’analisi precedente, fatta nel riferimento *inerziale*  $\mathfrak{S}$ : infatti stiamo ora lavorando in  $\mathfrak{s}$ , che è un riferimento *non inerziale*. La diversità si manifesta in questo, che mentre nella prima analisi era  $\tau' = \tau'''$  (oltre che  $T' = T'''$ ),

<sup>11</sup> A proposito di questa identità  $t \equiv \tau$ , osserviamo che se si calcola  $|AB|$  mediante la (9.4.1, 30) (cioè mediante la (1)) si trova  $\mathbf{a}|AB|/c^2 + 1 = (1+\mathbf{a}^2T^2/c^2)^{1/2}$ ; e se la si calcola mediante la (9.4.1, 24<sub>1</sub>),  $\mathbf{a}|AB|/c^2 + 1 = \text{Ch}(\mathbf{a}t'/c)$ . Dal confronto risulta  $\text{Ch}(\mathbf{a}t'/c) = (1+\mathbf{a}^2T^2/c^2)^{1/2}$ , ovvero  $\text{Sh}(\mathbf{a}t'/c) = \mathbf{a}T'/c$ . Questa non è altro che la (6) se si tiene conto che  $t' = \tau'$ .

l'analogia uguaglianza  $\mathcal{T} = \mathcal{T}''$  viene ora a mancare, sebbene sia  $t' = t''$ . Precisamente, verificheremo che  $\mathcal{T} < \mathcal{T}''$ . Da una parte,  $\mathcal{T}$  si determina mediante la (9.4.1, 40<sub>o</sub>), che dà

$$(12) \quad \mathcal{T} = (c/a)Thv'.$$

Dall'altra,  $\mathcal{T}''$  si determina mediante la (9.4.1, 40) in cui si ponga  $-a$  in luogo di  $a$ ,  $x_0 = -|AD|$ , e  $t'' = t'$  in luogo di  $t$ . Infatti, quando  $\mathfrak{s}$  e  $\mathfrak{S}$  tornano ad essere fermi uno rispetto all'altro, la distanza tra le loro origini è la stessa sia giudicata da  $\mathfrak{s}$  che da  $\mathfrak{S}$ , nel secondo caso questa distanza essendo  $L = |AD| > 0$ . La  $X$  di  $c$  è allora  $+L$ , mentre la  $x$  di  $C$  è  $-L$ . Il fattore  $|1+ax_0/c^2|$  nella (9.4.1, 40) diventa così  $|1+aL/c^2| \equiv 1+aL/c^2$  (perché il contenuto delle  $|$  è positivo se lo è  $a$ ), mentre il fattore  $(c/a)Thv$  diventa  $(c/a)Thv'$ . Il risultato è quindi:

$$(13) \quad \mathcal{T}'' = (c/a)(1+aL/c^2)Thv' = \mathcal{T} + (L/c)Thv' = \mathcal{T} + LV^0/c^2,$$

l'ultima uguaglianza conseguendo dalla (11). Quindi  $\mathcal{T}'' > \mathcal{T}$ , come sopra affermato.

Quanto a  $\mathcal{T}'$ , esso è semplicemente

$$(14) \quad \mathcal{T}' = t''(1-V^0/c^2)^{1/2} = T''(1-V^0/c^2).$$

Passando al tempo proprio totale  $\Delta\mathcal{T}$ , esso è

$$(15) \quad \Delta\mathcal{T} = 2(\mathcal{T} + \mathcal{T}' + \mathcal{T}''),$$

dove i tempi propri  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}'$ ,  $\mathcal{T}''$  sono rispettivamente espressi dalle (12, 14, 13). Con ogni evidenza, deve essere

$$(16) \quad \Delta\mathcal{T} = \Delta T$$

(cioè  $\mathcal{T} + \mathcal{T}' + \mathcal{T}'' = 2T' + T''$ ); e questo può effettivamente provarsi, seppure con un po' di lavoro. Si può comunque vederlo senza fatica nel solito limite per  $a \rightarrow \infty$  con  $V^0$  invariato. Allora  $\mathcal{T} \rightarrow 0$ ,  $L \rightarrow T''V^0$ , quindi  $\mathcal{T}'' \rightarrow T''V^0/c^2$  e  $\Delta\mathcal{T} \rightarrow 2[T''(1-V^0/c^2) + T''V^0/c^2] \equiv 2T''$ . Ma nel limite  $T' \rightarrow 0$  è  $\Delta T = 2T''$ , e la tesi (16) è provata. Infine il rapporto tra gli invecchiamenti di  $c$  e di  $C$ , che nella precedente analisi era  $\Delta t/\Delta T$  (pari a  $\tau''/T'' = (1-V^0/c^2)^{1/2}$  per  $a \rightarrow \infty$ , secondo la (7)), adesso si scrive  $\Delta t/\Delta\mathcal{T} \equiv \Delta\tau/\Delta\mathcal{T}$ . Questo coincide con  $\Delta\tau/\Delta T$  in forza della (16). Quindi la valutazione del rapporto tra gli invecchiamenti di  $c$  e di  $C$  è la stessa nei due riferimenti, come naturale e prevedibile.

Dobbiamo ancora aggiungere un'importante considerazione, ad esempio riferita all'analisi del fenomeno visto da  $\mathfrak{S}$ . Le tre fasi di accelerazione/decelerazione di  $c$  – contando la fase di accelerazione negativa  $-a$  lungo  $C \rightarrow D \rightarrow C$  come *una sola* fase – possono in realtà ridursi a quest'ultima immaginando che  $c$  provenga da  $X = -\infty$  con la velocità di crociera  $V^0 < c$  e vi ritorni con velocità  $-V^0$  dopo l'inversione di rotta in  $D$ . L'importante è che i due orologi *segnino lo stesso tempo proprio*, diciamo  $t = T = 0$ , quando  $c$  sorpassa  $C$  per la prima volta provenendo da  $-\infty$ .

L'effetto paradossale  $\Delta\tau/\Delta T < 1$  ( $c$  risulta invecchiato *meno* di  $C$  quando lo sorpassa per la seconda volta tornando verso  $-\infty$ ) permane, seppur in misura diversa rispetto al caso precedente, quando si aveva  $\Delta\tau/\Delta T = (2\tau' + \tau'')/(2T' + T'')$ ; precisamente, adesso è  $\Delta\tau/\Delta T = (\tau' + \tau'')/(T' + T'')$ . Ma ovviamente, questa diversità sparisce nel solito limite  $a \rightarrow \infty$ , quando  $\tau'$  e  $T'$  tendono simultaneamente a zero, e si resta con  $\Delta\tau/\Delta T = \tau''/T''$  (sotto la (7)) in entrambi i casi.<sup>12</sup>

A parte la giustificazione della trasformazione speciale di Møller (per la quale rinviamo all'App. 9.D, e in particolare al lavoro originale di questo autore ivi citato), ciò conclude la presente discussione del paradosso dei gemelli.

#### 9.4.3) SUL TENSORE ENERGETICO TOTALE

Le applicazioni fin qui illustrate della teoria relativistica generale non hanno riguardato le equazioni del campo (9.3.5, 3'), nelle quali figura il tensore energetico totale  $T_{(2)}$ . Di questo tensore abbiamo detto poco, se non che deve essere simmetrico e solenoidale, limitandoci ad identificarlo nel caso (di grande interesse concettuale, ma di non altrettanto grande interesse pratico) della materia disgregata.

La teoria gravitazionale fondata sulle (9.3.5, 3'), qui riprodotte per comodità del lettore come

$$(1) \quad E_{(2)} = -KT_{(2)},$$

si può assimilare a «una costruzione con un lato fatto di bel marmo (1° membro della (1)) e l'altro di legno scadente (2° membro della (1)). La rappresentazione fenomenologica della materia (affidata a  $T_{(2)}$ , ndr) è in realtà soltanto un grossolano surrogato che dovrebbe rendere giustizia a tutte le sue proprietà.»<sup>13</sup> Questo giudizio einsteiniano, in parte già citato, esprime come meglio non si potrebbe la situazione in cui ci si viene a trovare volendo applicare la (1) a casi di interesse fisico concreto: salvo rare eccezioni, una soddisfacente modellazione del tensore energetico  $T_{(2)}$  come funzione delle coordinate  $x$  e dei campi  $g_{(2)}$  e  $\partial g_{(2)}$  solleva problemi induttivi molto seri. (Al solito, con  $\partial g_{(2)}$  [ $\partial^2 g_{(2)}$ ] rappresentiamo l'insieme delle derivate prime [seconde] standard di  $g_{(2)}$ .) Ricordiamo che nel caso del continuo materiale disgregato (9.1.3, 1) l'espressione di  $T_{(2)}$  si induce

<sup>12</sup> Il precedente stratagemma concettuale ( $c$  proveniente da  $X = -\infty$  con velocità  $V^0 < c$ , e sincronizzato con  $C$  al momento del sorpasso) ha permesso di sottrarre  $\tau'$  da  $2\tau'$  e  $T'$  da  $2T'$  nella valutazione  $(2\tau' + \tau'')/(2T' + T'')$  di  $\Delta\tau/\Delta T$ , riducendolo a  $(\tau' + \tau'')/(T' + T'')$ . Non sarebbe difficile immaginare uno stratagemma completamente analogo al precedente, e di esso altrettanto legittimo, che permetterebbe di annullare del tutto i tempi di accelerazione negativa lungo  $C \rightarrow D \rightarrow C$ , riducendo  $\Delta\tau/\Delta T$  a  $\tau''/T'' = (1 - V^0/c^2)^{1/2}$ , esattamente come nel caso  $a \rightarrow \infty$ . Questo mostra la natura relativistica-speciale dell'effetto "paradosso dei gemelli". In linea di principio, nulla impedisce infatti di regolare sulla stessa ora orologi identici in moto relativo l'uno rispetto all'altro, che si trovino istantaneamente nello stesso punto della retta  $X$ , o anche dello spazio.

<sup>13</sup> A. Einstein, in "Physics and Reality", Journ. Franklin Institute, **221**, 3, 1936.

facilmente in termini delle sole  $\mu^0 \equiv$  densità di massa di quiete del mezzo, e  $u^i = c dx^i / \sqrt{-ds^2} \equiv$  sua velocità 4-dim (o quadrivelocità) propria.

In forza della (1), qualunque modello di  $T_{(2)}$  deve assicurarne la simmetria e la solenoidalità. Mentre la prima condizione è banalmente soddisfatta dalla (9.1.3, 1), come abbiamo visto la seconda implica il carattere autoparallelo (cioè geodetico) del moto del mezzo in oggetto, cfr. le (9.1.3, 3). Quindi, se la densità di materia è abbastanza piccola da non perturbare significativamente la metrica rispetto al suo valore pseudoeuclideo, la generica “particella” (piccola regione dotata di massa) del continuo disgregato deve muoversi di moto rettilineo uniforme; come ci si aspetta data l’assunta inesistenza di una sua interazione con le altre particelle.

Quest’ultimo fatto, di per sé ovvio, si conferma in modo diretto quando alla effettiva varietà pseudoriemanniana si sostituisca lo spazio-tempo pseudoeuclideo-lorentziano tangente. Per vederlo, riscriviamo l’espressione (9.1.3, 1) del 2-tensore energetico per il continuo materiale disgregato, tensore le cui componenti controvarianti denoteremo ancora con  $T^{ik}$ :

$$(2) \quad T^{ik} = \mu^0 u^i u^k,$$

dove  $u$  è la velocità propria 4-dim euleriana del mezzo, con coordinata römeriana reale. Nello spazio-tempo tangente,  $u^i = \gamma(u^1, c)^{14}$  con  $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} = \gamma(u)$ , e  $u =$  velocità 3-dim (euleriana) del mezzo; quindi  $T^{ik} = \mu u^i u^k$ ,  $T^{44} = T^{4i} = \mu u^i c$ ,  $T^{44} = \mu c^2$ , con  $\mu = \mu^0 \gamma^2$ . Imponendo la solenoidalità (con la metrica lorentziana  $\text{diag}(1, 1, 1, -1)$ ) di  $T^{ik}$  sotto il vincolo  $u_i u^i = -c^2$ , risulta  $\partial_k(\mu^0 u^k) = 0$  (cfr. le (9.1.3, 3), nelle quali in luogo delle  $\partial_k$  ci sono le più generali derivate covarianti  ${}_{/k}$ ). Quindi le cinque equazioni  $\partial_k T^{ik} = 0$  e  $u_i u^i = -c^2$  equivalgono all’insieme delle quattro

$$(3_1) \quad \mu^0 u^k \partial_k u^i = 0$$

e della

$$(3_2) \quad \partial_k(\mu^0 u^k) = 0.$$

L’operatore lineare  $u^k \partial_k$  è uguale a  $u^k \partial_k + (u^4/c) \partial_t = \gamma(u^k \partial_k + \partial_t) \equiv \gamma d_t$ , ove  $d_t$  è la  $t$ -derivata convettiva; e quindi, essendo  $\gamma > 0$ , le (3<sub>1</sub>) equivalgono alle  $\mu^0 d_t u^i = 0$ . Se  $\mu^0 > 0$ , queste equivalgono a loro volta a “ $d_t(\gamma u^i) = 0 \wedge d_t \gamma = 0$ ”, da cui seguono le

$$(4) \quad d_t u^i = 0$$

$\forall i = 1, 2, 3$ . In conclusione, “ $\partial_k(\mu^0 u^i u^k) = 0 \wedge u_k u^k = \text{cost} (= -c^2)$ ”  $\Rightarrow$  “ $\mu^0 d_t u^i = 0$ ”: vale cioè, per le particelle del continuo materiale considerato, la legge d’inerzia, o del moto rettilineo uniforme, qed. Il limite classico si ottiene facendo  $\gamma \equiv 1$  nei precedenti ragionamenti; e nulla cambia nella conclusione (4), in accordo con il fatto che la legge d’inerzia vale altrettanto in meccanica classica come in meccanica relativistica speciale.

---

<sup>14</sup> Useremo sempre la nostra convenzione standard di usare il carattere greco per indici variabili su 1, 2, 3, e quello latino per indici variabili su 1, ..., 4.



La (3<sub>2</sub>) si può scrivere come

$$(5) \quad 0 = \partial_{\kappa}(\mu^0 \mathbf{u}^{\kappa}) + \partial_t(\mu^0 \mathbf{u}^4)/c = \nabla \cdot (\gamma \mu^0 \mathbf{u}) + \partial_t(\gamma \mu^0) \equiv C_u(\gamma \mu^0),$$

dove  $C_u(\ ) \equiv \nabla \cdot (\mathbf{u}(\ )) + \partial_t(\ )$  è l'operatore lineare di conservazione associato a  $\mathbf{u}$  (vedi App. 2.H). Questo significa che la massa relativistica contenuta in un piccolo volume  $\delta V$  in moto con il continuo,  $\gamma \mu^0 \delta V$ , è conservata; cioè, essendo  $d_t \delta V = \delta V \nabla \cdot \mathbf{u}$ , che  $d_t(\gamma \mu^0 \delta V) = \delta V [d_t(\gamma \mu^0) + \gamma \mu^0 \nabla \cdot \mathbf{u}] = \delta V C_u(\gamma \mu^0) = 0$ . Nel limite classico  $c \rightarrow \infty$ , la (5) si riduce all'equazione di conservazione per la massa,  $C_u(\mu^0) = 0$ . In conclusione, le (3) governano il moto relativistico speciale del continuo materiale disgregato nello spazio-tempo RS; e come è naturale, quanto da esse apprendiamo era già contenuto nelle più generali (9.1.3, 3), bastando allo scopo porre in esse  $g_{(2)} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ .

Aggiungiamo un paio di commenti, sempre in ambito RS. Se  $\mathbf{u}$  è la quadrivelocità propria di un *generico* continuo, allora  $\mathbf{a}^i =: d_{\tau} u^i$ , ricordiamo, ne è la quadriaccelerazione propria.<sup>15</sup> Differenziando rispetto a  $\tau$  la  $u_i u^i = \text{cost} (= -c^2)$ , abbiamo  $u_i a^i = 0$ : come già osservato,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{a}$  sono pseudortogonali.<sup>16</sup> Banalmente, il vettore 4-dim  $\mathbf{u}$  è intrinsecamente time-like. Mostriamo ora che il vettore 4-dim  $\mathbf{a}$  è space-like ( $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^i > 0$ ) se il suo componente spaziale 3-dim, diciamo  $\mathbf{w} \equiv d_{\tau} \mathbf{u}$  secondo la notazione usata in 2.D §6, è  $\neq 0$ . Infatti, poiché  $0 = u^i a_i = \gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \gamma c a^4$ , (con  $\mathbf{a}^4 = -a_4$ ) ( $^{\circ}$ )  $a^4 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} / c$ , risulta  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^i = w^2 - (a^4)^2 = w^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})^2 / c^2 \geq w^2 (1 - u^2 / c^2) = w^2 \gamma^{-2} > 0$ . Si noti anche che, in base alla ( $^{\circ}$ ), “ $\mathbf{w} = 0$ ” implica “ $\mathbf{a}_i \mathbf{a}^i = 0$ ”; quindi il precedente asserto può ripetersi dicendo che “ $\mathbf{a}$  è space-like [isotropo] se  $\mathbf{w} \neq 0$  [ $\mathbf{w} = 0$ ]; e quindi, che  $\mathbf{a}$  è comunque space-like aut isotropo. La seconda evenienza si ha appunto nel continuo materiale disgregato.

Ma cosa possiamo dire – sempre sulla base della (1) – del moto di un mezzo materiale continuo di natura meno elementare di quella del continuo disgregato, ad esempio di quel tipo di **continuo materiale** che nel linguaggio classico diciamo “solido elastico”? Il problema presenta due aspetti complementari, entrambi decisamente ardui (soprattutto il secondo). Il primo problema ( $\alpha$ ) – essenzialmente di natura induttiva – consiste nel fissare un modello ragionevole, per quel continuo, del tensore energetico  $T_{(2)}$  come funzione di  $(\mathbf{x}, g_{(2)}, \partial g_{(2)})$ . Il secondo problema ( $\beta$ ) – che è invece puramente analitico – consiste nel risolvere la (1) per il dato  $T_{(2)} = T_{(2)}(\mathbf{x}, g_{(2)}, \partial g_{(2)})$ ; cioè nel determinare una soluzione (che potrà essere unica sotto le opportune condizioni accessorie) di un SDP del 2° ordine generalmente non-lineare, ma comunque quasi-lineare, di dieci equazioni nelle dieci incognite  $g_{(2)}$ . Se poi una tale soluzione  $g_{(2)} = g_{(2)}(\mathbf{x})$  esiste, allora la (1) stessa implica che  $T_{(2)}$

<sup>15</sup> Espressa in termini di t-derivate, la  $\mathbf{a}$  è uguale a  $\gamma(d_t(\gamma \mathbf{u}), cd_t \gamma)$ . Il simbolo arial  $\mathbf{a}$  è stato usato in precedenza per la 3-accelerazione di quiete (costante) di un moto iperbolico, ma qualsiasi rischio di confusione con la presente 4-accelerazione dovrebbe essere escluso.

<sup>16</sup> Naturalmente questa conclusione continua a valere se, nella definizione della quadriaccelerazione  $\mathbf{a}$ , in luogo di  $\tau$  vi è un qualsiasi parametro funzione di CdC 1 e strettamente crescente (o decrescente) di  $\tau$ , ad esempio  $t$  (la scelta di  $\tau$  è comoda perché semplifica alcune formule).

sia solenoidale ( $\equiv$  soddisfi alle quattro equazioni di conservazione  $T^{ik}_{/k} = 0$ ) quando  $g_{(2)}$  e  $\partial g_{(2)}$  vi siano sostituite come funzioni di  $x$ .

La situazione suggerisce di usare l'approccio di tipo asintotico, al problema ( $\beta$ ), cui abbiamo accennato alla fine della S.sez. 9.3.2. Vale a dire, in condizioni di sufficiente regolarità potremo rappresentare  $g_{(2)} \equiv g$  (per alleggerire la simbolica aboliremo per un momento il pedice  $(2)$  ovunque ci vorrebbe),  $\partial g$  e  $\partial^2 g$  come serie asintotiche in un parametro di piccolezza  $\varepsilon$ , cioè

$$(6) \quad g = g^{(0)} + \varepsilon g^{(1)} + \varepsilon^2 g^{(2)} + \dots,$$

dove  $g^{(0)}$  è equivalente (cfr. S.sez. 2.3.1) alla forma canonica  $\text{diag}(1,1,1,-1)$  e quindi ad essa riducibile; e

$$(6') \quad \partial g = \varepsilon \partial g^{(1)} + \dots,$$

$$(6'') \quad \partial^2 g = \varepsilon \partial^2 g^{(1)} + \dots$$

Inoltre  $T(x,g,\partial g)$  deve essere assunto di ordine  $\varepsilon$ . Potremo quindi scrivere la (1) come  $E(g,\partial g,\partial^2 g) = -\varepsilon KT(x,g,\partial g)$ , in cui le  $g$ ,  $\partial g$  e  $\partial^2 g$  si intendono espresse dalle (6, 6', 6''). Collegando gli ordini, e adottando una notazione simbolica di evidente significato, all'ordine  $(^0)$  otteniamo

$$(7^0) \quad E(g^{(0)},0,0) \equiv E|_0 = 0,$$

che è una identità; <sup>17</sup> e all'ordine  $(^{s \geq 1})$ ,

$$(7^{s \geq 1}) \quad E^{(s)} = -KT^{(s-1)}.$$

In particolare per  $s = 1$  abbiamo  $E^{(1)} = -KT^{(0)}$ . Se volessimo praticare una linearizzazione completa del problema, secondo le usuali procedure a questo punto dovremmo porre  $E^{(1)} = \partial E / \partial g|_0 \cdot g^{(1)} + \partial E / \partial (\partial g)|_0 \cdot \partial g^{(1)} + \partial E / \partial (\partial^2 g)|_0 \cdot \partial^2 g^{(1)}$ , dove  $|_0$  significa che quanto è alla sua sinistra deve essere valutato per  $g = g^{(0)}$ , risolvere il problema (lineare)  $(7^1)$  nella incognita  $g^{(1)}$ , sostituire questo  $g^{(1)}$  in  $T^{(1)} = \partial T / \partial g|_0 \cdot g^{(1)} + \partial T / \partial (\partial g)|_0 \cdot \partial g^{(1)}$ , e procedere analogamente all'ordine due e successivi. Questo non ci interessa qui, e possiamo accontentarci della  $(7^1)$ , in cui  $T^{(0)}$  è determinata induttivamente come funzione della sola  $x$  (perché  $g^{(0)} = \text{diag}(1,1,1,-1)$  e  $\partial g^{(0)} \equiv 0$ .) Inoltre, poiché  $E$  deve essere solenoidale ad ogni ordine, anche  $E^{(1)}$ , e quindi  $T^{(0)}$ , devono esserlo. In conclusione, dobbiamo identificare un modello ragionevole, in approssimazione RS, del 2-tensore simmetrico  $T^{(0)} = T^{(0)}(x)$  soggetto alle quattro condizioni di solenoidalità  $T^{(0)ik}_{/k} = 0$ ; un problema di tipo ( $\alpha$ ).

Per la messa a punto di un tale modello RS di  $T_{(2)}$ , appare utile – e di fatto funziona nei casi di maggior interesse – pensare al continuo in questione come “sovrapposizione” di opportuni

---

<sup>17</sup> Evidentemente, una condizione sufficiente a che le  $(7^0)$  siano identicamente soddisfatte è che le componenti (covarianti o controvarianti) del tensore metrico  $g_{(2)}$  siano indefinitamente costanti. Una questione interessante è allora la seguente: esistono soluzioni  $g_{(2)}$ , regolari e non banali ( $\equiv$  non costanti) delle  $(7^0)$  o equivalentemente delle  $\rho_{(2)} = 0$ , per cui  $g_{ik} \rightarrow \delta_{ik}$  per  $x_k \rightarrow \infty$ ? Una risposta è nota da molto tempo (A. Einstein, “Über Gravitationswellen”, Berl. Bericht., 154 (1918)): soluzioni stazionarie di questo tipo *non* esistono.

“sotto-continui”, ciascuno dei quali associato ad uno specifico “2-tensore energetico” generalmente non simmetrico  $t_{(\ )}^{ik}$  (dove  $(\ )$  sta per un indice di sotto-continuo), avente (seconde) divergenze  $\partial_k t_{(\ )}^{ik}$  generalmente non nulle ed uguali alle componenti di una specifica densità di forza-potenza  $f_{(\ )}^i$ , ovvero

$$(8) \quad \partial_k t_{(\ )}^{ik} = f_{(\ )}^i.$$

Con questo intendiamo che il sistema reale ha per tensore energetico la *somma* dei tensori energetici parziali, alle condizioni che  $T^{ik} =: \sum t_{(\ )}^{ik}$ , somma dei tensori energetici parziali, sia simmetrico, e che  $\sum f_{(\ )}^i$ , somma delle densità di forza-potenza parziali, sia nulla, ovvero che  $T^{[ik]} = 0$  e rispettivamente che  $\partial_k T^{ik} = 0$ . Un sistema fisico continuo che soddisfa a queste condizioni si dice **chiuso**, e **aperto** in caso contrario.<sup>18</sup> Va da sé che se una tale decomposizione di  $T^{ik}$  esiste, in generale non è unica: altre simili decomposizioni altrettanto legittime e ben-funzionanti possono esistere in linea di principio. Per alleggerire la notazione, in quest’ultimo paragrafo aboliremo il sottoscritto  $(\ )$  (indice di sottosistema) dove sarebbe necessario. Se, nella rappresentazione del generico  $t^{ik}$  parziale facciamo uso dei simboli introdotti nella App. 2.H a proposito del 2-tensore energetico cinetico, anche in quel caso denotato  $t^{ik}$  – quindi optando adesso per coordinata römeriana immaginaria  $-$ , e cioè  $t^{1\kappa}$  per  $t^{1k}$ ,  $icg^1$  per  $t^{14}$ ,  $is^{\kappa}/c$  per  $t^{4\kappa}$  (qui  $t^{ik}$  *non* è in generale simmetrico) e  $-h$  per  $t^{44}$ , le equazioni del singolo sottosistema diventano

$$(9_1) \quad \partial_{\kappa} t^{1\kappa} + \partial_t g^1 = \varphi^1$$

per  $i = 1$ , e

$$(9_2) \quad \partial_{\kappa} s^{\kappa} + \partial_t h = \phi$$

per  $i = 4$ , dove  $(\varphi^1, i\phi/c) =: f^i$ . Per definizione, le  $t^{1\kappa}$ ,  $g^1$ ,  $s^1$ ,  $\varphi^1$ ,  $\phi$  sottostanno ai vincoli  $\sum (t^{1\kappa} - t^{\kappa 1}) = 0$ ,  $\sum (g^1 - s^1/c^2) = 0$ ,  $\sum \varphi^1 = 0$ ,  $\sum \phi = 0$ , dove le somme sono sempre sui sottosistemi. La  $t^{1\kappa}$  si dice ( $1\kappa$ -componente del) **flusso di momentum**<sup>19</sup> parziale,  $g^1$  ( $1$ -componente della) **densità di momentum** parziale,  $s^{\kappa}$  ( $\kappa$ -componente del) **flusso di energia** parziale, e  $h$  **densità di energia** parziale. Infine la  $\varphi^1$  si dice ( $1$ -componente della) **densità di forza** parziale e la  $\phi$  **densità di potenza** parziale. Si noti che quanto precede nel paragrafo concerne mere convenzioni di notazione e nomenclatura.

<sup>18</sup> Il caso di un continuo chiuso costituito da un *singolo* sotto-continuo è ammissibile ed istruttivo (l’esempio canonico è appunto quello del continuo materiale disgregato); ma proprio per la sua elementarietà è di scarso interesse pratico. Invece lo studio di continui chiusi costituiti da *due* sotto-continui è generalmente proficuo.

<sup>19</sup> Non è sembrato opportuno chiamare queste grandezze flussi di “quantità di moto” per sottosistemi diversi da quello cinetico. Il termine latino “momentum”, universalmente adottato nella letteratura di lingua inglese, è abbastanza “non-specifico”, e può considerarsi un accettabile compromesso.

#### 9.4.4) MEZZO MATERIALE CONTINUO CON SFORZI “DI CONTIGUITÀ”

Il caso di immediato e rilevante interesse è quello di un continuo materiale (beninteso 3-dim) il cui generico elemento di volume è soggetto soltanto alle forze che gli sono trasmesse, attraverso il suo contorno, dagli elementi direttamente *contigui*. Le forze di interazione superficiale sono ovviamente interne al sistema considerato come un tutto. Sia dunque  $\Omega$  una regione aperta del continuo in questione,  $x \in \Omega$ <sup>20</sup> la 3-coordinata di un suo punto,  $\Delta S$  un piccolo pezzo di superficie  $\subset \Omega$  e contenente  $x$ , e  $n$  il versore normale a  $\Delta S$  in  $x$  *orientato dalla banda che subisce la forza a quella che la induce* (questa convenzione, che per brevità noteremo ( $\uparrow$ ), viene spesso sostituita dalla sua opposta, che noteremo ( $\downarrow$ )); e infine sia  $\Delta f$  la forza in oggetto. Supponendo che esista finito, scriveremo  $\sigma$  per il limite del rapporto  $\Delta f/\Delta S$  quando  $\Delta S$  tende a collapsare intorno a  $x$  conservando la sua giacitura. Il vettore  $\sigma$  – una forza per unità di area che diciamo “sforzo di contiguità” o più comunemente **sforzo meccanico** (o in breve **sforzo**) – dipende pertanto da  $n$  e da  $x$  (oltre che dal tempo  $t$ , sottinteso), diciamo  $\sigma = \sigma(n, x)$ , dove  $n$  varia sull’angolo solido e  $x$  varia su  $\Omega$ , ed è assunto funzione regolare quanto basta di  $x$  (oltre che di  $t$ ). Continuando a sottintendere  $t$ , siano  $n_{1 \leq \kappa \leq 3}$  le componenti di  $n$  in un riferimento cartesiano ortogonale. Si dimostra allora elementarmente (“prima parte” del ben noto “teorema di Cauchy”<sup>21</sup>) che

$$(1) \quad \sigma(n, x) = n_{\kappa} \sigma^{\kappa}(x)$$

(somma su  $\kappa$  da 1 a 3), dove  $\sigma^{\kappa}(x) =: \sigma(\hat{\kappa}, x)$ , e  $\hat{\kappa}$  è il  $\kappa$ -mo versore coordinato. Quindi  $\sigma(n, x)$  è una combinazione lineare, con pesi  $n_{\kappa}$ , degli analoghi oggetti relativi ai versori coordinati. In particolare la (1) mostra che  $\sigma(-n, x) = -\sigma(n, x)$ , in accordo con il principio di azione e reazione (di fatto tale principio è usato anche nella dimostrazione del teorema di Cauchy). Se denotiamo con  $\sigma^{1\kappa}(x)$  la componente cartesiana (<sup>1</sup>) di  $\sigma^{\kappa}(x)$ <sup>22</sup>, la (1) può scriversi come  $\sigma^1(n, x) = n_{\kappa} \sigma^{1\kappa}(x)$ . Poiché sia le  $\sigma^1$  a 1° membro di questa che le  $n_{\kappa}$  a 2° membro sono componenti di vettori 3-dim, essa mostra che le  $\sigma^{1\kappa}$  sono componenti di un 2-tensore 3-dim (**2-tensore degli sforzi**), non necessariamente simmetrico.<sup>23</sup>

<sup>20</sup> Abbiamo qui usato il corsivo  $x$  perché  $x$  è già stato usato per  $x^{1 \leq i \leq 4}$ , 4-coordinata del punto-istante della varietà. Sebbene non sia necessario, le componenti di  $x$ , nonché degli altri vettori o tensori 3-dim considerati, si supporranno cartesiane ortogonali in questa sottosezione.

<sup>21</sup> Vedi un qualunque testo istituzionale di meccanica dei continui materiali.

<sup>22</sup> Questa scelta è convenzionale, ed alternativa a quella altrettanto legittima di denotare la componente (<sup>1</sup>) in questione come  $\sigma^{\kappa 1}$ . Se si adotta questa convenzione alternativa, occorrerà sostituire alle presenti  $\sigma^{1\kappa}$  le loro trasposte.

<sup>23</sup> Con la presente convenzione ( $\uparrow$ ) sull’orientamento di  $n$ , se  $n \cdot \sigma(n, x) = n_{\kappa} \sigma^{1\kappa}(x) > 0$ , la parte che subisce la forza è “tirata” o “tesa” verso il suo esterno. In ultima analisi, il termine “tensore” deriva da questo fatto. Con la convenzione opposta ( $\downarrow$ ), sotto la stessa condizione  $n \cdot \sigma(n, x) > 0$  la parte che subisce la forza è invece “premuta” verso il suo interno; quindi a rigore di termini si dovrebbe dire allora che le  $\sigma^{1\kappa}$  sono componenti di un “2-pessore”. È chiaro insomma che *invertendo la convenzione sull’orientamento di  $n$  si invertono i segni dei  $\sigma^{\kappa}$ , e quindi anche quelli delle componenti  $\sigma^{1\kappa}$ .*

Sia ora  $\omega$  un dominio di  $\Omega$  con contorno regolare  $\partial\omega$ . In condizioni di sufficiente regolarità, gli sforzi  $\sigma^k$  sono continui procedendo dall'interno di  $\omega$  verso  $\partial\omega$ , e la forza che agisce su  $\omega$  è  $\int_{\partial\omega} n_k(x^*) \sigma^k(x^*) d\partial\omega$ , dove  $x^* \in \partial\omega$  e  $n(x^*)$  è il versore normale a  $\partial\omega$  orientato verso l'esterno a causa della convenzione ( $\uparrow$ ). Grazie al teorema di Gauss-Ostrogradskij (GO) tale forza risulta uguale a  $\int_{\omega} \partial_k \sigma^k(x) d\omega$  (con  $x \in \omega$ ); quindi, per l'arbitrarietà di  $\omega$ , si conclude che il campo di forze di superficie  $\sigma(n,x)$  equivale a un campo di densità di forza (forza per unità di volume)  $\partial_k \sigma^k(x)$ . Oltre che nel limite classico, le precedenti considerazioni sono valide anche in ambito relativistico speciale.

In presenza della densità di forza  $\partial_k \sigma^k(x)$  (e per semplicità di essa soltanto), la legge di moto relativistica per il continuo considerato è la (2.H, 6<sub>1</sub>), cioè:

$$(2) \quad C_u g^1 \equiv \partial_k (g^1 u^k) + \partial_t g^1 = \partial_k \sigma^{1k},$$

o equivalentemente

$$(2') \quad \partial_k (g^1 u^k - \sigma^{1k}) + \partial_t g^1 = 0,$$

dove  $g^1 = \mu u^1$ ,  $\mu = \gamma^2 \mu^0$  e  $\mu^0 \equiv$  densità di massa di quiete (un invariante scalare). Nel limite classico la (2) diventa (vedi 2.H, 3):

$$(2^0) \quad \mu^0 d_t u^1 = \partial_k {}^0 \sigma^{1k},$$

dove  ${}^0 \sigma^{1k}$  sono sforzi "di quiete". (Il riferimento di quiete è qui al solito contrassegnato con un soprascritto ( $^0$ ), destro se graficamente accettabile, oppure sinistro.)

Si impone qui una non banale digressione. Come è facile prevedere, la trasformazione di Lorentz che uno sforzo meccanico subisce al passaggio dal riferimento inerziale  $\mathfrak{S}$  ad un riferimento  $\mathfrak{S}'$  in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathfrak{S}$  (la notazione (con apice, senza apice) è qui più conveniente della notazione (minuscolo, maiuscolo), cfr. Cap. 2) non può essere ricavata in modo semplice. Trattandosi del rapporto tra una forza infinitesima agente su un **elemento superficiale orientato** infinitesimo e l'area di questo elemento, occorrerà infatti tener conto sia di come si trasforma la forza che l'elemento. In quanto orientato, quest'ultimo può identificarsi con un vettore: infatti esso ha un modulo (la sua area infinitesima), una direzione (quella della retta ad esso normale) e un verso (quello che fa passare, per così dire, dalla sua faccia "fredda" alla sua faccia "calda"). Denotando con  $\mathbf{a}$  questo vettore infinitesimo,  $|\mathbf{a}|$  è l'area dell'elemento e  $\mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{n}$  è il versore normale che ne individua la direzione e il verso. In effetti l'elemento superficiale si comporta proprio come un vettore agli effetti delle operazioni definite su uno spazio lineare (moltiplicazione per un reale, somma per componenti) con prodotto interno.<sup>24</sup> Inoltre nello spazio

<sup>24</sup> La "proiezione" dell'elemento su un piano coordinato orientato è uguale alla componente di  $\mathbf{a}$  sul versore coordinato corrispondente, ad esso normale.

euclideo 3-dim un parallelogramma orientato di lati-vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , pensato come elemento di piano (non necessariamente infinitesimo), può identificarsi con il prodotto esterno  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ :  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  è l'area del parallelogramma, e  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})/|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$  è il suo versore normale orientato.

Ci si chiede allora come si trasforma  $\mathbf{a}$  a fronte di una trasformazione di Lorentz speciale del tipo (2.2.1, 2) o più in generale parallela del tipo (2.D, 1). Allo scopo, occorre valutare la distanza tra gli estremi di un generico segmento infinitesimo intesi *come eventi simultanei sia in  $\mathfrak{S}$  che in  $\mathfrak{S}'$* . Esso è discusso nell'App. 9.C; qui ci limitiamo a riportare il risultato di quell'analisi, che è riassunto nella formula

$$(3) \quad \mathbf{a}' = \alpha(\mathbf{a}_{\parallel} - \Upsilon \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}/c^2 + \mathbf{g}^{-1} \mathbf{a}_{\perp}),^{25}$$

dove  $\mathbf{u}$  è la velocità dell'elemento rispetto a  $\mathfrak{S}$ ,  $\Upsilon$  è la velocità di  $\mathfrak{S}'$  rispetto a  $\mathfrak{S}$  (diretta lungo l'asse  $x$  e per semplicità ad esso equiversa, per cui  $\Upsilon_x = |\Upsilon|$ ),  $\mathbf{g} = (1 - \Upsilon^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $\alpha = (1 - \Upsilon \cdot \mathbf{u}/c^2)^{-1}$ , e  $\parallel, \perp$  hanno i soliti significati. Si tenga presente che l'elemento superficiale è immerso nel continuo in oggetto, e quindi la sua velocità è una velocità euleriana, funzione di  $(x,t)$ . Più esplicitamente, si ha

$$(3'_1) \quad \mathbf{a}'_x = \alpha(\mathbf{a}_x - |\Upsilon| \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}/c^2),$$

$$(3'_2) \quad \mathbf{a}'_{y,z} = \alpha \mathbf{g}^{-1} \mathbf{a}_{y,z}.$$

Notiamo anche, ed è significativo, che la (3) è esattamente la stessa legge di trasformazione (2.D, 5) valida per una forza  $\mathbf{f}$  agente su un punto in moto con velocità  $\mathbf{u}$  in  $\mathfrak{S}$ , e che qui riportiamo in notazione analoga:

$$(3\text{bis}) \quad \mathbf{f}' = \alpha(\mathbf{f}_{\parallel} - \Upsilon \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}/c^2 + \mathbf{g}^{-1} \mathbf{f}_{\perp}).$$

D'altra parte in base alla nostra definizione la forza infinitesima che secondo  $\mathfrak{S}$  agisce su  $\mathbf{a}$  (chiamiamola ancora  $\mathbf{f}$ ) è  $\mathbf{f} = \sigma \cdot \mathbf{a}$  se con  $\sigma$  denotiamo l'intero tensore degli sforzi; ovvero, per componenti,  $f^i = \sigma^{ik} a_k$ . Similmente, secondo  $\mathfrak{S}'$  si ha  $\mathbf{f}' = \sigma' \cdot \mathbf{a}'$ . Ma secondo la (3)  $\mathbf{a}'$  è la Lorentz-trasformata di  $\mathbf{a}$ , diciamo  $\mathbf{a}' = L \circ \mathbf{a}$ , per cui, essendo anche  $\mathbf{f}' = L \circ \mathbf{f}$ ,

$$(4) \quad \mathbf{f}' = \sigma' \cdot \mathbf{a}' = \sigma' \cdot (L \circ \mathbf{a}) = L \circ (\sigma \cdot \mathbf{a}).$$

È evidente che le nove componenti di  $\sigma'$  non si possono ricavare univocamente mediante le tre equazioni  $\sigma' \cdot (L \circ \mathbf{a}) = L \circ (\sigma \cdot \mathbf{a})$ ; ma questo diventa possibile se (ragionevolmente) si richiede che i due membri delle tre equazioni in oggetto, entrambi lineari in  $\mathbf{a}$ , siano uguali *identicamente rispetto ad  $\mathbf{a}$* . Ognuna delle tre (4) genera così, mediante identificazione dei coefficienti di due polinomi lineari in  $\mathbf{a}$ , tre relazioni indipendenti, fornendo l'espressione di  $\sigma'$  come trasformata lineare di  $\sigma$ ; ovvero la **L-trasformazione del tensore degli sforzi**, che denoteremo a sua volta con  $\sigma' = L \circ \sigma$ . I

<sup>25</sup> Nel limite classico  $c \rightarrow \infty$  la (3) dà l'atteso risultato  $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$ .

calcoli sono un po' laboriosi ma non difficili, e sono riportati nell'App. 9.C. Le formule generali così ottenute, diciamole

$$(5) \quad \sigma' = L^* \circ \sigma,$$

sono piuttosto complicate e poco note (vedi le (9.C, 14) e (9.C, 15) per l'identificazione di  $L^*$ ). Come devono, esse si riducono comunque alle attese  $\sigma' = \sigma$  nel limite  $c \rightarrow \infty$ , mentre tutte le correzioni relativistiche sono  $O(c^{-2})$ . Inoltre, facendo  $u = Y$  nei 2<sup>i</sup> membri delle (5) (con il che  $\mathfrak{S}'$  diventa il riferimento di quiete istantanea  $\mathfrak{S}^0$  per il punto considerato) si trova semplicemente

$$(6) \quad {}^0\sigma^{xx} = \sigma^{xx}, \quad {}^0\sigma^{xy,xz} = \gamma^{-1}\sigma^{xy,xz}, \quad {}^0\sigma^{yx,zx} = \gamma\sigma^{yx,zx}, \quad {}^0\sigma^{yy,zz} = \sigma^{yy,zz}, \quad {}^0\sigma^{yz,zy} = \sigma^{yz,zy},$$

dove  $\gamma$  sta per  $g(Y=U)$ . Vale a dire, i 2<sup>i</sup> membri delle (6) sono la versione “per componenti” dei 2<sup>i</sup> membri delle (5) quando  $u = Y$ , o  $(L^* \circ \sigma)|_{u=Y}$ . D'altra parte una ispezione delle effettive (5) mostra che mentre  $(L^* \circ \sigma)|_{c \rightarrow \infty} = \sigma$ ,  $(L^* \circ \sigma)|_{u=Y} = {}^0\sigma \neq \sigma$  se  $u \neq 0$ ; cioè che  $\sigma^0$  ( $\equiv L^* \circ \sigma$  nel limite classico) e  $\sigma^0$  ( $\equiv L^* \circ \sigma$  nel riferimento di quiete) sono in generale diversi in presenza di moto. Il significato delle (6) è intuitivamente trasparente. Se i due indici tensoriali sono uguali, la forza e l'area variano nella stessa misura, e quindi il loro rapporto non cambia. Questo si ripete nel caso degli indici <sup>yz</sup> oppure <sup>zy</sup>, perché anche allora la forza e l'area variano nella stessa misura, essendo entrambe perpendicolari alla velocità. Infine quando gli indici sono <sup>xw</sup> oppure <sup>wx</sup>, con  $w = y$  aut  $w = z$ , la forza diminuisce e l'area no, o viceversa; e questo spiega il fattore  $\gamma^{-1} < 1$  nel primo caso e il fattore  $\gamma > 1$  nel secondo.

Chiusa la digressione, passiamo alla legge della densità di potenza (relativistica) nella situazione considerata. Una legge di tale tipo si potrebbe ottenere moltiplicando scalarmente per  $u$  la (2), analogamente a come dalla (2.H, 6<sub>1</sub>) si ottiene la (2.H, 6<sub>3</sub>). Tuttavia una conveniente *ipotesi addizionale* permette di scrivere un bilancio energetico più generale, e non completamente conseguente dalla (2). Precisamente, si supporrà che la densità di potenza associata agli sforzi  $\sigma^k$  uguagli un termine del tipo  $C_u H$ , dove  $C_u$  è l'operatore di conservazione (v. App. 2.H) e  $H = H(x,t)$  è una densità di energia *totale*, includente una “energia degli sforzi” (questa è la preannunciata ipotesi addizionale). Quanto alla densità di potenza da uguagliare a  $C_u H$ , essa si calcola in modo analogo a come più sopra si è calcolata la densità di forza  $\partial_k \sigma^{1k}$ : cioè, prima si valuta la potenza degli sforzi agenti su  $\omega$  attraverso  $\partial\omega$ , che è evidentemente uguale a  $\int_{\partial\omega} u_i(x^*) n_k(x^*) \sigma^{1k}(x^*) d\partial\omega$ , e poi si trasforma questo integrale mediante il teorema di GO ottenendo  $\int_{\omega} \partial_k (u_i \sigma^{1k})(x) d\omega$ . Per l'arbitrarietà di  $\omega$ , la densità di potenza in questione è dunque  $\partial_k (u_i \sigma^{1k})$ , e si conclude che la legge di potenza relativistica cercata, se  $H$  esiste come definita, è

$$(7) \quad C_u H = \partial_k (u_i \sigma^{1k}).$$

Quanto alla versione classica ( $\equiv c \rightarrow \infty$ , soprascritto  $(^0)$ ) della (7), conviene ripartire dalla (2.H, 4'3), cioè in questo caso dalla  $C_u k^0 = u_i \partial_\kappa ({}^0 \sigma^{ik})$  con  $k^0 = \mu^0 u^2/2$ . La (7) si può scrivere come  $C_u H = C_u(\mu c^2) + \sigma^{ik} \partial_\kappa u_i = u \cdot C_u(\mu u) + \sigma^{ik} \partial_\kappa u_i$  in forza della (2.H, 8). Poiché il limite classico di  $u \cdot C_u(\mu u)$  è  $C_u k^0$ , la versione classica della (7) è quindi

$$(7^0) \quad C_u H^0 = C_u k^0 + {}^0 \sigma^{ik} (\partial_\kappa u_i)^0.$$

Convenendo di rappresentare il generico tensore energetico  $T^{ik}$  totale (simmetrico-solenoidale) mediante la notazione già adottata per i tensori energetici parziali (minuscoli) (cfr. le (2.H, 10<sub>1</sub>), (2.H, 10<sub>2</sub>)), cioè  $T^{ik}$  per  $i, k = 1, 2, 3$ ,  $T^{i4} = icG^i$ ,  $T^{4i} = iS^i/c$  (sotto la  $G^i = S^i/c^2$  in forza della simmetria  $T^{i4} = T^{4i}$ ), e  $T^{44} = -H$ , le quattro **condizioni di solenoidalità**  $\partial_\kappa T^{ik} = 0$ , con coordin. römeriana immaginaria, sono le

$$(8_1) \quad \partial_\kappa T^{ik} + \partial_t G^i = 0,$$

$$(8_2) \quad \partial_\kappa S^k + \partial_t H = 0.$$

Le  $T^{ik}$ ,  $G^i$ ,  $S^k$  e  $H$  si nominano come le corrispondenti grandezze parziali, spesso con l'attributo "totale": ad esempio,  $S^k$  è la ( $\kappa$ -componente del) "flusso di energia totale", ecc.

A questo punto ci proponiamo di realizzare il seguente programma.

(i) definire sedici coefficienti  $T^{ik} = T^{ik}(x, t)$  che, in forza delle (2, 7) soddisfino le (8) (in realtà i coefficienti saranno soltanto tredici, perché richiederemo a priori le tre simmetrie  $T^{i4} = T^{4i}$ );

(ii) imporre ai  $T^{ik}$  le tre residue simmetrie  $T^{ik} = T^{ki}$ ;

(iii) richiedere che i dieci restanti coefficienti così definiti *siano effettivamente componenti di un 2-tensore 4-dim* (per costruzione simmetrico e solenoidale) sotto trasformazioni di Lorentz parallele;

(iv) sottrarre da tale 2-tensore totale  $T^{ik}$  il **2-tensore cinetico** (simmetrico),  $t_c$  come "cinetico"

$$(9) \quad t_c^{ik} =: \mu^0 u^i u^k,$$

ovvero anche, in funzione del vettore velocità 3-dim  $u$ , per coord. römer. immaginaria,<sup>26</sup>

$$(9') \quad t_c^{ik} = \mu^0 \gamma^2 u^i u^k = \mu u^i u^k, \quad t_c^{i4} \equiv t_c^{4i} = i\mu c u^i, \quad t_c^{44} = -\mu c^2;$$

(v) detto  $t_\sigma^{ik}$  ( $\sigma$  come "sforzi") il 2-tensore simmetrico 4-dim differenza  $T^{ik} - t_c^{ik}$ , ci si aspetta che esso sia lineare nel 2-tensore 3-dim  $\sigma^{ik}$ . Se questo è il caso (come sarà), il desiderato 2-tensore energetico totale  $T^{ik}$  per il continuo materiale in questione, ormai scomposto nella somma dei tensori energetici parziali  $t_c^{ik}$  e  $t_\sigma^{ik}$ , sarà completamente identificato; come si vedrà, in termini di  $\mu^0$ , di  ${}^0 \sigma^{ik}$  e di  $u_\kappa$ , da intendere come funzioni date di  $(x, t)$ .

Cominciamo con il punto (i). La (7) si scrive equivalentemente  $\partial_\kappa (Hu^k - u_i \sigma^{ik}) + \partial_t H = 0$ , e il confronto di questa con la (8<sub>2</sub>) suggerisce di identificare  $S^k$  con  $Hu^k - u_\lambda \sigma^{\lambda k}$ , e quindi

<sup>26</sup> A costo di ripeterci, ricordiamo che  $u^i = \gamma(u^i, c)$  se la coordin. römer. è reale,  $u^i = \gamma(u^i, ic)$  se è immaginaria.



$G^l = S^l/c^2$  con  $(Hu^l - u_\lambda \sigma^{\lambda l})/c^2$ . Così facendo, si soddisfa alle simmetrie  $T^{l4} = T^{4l}$ . Si vede inoltre che nel riferimento di quiete ( $u = 0$ )  ${}^o S^k = 0$  ( ${}^o T^{4k} = 0$ ), e  ${}^o G^l = 0$  ( ${}^o T^{l4} = 0$ ). D'altra parte il confronto della (2') con la (8<sub>1</sub>) similmente suggerisce di identificare  $T^{ik}$  con  $g^l u^k - \sigma^{ik}$ , e al contempo  $g^l$  con  $G^l$ , quindi  $T^{ik}$  con  $G^l u^k - \sigma^{ik}$ . In questo modo l'insieme delle sedici  $T^{ik}$  è espresso in termini delle  $\sigma^{ik}$ , di  $H$  e delle  $u^k$  secondo le seguenti

$$(10_1) \quad T^{ik} = G^l u^k - \sigma^{ik},$$

$$(10_2) \quad T^{l4}/c = iG^l = i(Hu^l - u_\lambda \sigma^{\lambda l})/c^2,$$

$$(10_3) \quad cT^{4l} = iS^l = i(Hu^l - u_\lambda \sigma^{\lambda l}) = cT^{l4},$$

$$(10_4) \quad T^{44} = -H.$$

Dobbiamo ora imporre la simmetria delle  $T^{ik}$  (punto (ii)) che, in forza delle (10<sub>1,2</sub>), implica che sia

$$(11) \quad \sigma^{[ik]} = -u_\lambda \sigma^{\lambda [i} u^{k]}/c^2$$

identicamente in  $\sigma$ ,  $u$ . Si vede dunque che secondo le precedenti posizioni le  $\sigma^{ik}$  non sono simmetriche in generale (ma la loro dissimetria è  $O(u^2/c^2)$ ); tuttavia le stesse (11) provano che, nel riferimento di quiete ( $u = 0$ ),  ${}^o \sigma^{[ik]} = 0$ , in accordo con la “seconda parte” del teorema di Cauchy. È utile riassumere qui sotto le relazioni valide in  $\mathfrak{S}^0$ :

$$(12_1) \quad {}^o T^{ik} = -{}^o \sigma^{ik},$$

$$(12_2) \quad {}^o T^{l4} = 0, \text{ ovvero } {}^o G^l = 0,$$

$$(12_3) \quad {}^o T^{4k} = 0, \text{ ovvero } {}^o S^k = 0,$$

$$(12_4) \quad {}^o T^{44} = -H^o,$$

cui si aggiungono le ovvie  ${}^o t_c^{ik} = 0$ ,  ${}^o t_c^{i4} = {}^o t_c^{4i} = 0$ ,  ${}^o t_c^{44} = -\mu^o c^2 \equiv -h_c^o$ .

Naturalmente le (10) sono per il momento presupposti con i quali abbiamo definito i coefficienti  $T^{ik}$  soddisfacenti alle (8) e completamente simmetrici sotto le  $G^l = S^l/c^2$  e le (11); ma non possiamo ancora affermare che essi coefficienti siano le componenti di un 2-tensore (simmetrico) 4-dim (punto (iii)). Possiamo tuttavia imporlo; e per procedere in tal senso, è necessario che

$$(13) \quad T^{ik} u_i u_k = \Sigma,$$

dove  $\Sigma$  è uno *scalare*, cioè una funzione di  $x$  indipendente dal riferimento (inerziale) usato. Per identificare  $\Sigma$ , usiamo il riferimento inerziale di quiete. Ricordando che ora  $u^i = \gamma(u^i, ic)$ , in quiete è  $u^l = 0$ , quindi anche  $u_i = 0$ . Procedendo al calcolo del 1° membro della (13) nel riferimento di quiete, abbiamo

$$(14) \quad {}^o T^{ik}(u_i u_k)^o = -{}^o T^{44} c^2 = H^o c^2 = \Sigma (\equiv \Sigma^o).$$

La (13) suggerisce che

$$(13\text{bis}) T^{ik} u_k = -H^0 u^i. \quad 27$$

Sviluppando il 1° membro della (13bis) per  $i = \iota$ , sostituendovi i valori delle  $T^{ik}$  con le (10) e risolvendo rispetto alle  $G^l$  troviamo:

$$(15_1) \quad c^2 G^\iota = \gamma^2 (H^0 u^\iota - \sigma^{\iota\kappa} u_\kappa),$$

dove  $\gamma = \gamma(u)$  è al solito  $g(Y=u)$ . Operando similmente per  $i = 4$ , abbiamo

$$(15_2) \quad H = H^0 + G^4 u_4;$$

ovvero, sostituendo in quest'ultima  $G^l$  dalla (15<sub>1</sub>)

$$(16) \quad H = \gamma^2 (H^0 - u_\iota \sigma^{\iota\kappa} u_\kappa / c^2).$$

Tenendo conto della (16), il confronto tra le (10<sub>2</sub>) e le (15<sub>1</sub>) implica che sia:

$$(17) \quad \gamma^{-2} u_\lambda \sigma^{\lambda\iota} = \sigma^{\iota\lambda} u_\lambda - u^\iota u_\lambda \sigma^{\lambda\mu} u_\mu / c^2.$$

È interessante esaminare le (11) e le (17) alla luce delle relazioni (6) che (ricordiamo) valgono per  $u_y$  e  $u_z$  entrambe nulle. Cominciando con le (11), vi facciamo dapprima  $\iota = x$  e  $\kappa = y$ . In forza delle (6) (e trascurando il fattore  $\frac{1}{2}$  presente in entrambi i membri), il 1° membro vale  $\sigma^{xy} - \sigma^{yx} = (\gamma - \gamma^{-1}) \sigma^{xy}$ , mentre il 2° membro vale  $c^{-2} u_x^2 \sigma^{xy} = (u_x/c)^2 \gamma \sigma^{xy} = (1 - \gamma^{-2}) \gamma \sigma^{xy} = (\gamma - \gamma^{-1}) \sigma^{xy}$ ; quindi la (11) è soddisfatta in tal caso, e del tutto analogamente, per  $\iota = x$ ,  $\kappa = z$ . Il terzo caso da considerare è  $\iota = y$ ,  $\kappa = z$ , che porta a  $\sigma^{yz} - \sigma^{zy} = \sigma^{yz} - \sigma^{zy} = 0$  per il 1° membro, e a  $-c^2$  volte  $u_\lambda (\sigma^{\lambda y} u^z - \sigma^{\lambda z} u^y) = 0$  per il 2° membro. Dunque la (11) è sempre soddisfatta alla luce delle (6). Passando alle (17), nelle stesse condizioni  $u_y = u_z = 0$ , per  $\iota = x$  il suo 1° membro vale  $\gamma^{-2} \sigma^{xx} u_x$ , e il suo 2° membro vale  $\sigma^{xx} u_x (1 - u_x^2/c^2)$ , uguale al precedente. Infine per  $\iota = y$  (o analogamente per  $\iota = z$ ) si ha  $\gamma^{-2} \sigma^{xy} u_x = \gamma^{-1} \sigma^{xy} u_x$  per il 1° membro, e  $\sigma^{yx} u_x = \gamma^{-1} \sigma^{yx} u_x$  per il 2° membro. Questi sono ancora uguali per la simmetria di  $\sigma$ , e dunque anche la (17) è sempre soddisfatta alla luce delle (6).

Se le (13bis) sono condizioni necessarie a che le  $T^{ik}$  si trasformino come componenti di un 2-tensore a fronte di trasformazioni di Lorentz parallele, non è ancora provato che siano anche sufficienti. Precisamente, se la generica L-trasformazione parallela è scritta come  $x'^i = \alpha^i_k x^k$  (sempre in notazione (con apice, senza apice)), e viene applicata al passaggio dal riferimento di quiete istantanea  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^0$  rispetto ad un punto spaziale che si muove con velocità  $u$  nel riferimento  $\mathfrak{S}'$ , quest'ultimo deve muoversi (di moto rettilineo uniforme) con velocità  $Y = -u$  rispetto a  $\mathfrak{S}^0$ . A parte la posizione verticale degli indici, i coefficienti  $\alpha^i_k$  non sono altro che gli elementi  $C_{ik}$  della matrice  $C$  della (2.D, 8) con  $\gamma = g(Y = -u) \equiv g(Y = u)$  in luogo di  $g$ , quindi

$$(18_1) \quad \alpha^l_\kappa = \delta^l_\kappa + (\gamma - 1) u^\iota u_\kappa / u^2 \quad (\equiv \alpha_\kappa^l),$$

$$(18_2) \quad \alpha^l_4 = -i\gamma u^l / c, \quad \alpha^4_\kappa = i\gamma u_\kappa / c,$$

<sup>27</sup> In realtà si constata che le stesse (13bis) valgono nel riferimento di quiete, e allora la (13) ne consegue strettamente.

$$(18_3) \quad \alpha^4_4 = \gamma.$$

Le condizioni che cerchiamo (necessarie e sufficienti) sono dunque:

$$(19_1) \quad T^{ik} = \alpha^i_j \alpha^k_h {}^oT^{jh} = -\alpha^i_\lambda \alpha^k_\mu {}^o\sigma^{\lambda\mu} - \alpha^i_4 \alpha^k_4 H^o,$$

$$(19_2) \quad icG^i = T^{i4} = T^{4i} = iS^i/c = \alpha^i_j \alpha^4_h {}^oT^{jh} = -\alpha^i_\lambda \alpha^4_\mu {}^o\sigma^{\lambda\mu} - \alpha^i_4 \alpha^4_4 H^o,$$

$$(19_3) \quad -H = T^{44} = \alpha^4_j \alpha^4_h {}^oT^{jh} = -\alpha^4_\lambda \alpha^4_\mu {}^o\sigma^{\lambda\mu} - \alpha^4_4 \alpha^4_4 H^o.$$

Facendo i necessari conteggi alla luce delle (18), si trova che la (19<sub>1</sub>) equivale a che

$$(20_1) \quad \sigma^{ik} = {}^o\sigma^{ik} + u_\lambda {}^o\sigma^{\lambda\kappa} u^i (\gamma - 1) / u^2 + u^\kappa {}^o\sigma^{i\lambda} u_\lambda (\gamma^{-1} - 1) / u^2 - u_\lambda {}^o\sigma^{\lambda\mu} u_\mu u^i u^\kappa \gamma^{-1} (\gamma - 1)^2 / u^4,$$

dove beninteso  $u^2 = u^i u_i$  e  $u^4 = (u^2)^2$ ;

che la (19<sub>2</sub>) equivale a che (in notazione vettoriale)

$$(20_2) \quad c^2 G = \gamma^2 [H^o - u \cdot {}^o\sigma \cdot u (1 - \gamma^{-1}) / u^2] u - \gamma^o \sigma \cdot u;$$

e infine che la (19<sub>3</sub>) equivale a che

$$(20_3) \quad H = \gamma^2 (H^o - u_\lambda {}^o\sigma^{\lambda\mu} u_\mu / c^2).$$

Confrontata con la (15<sub>1</sub>), la (20<sub>2</sub>) implica che

$$(20_2') \quad \sigma \cdot u = u \cdot {}^o\sigma \cdot u (1 - \gamma^{-1}) / u^2 + \gamma^{-1} {}^o\sigma \cdot u;$$

mentre la (20<sub>3</sub>), confrontata con la (16), implica che

$$(20_3') \quad u \cdot \sigma \cdot u = u \cdot {}^o\sigma \cdot u.$$

È utile trascrivere le (20<sub>1</sub>), (20<sub>2</sub>'), (20<sub>3</sub>') in forma intrinseca servendosi dei soliti pedici  $\parallel$  ( $\equiv$  parallelo a  $u$ ) e  $\perp$  ( $\equiv$  perpendicolare a  $u$ ). Per  $\iota$  e  $\kappa$  entrambi paralleli, la (20<sub>1</sub>) dà:

$$(21_1) \quad \sigma_{\parallel\parallel} = {}^o\sigma_{\parallel\parallel} [1 + (\gamma - 1) + (\gamma^{-1} - 1) - \gamma^{-1} (\gamma - 1)^2] \equiv {}^o\sigma_{\parallel\parallel}.$$

Per  $\iota$  parallelo e  $\kappa$  perpendicolare, la stessa (20<sub>1</sub>) dà

$$(21_2) \quad \sigma_{\parallel\perp} = {}^o\sigma_{\parallel\perp} [1 + (\gamma - 1)] \equiv \gamma {}^o\sigma_{\parallel\perp};$$

e ancora, per  $\iota$  perpendicolare e  $\kappa$  parallelo,

$$(21_3) \quad \sigma_{\perp\parallel} = {}^o\sigma_{\perp\parallel} [1 + (\gamma^{-1} - 1)] \equiv \gamma^{-1} {}^o\sigma_{\perp\parallel},$$

e infine, per  $\iota$  e  $\kappa$  entrambi perpendicolari,

$$(21_4) \quad \sigma_{\perp\perp} = {}^o\sigma_{\perp\perp}.$$

Quanto alla (20<sub>2</sub>') parallela, abbiamo  $\sigma_{\parallel\parallel} = {}^o\sigma_{\parallel\parallel} [(1 - \gamma^{-1}) + \gamma^{-1}] \equiv {}^o\sigma_{\parallel\parallel}$ , che riproduce la (21<sub>1</sub>); e similmente, la (20<sub>2</sub>') perpendicolare dà  $\sigma_{\perp\parallel} = \gamma^{-1} {}^o\sigma_{\perp\parallel}$ , che riproduce la (21<sub>3</sub>). Infine la (20<sub>3</sub>') dà semplicemente  $\sigma_{\parallel\parallel} = {}^o\sigma_{\parallel\parallel}$ , che ancora riproduce la (21<sub>1</sub>). Le quattro (21) si possono dunque riassumere nelle

$$(22) \quad \sigma \equiv \sigma_{\parallel\parallel} + \sigma_{\parallel\perp} + \sigma_{\perp\parallel} + \sigma_{\perp\perp} = {}^o\sigma_{\parallel\parallel} + \gamma {}^o\sigma_{\parallel\perp} + \gamma^{-1} {}^o\sigma_{\perp\parallel} + {}^o\sigma_{\perp\perp}.$$

Le seconde (22) non sono altro che le (6) in una diversa notazione. Facendo inoltre tutti i passaggi all'indietro, si vede che le (22) implicano la natura di componenti di un 2-tensore delle  $T^{ik}$ , e quindi che le (6) (o le seconde (22)), che sono ottenute nell'App. 9.C partendo da considerazioni *molto*

*diverse*, assicurano che le  $T^{ik}$  sono veramente componenti di un 2-tensore.<sup>28</sup> In definitiva possiamo affermare che, sotto le (11), (13bis) e (22), le (10) definiscono un 2-tensore simmetrico e solenoidale (secondo le (8)) in termini di  $\sigma^{ik}$ ,  $H$  e  $u_\lambda$ ; ovvero, in termini di  ${}^0\sigma^{ik}$  (per le (22)), di  $H^0$  (per la (16)) e ancora  $u_\lambda$ .

Ma cosa ci assicura che tale  $T^{ik}$  sia proprio il 2-tensore energetico totale corretto per il continuo che abbiamo considerato? Passando al punto (iv) del nostro programma, sottraiamo da  $T^{ik}$  il 2-tensore simmetrico cinetico (9),  $t_c^{ik} = \mu^0 u^i u^k$ , ottenendo il 2-tensore ancora simmetrico  $t_\sigma^{ik} =: T^{ik} - t_c^{ik}$ . In forza delle (10<sub>1</sub>) e delle

$$(23) \quad T^{i4} = T^{4i} = icG^i = iS^i/c = (H^0 u^i u^4 - u^4 \sigma^{i\lambda} u_\lambda)/c^2$$

(equivalenti alle (15<sub>1</sub>)), risulta allora

$$(24_1) \quad t_\sigma^{iK} = -(\sigma^{iK} + \sigma^{i\lambda} u_\lambda u^K/c^2),$$

di cui verificheremo tra un momento la simmetria in modo diretto. Similmente, dalle (24<sub>1</sub>), (23) e (16) otteniamo

$$(24_2) \quad t_\sigma^{i4} \equiv t_\sigma^{4i} = -u^4 \sigma^{i\lambda} u_\lambda/c^2,$$

$$(24_3) \quad t_\sigma^{44} = u_i \sigma^{iK} u_K/c^2.$$

La simmetria delle  $t_\sigma^{iK}$  si dimostra alla luce delle (11), la tesi riducendosi a provare che  $u_\lambda \sigma^{\lambda[i} u^{k]} = \sigma^{[i\lambda} u^{k]} u_\lambda$ , ciò che si verifica facilmente facendo uso delle (17).

Come si vede (punto (v)), secondo le (24) il 2-tensore differenza  $t_\sigma^{ik}$  è *lineare nel 2-tensore degli sforzi 3-dim*  $\sigma^{iK}$ . Questo è il punto d'arrivo della nostra procedura induttiva di identificazione. Vale a dire, il 2-tensore simmetrico 4-dim  $t_\sigma^{ik}$  è dato dalle (24), che si possono anche trascrivere come

$$(25_1) \quad t_\sigma^{iK} = -(\sigma^{iK} + \gamma^2 \sigma^{i\lambda} u_\lambda u^K/c^2),$$

$$(25_2) \quad t_\sigma^{i4} \equiv t_\sigma^{4i} = -i \gamma^2 \sigma^{i\lambda} u_\lambda/c$$

$$(25_3) \quad t_\sigma^{44} = \gamma^2 u_i \sigma^{iK} u_K/c^2,$$

nelle quali figura la 3-velocità  $u$  invece che la 4-velocità  $u$ , e al solito  $\gamma = \gamma(u)$ . Infine  $t_\sigma^{44}$  può scriversi come  $icg_\sigma^i = is_\sigma^i/c$ , e  $t_\sigma^{44}$  come  $-h_\sigma$ .

Nel riferimento di quiete ( $u = 0$ ), le (25) si semplificano nelle

$$(26_1) \quad {}^0t_\sigma^{iK} = -{}^0\sigma^{iK}$$

in accordo con le  ${}^0t_c^{iK} = 0$  e le  ${}^0T^{iK} = -{}^0\sigma^{iK}$ ;

$$(26_2) \quad {}^0t_\sigma^{i4} \equiv {}^0t_\sigma^{4i} = 0,$$

in accordo con le  ${}^0t_c^{i4} = 0$ ,  ${}^0t_c^{4K} = 0$  e le  ${}^0T^{i4} = 0$ ,  ${}^0T^{4K} = 0$ ;

<sup>28</sup> Nell'opinione e a conoscenza di chi scrive, è questo uno degli esempi più persuasivi della coerenza interna della relatività speciale.

e infine

$$(26_3) \quad {}^0t_{\sigma}{}^{44} = 0.$$

L'intero 2-tensore energetico di quiete  ${}^0T^{ik} = {}^0t_{\sigma}{}^{ik} + {}^0t_c{}^{ik}$ , cioè  ${}^0T^{ik} = -{}^0\sigma^{ik}$ ,  ${}^0T^{i4} = {}^0T^{4i} = 0$ ,  ${}^0T^{44} = -\mu^0 c^2$  è stato così espresso mediante le sette funzioni ( ${}^0\sigma^{ik}$ ,  $\mu^0$ ) di  $(x,t)$ ; e poiché sappiamo ormai trattarsi di un 2-tensore, le trasformazioni di Lorentz lo identificano nel generico sistema inerziale  $\mathfrak{S}$  quando sia in esso nota la velocità euleriana  $u = u(x,t)$ .

Le relazioni (20<sub>1</sub>) mostrano che se  ${}^0\sigma^{ik}$  è isotropo nel senso standard del 3-spazio, cioè del tipo  $-p^0 g^{ik}$ ,  $p^0$  essendo un invariante scalare funzione di  $(x,t)$ , allora anche il trasformato  $\sigma^{ik}$  lo è,  $\sigma^{ik} = -p g^{ik}$ , e con  $p = p^0$ . La definizione matematica di **fluido ideale** è proprio quella di “continuo materiale con tensore degli sforzi isotropo”. Il segno meno davanti a  $p \equiv p^0$  è dovuto alla nostra scelta della convenzione ( $\uparrow$ ) nella definizione del tensore degli sforzi, a sua volta dovuta al fatto che gli sforzi nei fluidi sono di norma di pressione o pressori ( $p$  sta proprio per “pressione”) e non di trazione o “tensori”.<sup>29</sup> Si verifica senza difficoltà che il tensore  $t_{\sigma}{}^{ik}$  dato dalla (24<sub>1</sub>) si riduce, nel caso di un fluido con pressione  $p^0$ , a

$$(27) \quad t_{\sigma}{}^{ik} = p^0(g^{ik} + u^i u^k / c^2), \quad u^i = \gamma(u^i, ic);$$

ovvero, in termini della 3-velocità  $u$ , a

$$(28_1) \quad t_{\sigma}{}^{ik} = p^0(g^{ik} + \gamma^2 u^i u^k / c^2),$$

$$(28_2) \quad t_{\sigma}{}^{i4} = t_{\sigma}{}^{4i} = i p^0 \gamma^2 u^i / c,$$

$$(28_3) \quad t_{\sigma}{}^{44} = -p^0(\gamma^2 - 1).$$

Il modello di tensore energetico totale espresso come

$$(29) \quad T^{ik} = \mu^0 u^i u^k + p^0(g^{ik} + u^i u^k / c^2) \equiv M^0 u^i u^k + p^0 g^{ik},$$

dove  $M^0$  è l'invariante scalare 4-dim  $\mu^0 + p^0/c^2$ , ha notevole importanza, sia perché la  $\partial_k T^{ik} = 0$  (nel presente sistema di riferimento  $(x,y,z,ict)$ ) governa la **meccanica relativistica dei fluidi**, sia perché esso rappresenta il passo più semplice al di là del modello della materia disgregata. Nel riferimento di quiete, le (29) si riducono alle

$$(30) \quad {}^0T^{ik} = p^0 g^{ik}, \quad {}^0T^{i4} = {}^0T^{4i} = 0, \quad {}^0T^{44} = -\mu^0 c^2 = -H^0.$$

Ovviamente il problema del moto del continuo materiale considerato rimane aperto finché non si aggiungano opportune relazioni costitutive. Queste vanno assegnate nel sistema di quiete  $\mathfrak{S}^0$ , e devono dare  ${}^0\sigma$  in termini di altre osservabili in  $\mathfrak{S}^0$ ; ad esempio in termini del tensore (simmetrico)

<sup>29</sup> In un gas reale in pratica non esistono sforzi di trazione; e anche nel caso di un liquido, la “pressione” (che può raggiungere valori positivi elevatissimi), si mantiene su modesti valori negativi per la comparsa delle transizioni di fase. Gli sforzi di trazione sono invece tipicamente presenti nei solidi (non necessariamente cristallini); ma come ben sanno gli ingegneri meccanici, occorre evitare di fare troppo affidamento sulla capacità di questi materiali di resistere a trazioni. È proprio questa la ragione storica per cui il termine “tensore” è prevalso sul termine “pressore”: l'attenzione e i calcoli dei progettisti si sono sempre concentrati sulle trazioni.

di deformazione nel caso di un solido elastico,<sup>30</sup> oppure la pressione in termini di densità di massa, ecc. In particolare, possiamo così effettuare l'usuale (e confortante) bilancio "equazioni vs. incognite". Le equazioni di cui disponiamo sono quattro, le tre (2') e la (7), oltre alle sei relazioni costitutive di quiete per le  ${}^0\sigma$ . Ad esempio nel caso del solido, le incognite sono le tre componenti del campo vettoriale degli spostamenti (infinitesimi) e la densità di massa; ma quest'ultima potrà considerarsi come invariabile per la supposta piccolezza degli spostamenti, e la (7) potrà ignorarsi. Nel caso del fluido idealmente privo di viscosità (fluido ideale), le incognite sono cinque: le tre componenti del campo di velocità  $u$ , la pressione  $p = p^0$  e la densità (di massa) di quiete  $\mu^0$ . Alle equazioni di moto e a quella di conservazione della massa si deve quindi aggiungere una relazione finita del tipo

$$(31) \quad \mathcal{F}(\mu^0, p^0) = 0,$$

o **equazione complementare**. (In linea di principio, agli argomenti della funzione  $\mathcal{F}$  potrebbero aggiungersi le coordinate.) Se poi la viscosità ha effetti significativi (fluido **viscoso**), alla parte isotropa del tensore degli sforzi si aggiunge una parte generalmente non isotropa, legata al tensore (simmetrico) di velocità di deformazione; le incognite sono ancora cinque (le tre componenti del campo di velocità, la pressione e la densità di massa), e occorre ancora una equazione complementare per chiudere il bilancio.<sup>31</sup>

In generale, cioè per relazioni costitutive esprimenti il tensore degli sforzi  ${}^0\sigma$  generiche, le trasformazioni di Lorentz parallele (vedi App. 9.C) danno  $\sigma$  nel sistema inerziale del laboratorio  $\mathfrak{S}$  avendo  $u$ ; e dunque si resta con le quattro equazioni (2', 7) e le altrettante incognite  $u$  e  $H$ .

---

<sup>30</sup> A questo proposito, segnaliamo che non infrequentemente nella trattatistica sulla RS gli sforzi meccanici sono da subito nominati come "sforzi elastici", mentre la nozione di elasticità è, o dovrebbe essere, comunque legata alla linearità della relazione sforzo-deformazione (legge di Hooke). Se questo è veramente il caso, la denominazione è corretta; ma non lo sarebbe nella nostra attuale presentazione, alla quale la linearità della relazione sforzo-deformazione è sostanzialmente estranea, anche se con essa compatibile.

<sup>31</sup> L'insieme delle equazioni fornite sembra suggerire che ve ne sia una in eccesso. Nel caso del fluido ideale, ad esempio, la (10<sub>2</sub>) unita alla (16) fornisce  $T^{i4} = (iu^i/c)[\gamma^2(H^0 + p^0 u^2/c^2) + p^0]$ . D'altra parte disponiamo anche della (23), secondo la quale  $T^{i4} = (iu^i/c)\gamma^2(H^0 + p^0)$ . Un elementare controllo dimostra che le due espressioni coincidono.

## 9.5 APPLICAZIONI E COMPLEMENTI II

### 9.5.1) LE METRICHE, ESTERNA ED INTERNA, DI SCHWARZSCHILD

Subito dopo che il SDP di EH (9.1.3, 5) fu attendibilmente stabilito, si avviò una grande stagione di studi intorno alle sue possibili soluzioni. Come abbiamo segnalato (vedi alla fine della S.sez. 9.1.3), essa si è spinta fino al terzo millennio, ed è lontana dall'essersi conclusa. I suoi prodotti sono poi tali e tanti, che già il tracciare al loro interno una linea logica, da un certo momento in poi, è un problema didattico non banale. <sup>1</sup> Il nostro presente obiettivo, tuttavia, è soltanto quello di descrivere i primi passi di quella stagione.

Una prima scelta naturale fu quella di considerare la versione omogenea  $E_{(2)} \equiv 0$  del SDP di EH (senza costante cosmologica) corrispondente ad un tensore energetico  $T_{(2)}$  nullo in tutto (o piuttosto in “quasi” tutto, vedi appresso) lo spazio-tempo. Ma anche così il problema restava troppo generale, e fu opportuno limitarsi ad un caso specifico di primario interesse. In questa direzione si mosse Schwarzschild <sup>2</sup>, considerando il caso di soluzioni  $g_{(2)}$  delle  $E_{(2)} \equiv 0$  definite in tutto lo spazio-tempo salvo che nella sua origine spaziale, e “sfero-simmetriche” rispetto a tale origine; con ciò intendendosi quelle  $g_{(2)}$  che sono “invarianti in forma” nel sottogruppo delle trasformazioni ortogonali spaziali (3-dim) del più ampio gruppo delle trasformazioni p.ortogonali 4-dim. Vale a dire, scrivendo  $x$  per  $(x^1, x^4=ct)$ ,  $g_{(2)}$  viene assunto invariante in forma sotto trasformazioni ortogonali delle  $x^1$  pensate come coordinate cartesiane ortogonali standard  $x, y, z$ , o rotazioni (congruenti) attorno all'origine spaziale  $x = y = z = 0$ . Allora la forma quadratica  $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$  deve dipendere al più dagli invarianti del predetto sottogruppo, cioè da  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , da  $t$ , da  $dr = (xdx + ydy + zdz)/r$ , da  $d\theta$  e  $d\phi$  ( $\theta$  essendo la colatitudine e  $\phi$  una longitudine della sfera di centro nell'origine spaziale) attraverso la combinazione  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ , e infine da  $dt$ . Essendo  $ds^2$  quadratica nei differenziali, in essa saranno dunque presenti termini in  $dr^2$ ,  $dt^2$ ,  $drdt$  e  $d\Omega^2$ , ma non – secondo quanto suggerisce l'intuizione – in  $drd\theta$ ,  $drd\phi$ ,  $dtd\theta$ ,  $dtd\phi$ ,  $d\theta d\phi$  (cioè in prodotti di due differenziali uno dei quali almeno è  $d\theta$  o  $d\phi$ ). In conclusione  $ds^2$  deve essere del tipo

$$(1) \quad ds^2 = A dr^2 + B d\Omega^2 + 2C drdt + D dt^2,$$

---

<sup>1</sup> Prima fra tutte, il lettore può consultare in proposito l'opera di H. Stephani et al. citata nella Sez. 9.1, nota (<sup>63</sup>).

<sup>2</sup> Schwarzschild (Karl, Francoforte s. M. 1873 - Potsdam 1916) fu un astrofisico di eccezionale talento che diede importanti contributi sia all'astronomia che alla nascente disciplina astrofisica. Alla giovanile età di 28 anni divenne direttore dell'osservatorio dell'università di Gottinga, e otto anni dopo di quello di Potsdam. La sua brillante carriera fu troncata da un male contratto al fronte durante la prima guerra mondiale, quando aveva 43 anni. I lavori di presente interesse, entrambi del suo ultimo anno di vita, sono già stati citati nella Sez. 9.1, nota (<sup>56</sup>).

dove  $A, B, C, D$  sono quattro funzioni regolari di  $(r, t)$ . La (1) può essere semplificata. Innanzitutto, ponendo  $r^{*2} = B(r, t)$  ed invertendo questa rispetto a  $r$  (solviamo qui sulla semplice condizione che rende legittima questa inversione), nelle nuove variabili  $(r^*, \theta, \phi, t)$  si ottiene:

$$(1') \quad ds^2 = A^* dr^{*2} + r^{*2} d\Omega^2 + 2C^* dr^* dt + D^* dt^2,$$

dove  $A^*, C^*$  e  $D^*$  sono tre funzioni di  $(r^*, t)$ .

Le condizioni di simmetria di Weyssenhoff (v. S.sez. 9.4.1) sono banalmente soddisfatte dalla metrica (1'). Scrivendo per semplicità  $r^*$  ancora come  $r$ , si ha infatti  $g_{24} = 0, g_{34} = 0$ , mentre  $g_{14}$  e  $g_{44}$  non dipendono né da  $\theta$  né da  $\phi$  (qui gli indici numerici  $1 \div 4$  si riferiscono nell'ordine a  $r, \theta, \phi, t$ ). Ricordando la struttura delle sopradette condizioni, si vede subito che i due membri della simmetria di Weyssenhoff sono entrambi nulli per tutte le estrazioni di  $\iota, \kappa = 1, 2, 3$  con  $\iota \neq \kappa$ , e quindi che la simmetria è soddisfatta. Utilizzando una notazione analoga alla precedente, esiste dunque una trasformazione del tipo  $t^* = f(r, t)$ , invertibile rispetto a  $t$ , con la quale si elimina il termine non diagonale nella (1'). Similmente non trascrivendo l'asterisco su  $t$ , avremo così

$$(1'') \quad ds^2 = A^{**} dr^2 + r^2 d\Omega^2 + D^{**} dt^2,$$

dove  $A^{**}$  e  $D^{**}$  sono altre due funzioni di  $(r, t)$ . Converrà semplificare ulteriormente la notazione della (1'') scrivendo  $a$  in luogo di  $A^{**}$  e  $-bc^2$  (ove  $c$  ha l'usuale significato di celerità della luce nel vuoto) in luogo di  $D^{**}$ ; in questo modo  $a = g_{11}$  e  $b = -g_{44}$  sono per definizione positivi. Nella nuova notazione, la forma di riferimento, nelle variabili  $r, \theta, \phi, ct$ , è cioè

$$(2) \quad ds^2 = adr^2 + r^2 d\Omega^2 - b(ct)^2,$$

in cui  $a$  e  $b$  sono funzioni positive di  $x^1 = r$  e  $x^4 = ct$ . Dalle iniziali quattro funzioni di  $(r, t)$   $A, B, C, D$  della forma (1) siamo così passati alle sole due funzioni di  $(x^1, x^4)$   $a$  e  $b$  della forma (2). Essa non è soltanto tempo-ortogonale ( $g_{t4} = 0$ ), ma completamente ortogonale ( $g_{ik} = 0$  per  $i \neq k$ ). Precisamente, abbiamo:

$$(3) \quad g_{11} = a, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = -b;$$

ove si noterà che  $g_{33} = g_{22} \sin^2 \theta$ . Evidentemente,  $g = \det\{g_{ik}\} = -abr^4 \sin^2 \theta$  è negativo salvo che nell'origine ( $r = 0$ ) e nei poli ( $\sin \theta = 0$ ), ove è zero. Supponendo dunque  $r > 0$  e  $\sin \theta \neq 0$ , risulta

$$(3') \quad g^{11} = 1/a = 1/g_{11}, \quad g^{22} = 1/r^2 = 1/g_{22}, \quad g^{33} = 1/(r^2 \sin^2 \theta) = 1/g_{33}, \quad g^{44} = -1/b = 1/g_{44},$$

con  $g^{33} = g^{22}/\sin^2 \theta$ .

A questo punto possiamo calcolare i coefficienti Chr2 associati alle (3, 3'). Dei totali 40 Chr2, soltanto nove non sono identicamente nulli, e cioè (la verifica è lasciata al lettore):

$$(4) \quad \Gamma_{11}^1 = \partial_r a / (2a); \quad \Gamma_{22}^1 = -r/a; \quad \Gamma_{33}^1 = -(r/a) \sin^2 \theta; \quad \Gamma_{44}^1 = \partial_r b / (2a);$$

$$\Gamma_{12}^2 = 1/r; \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta;$$

$$\Gamma_{13}^3 = 1/r; \quad \Gamma_{23}^3 = \text{ctg} \theta;$$



$$\Gamma_1^4 = \partial_r b / (2b).$$

Le (4) determinano unicamente il tensore di Riemann  $\rho_{irk}^j$  secondo le (3.4.2, 3) (che ovviamente non si applicano soltanto alle varietà immerse). Tuttavia qui ci interessa soltanto la traccia simmetrica  $\rho_{ik} = \rho_{ijk}^j$ , dalla quale si passa subito a  $E_{ik} = \rho_{ik} - \rho g_{ik}/2$ , con  $\rho = \rho_i^i$ . Le componenti miste  $E_i^k$  sono evidentemente  $\rho_i^k - \rho \delta_i^k/2$ . Sotto l'addizionale ipotesi che la metrica ortogonale (3) *non dipenda da t*, (cioè sia *stazionaria*, e quindi *statica*), a e b dipendono soltanto da r, e si può allora accertare che tutte le componenti miste *non diagonali di  $E_{(2)}$  sono nulle*. Basterà quindi calcolare le quattro componenti miste diagonali  $E_1^1, E_2^2, E_3^3, E_4^4$ , da annullare separatamente una per una secondo la richiesta iniziale che le equazioni del campo siano quelle del vuoto. Le equazioni algebricamente indipendenti che così si ottengono sono tuttavia soltanto tre perché risulta  $E_2^2 = E_3^3$ . Lasciamo ancora al lettore la verifica (noiosa ma priva di difficoltà) delle precedenti affermazioni, come pure quella della correttezza delle seguenti espressioni delle  $E_1^1, E_2^2 = E_3^3, E_4^4$  corrispondenti alle (3):

$$(5_1) \quad E_1^1 = - (ar)^{-1} b'/b + (1-a^{-1})/r^2,$$

$$(5_{2=3}) \quad E_2^2 = E_3^3 = - [(b'/b)' - (1/2)(a'/a)(b'/b) + (1/2)(b'/b)^2 + (b'/b - a'/a)/r]/(2a),$$

$$(5_4) \quad E_4^4 = (ar)^{-1} a'/a + (1-a^{-1})/r^2,$$

ove l'apice indica la derivazione  $d_r$ . Annullando i secondi membri delle (5), otteniamo così un SDO di tre equazioni nelle (a,b), SDO che nomineremo come (6)  $\equiv (6_1, 6_{2=3}, 6_4)$ .

Per differenza tra la (6<sub>1</sub>) e la (6<sub>4</sub>), otteniamo  $(ar)^{-1}(a'/a + b'/b) = 0$ , ovvero, essendo  $ab > 0$ ,  $ab = \text{cost}$ . D'altra parte devono valere le quattro condizioni di solenoidalità (\*)  $E_i^k{}_{/k} \equiv 0$  per  $i = 1 \div 4$ , che come sappiamo sono conseguenze della definizione di  $E_{(2)}$ . Sebbene si potrebbe evitare di farlo, e sia anche un po' laborioso, è istruttivo controllare la effettiva sussistenza delle (\*) per l'attuale metrica (3). In effetti, sostituendo le (3) nei primi membri delle (\*), quindi ai Chr2 generici i Chr2 (4), si trova: <sup>3</sup> per  $i = 2$ ,  $E_2^k{}_{/k} = \partial_2 E_2^2 + (E_2^2 - E_3^3)\Gamma_2^3{}_3$ ; per  $i = 3$ ,  $E_3^k{}_{/k} = \partial_3 E_3^3$ ; e per  $i = 4$ ,  $E_4^k{}_{/k} = \partial_4 E_4^4$ . Alla luce della (5<sub>2=3</sub>),  $E_2^2$  è uguale a  $E_3^3$  e dipende soltanto da r, per cui  $E_2^k{}_{/k} \equiv 0$ . Similmente soltanto da r dipendono  $E_3^3$  e  $E_4^4$ , per cui anche  $E_3^k{}_{/k} \equiv 0$  e  $E_4^k{}_{/k} \equiv 0$ . Resta da controllare il caso  $i = 1$ , per il quale risulta  $E_1^k{}_{/k} = (E_1^1)' + E_1^1(2/r + \Gamma_1^4{}_4) - 2E_2^2/r - E_4^4\Gamma_1^4{}_4$ . Eliminando in questa espressione  $E_1^1$  e  $(E_1^1)'$  mediante la (5<sub>1</sub>),  $E_2^2$  mediante la (5<sub>2=3</sub>),  $E_4^4$  mediante la (5<sub>4</sub>), e infine sostituendo  $\Gamma_1^4{}_4$  con  $b'/(2b) = -a'/(2a)$  si trova zero (ci vuole un po' di paziente lavoro), ovvero  $E_1^k{}_{/k} = 0$ , qed.

<sup>3</sup> Può convenire usare la formula generale, valida per qualsiasi 2-tensore simmetrico,  $T_i^k{}_{/k} = (1/\sqrt{|g|})\partial_k(\sqrt{|g|}T_i^k) - \partial_i g_{rs} T^{rs}/2$ . Sostituendo in questa  $E_{(2)}$  a  $T_{(2)}$ , per  $i = 2$  si terrà presente che la sola  $g_{rs}$  che dipende da  $\theta$  è  $g_{33}$ , che  $E^{33} = E_3^3/g_{33}$ , e che  $(1/\sqrt{|g|})\partial_2(\sqrt{|g|}) = (1/\sqrt{g_{33}})\partial_2(\sqrt{g_{33}})$ . Si giustifica così la relazione riportata nel testo. I casi  $i = 3$  e  $i = 4$  sono poi quasi immediati da controllare.

Si conclude così che le tre EDO (6) non possono essere indipendenti; ed in effetti la (6<sub>2=3</sub>) si riconosce essere una conseguenza delle (6<sub>1</sub>, 6<sub>4</sub>). Questo è del resto in accordo con il fatto che le incognite del problema sono soltanto due, a e b. La (6<sub>4</sub>), nella sola a, si integra a vista, e dà  $a = (1-C/r)^{-1}$ , dove C è una costante arbitraria di dimensione lunghezza. Nulla impedisce infine, riscaldando il tempo, di assumere la costante ab uguale a 1. Allora  $b = 1-C/r$ , e tutta la metrica è finalmente determinata in termini della sola costante C. Scriveremo dunque, denotando ancora con t il tempo riscaldato,

$$(7) \quad ds^2 = (1-C/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - (1-C/r) c^2 dt^2.$$

Questa è la **metrica esterna di Schwarzschild**, completamente ortogonale e statica. La effettiva correttezza della (7) (ricordiamo che la (1) è stata “ragionevolmente indotta” piuttosto che “strettamente dedotta”) è stata dimostrata da Birkhoff, addirittura senza utilizzare l’ipotesi di stazionarietà della metrica. Del teorema di Birkhoff diremo più avanti.

Il significato della costante C, o **raggio di Schwarzschild**, si desume facilmente come segue. Poiché  $-g_{44} = 1 - C/r$ , e allo stesso tempo  $-g_{44} = 1 + 2\chi/c^2$ ,  $\chi$  essendo il potenziale scalare del campo gravitazionale, risulta  $C/r = -2\chi/c^2$ . Ora secondo la teoria newtoniana si ha  $\chi_{\text{newt}} = -\kappa M/r$  se  $M (\geq 0)$  è la massa di un punto materiale potenziante nell’origine (o anche la massa di una palla omogenea<sup>4</sup> di raggio  $\leq r$  centrata nell’origine). Poiché deve risultare  $\chi_{\text{newt}} \rightarrow \chi$  per  $r \rightarrow \infty$ , questo vale sse  $C = 2\kappa M/c^2$ . Si ha così il significato di C, avendo definito M come detto più sopra. In particolare, si vede che  $C \geq 0$ . Per  $C = 0$  (cioè per  $M = 0$ ), e interpretando le  $(r, \theta, \phi)$  nel modo standard, la (7) diventa la metrica pseudoeuclidea in coordinate spaziali sferiche, e la associata metrica spaziale

$$(7') \quad d\sigma^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k,$$

con  $\gamma_{ik} = g_{ik}$ , diventa la metrica spaziale euclidea nelle stesse coordinate. La (7) e la (7') degenerano comunque nella metrica pseudoeuclidea, e rispettivamente euclidea, per  $r \rightarrow \infty$ , o in pratica per  $C/r$  trascurabile rispetto all’unità.

Con la (7') si calcolano i relativi Chr2 3-dim, che ovviamente sono ancora dati dalle (4) ignorandovi  $\Gamma_4^1{}_4$  e  $\Gamma_1^4{}_4$  (quindi i Chr2 spaziali non identicamente nulli sono sette). Si può così immediatamente riconoscere che le linee coordinate r (lungo le quali  $d\theta = 0$  e  $d\phi = 0$ ) sono geodetiche spaziali, e calcolare la distanza ( $\geq 0$ ) tra i due punti della linea coordinata r con  $r = r_1$  e  $r = r_2 \geq r_1$ . Si noti che le metriche (7) e (7') sono singolari per  $r = r_0 =: C$ , dove  $g_{11}$  (e quindi il

---

<sup>4</sup> Questa condizione potrebbe generalizzarsi in quella di semplice sfero-simmetria, cioè di palla di densità funzione di r al più.

determinante  $g$ ) divergono.<sup>5</sup> Inoltre  $(1-1/x) < 0$  per  $0 < x < 1$ , per cui *non* si possono considerare punti interni alla sfera singolare  $r = r_0$ : i due sopraddetti punti  $r_{1,2}$  devono essere entrambi al di là di tale sfera. La loro distanza (quella che si misura con le barrette-campione) è allora  $\sigma_{12} = \int_{x_1}^{x_2} (1-x^{-1})^{-1/2} dx$ , con  $x_{1,2} = r_{1,2}/C$ .<sup>6</sup> Per  $r \rightarrow \infty$ , infine, siamo di nuovo ridotti alla metrica pseudoeuclidea, e rispettivamente euclidea, in coordinate sferiche.

La definizione di sfero-simmetria (spaziale) intorno all'origine che porta alla (7) può essere commentata come segue. Stabiliamo innanzitutto la corrispondenza standard tra i punti  $p$  della varietà 3-dim  $V^3$  descritta dalle coordinate  $(r, \theta, \phi)$  e di metrica (7'), e i punti  $P$  della varietà 3-dim euclidea  $E^3$  standard descritta dalle coordinate cartesiane ortogonali ( $^\circ$ )  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ . Questa corrispondenza è biunivoca ( $p \leftrightarrow P$ ), quindi risolubile rispetto alle  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , sse  $r > 0$  e  $x^2 + y^2 > 0$ .  $V^3$  si definisce allora "sfero-simmetrica" (o "isotropa") attorno al suo centro ( $r = 0$ ), se alle rotazioni in  $E^3$  attorno al suo centro  $x = y = z = 0$  corrispondono spostamenti rigidi in  $V^3$ . Come sappiamo, uno spostamento rigido in  $V^3$  è uno spostamento per il quale la distanza tra coppie *arbitrarie* di punti  $p$ ,  $p'$  di  $V^3$  esterni alla sfera singolare  $r = r_0$ , calcolata lungo la geodetica di  $V^3$  passante per  $p$  e  $p'$ , si mantiene inalterata sotto lo spostamento. Si tenga anche presente che mentre i due centri (di  $V^3$  e di  $E^3$ ) sono uno l'immagine dell'altro sotto la trasformazione ( $^\circ$ ), i valori di  $\theta$  e di  $\phi$  nel centro di  $E^3$  non sono determinati. Questo è naturale, perché il determinante jacobiano della trasformazione ( $^\circ$ ),  $\det\{\partial(x,y,z)/\partial(r,\theta,\phi)\} = r^2 \sin \theta$ , si annulla per  $r = 0$  e lungo l'asse  $z$  (dove  $x^2 + y^2 = 0$ ).

La memoria di Schwarzschild in cui è calcolata la metrica esterna (7) è del gennaio 1916. Nel breve scorcio di vita che gli doveva rimanere, Schwarzschild scrisse una memoria complementare a quella del gennaio, ed altrettanto importante. Si può addirittura affermare che i due ultimi lavori dell'astronomo/astrofisico di Potsdam contengono le soluzioni esatte più significative del SDP (9.1.3, 5) (omogeneo nel caso della prima soluzione, e non omogeneo in

---

<sup>5</sup> In generale, una metrica si può considerare singolare se il suo determinante  $g$ , aut il suo reciproco  $g^{-1}$ , diverge. Nel primo caso è impedita la costruzione delle sue componenti covarianti a partire da quelle controvarianti, e viceversa nel secondo caso. Ad esempio la (7') è in tal senso singolare per  $r = r_0$  e per  $r = 0$ , oltre che per  $\sin \theta = 0$ , dove  $g = 0$ . Tuttavia  $g$  non è un invariante, per cui la singolarità così definita dipende dalla particolare carta in cui si valuta  $g$ . Una definizione più robusta di singolarità è quella secondo cui qualche invariante scalare costruito con la metrica e le sue derivate (tipicamente fino al 2° ordine) diverge. Ad esempio un tale scalare potrebbe essere costruito con il tensore di Ricci (quindi di Riemann), come  $\rho_i^i$ , o come  $\rho_{ik}\rho^{ik}$ , o direttamente con il tensore di Riemann come  $\rho_{ikrs}\rho^{ikrs}$ , e così via. Essendo in questi casi coinvolto soltanto il tensore di Riemann, a loro proposito si parla talvolta di "singolarità di curvatura."

<sup>6</sup> L'integrale indefinito  $\int (1-x^{-1})^{-1/2} dx$  si calcola per sostituzione. Posto  $y = (1-x^{-1})^{-1/2}$ , si trova che  $(1-x^{-1})^{-1/2} dx = -2y^2(y^2-1)^{-2} dy$ . (Qui sia  $x$  che  $y$  sono  $> 1$ ; per  $x \rightarrow 1+$ ,  $y \rightarrow \infty-$ , e per  $x \rightarrow \infty-$ ,  $y \rightarrow 1+$ .) Il calcolo di  $\sigma_{12}$  è così ricondotto a quello dell'integrale indefinito di una funzione razionale fratta col grado del numeratore (2) minore di quello del denominatore (4), che si effettua con procedure standard.

quello della seconda), e riassumono l'“abc” della teoria relativistica generale sotto l'aspetto delle sue applicazioni.

Nella seconda memoria del 1916, Schwarzschild considerò il tensore energetico totale in un fluido perfetto in quiete, dato dalle (9.4.4, 29) con velocità 3-dim nulla. Ricordiamo che nelle (9.4.4, 29) le coordinate spaziali erano cartesiane ortogonali, e che si lavorava con quarta coordinata ict, mentre adesso essa è ct. Comunque, le (9.4.4, 29) si conservano valide in generale sostituendovi  $\delta^{ik}$  con  $g^{ik}$ , cioè leggendole come sono scritte. Più vantaggiosa ai nostri scopi presenti è peraltro la loro versione mista, che qui scriviamo come

$$(8) \quad T_i^k = M^0 u_i u^k + p^0 \delta_i^k,$$

dove  $M^0 =: \mu^0 + p^0/c^2$  (vedi. ancora la (9.4.4, 29), le  $u_i$  e  $u^k$  sono componenti, covarianti e rispettivamente controvarianti, della velocità 4-dim, e abbiamo scritto  $\delta_i^k$  in luogo di  $g_i^k$ . Ovviamente qui  $\mu^0$  e  $p^0$  dipendono al più da  $r$ .

La  $T_i^k$  data dalla (8) ha il vantaggio di essere una genuina componente 2-tensoriale mista, e si presta ad essere direttamente inserita nelle equazioni di campo in cui già conosciamo il tensore di Einstein in forma mista secondo le (5). Infatti nel caso di presente interesse la metrica è ancora del tipo (2), quindi  $g_{(2)}$  è ancora dato dalle (3), i Chr2 dalle (4) e il tensore di Einstein misto dalle (5). La (8) fornisce subito la versione di quiete

$$(9) \quad {}^0T_i^k = M^0_0 {}^0u_i {}^0u^k + p^0_0 \delta_i^k,$$

dove  ${}^0u_i$  e  ${}^0u^k$  sono componenti della velocità 4-dim di quiete.

Conviene qui una precisazione. Quanto è stato presentato nella S.sez. 9.4.4 sul tensore energetico  $T_{(2)}$  era fondato sulla RS, nella quale non vi è campo gravitazionale, e tutti i riferimenti sono inerziali. Il “riferimento di quiete” è definito a meno di  $7 = 10 - 3$  parametri di Poincaré, al variare dei quali  $\mu^0$  e  $p^0$  sono ovviamente indifferenti. Questo non vale più in RG, ma la difficoltà è ragionevolmente elusa ponendo la condizione che il riferimento infinitesimo usato sia inerziale oltre che di quiete. Aggiungeremo quindi un sottoscritto  $_0$  (che significa “inerziale”) al soprascritto  $^0$ ; cioè nelle (8, 9)  $\mu^0$  e  $p^0$  saranno sostituite da  $\mu^0_0$  e  $p^0_0$ , e  $M^0$  da  $M^0_0$ , con ciò intendendosi che queste quantità siano appunto misurate in un riferimento infinitesimo inerziale di quiete (I,IQ). Non contando le quattro origini, è chiaro che i tre residui parametri liberi non influenzano  $\mu^0_0$  e  $p^0_0$ . Di fatto, si hanno buone ragioni per trascurare l'influenza di un campo gravitazionale sulla pressione (cioè, si può assumere  $p^0 \approx p^0_0$ ). Invece non altrettanto è vero per la densità (per cui continueremo a distinguere  $\mu^0$  da  $\mu^0_0$ ).

Per definizione,  $u^i = d_\tau x^i = d_\tau t d_\tau x^i \equiv d_\tau t(u^i, c)$ , essendo  $u^1 = d_\tau x^1$  e (coordinata römeriana reale)  $x^4 = ct$ . La  $d_\tau t$ , supposta  $> 0$ , si calcola in generale partendo dalla  $g_{ik} d_\tau x^i d_\tau x^k = -c^2$  e dalle

$g_{i\kappa} = \gamma_{i\kappa} - \gamma_i \gamma_\kappa$ , con  $\gamma_i = g_{i4}/\sqrt{-g_{44}}$  e  $u^2 = \gamma_{i\kappa} u^i u^\kappa$ . Scrivendo per brevità  $\Gamma$  per tale  $d_\tau t$ , abbiamo quindi  $(\gamma_{i\kappa} - \gamma_i \gamma_\kappa) u^i u^\kappa / c^2 + 2g_{i4} u^i / c + g_{44} + 1/\Gamma^2 = 0$ , ovvero  $1/\Gamma^2 = (\sqrt{-g_{44}} - \gamma_i u^i / c)^2 - u^2 / c^2$ ; ovvero, ancora, avendo richiesto  $\Gamma > 0$ ,

$$(10) \quad \Gamma = \{[\sqrt{-g_{44}} - \gamma_i u^i / c]^2 - u^2 / c^2\}^{-1/2}.$$

È immediato verificare che questo fattore adimensionale si riduce all'analogo e familiare fattore  $\gamma$  della RS se la metrica è quella pseudoeuclidea, cioè se  $\gamma_i = 0$  e  $g_{44} = -1$ . In conclusione  $u^i = \Gamma(u^i, c)$ , e così  $u_i = g_{ik} u^k = \Gamma(g_{ik} u^k + c g_{i4})$ . In quiete ( $u = 0$ ),  $\Gamma = \Gamma^0 = 1/\sqrt{-g_{44}}$  e  ${}^0 u^k = (1/\sqrt{-g_{44}})(0, 0, 0, c)$ ; mentre  ${}^0 u_i = 1/\sqrt{-g_{44}} c g_{i4}$ , per cui  ${}^0 u_i {}^0 u^i = -c^2$ , come deve essere in ogni caso (cioè, anche non in condizioni di quiete).

Possiamo così valutare il 2-tensore misto di quiete  ${}^0 u_i {}^0 u^k$ , ottenendo

$$(9') \quad {}^0 T_i^k = -M^0_{\circ} \delta_{i4} \delta^{k4} c^2 + p^0 \delta_i^k,$$

cioè

$$(9'') \quad {}^0 T_i^k = p^0 \delta_i^k, \quad {}^0 T_i^4 = 0, \quad {}^0 T_4^k = 0, \quad {}^0 T_4^4 = -\mu^0_{\circ} c^2.$$

Questo tensore in forma mista  ${}^0 T_i^k$ , che è simmetrico e diagonale, va ora moltiplicato per  $-K$  (cfr. la (9.1.3, 5)) ed uguagliato al  $E_i^k$  dato dalle (5), anch'esso simmetrico e diagonale. La condizione  $E_2^2 = E_3^3$  è automaticamente soddisfatta dalla  ${}^0 T_2^2 = {}^0 T_3^3$ , e quindi le equazioni di campo indipendenti che così si ottengono sono tre al più. Le trascriviamo qui appresso:

$$(11_1) \quad E_1^1 = -K p^0,$$

$$(11_{2=3}) \quad E_2^2 (= E_3^3) = -K p^0,$$

$$(11_4) \quad E_4^4 = K \mu^0_{\circ} c^2.$$

Inoltre, in base alla sua definizione,  $E_i^k$  ha le sue quattro divergenze identicamente nulle,  $E_i^k /_{;k} = 0$ , e lo stesso deve dunque accadere per  ${}^0 T_{(2)}$ , cioè

$$(12) \quad {}^0 T_i^k /_{;k} = 0.$$

In conclusione abbiamo le tre equazioni di campo (11), e quattro incognite  $a$ ,  $b$ ,  $\mu^0_{\circ}$  e  $p^0$  funzioni di  $x^1 = r$ ; manca cioè un'equazione, l'equazione complementare (9.4.4, 31), che lega  $\mu^0_{\circ}$  e  $p^0$ . D'altra parte, se le (12) sono imposte, dobbiamo ottenere delle identità del tipo  $0 = 0$  calcolando le  $E_i^k /_{;k}$  e le  ${}^0 T_i^k /_{;k}$ . È quindi necessario esaminare una per una le (12), scrivendole nella forma generale (per  $i = 1 \div 4$ ) menzionata nella nota (3) o nella equivalente (perché  $\partial_i g_{rs} = 2\Gamma_{i(rs)}$ ) :

$$(12') \quad (1/\sqrt{|g|}) \partial_k ({}^0 T_i^k \sqrt{|g|}) - {}^0 T_j^h \Gamma_{ih}^j \equiv \mathcal{A}_i = 0.$$

Cominciando dalla  $i = 2$  ( $x^2 = \theta$ ), abbiamo  $\mathcal{A}_2 = {}^0 T_2^2 \partial_2 (\sqrt{|g|}) / \sqrt{|g|} - {}^0 T_j^h \Gamma_{2h}^j$ . Possiamo approfittare delle identità  $\partial_k (\sqrt{|g|}) / \sqrt{|g|} = \Gamma_k^h{}_h$ , valida per ogni  $k$ . Poiché secondo le (4)  ${}^0 T_j^h \Gamma_{2h}^j = {}^0 T_3^3 \Gamma_{23}^3$ , abbiamo così effettivamente  $\mathcal{A}_2 = ({}^0 T_2^2 - {}^0 T_3^3) \Gamma_{23}^3 = 0$ . Similmente, per  $i = 3$ , ( $x^3 = \phi$ ),  $\mathcal{A}_3 = {}^0 T_3^3 \partial_3 (\sqrt{|g|}) / \sqrt{|g|} - {}^0 T_j^h \Gamma_{3h}^j = {}^0 T_3^3 \Gamma_{3h}^h - {}^0 T_j^h \Gamma_{3h}^j = 0$  perché tutti i Chr2 coinvolti ( $i \Gamma_{3h}^h$  con  $j = h$ )

sono nulli. E ancora, per  $i = 4$  ( $x^4 = ct$ ),  $\mathcal{A}_4 = {}^0T_4^4 \partial_4(\sqrt{|g|})/\sqrt{|g|} - {}^0T_j^h \Gamma_4^j = -{}^0T_j^h \Gamma_4^j = 0$ , perché la metrica è stazionaria e tutti i  $\Gamma_4^j$  con  $j = h$  sono nulli. Quindi le (12) sono soddisfatte per  $i = 2, 3, 4$ . Resta il caso  $i = 1$  ( $x^1 = r$ ), e ci aspettiamo che la  $\mathcal{A}_1 = 0$  sia significativa, cioè *non* sia automaticamente soddisfatta. In effetti, si ha  $\mathcal{A}_1 = {}^0T_1^1 \Gamma_1^k + \partial_1 {}^0T_1^1 - {}^0T_j^h \Gamma_1^j = p^0 \Gamma_1^k + d_r p^0 - {}^0T_j^h \Gamma_1^j$ ; tenuto conto delle (4),  $\mathcal{A}_1 = d_r p^0 + p^0[a'/(2a) + 2/r + b'/(2b)] - p^0[a'/(2a) + 2/r] + \mu^0 c^2 b'/(2b) = d_r p^0 + M^0 c^2 b'/(2b)$ . Vale a dire, sempre denotando con un apice la  $d_r$ , la condizione di solenoidalità di interesse è

$$(13) \quad (p^0)' + M^0 c^2 b'/(2b) = 0,$$

e lega il gradiente di pressione  $(p^0)'$  a quello del potenziale gravitazionale scalare  $\chi = \chi(r)$  (perché  $b' = 2\chi'/c^2$ ).

In definitiva, dimenticando la densità  $\mu^0$ , in quanto supposta eliminabile mediante l'equazione complementare, abbiamo un sistema di quattro EDO del 1° ordine nelle tre incognite  $a$ ,  $b$ ,  $p^0$ : la (13) e le tre equazioni di campo (11). Concludiamo che tre al più di queste quattro equazioni possono essere indipendenti.

Per miglior convenienza, scriviamo esplicitamente le (11) come

$$(14_1) \quad b'/(abr) - (1-1/a)/r^2 = Kp^0,$$

$$(14_{2=3}) \quad [(b'/b)' - (1/2)(a'/a)(b'/b) + (1/2)(b'/b)^2 + (b'/b - a'/a)/r]/(2a) = Kp^0$$

$$(14_4) \quad a'/(a^2 r) + (1-1/a)/r^2 = K\mu^0 c^2.$$

La (14<sub>4</sub>), per  $\mu^0 = \mu^0(r)$  dato, è un'equazione di Riccati nella sola incognita  $a$ . Per progredire nel modo più semplice, conviene supporre  $\mu^0$  *costante*. Allora la (14<sub>4</sub>) ha un'unica soluzione soddisfacente la condizione  $a(r \rightarrow 0) > 0$ , che è

$$(15) \quad a = (1 - r^2/R^2)^{-1},$$

ove  $R^2 =: 3(K\mu^0 c^2)^{-1}$  (si verifica subito che  $R$  ha le dimensioni di una lunghezza). Si noti che, secondo la (15),  $a(r \rightarrow 0) = 1$ , e quindi  $a$  soddisfa la condizione richiesta. Ponendo per brevità  $\mathcal{B} =: \mu^0 c^2$ , quindi  $R^2 = 3/(K\mathcal{B})$ , dalla (13) si trae subito, per integrazione,  $(\mathcal{B} + p^0)\sqrt{b} = M^0 c^2 \sqrt{b} = A$  (un'altra costante arbitraria, di dimensione  $ML^{-1}T^{-2}$ ). D'altra parte, sommando le equazioni di campo (14<sub>1</sub>) e (14<sub>4</sub>) si ottiene:

$$(16) \quad (a'/a + b'/b)/(ar) = KM^0 c^2 = KA/\sqrt{b};$$

ed esprimendo  $a$  mediante la (15), finalmente la EDO nella sola  $\sqrt{b}$ :

$$(17) \quad (\sqrt{b})'(R^2 - r^2)/r + \sqrt{b} = B,$$

dove  $B =: KAR^2/2$ . La (17), lineare del 1° ordine nella incognita  $\sqrt{b}$ , si integra senza difficoltà, e dà  $\sqrt{b} = B - D(1 - r^2/R^2)^{1/2}$ , dove  $D$  è un'altra costante arbitraria. Si verifica subito che  $B$ , e quindi anche

D, sono adimensionali. A parte la determinazione delle due costanti B (o A) e D, il problema è così interamente risolto: infatti  $p^0 = A/\sqrt{b} - \mathcal{B}$ , a è data dalla (15) con  $R^2 = 3/(K\mathcal{B})$ , e infine b è data dalla (18)  $b = [B - D(1-r^2/R^2)^{1/2}]^2$ .

Si noterà che l'equazione di campo (14<sub>2=3</sub>) *non* è stata utilizzata, il che è in accordo con la previsione che delle quattro equazioni (11, 13) solo tre potevano essere indipendenti.

Le costanti di integrazione presenti nella soluzione sono B e D. La metrica, nella quale B e D figurano in modo naturale, è in conclusione la cosiddetta **metrica interna di Schwarzschild**

$$(19) \quad ds^2 = (1-r^2/R^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - [B - D(1-r^2/R^2)^{1/2}]^2 c^2 dt^2,$$

dove  $d\Omega^2$  è la solita abbreviazione per  $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . Si sottolinea la sostanziale diversità delle due metriche di Schwarzschild (7) e (19) per quanto riguarda  $g_{rr}$  e  $g_{tt}$ .

Le costanti B e D si possono determinare, ad esempio, considerando il problema sfero-simmetrico a due regioni in cui una palla con centro in  $r = 0$  e raggio  $R < R$  è riempita con un fluido perfetto di data densità costante  $\mu^0_0$ , e circondata dal vuoto. Al di là del raggio singolare  $C = 2\kappa M/c^2$  (v. la (7), dove M è la massa della palla), e quindi, come vedremo in un momento, all'esterno della palla, la metrica è data dalla (7). Richiedendo, come è naturale, la continuità tra le due metriche e tra le due pressioni attraverso l'interfaccia  $r = R$ , troviamo che la prima continuità implica  $C = R^3/R^2$  e  $[B - D(1-R^2/R^2)^{1/2}]^2 = 1 - C/R = 1 - R^2/R^2$ , cioè  $B = (1-R^2/R^2)^{1/2}(1+D)$ , e che la seconda implica  $p^0(R) = 2B[KR^2\sqrt{b(R)}]^{-1} - \mathcal{B} = 0$ , cioè  $3 = 2(1+D)$ , o  $D = 1/2$ . Si ha così subito anche  $B = (3/2)(1-R^2/R^2)^{1/2}$ , e le due costanti B e D sono determinate. Inoltre, poiché  $C = MKc^2/(4\pi) = R^3/R^2$ , tenendo conto della espressione di  $R^2$  si trova  $M = (4\pi/3)\mu^0_0 R^3$ , che è proprio la massa classica di una palla omogenea di densità  $\mu^0_0$  e raggio R. Il raggio singolare, nella soluzione esterna, è  $C = R^3/R^2 < R$ , e quindi per  $r \geq R$  siamo al di là di C; per  $r \geq R$ , la metrica è dunque quella esterna di Schwarzschild, ed è la stessa che si avrebbe se la massa M della palla fosse concentrata nel suo centro. Questo risultato ricorda un noto risultato newtoniano, secondo cui il potenziale gravitazionale di una palla omogenea (o anche soltanto sfero-simmetrica) di massa M è uguale, fuori di essa, a quello di un punto con la stessa massa M posto nel centro della palla. Il **problema di Schwarzschild a due regioni** (sfero-simmetriche e concentriche), con un fluido perfetto omogeneo nella palla interna ed il vuoto all'esterno, sotto la condizione che sia la metrica che la pressione siano continue all'interfaccia, è così completamente risolto. Va tuttavia ricordato che la soluzione ottenuta è legata all'ipotesi che la palla interna sia omogenea. Questa è una

limitazione nella maggior parte delle applicazioni concrete <sup>7</sup>, ma la considerazione di leggi di stato più realistiche può complicare proibitivamente i calcoli.

### 9.5.2) CAMPI VETTORIALI DI KILLING E K-SIMMETRIE

Nella precedente sottosezione abbiamo affidato all'intuizione il fatto che la metrica (9.5.1, 1) da cui siamo partiti *non* contenesse i cinque termini rettangolari in  $drd\theta$ ,  $drd\phi$ ,  $dtd\theta$ ,  $dtd\phi$ ,  $d\theta d\phi$ . Provare lo stesso asserto in modo rigoroso non è un problema banale. La sua discussione ci sollecita a definire la cosiddetta "simmetria" di una metrica. Sia dunque  $g_{(2)} = g_{(2)}(x)$ , con  $x \equiv x^{1 \leq j \leq 4}$ , il 2-tensore metrico di una varietà 4-dim a segnatura lorentziana, funzione di  $x$  nel dominio della carta corrente. Diremo che  $g_{(2)}$  è **formalmente invariante** ("form-invariante") sotto un dato diffeomorfismo abbastanza regolare <sup>8</sup>  $x' = x'(x) \Leftrightarrow x = x(x')$ , o  $x \leftrightarrow x'$ , per  $x$  e  $x'$  correnti nei rispettivi domini, se la metrica trasformata

$$(1) \quad g'_{jh}(x') = \partial x^i / \partial x'^j(x') g_{ik}(x(x')) \partial x^k / \partial x'^h(x')$$

dipende da  $x'$  *come* la metrica originale dipende da  $x$ , per tutte le  $x \leftrightarrow x'$  correnti nei rispettivi domini. Questo significa che le

$$(2) \quad g_{jh}(x') = \partial x^i / \partial x'^j(x') g_{ik}(x(x')) \partial x^k / \partial x'^h(x'),$$

o equivalentemente che le

$$(2') \quad g_{ik}(x) = \partial x'^j / \partial x^i(x) g_{jh}(x'(x)) \partial x'^h / \partial x^k(x),$$

siano identicamente soddisfatte per  $x'$ , o rispettivamente per  $x$ , correnti nei rispettivi domini. <sup>9</sup>

Viceversa, un diffeomorfismo abbastanza regolare  $x \leftrightarrow x'$  si dice una **isometria** rispetto alla metrica  $g_{(2)}$  se le (2) (o le (2')) sono identicamente soddisfatte. Quindi la condizione che  $g_{(2)}$  sia form-invariante sotto  $x \leftrightarrow x'$  e la condizione che  $x \leftrightarrow x'$  sia una isometria rispetto a  $g_{(2)}$  sono la stessa condizione, espressa dalle (2) o dalle (2'). Coordinate legate da un diffeomorfismo che sia una isometria rispetto a  $g_{(2)}$  si dicono **equivalenti** rispetto a  $g_{(2)}$ . Per una data metrica  $g_{(2)}$ , le (2) [le (2')] sono dieci EDP non lineari del 1° ordine nelle quattro funzioni  $x(x')$  [ $x'(x)$ ], e come tali costituiscono una forte restrizione su di esse.

Se il diffeomorfismo  $x \leftrightarrow x'$  è infinitamente poco diverso dall'identità, cioè è del tipo

$$(3) \quad x' = x + \varepsilon \xi(x)$$

<sup>7</sup> L'ipotesi è tra l'altro relativisticamente incongrua, perché comporterebbe una velocità del suono infinita nel fluido. Tuttavia essa si presume accettabile nel caso di una stella di neutroni.

<sup>8</sup> Come al solito, questa espressione va intesa nel senso di "regolare quanto basta a legittimare gli sviluppi indicati". L'ipotesi più comoda è ovviamente quella di supporre il diffeomorfismo in oggetto di CdC infinita.

<sup>9</sup> Una analoga definizione potrebbe estendersi a qualsiasi campo  $\kappa$ -tensoriale.



dove  $\varepsilon$  è un fattore di piccolezza e  $\xi = \xi(x)$  è un campo vettoriale abbastanza regolare, al 1° ordine in  $\varepsilon$  le (3) si invertono nelle

$$(3') \quad x = x' - \varepsilon \xi(x'),$$

e le (2) si riducono con poco lavoro alle

$$(4') \quad \partial \xi_i / \partial x^k + \partial \xi_k / \partial x^i = 2 \xi_j \Gamma_{ik}^j,$$

dove  $\Gamma_{ik}^j$  sono i Chr2 associati alla metrica  $g_{(2)}$  attraverso le (3.3.2, 12ter) e le (3.3.2, 14). Ricordando la definizione (delle componenti) del derivato covariante di un vettore, le (4') possono anche scriversi nella forma più compatta

$$(4) \quad \xi_{i/k} + \xi_{k/i} \equiv 2 \xi_{(i/k)} = 0.$$

Le dieci EDP lineari del 1° ordine (4) (o (4')) in  $\xi$ , intese valere nel dominio della carta corrente di una varietà metrica di congrua CdC (2 è qui adeguata) si dicono **equazioni di Killing**<sup>10</sup> associate a  $g_{(2)}$ , e ogni campo vettoriale  $\xi$  che ivi le soddisfa, un **campo di Killing** (o un **K-campo**) associato a  $g_{(2)}$ . (Spesso il riferimento a  $g_{(2)}$  in queste definizioni si sottintende.) Si sarà notato che le precedenti considerazioni e definizioni prescindono sia dalla dimensione  $n$  della varietà che dalla segnatura della sua metrica; quindi per una generica varietà differenziabile  $n$ -dim abbastanza regolare le equazioni di Killing sono  $n(n+1)/2$  (e i K-campi sono  $n$ -dim). Il problema di determinare le **isometrie infinitesime** (rispetto ad una data metrica  $g_{(2)}$ ) equivale insomma a quello di determinare i K-campi ad essa associati, soluzioni delle (4). Poiché infine una combinazione lineare di K-campi è un K-campo, l'insieme dei K-campi di una varietà metrica costituisce uno spazio lineare.

Le (4) si possono porre nella forma equivalente

$$(5) \quad \mathcal{L}_\xi g_{ik} = 0,$$

dove  $\mathcal{L}_\xi$  è la Lie-derivata lungo il K-campo  $\xi$ ; quindi le (5) esprimono la costanza, nel senso di Lie, della metrica lungo il K-campo  $\xi$ . (In tal caso si dice anche che la metrica è "Lie-conservata lungo  $\xi$ ".) La dimostrazione è quasi immediata partendo dalle (8.3.2, 3), che dà la Lie-derivata di un generico campo tensoriale. Applicandola al tensore metrico, in base all'espressione dei Chr2 in termini della metrica e delle sue derivate prime troviamo infatti  $0 = \mathcal{L}_\xi g_{ik} = \partial g_{ik} / \partial x^h \xi^h + g_{is} \partial \xi^s / \partial x^k + g_{kt} \partial \xi^t / \partial x^i = \partial g_{ik} / \partial x^h \xi^h + \partial \xi_i / \partial x^k - \partial g_{is} / \partial x^k \xi^s + \partial \xi_k / \partial x^i - \partial g_{kt} / \partial x^i \xi^t = \partial \xi_i / \partial x^k + \partial \xi_k / \partial x^i - 2 \xi_j \Gamma_{ik}^j$ , qed.

Diversamente dalle (4), le (5) hanno il merito di esibire esplicitamente i due oggetti in esse coinvolti, il campo vettoriale  $\xi$  ( $\equiv \xi_{(1)}$ ) e la metrica  $g_{(2)}$ . Se valgono le (5),  $\xi$  e  $g_{(2)}$  si dicono anche soddisfare una **simmetria di Killing** (o **K-simmetria**). La definizione può poi estendersi in modo naturale sostituendo a  $g_{(2)}$  un qualsiasi campo tensoriale, secondo la  $\mathcal{L}_\xi \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = 0$ . Quest'ultima ha

<sup>10</sup> W. Killing, "Über die Grundlagen der Geometrie", J. für die reine u. angew. Mathematik, 109, 121 (1892).

poi senso anche in una varietà non metrica. Notiamo infine che, se  $\xi$  e  $\eta$  sono K-campi, anche la loro parentesi di Lie  $[\xi, \eta]$  (che è un campo vettoriale) lo è: basta ricordare l'espressione (8.3.2, 14) di  $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}\tau$ , valida per un generico campo tensoriale  $\tau$ , e porre  $g_{(2)}$  in luogo di  $\tau$ . Allora  $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}g_{(2)} = (\mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi)g_{(2)} = \mathcal{L}_\xi(\mathcal{L}_\eta g_{(2)}) - \mathcal{L}_\eta(\mathcal{L}_\xi g_{(2)}) = 0$ .

L'idea della K-simmetria cui possono soddisfare  $\xi$  e  $g_{(2)}$  è punto di partenza per significative generalizzazioni, delle quali ci limitiamo peraltro a dare notizia. Ad esempio, se  $\alpha$  è una costante reale diversa da zero e  $\mathcal{L}_\xi g_{ik} = \alpha g_{ik}$ ,  $\xi$  e  $g_{(2)}$  si dicono soddisfare una **simmetria omotetica**; se  $\varphi = \varphi(x)$  è una funzione reale non nulla e abbastanza regolare, e  $\mathcal{L}_\xi g_{ik} = \varphi g_{ik}$ ,  $\xi$  e  $g_{(2)}$  (si dicono) soddisfare una **simmetria conforme** (una generalizzazione della simmetria omotetica); se  $(\mathcal{L}_\xi g_{ik})_{;j} = 0$  (si tenga presente che le  $\mathcal{L}_\xi g_{ik}$  sono componenti covarianti di un 2-tensore simmetrico),  $\xi$  e  $g_{(2)}$  (si dicono) soddisfare una **simmetria affine** (un'altra generalizzazione della simmetria omotetica); ..., e via elencando.

Tornando alla possibile K-simmetria di  $\xi$  e  $g_{(2)}$ , mostriamo adesso che, se  $\xi$  e il suo derivato covariante primo, diciamo  $\nabla\xi$ , sono assegnati in un punto di riferimento  $x_0$ , e se in  $x_0$  sono pure assegnati il tensore di Riemann e i suoi derivati di ogni ordine, le (4) permettono di ricavare  $\xi(x)$  in un intorno aperto  $\mathcal{U}_0$  di  $x_0$  sotto condizioni di sufficiente regolarità di  $\xi$  e  $g_{(2)}$ . Infatti per *qualunque* vettore  $V$  di CdC 2 valgono le formule di commutazione (3.4.2, 2)

$$(6) \quad V_{i/kh} - V_{i/hk} = -V_j \rho_{i\Gamma}^j{}_{kh},$$

dove  $\rho_{i\Gamma}^j{}_{kh}$  è la solita componente mista del tensore di Riemann. Sommando alle (6) le due permutazioni cicliche, e tenendo conto delle identità  $\rho_{i\Gamma}^j{}_{kh} + \rho_{k\Gamma}^j{}_{hi} + \rho_{h\Gamma}^j{}_{ik} \equiv 0$  (cfr. le (3.4.2, 10<sub>3</sub>)), troviamo  $V_{i/kh} + V_{k/hi} + V_{h/ik} - (V_{i/hk} + V_{k/ih} + V_{h/ki}) \equiv 0$ . Se in particolare  $V$  è un K-campo  $\xi$ , queste danno

$$(7) \quad \xi_{i/kh} - \xi_{h/ki} - \xi_{i/hk} = 0 = -\xi_j \rho_{i\Gamma}^j{}_{kh} - \xi_{h/ki},$$

perché la precedente somma di sei addendi ( $\equiv 0$ ) diventa il doppio del primo membro di quest'ultima (7); vale a dire, il derivato covariante secondo di  $\xi$ ,  $\nabla\nabla\xi$ , è una combinazione lineare dello stesso  $\xi$ , per il dato  $\rho_{(4)}$ . Derivando poi  $_{/s}$  le seconde (7) (sotto le convenienti ipotesi sulle CdC di  $\xi$  e  $g_{(2)}$ ), otteniamo:

$$(8) \quad \xi_{h/kis} = -\xi_j \rho_{i\Gamma}^j{}_{kh/s} - \xi_{j/s} \rho_{i\Gamma}^j{}_{kh};$$

cioè, il derivato covariante terzo di  $\xi$ ,  $\nabla\nabla\nabla\xi$ , è una combinazione lineare di  $\xi$  e di  $\nabla\xi$ , per i dati  $\rho_{(4)}$  e  $\nabla\rho_{(4)}$ . Ormai supponendo  $\xi$  e  $g_{(2)}$  indefinitamente derivabili, la procedura può essere ripetuta quanto si vuole, producendo così tutti i derivati covarianti di  $\xi$  (dal secondo in su) a partire da  $\xi$  e da

$\nabla\xi$ ; ovvero, equivalentemente, tutte i derivati standard di  $\xi$  (dal secondo in su) a partire da  $\xi$  e dal suo derivato standard primo  $\partial\xi$ .

Sia  $x_0$  un punto di riferimento, ove si suppongono assegnati  $\xi(x_0)$  e il derivato primo standard  $\partial\xi(x_0)$ ; sotto derivabilità indefinita in tale  $x_0$  di  $\xi$  e di  $g_{(2)}$ , in  $x_0$  sono quindi unicamente determinati i derivati standard di  $\xi$  di qualunque ordine  $\geq 2$ . Se  $\xi$  è supposto sviluppabile in serie di Taylor per  $x$  in un intorno aperto  $\mathcal{U}_0$  di  $x_0$  (cioè se la relativa serie è supposta ivi convergente), allora  $\xi = \xi(x)$  è unicamente determinato in  $\mathcal{U}_0$ . In definitiva, se la varietà è liscia e il  $K$ -campo è analitico in  $x_0$  potremo scrivere una formula del tipo:

$$(9) \quad \xi(x \in \mathcal{U}_0) = A^j(x, x_0) \xi_j(x_0) + B^{hk}(x, x_0) \xi_{h/k}(x_0),$$

dove  $A^j$  è una  $n$ -pla, e  $B^{hk}$  una  $[n(n-1)/2]$ -pla (perché le  $B^{hk}$  possono assumersi antisimmetriche) di funzioni vettoriali di  $(x, x_0)$ , unicamente determinate se la metrica e le sue derivate di ogni ordine sono date in  $x_0$ . Poiché le  $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$  componenti  $\xi_j(x_0)$  e  $\xi_{h/k}(x_0)$  possono essere assegnate ad arbitrio (in generale, non tutte diverse da zero), concludiamo che, sotto la supposta analiticità, l'insieme dei  $K$ -vettori in  $\mathcal{U}_0$  costituisce uno spazio lineare a  $n(n+1)/2$  dimensioni *al più*. Precisamente, se i valori  $\xi_j(x_0)$  e  $\xi_{h/k}(x_0)$  *non nulli* permessi dalla natura del problema sono  $0 \leq n' \leq n(n+1)/2$ , lo spazio in oggetto ha  $n'$  dimensioni, contenendo esattamente  $n'$   $K$ -campi linearmente indipendenti.

Il numero  $n'$  può essere assunto come misura della “simmetria” di  $g_{(2)}$ ; se  $n' = n(n+1)/2$ , la metrica  $g_{(2)}$ , e con essa la stessa varietà, si dicono **massimamente simmetriche in  $x_0$** . Se questo vale per ogni  $x_0$  della varietà, si parla di metrica (e varietà) massimamente simmetriche “localmente”. Se poi  $\mathcal{U}_0$  è l'intera varietà, allora si parla di metrica (e varietà) massimamente simmetriche “globalmente” (come è usuale, in circostanze di questo tipo, nel linguaggio della topologia).

Ricordando che la parentesi di Lie  $[ , ]$  di una coppia ordinata di  $K$ -campi è un  $K$ -campo, possiamo corredare questo spazio lineare  $n'$ -dim con il prodotto (non associativo)  $[ , ]$ , generando così un'algebra di Lie  $n'$ -dim. Questo è ovvio ponendo mente alle proprietà (a,b,c) della parentesi di Lie riportate nella S.sez 8.3.2, e alla definizione di algebra di Lie (v. ancora S.sez. 8.3.2). In conclusione, la totalità dei  $K$ -campi associati alla data metrica costituisce, con il prodotto  $[ , ]$ , è un'algebra di Lie  $n'$ -dim.

Una interessante proprietà generale dei  $K$ -campi di una varietà pseudoriemanniana  $n$ -dim è la seguente. Sia  $\lambda^i = \lambda^i(x)$  un campo *versoriale* le cui curve integrali  $C$  (cioè le  $x = x(s)$  soluzioni delle  $d_s x = \lambda$ ) siano geodetiche (non isotrope), e  $\xi_j$  un  $K$ -campo, di quella varietà. Il campo  $\lambda^i$  si dice talvolta **campo (versoriale) geodetico**. Consideriamo la derivata lungo  $C$  dell'invariante  $\xi_j \lambda^j$ , cioè

$\lambda^i \partial(\xi_j \lambda^j) / \partial x^i = \lambda^i (\xi_j \lambda^j)_{,i} = \lambda^i \xi_{j,i} \lambda^j + \lambda^i \xi_j \lambda^j_{,i}$ . Questa derivata è nulla: infatti, da una parte  $\xi_{j,i}$  è antisimmetrico (e contratto con il tensore simmetrico  $\lambda^i \lambda^j$  dà zero), e dall'altra  $\lambda^i \lambda^j_{,i}$  è zero per la proprietà di autoparallelismo delle geodetiche. Quindi  $\xi_j \lambda^j$  si conserva lungo ogni geodetica (non isotropa)  $C$ . Ad esempio, nel piano euclideo  $(x,y)$  con la metrica pitagorica standard  $g_{ik} = \delta_{ik}$ , i campi  $X =: (1,0)$  e  $Y =: (0,1)$  sono banalmente K-campi; quindi  $X_i \lambda^i = \lambda^x = dx/ds$ , e  $Y_i \lambda^i = \lambda^y = dy/ds$ , con  $ds = (dx^2 + dy^2)^{1/2}$ , sono conservati lungo ogni  $\Gamma$ . Questo è ovvio, perché in questo caso le curve  $C$  sono rette. Ancora nel precedente piano euclideo, anche  $R =: (-y,x)$  è un K-campo, e dunque  $R_i \lambda^i = -y \lambda^x + x \lambda^y = (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\lambda})_z$  è conservato lungo  $C$ . Anche questo è ovvio perché le curve  $C$  sono ancora rette, e  $(\mathbf{x} \times \boldsymbol{\lambda})_z$  non varia spostandosi lungo  $C$ .<sup>11</sup> Interpretando  $C$  come traiettoria (classica) di un punto materiale libero, nel primo caso la costanza di  $\lambda^x$  e  $\lambda^y$  esprime la conservazione della sua quantità di moto, e nel secondo quella del suo momento angolare (rispetto all'origine). Passando a coordinate polari  $(r,\phi)$ , legate alle  $(x,y)$  dalle usuali  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , per  $r = (x^2 + y^2)^{1/2} > 0$   $R' (\equiv R)$  ha componenti controvarianti  $R'^r = 0$  e  $R'^\phi = 1$ ; quindi  $R' = R'^r \partial / \partial r + R'^\phi \partial / \partial \phi = \partial / \partial \phi$ , così come  $R$  ha componenti controvarianti  $R^x = -y$  e  $R^y = x$ , e quindi  $R = R^x \partial / \partial x + R^y \partial / \partial y = -y \partial / \partial x + x \partial / \partial y$ . Si verifica facilmente che, come ci si aspetta, la metrica conservata lungo  $R \equiv R'$  secondo le (5),  $\mathcal{L}_R g_{ik} = 0$ , è indipendente da  $\phi$ .

### 9.5.3) IL TEOREMA DI BIRKHOFF

Daremo ora una dimostrazione di quel **teorema di Birkhoff**<sup>12</sup> cui abbiamo accennato nella precedente sottosezione. Essa si divide in due parti. La prima parte prova che una metrica “isotropa” (in una conveniente accezione) rispetto ad una origine spaziale  $r = 0$  deve effettivamente avere la struttura (9.5.1, 1). La seconda parte, concettualmente meno impegnativa, prova che la (9.5.1, 1) può sempre ridursi, in una carta opportuna, alla metrica esterna di Schwarzschild

<sup>11</sup> Si noti che le curve integrali di  $X$  [di  $Y$ ] sono rette parallele all'asse  $(x)$  [all'asse  $(y)$ ]; mentre quelle di  $R$ , per  $r (\equiv$  distanza dall'origine)  $> 0$ , sono cerchi con centro nell'origine e raggio  $r$ , orientati in senso positivo (sinistrorso).

<sup>12</sup> G. Birkhoff, in “Relativity and Modern Physics”, Harvard Un. Press., Cambridge (1923). Il teorema di Birkhoff ha notevole importanza nelle applicazioni della relatività generale, ed è stato esteso in varie direzioni: ad esempio, alla presenza di una costante cosmologica nelle equazioni di campo, a varietà lorentziane di dimensione  $n \geq 2$ , a varietà pseudoriemanniane generiche, a gruppi di simmetria diversi da quello delle rotazioni spaziali, ecc. Non solo, ma nella sua versione originale esso è stato ottenuto indipendentemente da altri matematici, anche *prima* di Birkhoff: da J. Jebsen, Ark. Math. Phys., **15**, n° 18, 1 (1921), da J. Eiesland, Am. Math. Soc. bf **27**, 410 (1921), e da W. Alexandrov, Ann. Physik **72**, 141 (1923). H. Gönner (vedi in Comm. Math. Phys., **16**, 34 (1970)) ha addirittura curato una storia del teorema e delle sue generalizzazioni aggiornata al 1970. Tra gli specialisti di relatività generale di orientamento matematico è quindi comune intendere come “teorema di Birkhoff” una varietà di teoremi affini, di portata alquanto più astratta e generale di quella proposta qui di seguito.

(9.5.1, 7) anche senza assumere l'indipendenza da  $t$  di  $a$  e di  $b$ . In altre parole, la sola isotropia della metrica implica di per sé che sia soddisfatta la (9.5.1, 7).

Dovremo innanzitutto dare una ragionevole definizione di metrica isotropa (rispetto ad una origine spaziale) conveniente alla situazione considerata. Sia  $M^4$  una varietà pseudoriemanniana 4-dim di metrica  $g_{(2)}$ , *piatta* ( $\equiv$  il tensore di Riemann è identicamente nullo in  $M^4$ ), riferita a coordinate generiche  $\{x^i\}_{i=1 \div 4}$ . Siano  $\xi_j$  le componenti covarianti di un K-campo in  $M^4$ . Valendo la seconda (9.5.2, 7), risulta  $\xi_{j/hk} = 0$ , o equivalentemente  $\partial_{hk}^2 \xi_j \equiv 0$  in  $M^4$ . Segue da ciò che

$$(1) \quad \xi_j = a_j + b_{jp} x^p,$$

dove  $a_j$  e  $b_{jp}$  sono costanti. Inoltre le  $b_{jp}$  devono essere antisimmetriche, ovvero

$$(2) \quad b_{jp} + b_{pj} = 0,$$

in forza delle equazioni di Killing (le costanti nelle (1) sono quindi dieci in tutto, quanti sono al più i K-campi indipendenti di  $M^4$ ). Supponiamo adesso  $M^4$  lorentziana ( $\equiv$  la sua metrica ha tre autovalori positivi e uno negativo). Diremo che la *terna*  $\{\xi_I\}_{I=1 \div 3}$  di K-campi di  $M^4$ , nessuno dei quali identicamente nullo, è **isotropa**, se (i): i tre K-campi sono space-like ( $\equiv g_{ik} \xi_I^i \xi_I^k$  è definita positiva per ogni  $I$ ); (ii): nelle coordinate standard  $(X^1, X^2, X^3, X^4) \equiv (X, Y, Z, cT)$ , in cui la metrica è  $g_{ik} \equiv G_{ik} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$ ,  $a_{I\alpha}$  (vedi la (1)) = 0  $\forall (I, \alpha) = 1, 2, 3$  (ove  $I$  è indice del K-campo e  $\alpha$  è indice di componente spaziale); e (iii):

$$(3) \quad [\xi_I, \xi_{I+1}] = \xi_{I+2}$$

(leggi  $I \text{ mod } 3$ ), dove  $[ \ , \ ]$  è la parentesi di Lie. In particolare la (3), che assicura l'indipendenza lineare dei tre K-campi, significa che l'algebra di Lie da essi generata, con la parentesi di Lie come prodotto, è isomorfa a quella generata dai corrispondenti versori coordinati  $e_i$  di  $E_3$  (spazio cartesiano ortogonale 3-dim), con il prodotto vettoriale standard  $\times$  come prodotto.

Esaminiamo ora le conseguenze delle richieste (i,ii,iii) nel riferimento  $(X^1, X^2, X^3, X^4)$ . In questo riferimento, denoteremo con lettere maiuscole tutte le corrispondenti grandezze e trascureremo, finché sia omogeneamente presente nelle relazioni scritte, l'indice  $I$ . La richiesta (i), cioè che la  $G_{ik} \Xi_i \Xi_k$  sia definita positiva, equivale alla

$$(4) \quad \Xi_4 \equiv 0;$$

quindi, per le (1),  $A_4 = 0$  e  $B_{4\beta} = 0$  (e perciò anche  $B_{\alpha 4} = 0$  in forza dell'antisimmetria (2)).

Sempre in forza delle (1), la richiesta (ii) significa che (indici greci variabili su  $1 \div 3$ )

$$(5) \quad \Xi_\alpha = B_{\alpha p} X^p = B_{\alpha\beta} X^\beta,$$

ove la seconda uguaglianza segue dalla  $B_{\alpha 4} = 0$ . Come ci si aspetta, nel riferimento  $(X^1, X^2, X^3, X^4)$  le equazioni di Killing  $\partial_i \Xi_j + \partial_j \Xi_i = 0$  sono automaticamente soddisfatte dalle (2, 4, 5). Infatti, per  $i = j = 4$ , la  $\partial_4 \Xi_4 = 0$  è soddisfatta dalla (4); per  $i = \alpha, j = \beta$ , le  $\partial_\alpha \Xi_\beta + \partial_\beta \Xi_\alpha = 0$ , cioè le

$B_{\alpha\beta} + B_{\beta\alpha} = 0$ , sono soddisfatte dalle (2); e infine, per  $i = \alpha, j = 4$ , le  $\partial_\alpha \Xi_4 + \partial_4 \Xi_\alpha = 0 = \partial_4 \Xi_\alpha$ , sono ancora soddisfatte dalle (5).

Passando infine alla richiesta (iii), il punto di partenza è la definizione (8.3.2, 3\*) di parentesi di Lie. Combinando questa (iii) con le (5) e restaurando l'indice (i), per l'arbitrarietà di X troviamo (somma sugli indici ripetuti)

$$(6) \quad B_{i,\beta\gamma} B_{i+1,\alpha\beta} - B_{i+1,\beta\gamma} B_{i,\alpha\beta} = B_{i+2,\alpha\gamma},$$

per ogni  $\alpha, \gamma$ , e ogni I. Le (6) costituiscono un sistema algebrico non lineare di nove equazioni (per ogni  $I = 1 \div 3$  abbiamo infatti due indici liberi  $\alpha, \gamma$ , che peraltro compaiono antisimmetricamente in ogni equazione) nelle altrettante  $B_{i,\alpha\beta}$ . (Come si constata subito, entrambi i membri della (6) cambiano segno se si scambiano tra loro  $\alpha$  e  $\gamma$ .) Si verifica poi che

$$(7) \quad B_{i,\alpha\beta} = \varepsilon_{i\alpha\beta},$$

dove  $\varepsilon_{i\alpha\beta}$  è il simbolo completamente antisimmetrico 3-dim standard, soddisfa il sistema (6). I corrispondenti K-campi  $\Xi_i$  risultano piani (infatti, oltre alla  $\Xi_i^4$ , anche la componente  $\Xi_i^1$  è nulla), e le curve integrali di  $\Xi_i$  sono cerchi del piano normale all'asse orientato  $X^i$ , con centro nell'origine e orientati conformemente alla regola del cavatappi rispetto all'asse  $X^i$ . Vale a dire, per i K-campi la simmetria di rotazione rispetto a un polo diventa simmetria di rotazione rispetto a ciascuno dei tre assi coordinati. Queste proprietà della soluzione (7) siano abbastanza stringenti da suggerirne l'unicità come evidente.<sup>13</sup>

Trascurando di indicare la quarta componente (nulla) dei  $\Xi_i$ , otteniamo così

$$(8_1) \quad \Xi_1 = (0, Z, -Y),$$

$$(8_2) \quad \Xi_2 = (-Z, 0, X),$$

$$(8_3) \quad \Xi_3 = (Y, -X, 0);$$

ove la (3x3)-matrice le cui righe sono nell'ordine i secondi membri di queste (8) è antisimmetrica.

In conclusione la terna isotropa (rispetto all'origine  $X = Y = Z = 0$ ) di K-campi definita dalle richieste (i,ii,iii) esiste unica, ed è data dalle (8) nel riferimento (X) (cartesiano ortogonale destro). Le componenti controvarianti dei  $\Xi_i$  sono allora unicamente determinate, mediante le usuali leggi di trasformazione, in una generica carta congiunta  $x = x(X)$ ; e per esse continuano ovviamente a valere le (3). Denoteremo con  $\xi_i^i$  tali componenti nella nuova carta. Se, come supporremo, la trasformazione  $x = x(X)$  è soltanto spaziale, cioè del tipo  $x^\alpha = x^\alpha(X^\beta)$ ,  $x^4 = X^4$ , allora le quarte componenti  $\xi_i^4$  sono nulle come quelle nella carta (X).

<sup>13</sup> Si può considerare l'alternativa di sostituire alla (3) la  $[\xi_i, \xi_{i+1}] = -\xi_{i+2}$ . Questo comporta che alla (7) si sostituisca la  $B_{i,\alpha\beta} = -\varepsilon_{i\alpha\beta}$ , e quindi, soltanto l'inversione dell'orientamento dei cerchi nominati nel testo.

La metrica  $g_{ik}$  nella nuova carta  $x^\alpha = x^\alpha(X^\beta)$ ,  $x^4 = X^4$  si dice **isotropia** (rispetto all'origine spaziale della carta (X)) se è Lie-conservata lungo i tre K-campi della terna isotropa, quindi se  $\mathcal{L}_\xi g_{ik} = 0$  per  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$ ,  $\xi = \xi_3$ .<sup>14</sup> (È ovvio che la metrica  $G_{ik}$  è isotropa secondo questa definizione, e possiamo verificarlo direttamente. Ad esempio, per  $\Xi = \Xi_1$  abbiamo  $\mathcal{L}_{\Xi_1} G_{ik} = G_{jk} \partial_i \Xi_1^j + G_{ij} \partial_k \Xi_1^j = \delta_{2k} \delta_{i3} - \delta_{3k} \delta_{2i} + \delta_{i2} \delta_{k3} - \delta_{3i} \delta_{k2} \equiv 0$ .)

Il passo successivo consiste nel passare dalle componenti cartesiane (8) alle corrispondenti componenti controvarianti in coordinate spaziali sferiche  $(x^1, x^2, x^3) \equiv (r, \theta, \phi)$ , perché questa è la carta usata nella metrica (9.5.1, 1). Le usuali relazioni  $X = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $Y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $Z = r \cos \theta$  sono invertibili rispetto alle  $(r, \theta, \phi)$  sse il relativo determinante jacobiano è diverso da zero, cioè sse  $r > 0$  e  $\sin \theta \neq 0$ . Con questa riserva, si trova (sempre ignorando le quarte componenti delle  $\xi_I$ , nulle):

$$(9_1) \quad \xi_1 = (0, \sin \phi, \operatorname{ctg} \theta \cos \phi)$$

$$(9_2) \quad \xi_2 = (0, -\cos \phi, \operatorname{ctg} \theta \sin \phi)$$

$$(9_3) \quad \xi_3 = (0, 0, -1). \quad ^{15}$$

Si noti che nella  $\phi$ -componente di  $\xi_1$  e  $\xi_2$  compare un  $\sin \theta$  a denominatore, legittimamente perché abbiamo supposto  $\sin \theta \neq 0$ . Il fatto che le  $r$ -componenti delle  $\xi_I$  siano nulle è una naturale conseguenza della isotropia della terna  $\{\xi_I\}_{I=1,2,3}$ .

Le equazioni da usare sono le (9.5.2, 5), cioè le

$$(10) \quad \mathcal{L}_\xi g_{ik} = \xi^j \partial_j g_{ik} + g_{jk} \partial_i \xi^j + g_{ij} \partial_k \xi^j = 0,$$

dove  $\xi$  sta alternativamente per  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  e  $\xi_3$ . Si tratta dunque di un sistema di trenta equazioni differenzialparziali lineari nelle dieci  $g_{ik}$ ; ma la situazione è meno complicata di quanto sembra a prima vista. Per cominciare, usando  $\xi_3$  nelle (10), si trova subito che

$$(11) \quad \partial_\phi g_{ik} = 0$$

per ogni  $i, k = 1 \div 4$ : cioè nessuna  $g_{ik}$  dipende da  $\phi$ , come era naturale aspettarsi. Le altre venti derivate delle  $g_{ik}$  si ricavano in modo un po' meno banale. Usando  $\xi = \xi_1$  nelle (10), abbiamo, tenendo conto delle (11): per  $i = k = 1$ ,  $\sin \phi \partial_\theta g_{11} + 2g_{1j} \partial_r \xi_1^j = \sin \phi \partial_\theta g_{11} = 0$ ; per  $i = 1, k = 4$ ,  $\sin \phi \partial_\theta g_{14} = 0$ ; e per  $i = k = 4$ ,  $\sin \phi \partial_\theta g_{44} = 0$ . Già sulla base di queste relazioni si potrebbe concludere che le derivate rispetto a  $\theta$  di  $g_{11}$ ,  $g_{14}$  e  $g_{44}$  sono nulle, perché esse non dipendono da  $\phi$ , e  $\sin \phi$  può ben essere  $\neq 0$ . Per miglior simmetria, è tuttavia meglio procedere parallelamente ponendo

<sup>14</sup> Un punto blandamente debole della presente dimostrazione del teorema di Birkhoff sta nella semplice plausibilità di questa definizione di metrica isotropa.

<sup>15</sup> È più comodo verificare la correttezza delle (9) piuttosto che ricavarle (evitando così l'inversione  $X = X(x)$ ) mediante le  $\Xi_I^{(X,Y,Z)} = \xi_I^\alpha (\partial_\alpha X, \partial_\alpha Y, \partial_\alpha Z)$  (leggi uno alla volta  $(X, Y, Z)$  e somma su  $\alpha$ ). Ad esempio,  $\Xi_1^Y = 0 \cdot \partial_r Y + \sin \phi \partial_\theta Y + \operatorname{ctg} \theta \cos \phi \partial_\phi Y = \sin \phi (r \cos \theta \sin \phi) + \operatorname{ctg} \theta \cos \phi (r \sin \theta \cos \phi) = r \cos \theta = Z$ . L'unicità delle (9) è poi ovvia.

$\xi = \xi_2$  nelle (10). Si riottengono così le tre uguaglianze precedenti, ma con  $\cos\phi$  in luogo di  $\sin\phi$ . Basterà allora quadrare e sommare le due uguaglianze di ogni coppia per avere

$$(12) \quad \partial_0(g_{11}, g_{14}, g_{44}) = 0.$$

Abbiamo fin qui utilizzato sedici delle trenta condizioni (10), dalle quali abbiamo dedotto che  $g_{11}, g_{14}, g_{44}$  dipendono al più da  $(r,t)$  (non dipendendo nemmeno da  $\phi$  in base alle (11)). Le rimanenti quattordici condizioni (10) si suddividono in sette coppie (di condizioni) tra loro corrispondenti: una si ottiene operando con  $\xi = \xi_1$ , e l'altra si ottiene operando allo stesso modo con  $\xi = \xi_2$ . Si passa inoltre dalla prima condizione (per  $\xi = \xi_1$ ) della coppia alla seconda (per  $\xi = \xi_2$ ) sostituendo nella prima  $\sin\phi$  con  $-\cos\phi$  e  $\cos\phi$  con  $\sin\phi$ . Ad esempio, ponendo nelle (10)  $\xi = \xi_1$  e  $i = k = 2$ , e tenendo conto delle (11) si trova:

$$(13_1) \quad \sin\phi \partial_0 g_{22} = 2\cos\phi g_{23}/\sin^2\theta,$$

mentre la condizione partner ( $\xi = \xi_2$ ) è

$$(13_1') \quad -\cos\phi \partial_0 g_{22} = 2\sin\phi g_{23}/\sin^2\theta.$$

Procedendo in modo simile, si hanno le seguenti "prime" condizioni delle altre sei coppie:

$$(13_2) \quad \sin\phi(\partial_0 g_{33} - 2g_{33}\text{ctg}\theta) = -2\cos\phi g_{23},$$

$$(13_3) \quad \sin\phi \partial_0 g_{12} = \cos\phi g_{13}/\sin^2\theta,$$

$$(13_4) \quad \sin\phi(\partial_0 g_{13} - g_{13}\text{ctg}\theta) = -\cos\phi g_{12},$$

$$(13_5) \quad \sin\phi(\partial_0 g_{23} - g_{23}\text{ctg}\theta) = \cos\phi(-g_{22} + g_{33}/\sin^2\theta)$$

$$(13_6) \quad \sin\phi \partial_0 g_{24} = \cos\phi g_{34}/\sin^2\theta,$$

$$(13_7) \quad \sin\phi(\partial_0 g_{34} - g_{34}\text{ctg}\theta) = -\cos\phi g_{24},$$

le cui partners (13<sub>2'</sub>÷13<sub>7'</sub>) si ottengono tutte, come già detto, mediante le sostituzioni  $\sin\phi \rightarrow -\cos\phi$ ,  $\cos\phi \rightarrow \sin\phi$ .

Le (13<sub>1</sub>, 13<sub>1'</sub>) implicano  $g_{23} = 0$  (basta moltiplicare la prima per  $\cos\phi$  e la seconda per  $\sin\phi$ , e sommare), quindi  $\partial_0 g_{22} = 0$ . Analogamente, le (13<sub>3</sub>, 13<sub>3'</sub>) implicano  $g_{13} = 0$ , quindi  $\partial_0 g_{12} = 0$ ; e le (13<sub>6</sub>, 13<sub>6'</sub>),  $g_{34} = 0$ , quindi  $\partial_0 g_{24} = 0$ . Allora le (13<sub>5</sub>, 13<sub>5'</sub>) danno (°)  $g_{22}\sin^2\theta = g_{33}$  (basta moltiplicare il 2° membro della prima per  $\cos\phi$  e il 2° membro della seconda per  $\sin\phi$  e sommare). Analogamente le (13<sub>4</sub>, 13<sub>4'</sub>) danno  $g_{12} = 0$ ; e le (13<sub>7</sub>, 13<sub>7'</sub>),  $g_{24} = 0$ . In definitiva, non sono nulle soltanto le quattro  $g_{ik}$  diagonali ( $g_{22}$  e  $g_{33}$  essendo legate dalla (°)), e in più la  $g_{14}$ . Queste cinque componenti non nulle  $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}, g_{14}$ , sono funzioni delle sole  $(r,t)$ , salvo  $g_{33}$  (che è uguale a  $g_{22}\sin^2\theta$ ).

La prima parte del teorema di Birkhoff, che convalida la correttezza della metrica (9.5.1, 1), cioè l'assenza dei termini rettangolari in  $\text{drd}\theta$  ( $g_{12} = 0$ ),  $\text{drd}\phi$  ( $g_{13} = 0$ ),  $\text{dtd}\theta$  ( $g_{24} = 0$ ),  $\text{dtd}\phi$  ( $g_{34} = 0$ ),  $\text{d}\theta\text{d}\phi$  ( $g_{23} = 0$ ); cioè  $g_{ik} = 0$  per  $i \neq k$  con l'eccezione di  $g_{14}$ , è così dimostrata.



La prova che la (9.5.1, 1) si può sempre trasformare nella (9.5.1, 2) è già stata data. Passiamo ora alla seconda parte della dimostrazione del teorema di Birkhoff. Anche se non è indispensabile, conviene riscrivere la (9.5.1, 2) nella forma:

$$(14) \quad ds^2 = \exp[n(r,t)]dr^2 + r^2d\Omega^2 - \exp[m(r,t)]c^2dt^2,$$

dove  $n$  e  $m$  sono funzioni di  $(r,t)$  definite banalmente. Le dieci componenti (simmetriche) di  $\rho_{ik} = \rho_{i^j k}$  si esprimono in termini delle  $n$  e  $m$  secondo le seguenti

$$(15_1) \quad \rho_{11} = \partial_r^2 m/2 - \partial_r m \partial_r n/4 + (\partial_r m)^2/4 - \partial_r n/r - \exp[n-m]\{\partial_t^2 n/2 - \partial_t n \partial_t m/4 + (\partial_t n)^2/4\},$$

$$(15_2) \quad \rho_{22} = -1 + \exp[-n]\{1 + r\partial_r(m-n)/2\},$$

$$(15_3) \quad \rho_{33} = \rho_{22}\sin^2\theta,$$

$$(15_4) \quad \rho_{44} = -\exp[m-n]\{\partial_r^2 m/2 - \partial_r m \partial_r n/4 + (\partial_r m)^2/4 + \partial_r m/r\} + \partial_t^2 n/2 - \partial_t n \partial_t m/4 + (\partial_t n)^2/4,$$

$$(15_5) \quad \rho_{14} = -\partial_t n/r,$$

più le cinque  $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho_{24} = \rho_{34} = 0$ . Si noti che le cinque componenti nulle di  $\rho_{(2)}$  e di  $g_{(2)}$  hanno gli stessi indici.

Annuliamo il tensore  $\rho_{(2)}$ , come è richiesto dalle equazioni di campo nel vuoto.<sup>16</sup> Dalla (15<sub>5</sub>) segue

$$(16) \quad \partial_t n = 0,$$

e quindi  $n = n(r)$ ; e dalle (15<sub>1</sub>, 15<sub>4</sub>),

$$(17) \quad \partial_r(m+n) = 0,$$

e quindi  $m(r,t) + n(r)$  è funzione della sola  $t$ , diciamola  $f$ . Ora  $\exp[m]dt^2$  (opposto dell'ultimo termine della (14) diviso per  $c^2$ ) può scriversi come  $\exp[m-f]dt^{*2} = \exp[-n]dt^{*2}$  avendo posto  $dt^* = \exp[f/2]dt$ . Sopprimendo come al solito l'asterisco su  $t$ , siamo così ridotti alla

$$(27) \quad ds^2 = \exp[n(r)]dr^2 + rd\Omega^2 - \exp[-n(r)]c^2dt^2,$$

cioè alla (9.5.1, 2) con  $a$  e  $b = a^{-1}$  funzioni della sola  $r$ . Questo risultato è stato ottenuto senza richiedere la stazionarietà della metrica, come era stato fatto in precedenza; l'ipotesi di stazionarietà della metrica non era dunque necessaria. Questo è quanto ci restava da provare, e conclude la nostra illustrazione del teorema di Birkhoff.<sup>17</sup>

<sup>16</sup> Avevamo già supposto  $\rho_{1^j k^i} = 0$ , e non soltanto  $\rho_{ir} = 0$ , nella dimostrazione della prima parte del teorema.

<sup>17</sup> Volendo, a questo punto si può facilmente riprodurre la metrica esterna di Schwarzschild, ad esempio utilizzando la (15<sub>2</sub>). Precisamente, dalla  $\rho_{22} = 0$  scende  $d_r(\exp[-n(r)]) = 1$ , e quindi, elementariamente, la soluzione  $\exp[-n(r)] = 1 - C/r$ , dove  $C$  è una costante arbitraria.

#### 9.5.4) DINAMICA RELATIVISTICA-GENERALE DEL PUNTO MATERIALE E DEL FOTONE

Seguono due sessioni sulla dinamica relativistica-generale del punto materiale, e una terza su quella del fotone. Le sessioni §2 e §3 sono importanti in ordine alle convalide sperimentali della relatività generale.

§1. Per cominciare, presenteremo alcune considerazioni generali, in gran parte riassuntive, sulla dinamica del punto materiale, intese a porre in evidenza sia le affinità che le difformità che si incontrano passando dal modello classico a quello relativistico speciale (RS) e a quello relativistico generale (RG). L'assioma  $A_2$  (v. S.sez. 9.3.5), sul quale si fonda la dinamica RG di un punto P di piccola massa nello spazio-tempo ( $\equiv$  varietà differenziabile 4-dim di data metrica con segnatura  $\langle 3,1 \rangle$ ), contiene forti elementi di novità rispetto dinamica RS (di Einstein-Lorentz) e a maggior ragione nel modello classico. Come sappiamo, in entrambi questi casi il modello si formalizza in un SDO normale di tre equazioni in tre incognite, secondo cui la t-derivata 2<sup>a</sup> della posizione  $y \equiv y^{1 \leq i \leq 3}$  di P nello spazio euclideo-cartesiano è uguagliata ad un (vettore 3-dim)  $\phi$  funzione di  $(t, y, d_t y)$  e di un parametro invariante  $> 0$ , legato esclusivamente all'identità di P: la sua "massa classica", o "massa" tout court  $m_{cl}$  in dinamica classica, e la sua "massa relativistica di quiete"  $m_{rel}^0$  in dinamica RS. Come sappiamo,  $m_{cl}$  e  $m_{rel}^0$  sono numericamente identiche,  $m_{cl} \equiv m_{rel}^0$ ; ma in dinamica RS si introduce anche una "massa relativistica di moto" di P,  $m_{rel} = \gamma m_{rel}^0$ , dove  $\gamma$  è l'usuale fattore RS  $(1 - d_t y^2/c^2)^{-1/2}$ . Per  $d_t y = 0$ ,  $m_{rel} = m_{rel}^0 \equiv m_{cl}$ . Conviene pertanto semplificare le notazioni scrivendo  $m$  per  $m_{rel}$  e  $m^0$  per  $m_{rel}^0$ , riferendo tale  $m^0$  anche alla massa classica. Vale a dire, nella dinamica classica e in quella RS si ha

$$(1^1_0) \quad d_t^2 y^i = \phi^i(t, y, d_t y | m^0).$$

Il vettore 3-dim  $\phi$  nella  $(1^1_0)$  è del tipo  $f/m^0$  in dinamica classica, e del tipo  $f/(\gamma m^0)$  o  $[1 + \gamma^2 v v/c^2]^{-1}$  (con  $v =: d_t y$ ,  $\mathbf{1} \equiv (3 \times 3)$ -matrice identità e  $[ ]^{-1} \equiv$  matrice inversa della  $[ ]$ , quest'ultima essendo non singolare) in dinamica RS, ove  $f \equiv f^{1 \leq i \leq 3}$  è un vettore 3-dim funzione di  $(t, y, d_t y)$  che diciamo "forza agente su P", fornita dal modello (classico o RS) caso per caso. Ovviamente,  $\phi$  non dipende dal parametro invariante  $m^0$  sse  $f$  è ad esso proporzionale.

Questo caso –  $f$  proporzionale a  $m^0$  – è di gran lunga il più importante che si considera in relatività generale, perché la teoria si occupa essenzialmente di forze gravitazionali per l'appunto proporzionali a  $m^0$ . Più precisamente, la stessa nozione di "forza" agente su P può essere sostanzialmente bandita dalla dinamica RG, riducendosi ad una mera e artificiosa eredità dei modelli precedenti (classico o RS): in RG la sola massa che si considera è quella che genera campo

gravitazionale “potenziante”, perché il moto della massa “potenziata” dipende soltanto dalle proprietà dello spazio-tempo.

Diciamo al solito  $x^{1 \leq i \leq 3}$  le coordinate spaziali e  $x^4 = ct$  la coordinata temporale, in una generica carta  $C$ , della varietà  ${}^1L^4$ . Facendo uso, come parametro lungo la linea di universo di  $P$ , del suo **tempo proprio relativistico generale**  $\tau$  – per il quale è  $-c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  –, secondo  $A_2$  la dinamica RG di  $P$  è governata da un SDO normale del 2° ordine del tipo

$$(1^i) \quad d_\tau^2 x^i = \varphi^i,$$

con  $i = 1 \div 4$  (quindi un SDO di quattro, e non tre, equazioni, in quattro incognite  $x^i$ ) in cui  $\varphi^i$  è una forma quadratica nelle  $d_\tau x^i$  con coefficienti funzioni date di  $x \equiv x^{1 \leq i \leq 4}$ . Come sappiamo,  $\varphi^i = -\Gamma_{hk}^i(x) d_\tau x^h d_\tau x^k$ , dove  $\Gamma_{hk}^i$  sono i Chr2 della varietà, per la data metrica  $g_{(2)} = g_{(2)}(x)$ , e  $x = x(\tau)$ ; quindi nessuna massa compare in  $\varphi^i$ , come abbiamo detto più sopra.

Posto  $\Gamma =: d_\tau t$  (v. S.sez. 9.3.1) il 1° membro della (1<sup>i</sup>) si scrive anche  $\Gamma d_t(\Gamma d_t x^i)$ ; quindi, volendo proporre un possibile parallelo tra le (1<sup>i</sup>),  $i = 1 \div 3$ , e la dinamica RS nella forma

$$(2^i) \quad \gamma d_t(\gamma d_t y^i) = k^i/m^0,$$

ove a 2° membro vi è la forza di Minkowski  $k^i$  divisa per la massa di quiete  $m^0$ , si dovrebbe pensare alle (1<sup>i</sup>) come ad una generalizzazione delle (2<sup>i</sup>) ottenuta sostituendo in queste ultime  $\gamma$  con  $\Gamma$  e  $k^i/m^0$  con  $-\Gamma_{hk}^i(x) d_\tau x^h d_\tau x^k \equiv -c^2 \Gamma^2 (\Gamma_{\eta\kappa}^i u^\eta u^\kappa / c^2 + 2\Gamma_{\eta 4}^i u^\eta / c + \Gamma_{44}^i) \equiv -c^2 \Gamma^2 Q^i$  (avendo scritto  $u^i$  in luogo di  $d_t x^i$  e  $Q^i$  in luogo della parentesi a 2° membro). La versione risultante della (1<sup>i</sup>), così modificata in modo soltanto formale, è dunque:

$$(3^i) \quad d_t u^i + u^i d_t \Gamma / \Gamma = -c^2 Q^i,$$

dove il 2° membro dipende soltanto da  $x^i$  e  $ct$  (attraverso i Chr2) e dalle  $u^{1 \leq i \leq 3}$ . La  $d_t \Gamma / \Gamma$  a 1° membro della (3<sup>i</sup>) si ottiene poi mediante la (1<sup>i=4</sup>)  $\equiv$  (1<sup>4</sup>), cioè dalla

$$(1^{4bis}) \quad c \Gamma d_t \Gamma = -\Gamma_{hk}^4(x) d_\tau x^h d_\tau x^k \equiv -c^2 \Gamma^2 Q^4,$$

dove  $Q^4$  è definito come  $Q^i$ , ma con (4) in luogo di (i); vale a dire,

$$(1^{4ter}) \quad d_t \Gamma / \Gamma = -c Q^4.$$

Ci si chiede a questo punto se sia possibile eliminare  $d_t \Gamma / \Gamma$  dalle (3<sup>i</sup>) *senza* ricorrere alla (1<sup>4ter</sup>), sulla falsariga di quanto si fa in dinamica RS con l’eliminazione di  $d_t \gamma / \gamma$  dalle

$$(2^{ibis}) \quad d_t v^i + v^i d_t \gamma / \gamma = k^i / (m^0 \gamma^2).$$

La risposta è positiva, perché (ricordiamo)  $\Gamma$  è determinato dall’integrale primo delle (1<sup>i</sup>)  $g_{hk} d_\tau x^h d_\tau x^k = -c^2$ . Precisamente, risulta (cfr. la (9.5.1, 10)):

$$(4) \quad \Gamma = [-g_{44} - 2\gamma_\kappa u^\kappa \sqrt{(-g_{44})} / c - (\gamma_{\eta\kappa} - \gamma_\eta \gamma_\kappa) u^\eta u^\kappa / c^2]^{-1/2},$$

dove i coefficienti  $\gamma_\kappa$  e  $\gamma_{\eta\kappa}$  hanno i soliti significati in termini di  $g_{(2)}$ , e dipendono dunque da  $(x^i, ct)$ . Si ha così  $d_t\Gamma/\Gamma = -(\Gamma^2/2)d_t[\ ]$ , dove la  $[ \ ]$  è quella che figura a 2° membro della (4). In  $-d_t[\ ]$ , ci interessano qui in particolare i termini in  $d_t u^{1\leq i\leq 3}$  (che vi sono contenuti linearmente), cioè i termini  $(2/c)[\gamma_\kappa\sqrt{-g_{44}} + (\gamma_{\eta\kappa} - \gamma_\eta\gamma_\kappa)u^\eta/c]d_t u^\kappa \equiv (2/c)\alpha_\kappa d_t u^\kappa$ . La (1<sup>i</sup>) può così risciversi come:

$$(5^i) \quad (\delta_\kappa^i + \Gamma^2\alpha_\kappa u^i/c)d_t u^\kappa = -c^2 Q^i + \text{altri termini che non contengono le } d_t u^{1\leq i\leq 3}.$$

La (5<sup>i</sup>) somiglia da vicino alla corrispondente  $(\delta_\kappa^i + \gamma^2 v_\kappa v^i/c^2)d_t v^\kappa = k^i/(\gamma^2 m^0)$  della dinamica RS, alla quale si riduce per  $g_{44} = -1$  e  $\gamma_{1\leq i\leq 3} = 0$ . Infatti in tal caso  $\Gamma$  si riduce a  $\gamma$  (perché  $\gamma_{i\kappa} u^i u^\kappa$  diventa  $u^2 \equiv v^2$ ), e  $\alpha_\kappa$  si riduce a  $u_\kappa/c \equiv v_\kappa/c$ ; inoltre gli “altri termini” a 2° membro della (5<sup>i</sup>) mancano, mentre  $-c^2 Q^i$  si identifica con  $k^i/(\gamma^2 m^0)$ . In conclusione, se la matrice  $(\delta_\kappa^i + \Gamma^2\alpha_\kappa u^i/c)$  è non singolare, <sup>18</sup> abbiamo separato dal SDO normale del 2° ordine originale (1<sup>i</sup>) un SDO, ancora normale del 2° ordine, di sole tre equazioni nelle tre incognite  $x^{1\leq i\leq 3} = x^{1\leq i\leq 3}(t)$ . La sola difformità tra il SDO di quattro equazioni (1<sup>i</sup>) e il nuovo SDO di tre equazioni (5<sup>i</sup>) è che il primo è autonomo ( $\equiv$  i suoi secondi membri non dipendono esplicitamente da  $\tau$ ), mentre il secondo in generale non lo è. Naturalmente ci si aspetta che la soluzione  $x^i = x^i(\tau)$  del SDO (1<sup>i</sup>), e la soluzione  $x^i = x^i(t)$  del SDO (5<sup>i</sup>), che ora converrà scrivere  $*x^i = *x^i(t)$ , siano equivalenti a parità di condizioni accessorie; con ciò intendendosi che  $x^i(\tau) = *x^i(t(\tau))$  con  $ct(\tau) = \int_{\tau=0}^\tau d_\tau x^4(\tau')d\tau' + ct(0)$ . Questo è certamente vero, perché  $g_{hk}(x)d_\tau x^h d_\tau x^k = -c^2$ , da cui abbiamo tratto  $\Gamma$ , è un integrale primo dell'intero SDO originale (1<sup>i</sup>), inclusa la (1<sup>4</sup>). <sup>19</sup>

Sul piano concettuale se non su quello quantitativo, e nelle condizioni tipiche esistenti nel sistema solare, il quadro della dinamica RG – a suo modo sempre “inerziale” – è dunque *sostanzialmente diverso* da quello della dinamica inerziale classica e RS. Sappiamo che nello spazio-tempo RG esistono sempre carte locali in cui i coefficienti di Christoffel si annullano in un dato punto-istante  $x_0$ ; ma in  $x_0$  non si annullano, in generale, le loro derivate prime, e quindi non è in generale nullo il tensore di Riemann. Vale a dire, per la data metrica  $g_{(2)} = g_{(2)}(x)$ , in generale

<sup>18</sup> Che lo sia si vede subito se la metrica è tempo-ortogonale. In tal caso, infatti,  $\Gamma^2 = -(g_{44} + u^2/c^2)^{-1}$ ; quindi il determinante della matrice in questione, che è comunque  $1 + \Gamma^2\alpha_\kappa u^k/c$ , diventa  $1 + \Gamma^2 u^2/c^2 = 1 - (u^2/c^2)/(g_{44} + u^2/c^2) = g_{44}/(g_{44} + u^2/c^2) = -g_{44}\Gamma^2 > 0$ .

<sup>19</sup> L'aver separato nel modo indicato il SDO (5<sup>i</sup>) dal SDO originale (1<sup>i</sup>) è una *forzatura concettuale* che ci siamo volutamente concessa nell'intento di mettere in evidenza, finché ragionevole, le affinità tra la dinamica RG e quella RS (o addirittura quella classica). La riduzione del SDO (1<sup>i</sup>) ai casi classico e RS è banale: i coefficienti di Christoffel sono ovunque nulli se la metrica spaziale è quella cartesiana standard. Nella dinamica classica, con il tempo newtoniano assoluto  $\tau \equiv t$ , e nel generico riferimento inerziale-cartesiano  $y^i$  ( $y^{1,2,3} \equiv x,y,z$ ), le (1<sup>i</sup>) danno  $d_\tau^2 y^i \equiv d_t^2 y^i = 0$ , cioè l'atteso moto rettilineo uniforme (°)  $y^i = a^i t + b^i$ , con  $a^i$  e  $b^i$  costanti arbitrarie. Nella dinamica RS, e ancora nel riferimento spaziale inerziale-cartesiano, le (1<sup>i</sup>) danno ancora  $d_\tau^2 y^i = 0$ , ma senza che sia più  $\tau \equiv t$ . Tuttavia ora  $d_\tau = \gamma$ , quindi  $d_\tau^2 = \gamma d_t(\gamma d_t)$ . Come già sappiamo, il moto retto dalla (\*)  $\gamma d_t(\gamma d_t y^i) = 0$  è ancora rettilineo e uniforme rispetto al tempo  $t$  dell'osservatore inerziale, e possiamo anche verificarlo in modo diretto: basta porre la (°) nella (\*) per avere  $d_t y^i = a^i$ , quindi  $d_t(\gamma d_t y^i) = d_t(\gamma a^i) = a^i d_t \gamma$ . Ma ora è  $\gamma = (1 - a^2/c^2)^{-1/2}$ , quindi  $d_t \gamma = 0$ , e la  $d_\tau^2 y^i = \gamma d_t(\gamma d_t y^i) = \gamma a^i d_t \gamma = 0$  è soddisfatta. Inoltre la (°) è l'unica soluzione della (\*) (con le  $a^i$  e  $b^i$  costanti arbitrarie): infatti è  $(1 + \gamma^2 v v/c^2) \circ d_t v = 0$ , e l'unicità scende dalla non-singularità della matrice che moltiplica  $d_t v$ .

non-piatta, la dinamica RG di P è “naturalmente” governata dal SDO (1<sup>i</sup>), con i Chr2 in generale non nulli nell’aperto connesso di interesse. È anche ovvio, allora, che questa dinamica RG è “completa in sé” fino a quando si resta nella scala energetica in cui l’unica energia in gioco oltre a quella gravitazionale è quella cinetica.

Tornando al SDO (1<sup>i</sup>), riscriviamolo qui per comodità nella forma standard

$$(1^{\text{i bis}}) \quad d_{\tau}u^i + \Gamma_{h^i k}^i u^h u^k = 0,$$

con  $u^i = d_{\tau}x^i$ , e contraiamolo con  $g_{ij}$ . Abbiamo  $g_{ij}d_{\tau}u^i + \Gamma_{hjk}u^h u^k = 0$ , dove il primo termine a 1° membro si scrive anche  $d_{\tau}(g_{ij}u^i) - d_{\tau}g_{ij}u^i \equiv d_{\tau}u_j - d_{\tau}g_{ij}u^i$ . Ma  $d_{\tau}g_{ij} = \partial_k g_{ij}u^k = (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj})u^k$  (vedi 3.3.2, 12bis) per cui  $g_{ij}d_{\tau}u^i = d_{\tau}u_j - (\Gamma_{ijk} + \Gamma_{ikj})u^i u^k$ . Sommando a questa  $\Gamma_{ijk}u^i u^k$ , concludiamo che

$$(6_j) \quad d_{\tau}u_j - \Gamma_{ikj}u^i u^k = d_{\tau}u_j - \partial_j g_{ik}u^i u^k / 2 = 0^{20}$$

Questo SDO (6<sub>j</sub>) è dunque una conseguenza di (1<sup>i bis</sup>); ma partendo da esso e facendo a ritroso gli stessi passaggi fino al penultimo compreso, si ritrova il SDO di partenza in forza della non-singularità della metrica. Quindi (1<sup>i bis</sup>) e (6<sub>j</sub>) sono equivalenti, e possono essere usati l’uno invece dell’altro. Il SDO (6<sub>j</sub>) si dice **SDO geodetico in forma covariante**, così come il SDO (1<sup>i bis</sup>) si dice **SDO geodetico in forma controvariante**.

Ricordiamo che se le  $u^i$  sono riguardate come componenti controvarianti di un campo vettoriale 4-dim, e quindi come funzioni di  $x$ , la (1<sup>i bis</sup>) diventa  $u^k u^i_{/k} = 0$ ; e similmente, che se le  $u_j$  sono riguardate come componenti covarianti di quel campo, la prima (6<sub>j</sub>) diventa  $u^k u_{j/k} = 0$ . Questi SDP equivalenti attestano che il campo vettoriale 4-dim  $u$  è trasportato parallelamente lungo le sue curve integrali.

Facciamo ora  $j = 4$  nella (6<sub>j</sub>). Risulta

$$(7) \quad d_{\tau}u_4 = (1/2)\partial_4 g_{ik}u^i u^k,$$

e quindi, supponendo la metrica *stazionaria* ( $\partial_t g_{(2)} = 0$ ) la  $u_4$  è conservata lungo la geodetica; ovvero, sotto questa condizione  $u_4$  è un integrale primo del sistema (6<sub>j</sub>), o dell’equivalente (1<sup>i</sup>). Come si interpreta fisicamente questa  $u_4$ ?

Un rapido calcolo a partire dalle  $u^i = \Gamma(u^i, c)$ ,  $u_i = g_{ik}u^k$ ,  $g_{ik} = \gamma_{ik} - \gamma_i \gamma_k$ ,  $g_{i4} = \gamma_i \sqrt{-g_{44}}$ , prova che

$$(8) \quad -u_4 = c\Gamma\sqrt{-g_{44}}[\sqrt{-g_{44}} - \gamma_{\eta}u^{\eta}/c].$$

Moltiplicando la (8) per  $m^0 c$  otteniamo a sinistra  $-m^0 c u_4$  (che ha dimensioni di un’energia), e a destra  $m^0 c^2$  moltiplicata per il fattore adimensionale  $\delta = \Gamma\sqrt{-g_{44}}[\sqrt{-g_{44}} - \gamma_{\eta}u^{\eta}/c]$ , poco diverso da 1. Questo fattore  $\delta$  può stimarsi al più basso ordine significativo nel rapporto  $|\gamma_{\eta}u^{\eta}/c|/\sqrt{-g_{44}}$  quando questo è molto più piccolo di 1. Posto per brevità  $\alpha =: -g_{44}$  e  $\beta =: -\sqrt{-g_{44}}\gamma_{\eta}u^{\eta}/c$ , e

<sup>20</sup> La seconda uguaglianza (6<sub>j</sub>) è dovuta alla antisimmetria rispetto agli indici (ik) della somma dei due termini mancanti in  $\Gamma_{ikj}$ .

trascurando termini del 2° ordine in  $\beta/\alpha$ , (quindi il  $u^2/c^2$  nella definizione di  $\Gamma$ ) troviamo  $\Gamma \approx \alpha^{-1/2}(1+\beta/\alpha)^{-1}$ , e quindi  $\delta \approx \alpha^{1/2}$ . In questa approssimazione è dunque  $-m^0cu_4 \approx m^0c^2\sqrt{-g_{44}}$ . Ciò che si conserva lungo la linea d'universo di P, se la metrica è stazionaria, è dunque la sua **energia totale**  $-m^0cu_4 = m^0c^2\delta$ , uguale a  $m^0c^2\sqrt{-g_{44}}$  nella sopraddetta approssimazione. Si noti che  $\delta \approx \sqrt{-g_{44}}$  è lo stesso risultato che si sarebbe ottenuto all'ordine *zero* nel piccolo rapporto  $\beta/\alpha$ , perché i contributi di ordine *uno* nel numeratore e nel denominatore di  $\delta$  si elidono.

Includendo invece nel calcolo i termini di ordine *due* in  $\beta/\alpha$ , ma trascurando come è ragionevole un contributo proporzionale a  $\chi u^2$ , (ove  $\chi$  è al solito il potenziale gravitazionale scalare), si trova

$$(8bis) \quad \delta \approx 1 + (1/2)u^2/c^2 + \chi/c^2,$$

in cui si ravvisano subito, divisi per  $m^0c^2$ , un termine di energia intrinseca  $m^0c^2$ , uno di energia cinetica classica  $m^0u^2/2$ , e uno di energia potenziale gravitazionale  $m^0\chi$ .<sup>21</sup>

La massa  $m^0\Gamma$  è talvolta detta massa "relativistica-generale" di P. Il prodotto di questa massa per  $c^2(\alpha + \beta)$  uguaglia l'energia totale di P. §

§2. Passiamo ora ad esaminare una delle applicazioni più importanti della dinamica RG del punto materiale P: quella in cui P è in uno spazio-tempo vuoto salvo che nell'origine, ove per ipotesi è concentrata una massa potenziante M data; ovvero, passiamo allo studio delle geodetiche di una varietà con la metrica esterna di Schwarzschild. Riscriviamo qui, per maggiore comodità del lettore, questa metrica totalmente ortogonale e stazionaria:

$$(9) \quad ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k = (1-C/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (1-C/r)c^2 dt^2,$$

dove  $r = x^1$ ,  $\theta = x^2$ ,  $\phi = x^3$ ,  $ct = x^4$ ,  $C = 2\kappa M/c^2$  ( $\kappa \equiv$  costante gravitazionale). Abbiamo allora:

$$(10) \quad \Gamma = (-g_{44} - u^2/c^2)^{-1/2} = (1 - C/r - u^2/c^2)^{-1/2},$$

$$(11) \quad u^2 = g_{ik}u^i u^k = r^{\bullet 2}/(1-C/r) + r^2(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta \phi^{\bullet 2}),$$

dove  $\bullet$  è una abbreviazione per  $d_t$ , e al solito  $u^i = d_t x^i = (r^{\bullet}, \theta^{\bullet}, \phi^{\bullet}, c)$ . Segue anche che

$$(12) \quad u_1 = r^{\bullet}/(1-C/r), \quad u_2 = r^2\theta^{\bullet}, \quad u_3 = r^2\sin^2\theta\phi^{\bullet}.$$

Anche se marginalmente, conviene far uso della versione covariante (6j) del SDO geodetico, tenendo presente che ora  $u_k = \Gamma(u_k - c(1-C/r))$ . Sviluppando i calcoli, ma per ora non sostituendo l'espressione di  $\Gamma$ , si trova:

$$(13_1) \quad [\Gamma r^{\bullet}(1-C/r)^{-1}]^{\bullet} + \Gamma[C(1-C/r)^{-2}r^{\bullet 2}/(2r^2) - r(\theta^{\bullet 2} + \sin^2\theta\phi^{\bullet 2}) + Cc^2/(2r^2)] = 0$$

per la (6i);

$$(13_2) \quad (\Gamma r^2\theta^{\bullet})^{\bullet} - \Gamma r^2\sin\theta\cos\theta\phi^{\bullet 2} = 0$$

<sup>21</sup> In realtà la moltiplicazione per la costante  $m^0c$  della (8) è, dal punto di vista logico, un po' artificiosa, ed ha il solo scopo di trasformare la (8) e le sue conseguenze in relazioni tra energie. Questo è certamente suggestivo agli occhi del lettore fisico.

per la (6<sub>2</sub>); e infine

$$(13_3) \quad (\Gamma r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi})^\bullet = 0$$

per la (6<sub>3</sub>). D'altra parte, poiché la metrica di Schwarzschild è stazionaria, secondo la (7)  $u_4$  è un integrale primo del SDO (6<sub>j</sub>), ovvero

$$(13_4) \quad \Gamma(1-C/r) = F,$$

dove  $F$  è una costante adimensionale. Un altro integrale del sistema è offerto dalla (13<sub>2</sub>), ed è  $\theta = \pi/2$ . Questo significa che la geodetica giace nel piano equatoriale del riferimento sferico  $(r, \theta, \phi)$ . Ma quest'ultimo è arbitrario, e può essere sempre ruotato intorno all'origine  $r = 0$  in modo che il suo piano equatoriale sia quello della geodetica. Infine, con  $\theta = \pi/2$ , la (13<sub>3</sub>) ci dice che  $\Gamma r^2 \dot{\phi}^\bullet$  è un altro integrale del SDO (6<sub>j</sub>). Si può allora eliminare  $\Gamma$  mediante la (13<sub>4</sub>), concludendo che

$$(14) \quad r^2 \dot{\phi}^\bullet / (1-C/r) = D$$

dove  $D$  è un'altra costante. Abbiamo così individuato tre costanti del moto,  $F$ ,  $\pi/2$  (il valore costante di  $\theta$ ) e  $D$ .

Quanto alla (13<sub>1</sub>), essa serve a determinare la legge oraria  $r = r(t)$ . Con  $\theta = \pi/2$ , essa si riscrive nella forma

$$(13_{1\text{bis}}) \quad [r^\bullet(1-C/r)^{-1}]^\bullet + r^\bullet(1-C/r)^{-1} \Gamma^\bullet / \Gamma + [C(1-C/r)^{-2} r^{\bullet 2} / (2r^2) - r \dot{\phi}^{\bullet 2} + C c^2 / (2r^2)] = 0,$$

dalla quale  $\Gamma^\bullet / \Gamma$  si elimina mediante la (13<sub>4</sub>) (come  $-(1-C/r)^\bullet / (1-C/r)$ ), e  $r \dot{\phi}^{\bullet 2}$  mediante la (14) (come  $D^2(1-C/r)^2 / r^3$ ). La (13<sub>1bis</sub>) diventa così una EDO di 2° ordine in  $r$ , immediatamente riducibile a forma normale.

Venendo alla *traiettoria* (spaziale) geodetica, abbiamo  $r^\bullet = (dr/d\phi) \dot{\phi}^\bullet = (dr/d\phi) D(1-C/r)/r^2$ , e questa suggerisce di usare  $\rho =: (1/r)$  come coordinata lungo l'asse radiale (come del resto si fa nella trattazione newtoniana del problema). Si ottiene così  $r^\bullet = - (d\rho/d\phi) D(1-C\rho)$ , e quindi sostituendo nella (11),

$$(15) \quad u^2 = D^2(1-C\rho)[(d\rho/d\phi)^2 + (1-C\rho)\rho^2].$$

Quadrando la (13<sub>4</sub>) e tenendo conto della (10) abbiamo  $(1-C\rho)^2 = F^2/\Gamma^2 = F^2(1-C\rho - u^2/c^2)$ . Sostituendo in questa  $u^2$  mediante la (15), e risolvendo rispetto a  $(d\rho/d\phi)^2$ , troviamo finalmente

$$(16) \quad (d\rho/d\phi)^2 = -c^2/(F^2 D^2) \{ (1-C\rho) + F^2 [(1-C\rho)\rho^2 D^2/c^2 - 1] \}.$$

Secondo la (16),  $(d\rho/d\phi)^2$  è un polinomio completo di 3° grado in  $\rho$ , in cui il coefficiente di  $\rho^3$  è  $C$ , il coefficiente di  $\rho^2$  è  $-1$ , il coefficiente di  $\rho$  è  $c^2 C / (F^2 D^2)$ , e infine il coefficiente costante è  $c^2(F^2 - 1) / (F^2 D^2)$ . Se rappresentiamo tale polinomio in funzione delle sue tre radici  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$ , cioè come  $C(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)$ , le radici stesse si esprimono in termini delle  $F^2$  e  $D^2$ , oltre a  $C$  e  $c^2$ .<sup>22</sup>

<sup>22</sup> Precisamente, si ha  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = C^{-1}$ ,  $\rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_3 \rho_1 = c^2 / (F^2 D^2)$ ,  $\rho_1 \rho_2 \rho_3 = c^2(1 - F^2) / (C F^2 D^2)$ . Come è naturale,  $\rho_1, \rho_2$  e  $\rho_3$  figurano simmetricamente in questo sistema.

La traiettoria  $\phi = \phi(\rho)$  si ottiene quindi calcolando una primitiva della funzione  $d\phi/d\rho = \pm [C(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)]^{-1/2}$  di  $\rho$ .

Il precedente risultato è esatto, e la primitiva in questione si può determinare. Ma conviene ormai sfruttare l'ipotesi che  $C\rho$  sia in media molto minore di 1, e quindi che lo sia anche  $C(\rho_1+\rho_2)/2$ . Come vedremo, questa approssimazione è largamente giustificata nel caso del moto di un pianeta del sistema solare nel campo gravitazionale del sole (cioè trascurando gli effetti perturbativi dovuti alla attrazione degli altri pianeti). In forza della  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = C^{-1}$  (vedi la nota precedente), possiamo scrivere  $C(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3)$  come prodotto di  $(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)$  per  $1 - C(\rho_1+\rho_2) - C\rho$ . Qui si sottintende che sia sempre  $\rho > \rho_1$  e  $\rho_2 > \rho$ , cioè che  $\rho_1$  sia il reciproco del raggio massimo, e  $\rho_2$  il reciproco di quello minimo, della traiettoria. Nell'approssimazione convenuta, il secondo fattore elevato a  $1/2$  è  $\approx 1 + C(\rho_1+\rho_2)/2 + C\rho/2 \approx [1+C(\rho_1+\rho_2)/2](1+C\rho/2)$ . Tenuto conto che l'ultimo fattore tra [ ] è costante, siamo così ridotti, per il calcolo della  $\phi = \phi(\rho)$ , alla determinazione di una primitiva di  $[(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)]^{-1/2}(1+C\rho/2)$ . Una tale primitiva è  $-(C/2)[(\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)]^{1/2} + (1+CA/2)\sin^{-1}[(\rho-A)/B]$ , dove  $2A =: \rho_2 + \rho_1$  e  $2B =: \rho_2 - \rho_1$ , e (beninteso)  $\sin^{-1}$  è arcsin. La prova è elementare, bastando derivare la funzione indicata.<sup>23</sup>

Posto  $S =: (\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)$ , abbiamo così

$$(17) \quad \pm \phi/(1+CA) = -(C/2)\sqrt{S} + (1+CA/2)\sin^{-1}[(\rho-A)/B] + \text{cost};$$

e scrivendo  $\phi_{1,2}$  per  $\phi(\rho_{1,2})$ :

$$(18_2) \quad \pm \phi_2/(1+CA) = (1+CA/2)\pi/2 + \text{cost}$$

$$(18_1) \quad \pm \phi_1/(1+CA) = -(1+CA/2)\pi/2 + \text{cost};$$

da cui:

$$(19) \quad \pm 2(\phi_2 - \phi_1) = 2\pi(1+CA/2)(1+CA).$$

Consistentemente con l'ipotesi  $2AC \ll 1$ ,  $A^2C^2/2$  si può trascurare rispetto a 1, e la (19) può risciversi, nella stessa approssimazione, come

$$(20) \quad \pm 2(\phi_2 - \phi_1) = 2\pi(1+3CA/2) \equiv 2\pi + 3\pi CA.$$

Se la traiettoria fosse chiusa,  $2|(\phi_2 - \phi_1)|$  dovrebbe essere uguale a  $2\pi$ . Invece la (19) (o la (20) mettono in evidenza un fenomeno di **precessione** ( $CA$  essendo certamente  $> 0$ ). La scelta del segno, nella (20), è banale: il segno è il + se la precessione è diretta secondo il senso di percorrenza della traiettoria, ed il - se è diretta in senso contrario.

Secondo la (20), lo scostamento di  $2|(\phi_2 - \phi_1)|$  da  $2\pi$  è  $3\pi CA$ ; esso si dice **angolo di precessione** (o in breve **precessione**) della traiettoria. Per un pianeta solare, il valore medio di  $C\rho$

<sup>23</sup> Posto per brevità  $S =: (\rho-\rho_1)(\rho_2-\rho)$ , risulta  $d_\rho\sqrt{S} = (A-\rho)/\sqrt{S}$  e  $d_\rho\sin^{-1}[(\rho-A)/B] = [B^2-(\rho-A)^2]^{-1/2} = 1/\sqrt{S}$ . Sommando i due contributi, e non trascrivendo il comune fattore  $1/\sqrt{S}$ , si ha  $-C/2(A-\rho) + (1+CA/2) = 1 + C\rho/2$ , qed.



– quindi anche quello di CA – è estremamente piccolo, ed è massimo per Mercurio (il pianeta più vicino al sole), valendo in tal caso circa  $5,2 \cdot 10^{-8}$ . La precessione di Mercurio è così  $3\pi CA = 4,9 \cdot 10^{-7}$  radianti per rivoluzione. Questo è troppo piccolo per essere misurato, ma poiché esso si accumula col tempo, e le effemeridi di Mercurio erano largamente disponibili nello scorso secolo, si è stabilito di valutarlo prendendo un secolo terrestre come base temporale. Un anno di Mercurio dura  $\approx 0,241$  anni terrestri, e quindi un secolo terrestre comprende  $\approx 416$  rivoluzioni di Mercurio; la precessione di Mercurio per secolo ammonta allora a  $\approx 2038 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 116 \cdot 10^{-4}$  gradi sessagesimali, ovvero  $116 \cdot 3600 \cdot 10^{-4} = 41,76$  secondi di grado. Sebbene ancora assai piccolo, questo valore è in ottimo accordo con il dato sperimentale. Storicamente, questa fu la prima convalida della teoria della relatività generale.<sup>24</sup> La storia della precessione di Mercurio è raccontata in ogni testo di astronomia, ed è accennata anche nella Sez. 9.1.

Come ben sappiamo (v. S.sez. 6.4.2), nessuna precessione risulta invece dalla trattazione classica dello stesso problema. Verifichiamolo direttamente sulla falsariga del calcolo precedente. Ricordiamo innanzitutto (v. ancora S.sez. 6.4.2) i tre teoremi di conservazione. (i) il teorema dell'energia, per forza posizionale-conservativa (qual è quella gravitazionale), in base al quale  $[u^2/2 - \kappa M/r]/c^2$  (dove  $u$  è la velocità del punto potenziato P, per cui  $u^2 = r'^2 + r^2\phi'^2$ ) è una costante adimensionale  $F^*$ ; (ii) il teorema della planeità del moto centrale, in base al quale  $(P-O) \times u$  è un vettore costante; e (iii) il teorema della velocità areale scalare, in base al quale quest'ultima, o meglio il suo doppio che vale  $|(P-O) \times u| = r^2\phi'$  (nel piano equatoriale  $\theta = \pi/2$ ) è una costante che diciamo  $D^*$ . In queste condizioni,  $(d\phi/d\rho)^2$  è un polinomio di *secondo* (e non di *terzo*) grado in  $\rho$ , ma ancora con coefficiente di  $\rho^2$  uguale a  $-1$ , che scriveremo come  $(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)$ . Per avere la traiettoria newtoniana  $\phi = \phi(r)$  dobbiamo dunque determinare una primitiva di  $[(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)]^{-1/2}$ . Questa primitiva è  $\sin^{-1}[(\rho - A)/B]$ , con il precedente significato di A e B in termini di  $\rho_1$  e  $\rho_2$  (che a loro volta sono determinati dalle costanti del moto  $F^*$  e  $D^*$ ). Si trova così (risultato “esatto”)  $\phi_2 = \sin^{-1}(1) = \pi/2$  e  $\phi_1 = \sin^{-1}(-1) = -\pi/2$ , e quindi  $2(\phi_2 - \phi_1) = 2\pi$ : non c'è precessione. Rinviamo al Cap. 6 per altri dettagli sul moto gravitazionale-centrale in approssimazione newtoniana.

Tornando alla trattazione relativistica, ricordiamo che in quel caso era  $\Gamma(1 - C/r) = F$ , e  $\Gamma = [1 - C/r - u^2/c^2]^{-1/2}$ . Sviluppando  $\Gamma$  per  $C/r$  e  $u^2/c^2$  piccoli rispetto a 1, si ha  $\Gamma \approx 1 + C/(2r) + u^2/(2c^2)$ , quindi  $F = \Gamma(1 - C/r) \approx 1 + u^2/(2c^2) - C/(2r) = 1 + [u^2/2 - \kappa M/r]/c^2 = 1 + F^*$ . Questo stabilisce il collegamento tra  $F$  e  $F^*$ . Ovviamente l'1 che occorre sommare a  $F^*$  per ottenere  $F$  dipende dal non avere incluso in  $F^*$  l'energia intrinseca normalizzata, cfr. la (8bis). §

<sup>24</sup> Alla affidabilità di questa convalida nuoceva tuttavia il fatto che al dato osservativo andavano sottratti altri effetti precessionali (dovute soprattutto alla interazione con Giove) che nel loro insieme erano dello stesso ordine di grandezza del primo; ma le incertezze sono sostanzialmente superate dalle moderne e più precise valutazioni.

§3. Come abbiamo visto, il moto di un fotone si può considerare al più come *limite* di quello di un punto materiale. Vi è tuttavia una notevole affinità tra le procedure di calcolo della sua traiettoria spaziale, quando il fotone si muova nel campo gravitazionale di un centro potenziante fisso (e quindi lo spazio-tempo abbia ancora la metrica esterna di Schwarzschild), e quelle appena descritte (vedi §2) nel caso del punto materiale.

Per cominciare, ricordiamo che il SDO che governa le geodetiche luminali, in versione covariante, è (cfr. (6<sub>j</sub>)):

$$(21_i) \quad d_\lambda u_i - \Gamma_{hki} u^h u^k \equiv d_\lambda u_i - (1/2) \partial_i g_{hk} u^h u^k = 0,$$

dove  $u^h = d_\lambda x^h$ ,  $u_j = g_{jh} u^h$  (purché non sia mai  $u^h = 0 \forall h$ ) e  $\lambda$  è ora un parametro *arbitrario* lungo la geodetica, sotto il vincolo

$$(22) \quad g_{hk} u^h u^k = 0.$$

In forza della ortogonalità della metrica di Schwarzschild, sviluppando la (22) abbiamo  $0 = g_{\iota k} dx^\iota dx^k + g_{44} dx^4 dx^4 = d\sigma^2 + g_{44} c^2 dt^2$ , dove  $d\sigma$  è l'elemento di linea spaziale,  $d\sigma^2 = \gamma_{\iota k} dx^\iota dx^k$ , e  $t = x^4/c$ . Secondo la (9.3.4, 19) con  $\gamma_\iota = 0$ , questa può anche scriversi

$$(23) \quad d\sigma^2 = \mathcal{V}^2 dt^2,$$

$\mathcal{V}^2 = -c^2 g_{44}$  essendo la celerità<sup>2</sup> del fotone. Ricordiamo anche, infine, che  $-g_{44} = 1 - C/r$  nel solito riferimento sferico  $(r, \theta, \phi)$  e che  $C = 2\kappa M/c^2$  (vedi S.sez. 9.5.1).

Sviluppando la (21<sub>i</sub>) per  $i = 4$  abbiamo:  $0 = d_\lambda (g_{4k} d_\lambda x^k) = d_\lambda (g_{44} d_\lambda x^4)$ , per cui

$$(24) \quad \mathcal{V}^2 d_\lambda t = \text{cost.}$$

Senza pregiudicare la generalità, sarà comodo scegliere uguale a 1 la *cost* nella (24) (tenendo tuttavia presente che così facendo  $\lambda =_{\text{dim}} L^2 T^{-1}$ ). D'altra parte, per  $i = \iota = 1 \div 3$ , la (21<sub>i</sub>) dà

$$(25_\iota) \quad d_\lambda (g_{\iota k} d_\lambda x^k) = (1/2) \partial_\iota g_{\eta k} d_\lambda x^\eta d_\lambda x^k - (1/2) \partial_\iota \mathcal{V}^2 / \mathcal{V}^4$$

(si ricordi che  $\mathcal{V}^2 > 0$ ). In assenza di campo potenziante ( $M = 0$ ),  $\mathcal{V}^2 = c^2$ , e l'ultimo termine a 2° membro della (25<sub>i</sub>) sparisce.

Si intuisce, e si dimostra senza difficoltà, che la (25<sub>1</sub>) può qui ignorarsi, perché in concorrenza con le analoghe (25<sub>2</sub>, 25<sub>3</sub>) essa dà la legge oraria con cui il fotone percorre la sua traiettoria; e a quest'ultima, piuttosto che alla legge oraria, siamo qui precipuamente interessati. Invece, per  $\iota = 2$  abbiamo:

$$(25_2) \quad d_\lambda (r^2 d_\lambda \theta) - r^2 \sin \theta \cos \theta (d_\lambda \phi)^2 = 0,$$

che come nel caso del punto materiale fornisce l'integrale  $\theta = \pi/2$ . Come era da attendersi, la geodetica luminale è piana, giacendo nel piano equatoriale del riferimento  $(r, \theta, \phi)$ . Quindi nel seguito identificheremo il piano della geodetica con il piano equatoriale del riferimento, facendo ovunque  $\theta = \pi/2$ . Infine per  $\iota = 3$  abbiamo, ancora come nel caso del punto materiale,

$$(25_3) \quad d_\lambda(r^2 \sin^2 \theta d_\lambda \phi) = d_\lambda(r^2 d_\lambda \phi) = 0;$$

che ci dà l'altro integrale del sistema, cioè  $r^2 d_\lambda \phi = \text{cost} \equiv D$ .

Tornando alla (23), da riscrivere come  $(d_\lambda \sigma)^2 = \mathcal{V}^2 (d_\lambda t)^2 = 1/\mathcal{V}^2 = c^{-2}(1-C/r)^{-1}$ , sviluppando  $(d_\lambda \sigma)^2 = \gamma_{\text{ik}} d_\lambda x^i d_\lambda x^k$ , moltiplicando per  $1-C/r$ , ed indicando ormai con un apice la  $d_\lambda$ , otteniamo

$$(26) \quad r'^2 + r^2 \phi'^2 (1-C/r) = r'^2 + D^2 (1-C/r)/r^2 = 1/c^2.$$

Ancora ponendo  $\rho =: 1/r$ , si ha  $r'^2 = D^2 (d\rho/d\phi)^2$ ; e quindi, sostituendo nella (26), risulta

$$(27) \quad (d\rho/d\phi)^2 = [1 - \rho^2 \Delta^2 (1-C\rho)]/\Delta^2,$$

dove  $\Delta^2 =: c^2 D^2$ . Si noti che, essendo  $D^2 =_{\text{dim}} T^2$ ,  $\Delta^2 =_{\text{dim}} L^2$ . Se si esclude che la traiettoria sia una retta passante per l'origine, cioè che sia  $d_\lambda \phi = 0$ , allora  $D^2 > 0$  e  $\Delta^2 > 0$ . Secondo la (27),  $(d\rho/d\phi)^2$  è un polinomio di 3° grado in  $\rho$  mancante del termine di 1° grado. Per avere la traiettoria  $\phi = \phi(\rho)$ , occorrerà quindi determinare una primitiva della funzione  $\Delta[1-\rho^2\Delta^2(1-C\rho)]^{-1/2}$  di  $\rho$ . (Ancora, il doppio segno in  $d\phi/d\rho$  non è importante.) Se  $C = 0$ , una primitiva di  $\Delta[1-\rho^2\Delta^2(1-C\rho)]^{-1/2}$  si determina subito, e vale  $\sin^{-1}(\rho\Delta)$ ; si ha così  $\phi = \phi(\rho) = \sin^{-1}(\rho\Delta)$  se si conviene che  $\phi(\rho=0) = 0$ . Quest'ultima condizione non infirma la generalità, e la geodetica risulta essere una retta di anomalia zero che passa a distanza  $\Delta$  dal centro, come si verifica subito. Se invece  $C > 0$ , cioè nel caso di effettivo interesse, conviene operare la sostituzione  $y =: \rho\Delta(1-C\rho)^{1/2}$  ( $y > 0$  finché  $1 > C\rho$ ), con la quale  $(d\rho/d\phi)^2 = (1-y^2)/\Delta^2$ . Questa dice che il valore massimo di  $\rho$  si ha per  $y = 1$ . A questo punto possiamo approfittare della piccolezza (in media) di  $C\rho$  rispetto a 1, sviluppando il resto del calcolo al 1° ordine in  $C$ . In questa approssimazione è  $\rho\Delta = y(1+Cy/(2\Delta))$ , e quindi  $\Delta d\rho = (1+Cy/\Delta)dy$ , per cui

$$(28) \quad d\phi = (1-y^2)^{-1/2}(1+Cy/\Delta)dy.$$

Una primitiva del 1° addendo  $(1-y^2)^{-1/2}$  è  $\sin^{-1}y$ , ed una del 2° addendo è  $-(C/\Delta)(1-y^2)^{1/2}$ . In conclusione, tenuto conto della condizione iniziale  $\phi(y=0) = 0$ , abbiamo

$$(29) \quad \phi = \phi(y) = \sin^{-1}y - (C/\Delta)(1-y^2)^{1/2} + C/\Delta.$$

Poiché  $\rho$  è massimo per  $y = 1$ , il corrispondente valore di  $\phi(y=1)$  è  $\pi/2 + C/\Delta$ . Il doppio di questo valore diminuito di  $\pi$ , cioè  $2C/\Delta$ , è la deflessione totale della traiettoria del fotone, valutata al 1° ordine in  $C$ . La traiettoria è simmetrica rispetto alla retta orientata di anomalia  $\phi(y=1)$  e passante per l'origine, retta che la interseca puntando verso la sua convessità; o se si preferisce, la traiettoria ha costantemente l'origine dalla parte della sua concavità.

Se ci riferiamo ad un raggio di luce che rasenta il sole,  $\Delta$  è praticamente il raggio di quest'ultimo, cioè  $6,95 \cdot 10^8$  m. Infatti  $\rho_{\text{max}}\Delta = 1$  corrisponde a  $\Delta = r_{\text{min}}$ . L'angolo di deflessione, valutato al 1° ordine in  $C$  come  $2C/\Delta = 4\kappa M/(c^2\Delta)$ , risulta allora (poiché  $\kappa = 6,665 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{Kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

e  $M = 1,983 \cdot 10^{30}$  Kg) di circa 1,75 secondi di grado. Questo è in buon accordo con il dato sperimentale, osservabile soltanto in occasione di eclissi totali dell'astro. In ordine di tempo, e con alcune iniziali incertezze osservative, questa fu la seconda convalida della teoria relativistica generale.

È interessante rilevare che la deflessione così valutata è dovuta *sia* alla variabilità della celerità della luce secondo la  $\mathcal{V} = c(1-C/r)^{1/2}$ , *sia* al fatto che la geometria spaziale non è euclidea. I due effetti si sommano, e (come si può facilmente dimostrare <sup>25</sup>) contribuiscono ciascuno alla metà dell'effetto totale. Come abbiamo accennato nella S.sez. 9.1.4, in un primo tempo Einstein tenne conto soltanto del primo dei due effetti, e questo lo portò a sottostimare la deflessione di un fattore 2. §

---

<sup>25</sup> Ad esempio sostituendo la metrica spaziale di Schwarzschild con quella euclidea, si trova subito che alla  $d\phi = (1-y^2)^{-1/2}\Delta d\rho$  del testo si deve sostituire la  $d\phi = (1-y^2)^{-1/2}(1-C\rho)^{1/2}\Delta d\rho$ . Procedendo come nel caso generale al 1° ordine in C, si ha quindi, in luogo della (28),  $d\phi \approx (1-y^2)^{-1/2}(1-C\rho/2)(1+C\rho/\Delta)\Delta dy \approx (1-y^2)^{-1/2}[1+C\rho/(2\Delta)]\Delta dy$  (perché  $\rho$  può qui essere valutato all'ordine 0,  $\rho \approx y/\Delta$ ). Evidentemente, l'  $\frac{1}{2}$  ora a fattore di  $(1-y^2)^{-1/2}C\rho dy$  produce il dimezzamento della deflessione  $2C/\Delta$  del caso generale. Anche se ormai superfluo, si potrebbe analogamente dimostrare che usando la metrica di Schwarzschild, ma dando al fotone velocità c, si otterrebbe (sempre al 1° ordine in C) l'altra metà della deflessione.

## APP. SPEC. CAP. 9

### APP. 9.A SULLA DEDUZIONE EINSTEINIANA DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SPECIALI

Illustriamo qui la procedura, di grande interesse storico e concettuale, usata da A. Einstein per dedurre quelle che poi si sarebbero universalmente chiamate “trasformazioni di Lorentz” dai quattro principi menzionati nella Nota Storica 9.1 (di linearità, di relatività, di costanza della celerità della luce nel vuoto, e di simmetria perpendicolare), *senza* invocare l’invarianza in forma del sistema di Maxwell rispetto ad esse, né quella della forma canonica (2.C, Ibis). Riprodurremo il ragionamento einsteiniano con qualche modifica formale e qualche commento esplicativo. Poiché  $Y$  e  $Z$  (riferimento “fisso”  $\mathfrak{S}$ , maiuscolo) non compaiono nelle espressioni di  $x$  e  $t$  (riferimento “mobile”  $\mathfrak{s}$ , minuscolo), partiremo dalle (2.C, 1), che sarà ora più comodo riscrivere come

$$(1) \quad x = aX + bcT, \quad t = cX/c + dT,$$

dove  $a, b, c, d$ , sono costanti adimensionali e  $c$  – celerità della luce nel vuoto – è corsiva per distinguerla dalla costante adimensionale  $c$ . Converrà anche sostituire  $X$  con  $X' + YT$  (ove  $Y$  è la velocità di  $\mathfrak{s}$  rispetto a  $\mathfrak{S}$ , con  $|Y| < c$ ), con il che la seconda delle (1) diventa

$$(1') \quad t = cX'/c + d'T,$$

avendo posto  $d' =: cY/c + d$ . È chiaro che un punto dell’asse  $X$  per cui  $X'$  è costante è fisso nel riferimento  $\mathfrak{s}$ .

La sincronizzazione dell’orologio di  $\mathfrak{s}$  in  $X' = 1$  con quello in  $X' = 0$  si ottiene uguagliando il tempo  $t$  in ( $X' = 1, T = 1/(c-Y)$ ), che è  $c/c + d'/(c-Y)$ , alla semisomma del tempo  $t$  in ( $X' = 0, T = 0$ ), che è  $0$ , e del tempo  $t$  in ( $X' = 0, T = 1/(c-Y) + 1/(c+Y)$ ), che è  $2d'c/(c^2-Y^2)$ ; vale a dire, scrivendo  $d'c/(c^2-Y^2) = c/c + d'/(c-Y)$ , ovvero  $c/c = -d'Y/(c^2-Y^2)$ . Così  $c/c$  è eliminato, e si resta con (scrivendo al solito  $g^2$  per  $(1-Y^2/c^2)^{-1}$ ):

$$(2) \quad t = d'[-YX'/(c^2-Y^2) + T] = g^2 d'(-YX/c^2 + T) = d(-YX/c^2 + T),$$

perché  $g^2 d' = d$ . Concludiamo così che  $c = -dY/c$ .

Dalla prima delle (1) abbiamo  $0 = aY + bc$  (l’origine di  $\mathfrak{s}$ ,  $x = 0$ , viaggia per ipotesi lungo  $X$  con velocità  $Y$ ), e questo ci consente di eliminare  $bc$  ottenendo  $x = a(X-YT)$ . Imponiamo ora la costanza di  $c$  nei due riferimenti, cioè l’uguaglianza  $X/T = c = x/t$ : il risultato è  $a = d$ , e quindi

$$(3) \quad x = d(X-YT).$$

Se i due riferimenti sono supposti equiversi e equicroni, dovrà essere  $d > 0$ , e inoltre  $d(Y \rightarrow 0) = 1$ . Sapendo ormai che  $a = d, b = -dY/c, c = -dY/c$ , resta da determinare soltanto  $d$ , nelle (2) e (3),

come funzione di  $Y$  sotto i vincoli sopradetti. A questo fine, supponiamo che, al tempo  $T = 0$ , dall'origine di  $\mathfrak{S}$  parta un fotone lungo l'asse  $Y$  (nel suo verso positivo). Al tempo  $T = 1$ , l'origine di  $\mathfrak{s}$  si trova in  $(X = Y, Y = 0)$ , e il suo orologio locale segna il tempo  $d(1 - Y^2/c^2) = dg^{-2}$ . Quando  $T = T^* > 0$ , il fotone ha per  $\mathfrak{S}$  coordinate  $(X = 0, Y = cT^*, T^*)$ , e quindi ha per  $\mathfrak{s}$  coordinate  $(x = -dT^*, y = cT^*, t = dT^*)$ . Poiché  $T^*$  è supposto positivo,  $d$  ha lo stesso segno di  $t$ , e quindi è positivo essendo i riferimenti equicroni per ipotesi. Scegliamo ora  $T^*$  imponendo che sia  $t = 1$ : le corrispondenti coordinate del fotone secondo  $\mathfrak{s}$  sono allora  $(x = -Y, y = cd^{-1}, t = 1)$ . Ma al tempo  $t = 1$ , oltre che sull'asse  $Y$ , il fotone deve trovarsi, secondo  $\mathfrak{s}$ , su una sfera di raggio  $c$  e centro nell'origine di  $\mathfrak{s}$ , cioè sulla sfera  $x^2 + y^2 = c^2$ . Sostituendo i precedenti valori di  $x$  e  $y$ , concludiamo che  $cd^{-1} = (c^2 - Y^2)^{1/2}$ , ovvero che

$$(4) \quad d(Y) = g(|Y|).$$

Risulta in particolare  $d(Y \rightarrow 0) = 1$ , come richiesto. (Di fatto, Einstein si limita a dare la conclusione (4) di tutto il ragionamento.)

Si noti che gli eventi  $E_1 \equiv$  "l'origine di  $\mathfrak{s}$ , che scorre lungo l'asse  $X$ , passa per l'orologio di  $\mathfrak{S}$  che segna  $T = 1$ ", e  $E_2 \equiv$  "il fotone, che viaggia lungo l'asse  $Y$ , passa per l'orologio di  $\mathfrak{s}$  che segna  $t = 1$ ", non sono simultanei, né per  $\mathfrak{S}$  né per  $\mathfrak{s}$ . Infatti i tempi di  $E_1$  sono  $T_1 = 1$  secondo  $\mathfrak{S}$ , e rispettivamente  $t_1 = g^{-1} < T_1$  secondo  $\mathfrak{s}$ ; mentre quelli di  $E_2$  sono  $T_2 = g^{-1}$  secondo  $\mathfrak{S}$ , e rispettivamente  $t_2 = 1 > T_2$  secondo  $\mathfrak{s}$ . Sussiste inoltre il legame  $t_1/T_1 = T_2/t_2 = g^{-1} < 1$ ; cioè  $E_1$  ritarda in  $\mathfrak{s}$ , rispetto a  $\mathfrak{S}$ , esattamente di quanto  $E_2$  ritarda in  $\mathfrak{S}$  rispetto a  $\mathfrak{s}$ .<sup>1</sup>

In definitiva, si sono così ricavate le trasformazioni di Lorentz speciali  $x = g(X - YT)$ ,  $y = Y$ ,  $z = Z$ ,  $t = g(-YX/c^2 + T)$ .

#### APP. 9.B TRASFORMAZIONI DI LORENTZ PARALLELE DI $\kappa$ -TENSORI 4-DIMENSIONALI

Secondo una vecchia massima didattica che non ci ha mai convinto del tutto, un modo efficace per comprendere a fondo una teoria fisico-matematica qualsiasi consiste nel "fare esercizi":

<sup>1</sup> Vi è anche modo di giungere alla (4) senza coinvolgere le coordinate ortogonali all'asse  $X \equiv x$ . Basta riscrivere le (2,3) evidenziandovi che  $d = d(Y)$ , e una seconda volta scambiandovi per simmetria le coordinate maiuscole con le minuscole e  $Y$  con  $-Y$ , quindi nella forma  $T = d(-Y)(Yx/c^2 + t)$ ,  $X = d(-Y)(x + Yt)$ . Se si richiede che queste ultime siano le *inverse* delle (2,3) (come deve essere), si ricava  $d(Y)d(-Y)(1 - Y^2/c^2) = 1$ . Ma  $d(Y)$  e  $d(-Y)$  sono gli inversi dei fattori di contrazione di Lorentz nei due riferimenti, e quindi sono uguali se si invoca un ovvio "principio di isotropia parallela" ( $\equiv$  la contrazione di Lorentz non dipende dal segno della velocità del campione). La (4) segue allora immediatamente. Einstein non considera questa alternativa, che è del tutto naturale sotto un altrettanto ovvio principio di "simmetria generale" ( $\equiv$  la lunghezza di un campione comunque orientato non dipende dal segno della sua velocità), tuttavia meno economico di quello della semplice simmetria perpendicolare. "Variazioni sul tema" di questo tipo hanno un sapore decisamente accademico dal punto di vista fisico.

nell' esercitarsi cioè a risolvere i suoi problemi. Con questa appendice 9.B proponiamo allo studioso una scelta di calcoli elementari di teoria RS, che lo aiuteranno a “farsi la mano” sui suoi meccanismi algebrici. Se  $x^4 = ict$  (coordinata römeriana immaginaria <sup>2</sup>), lo spazio in cui si opera è *formalmente* euclideo, e quindi cade ogni distinzione tra componenti covarianti e controvarianti. Questo è sottolineato da una notazione che vede, per questa volta, tutti gli indici tensoriali sistematicamente allineati su un unico livello (con la nostra scelta, in basso); sebbene ciò renda leggermente meno agevole la lettura delle formule.

Sottolineiamo che non vi è nulla di difficile da capire in quello che segue; occorrerà soltanto armarsi di pazienza per seguire la correttezza dei passaggi e delle formule finali (o meglio, fare i calcoli per conto proprio una volta compresa la loro meccanica). Al solito, gli indici greci corrono su  $1 \div 3$ , e quelli latini su  $1 \div 4$ , e si somma sugli indici ripetuti.

La matrice di trasformazione è ancora la  $C$  della (2.D, 8) che riscriviamo qui appresso per comodità come

$$(1_1) \quad C_{\iota\kappa} = \delta_{\iota\kappa} + (g-1)Y_\iota Y_\kappa / Y^2,$$

$$(1_2) \quad C_{i4} = igY_i/c, \quad C_{4\kappa} = -igY_\kappa/c,$$

$$(1_3) \quad C_{44} = g,$$

ove al solito  $g = (1 - Y^2/c^2)^{1/2}$ . Per cominciare, vale la pena di controllare *direttamente* il carattere formalmente ortogonale di  $C$  e della sua trasposta, cioè la validità delle

$$(2) \quad C_{ih}C_{ik} = \delta_{hk}, \quad C_{hi}C_{ki} = \delta_{hk}.$$

Limitandoci alla prima, per  $h = \iota, k = \kappa$  abbiamo  $C_{\iota\kappa}C_{\iota\kappa} = [\delta_{\lambda\iota} + (g-1)Y_\lambda Y_\iota / Y^2][\delta_{\lambda\kappa} + (g-1)Y_\lambda Y_\kappa / Y^2] - g^2(Y_\iota Y_\kappa / Y^2)Y^2/c^2 = \delta_{\iota\kappa} + Y_\iota Y_\kappa / Y^2[2(g-1) + (g-1)^2 - g^2 Y^2/c^2]$ , dove è immediato verificare che il contenuto delle ultime [ ] è nullo. Quindi la (2) è soddisfatta in questo caso. Similmente, per  $h = k = 4$  abbiamo  $C_{i4}C_{i4} = C_{\lambda 4}C_{\lambda 4} + C_{44}C_{44} = igY_\lambda igY_\lambda / c^2 + g^2 = g^2(1 - Y^2/c^2) = 1$ . Infine per  $h = 4, k = \kappa, C_{i4}C_{i\kappa} = C_{\lambda 4}C_{\lambda\kappa} + C_{44}C_{4\kappa} = (igY^\lambda/c)[\delta_{\lambda\kappa} + (g-1)Y_\lambda Y_\kappa / Y^2] - g^2 Y_\kappa / c = igY_\kappa / c[1 + (g-1) - g] = 0$ . La prima (2) è così provata. La seconda (2) si prova con procedura analoga.

Passiamo alle L-trasformate parallele di campi vettoriali 4-dim (qui e nel seguito useremo la notazione (con apice, senza apice)). La regola è la solita: per un generico vettore 4-dim  $v$ , le cui componenti converrà pensare scritte come  $v_i = (v_\iota, iv_4)$ , deve essere  $v'_i = C_{ik}v_k$ . Quindi per  $i = \iota, v'_\iota \equiv v'_\iota = C_{i\lambda}v_\lambda + C_{i4}v_4 = [\delta_{i\lambda} + (g-1)Y_i Y_\lambda / Y^2]v_\lambda - gY_\iota v_4/c$ ; e per  $i = 4, v'_4 \equiv iv'_4 = C_{4k}v_k = -igv_\kappa Y_\kappa / c + igv_4$ , ovvero  $v'_4 = g(v_4 - Y_\kappa v_\kappa / c)$ . Nel caso della coordinata 4-dim  $x_i = (x_\iota, ict)$ , abbiamo  $x'_\iota = [\delta_{i\lambda} + (g-1)Y_i Y_\lambda / Y^2]x_\lambda - gY_\iota t$  e  $t' = g(t - Y_\kappa v_\kappa / c^2)$ , che sono le L-trasformazioni parallele standard (vedi le 2D, (1)-omogenee). Si ricordi infine che  $C_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$ .

<sup>2</sup> In questo libro, l'uso spesso alternato di coordinata römeriana reale o immaginaria a seconda della maggior convenienza è anche intenzionale, allo scopo di abituare lo studioso ad entrambe le convenzioni.

La L-trasformata parallela di una densità di forza-potenza  $f$ , che con l'uso della coordinata römeriana immaginaria è espressa da  $f_i = (\varphi_i, i\phi/c)$ , è formalmente identica a quella della coordinata 4-dim: basta sostituire a  $x_i$  la  $\varphi_i$  e a  $ct$  la  $\phi/c$ . Quindi

$$(3_1) \quad \varphi'_i = C_{ij}f_j = C_{i\lambda}\varphi_\lambda + C_{i4}f_4 = \varphi_i + \Upsilon_i[(g-1)\Upsilon_\kappa\varphi_\kappa/\Upsilon^2 - g\phi/c^2],$$

e similmente

$$(3_2) \quad f'_4(c/i) = \phi' = C_{4j}f_j(c/i) = (C_{4\lambda}\varphi_\lambda + C_{44}f_4)(c/i) = g(\phi - \Upsilon_\kappa f_\kappa);$$

e nel limite galileiano,

$$(3_3) \quad \varphi'_i = \varphi_i, \quad \phi' = \phi - \Upsilon_\kappa f_\kappa.$$

Possiamo applicare la stessa regola (3<sub>1</sub>,3<sub>2</sub>) all'operatore  $\partial_i$ , che deve ora intendersi come  $(\partial_i, (-i/c)\partial_t)$ . Per  $i = \iota$ , risulta  $\partial'_i = \partial_i + (g-1)(\Upsilon_i/\Upsilon^2)\Upsilon_\kappa\partial_\kappa + (g\Upsilon_i/c^2)\partial_t$ . Il componente normale ( $\perp$ ) di questa è

$$(4_1) \quad \partial'_\perp = \partial_\perp,$$

mentre il componente parallelo ( $\parallel$ ) è

$$(4_2) \quad \partial'_\parallel = g[\partial_\parallel + (\Upsilon/c^2)\partial_t].$$

Similmente, per  $i = 4$ ,  $\partial'_4 = (-i/c)\partial'_t = C_{4\lambda}\partial_\lambda + C_{44}\partial_4 = (-i/c)g(\Upsilon_\kappa\partial_\kappa + \partial_t)$ , ovvero

$$(4_3) \quad \partial'_t = g(\partial_t + \Upsilon_\kappa\partial_\kappa),$$

dove nella parentesi a 2° membro compare la derivata convettiva lungo  $\Upsilon$ . Le (4) sono formule utili e di uso comune.

Appena un po' meno semplice è ricavare la L-trasformazione parallela di una velocità 4-dim *propria*  $u_i = \gamma(u_i, ic)$ . Con la stessa procedura, per  $i = \iota$  si trova  $u'_i = \gamma[u_i + (g-1)\Upsilon_i\Upsilon_\kappa u_\kappa/\Upsilon^2 - g\Upsilon_i]$ , dove  $\gamma = \gamma(u^2)$  significa al solito  $(1-u^2/c^2)^{-1/2}$ . D'altra parte  $u'_i = \gamma'u'_i$ , con  $\gamma' = (1-u'^2/c^2)^{-1/2}$ . Non contando la diversa notazione, sappiamo come  $\gamma'$  si esprime in funzione di  $g$ ,  $\gamma$  e  $\alpha \equiv (1 - \Upsilon_\kappa u_\kappa/c^2)^{-1}$ : basta rifarsi alla (2.D, 3) sostituendovi  $V$  con  $u$  e  $v$  con  $u'$ , quindi  $\Gamma$  con  $\gamma$ ,  $\gamma$  con  $\gamma'$  e  $\alpha$  con  $(1-\Upsilon \cdot u/c^2)^{-1}$ . Si ha dunque  $\gamma' = \gamma g \alpha^{-1}$ ; ed uguagliando le due espressioni di  $u'_i$ , con alcuni passaggi si trova  $u'_\parallel = \alpha(u_\parallel - \Upsilon)$  e  $u'_\perp = \alpha g^{-1}u_\perp$ , cioè le (2.2.1, 4). Esse si compendiano nella

$$(5) \quad u' = \alpha(u_\parallel - \Upsilon + u_\perp/g).$$

Per  $i = 4$ , abbiamo poi  $u'_4 = \gamma'ic = \gamma(C_{4\lambda}u_\lambda + C_{44}ic) = ic\gamma g(1 - \Upsilon_\kappa u_\kappa/c^2)$ , che riproduce la  $\gamma' = \gamma g \alpha^{-1}$ .

Consideriamo adesso il generico 2-tensore 4-dim  $t_{ik}$ . Come abbiamo già visto, con l'uso della coordinata römeriana immaginaria una rappresentazione abituale delle sue 16 componenti in sottoinsiemi di  $9 + 3 + 3 + 1$  componenti è del tipo:

$$(6) \quad t_{\iota\kappa} = t_{\iota\kappa}, \quad t_{\iota 4} = icg_\iota, \quad t_{4\kappa} = is_\kappa/c, \quad t_{44} = -h.$$



L'ultima delle (6) differisce da quella che forse ci aspettavamo per via del segno meno davanti a  $h$ ; ma questa è una conseguenza della regola di associare un fattore  $i$  ad ogni indice 4. Risulta allora, sempre nella notazione (con apice, senza apice):

$$(7) \quad t'_{ik} = C_{ij}C_{kh}t_{jh} = C_{i\lambda}C_{\kappa\mu}t_{\lambda\mu} + C_{i\lambda}C_{\kappa 4}t_{\lambda 4} + C_{i4}C_{\kappa\mu}t_{4\mu} + C_{i4}C_{\kappa 4}t_{44} = \\ = t_{ik} + (g-1)(t_{i\mu}Y_{\mu}Y_{\kappa} + Y_iY_{\lambda}t_{\lambda\kappa})/Y^2 + (g-1)^2Y_iY_{\lambda}Y_{\kappa}Y_{\mu}t_{\lambda\mu}/Y^4 - g(g_iY_{\kappa} + Y_i s_{\kappa}/c^2) - \\ - g(g-1)(Y_i g_{\lambda}Y_{\lambda}Y_{\kappa} + Y_iY_{\kappa}s_{\mu}Y_{\mu}/c^2)/Y^2 + g^2Y_iY_{\kappa}h/c^2;$$

$$(8) \quad t'_{i4}/(ic) = g'_i = (C_{i\lambda}C_{4\mu}t_{\lambda\mu} + C_{i\lambda}C_{44}t_{\lambda 4} + C_{i4}C_{4\mu}t_{4\mu} + C_{i4}C_{44}t_{44})/(ic) = \\ = g[\delta_{i\lambda} + (g-1)Y_iY_{\lambda}/Y^2][ -t_{\lambda\mu}(Y_{\mu}/c^2) + g_{\lambda}] + g^2Y_iY_{\mu}s_{\mu}/c^4 - g^2Y_ih/c^2;$$

$$(9) \quad (c/i)t'_{4k} = s'_k = (C_{4\lambda}C_{\kappa\mu}t_{\lambda\mu} + C_{4\lambda}C_{\kappa 4}t_{\lambda 4} + C_{44}C_{\kappa\mu}t_{4\mu} + C_{44}C_{\kappa 4}t_{44})(c/i) = \\ = g[\delta_{\kappa\mu} + (g-1)Y_{\kappa}Y_{\mu}/Y^2](-Y_{\lambda}t_{\lambda\mu} + s_{\mu}) + g^2Y_{\kappa}Y_{\lambda}g_{\lambda} - g^2Y_{\kappa}h;$$

$$(10) \quad t'_{44} = -h' = C_{4\lambda}C_{4\mu}t_{\lambda\mu} + C_{4\lambda}C_{44}t_{\lambda 4} + C_{44}C_{4\mu}t_{4\mu} + C_{44}C_{44}t_{44} = \\ = g^2(-Y_{\lambda}Y_{\mu}t_{\lambda\mu}/c^2 + Y_{\lambda}g_{\lambda} + Y_{\mu}s_{\mu}/c^2 - h).$$

Le corrispondenti trasformazioni parallele galileiane si ottengono da esse facendovi al solito  $c \rightarrow \infty$ , e sono:

$$(7^0) \quad t'_{ik} = t_{ik} - g_iY_{\kappa};$$

$$(8^0) \quad g'_i = g_i;$$

$$(9^0) \quad s'_k = s_k - Y_{\lambda}t_{\lambda\kappa} + Y_{\kappa}Y_{\lambda}g_{\lambda} - Y_{\kappa}h;$$

$$(10^0) \quad h' = h - Y_{\lambda}g_{\lambda}.$$

Alle (7 ÷ 10) può darsi una forma più maneggevole mediante il solito espediente di orientare la terna cartesiana ortogonale  $(x,y,z)$  in modo che  $Y$  sia parallelo all'asse  $x$  (L-trasformazioni speciali). Si ha così dalla (7):

$$(11_1) \quad t'_{xx} = [1+2(g-1)+(g-1)^2]t_{xx} - g^2(Y_x g_x + s_x Y_x/c^2) + g^2Y^2h/c^2 = g^2[t_{xx} - (Y_x g_x + s_x Y_x/c^2) + Y^2h/c^2],$$

$$(11_2) \quad t'_{xy} = [1+(g-1)]t_{xy} - gY_x s_y/c^2 = g(t_{xy} - Y_x s_y/c^2),$$

e simile con  $z$  in luogo di  $y$ ;

$$(11_3) \quad t'_{yx} = [1+(g-1)]t_{yx} - g g_y Y_x = g(t_{yx} - g_y Y_x),$$

e simile con  $z$  in luogo di  $y$ ; e infine

$$(11_4) \quad t'_{yz} = t_{yz}, \quad t'_{zy} = t_{zy}.$$

Similmente, dalla (8) si ha:

$$(12_1) \quad g'_x = g^2(g_x - Y_x t_{xx}/c^2 + Y^2 s_x/c^4 - Y_x h/c^2),$$

$$(12_2) \quad g'_y = g(g_y - t_{yx} Y_x/c^2),$$

e simile con  $z$  in luogo di  $y$ ; dalla (9),

$$(13_1) \quad s'_x = g^2(s_x - Y_x t_{xx} + Y^2 g_x - Y_x h),$$

$$(13_2) \quad s'_y = g(s_y - Y_x t_{xy}),$$

e simile; e infine, dalla (10),

$$(14) \quad h' = g^2(h + \Upsilon_x \Upsilon_x t_{xx}/c^2 - \Upsilon_x g_x - \Upsilon_x s_x/c^2).$$

Ancora, le (11, 12, 13, 14) possono compendiarsi introducendo i pedici ( $\parallel, \perp$ )  $\equiv$  (componente parallelo, perpendicolare a  $\Upsilon$ ). Si ottengono così le

$$(15_1) \quad t' = g^2(t_{\parallel\parallel} - g_{\parallel}\Upsilon - \Upsilon s_{\parallel}/c^2 + \Upsilon h/c^2) + g(t_{\perp\perp} - \Upsilon s_{\perp} + t_{\perp\parallel} - g_{\perp}\Upsilon) + t_{\perp\perp};$$

$$(15_2) \quad g' = g^2(g_{\parallel} - \Upsilon \cdot t_{\parallel\parallel}/c^2 + \Upsilon \Upsilon \cdot s_{\parallel}/c^4 - \Upsilon h/c^2) + g(g_{\perp} - t_{\perp\parallel} \cdot \Upsilon/c^2);$$

$$(15_3) \quad s' = g^2(s_{\parallel} - \Upsilon \cdot t_{\parallel\parallel} + \Upsilon \Upsilon \cdot g_{\parallel} - \Upsilon h) + g(s_{\perp} - \Upsilon \cdot t_{\perp\perp});$$

$$(15_4) \quad h' = g^2[h + \Upsilon \cdot t \cdot \Upsilon/c^2 - \Upsilon \cdot (g + s/c^2)].$$

(Nella (15<sub>4</sub>), il simbolo “g” gioca un evidente doppio ruolo, ma dovrebbero escludersi malintesi.) Si sottolinea che in nessuna delle precedenti relazioni si è assunta la simmetria del 2-tensore di partenza  $t_{(2)}$ . Se tuttavia questo è il caso, anche il tensore di arrivo  $t'_{(2)}$  è simmetrico, come è naturale attesa la regola generale di trasformazione.

Il caso di tensori di rango superiore a 2 si tratta in modo analogo. Ad esempio l'insieme delle  $4^3 = 64$  componenti di un 3-tensore 4-dim generico si suddivide in quattro sottoinsiemi di cardinalità 27 (senza indici 4), 12 (con un indice 4), 24 (con due indici 4) e 1 (con tre indici 4). Le L-trasformazioni parallele di 3-tensori così rappresentati non hanno tuttavia, a nostra conoscenza, particolare rilievo nel presente contesto.

#### APP. 9.C TRASFORMAZIONE DI LORENTZ PARALLELA DEL 2-TENSORE DEGLI SFORZI MECCANICI

Nel riferimento inerziale  $\mathfrak{S}$ , siano  $r = r(t)$  e  $s = s(t)$  i vettori delle traiettorie infinitamente vicine ma distinte (al comune istante  $t$ ) di due punti P, Q immersi in un continuo cinematico, regolare quanto ci basta. Con ciò intendiamo che se  $u^* = u^*(x,t)$  è la velocità euleriana del continuo considerato,  $u^*(r(t),t)$  [ $u^*(s(t),t)$ ] è la velocità di P [di Q] al tempo  $t$ . Il vettore

$$(1) \quad \delta = \delta(t) =: r(t) - s(t)$$

è assunto come infinitesimo di riferimento nel presente calcolo asintotico, e ad esso saranno riferite altre grandezze infinitesime. Nel seguito, converrà distinguere il tempo  $t$  di P da quello – diciamolo  $\tau$  – di Q, perché oltre al vettore  $\delta(t)$  considereremo anche il vettore  $r(t) - s(\tau)$  per  $\tau \neq t$ , restando per ipotesi *la differenza  $t - \tau$  infinitesima dello stesso ordine di  $\delta$* . Precisamente, nel riferimento  $\mathfrak{S}'$  in moto rettilineo uniforme rispetto a  $\mathfrak{S}$  con velocità  $\Upsilon$ , e ad esso parallelo, secondo le formule di Lorentz (2.D, (1)-omogenee) i tempi  $t$  e  $\tau$  si trasformano in  $t' = g(t - \Upsilon \cdot r(t)/c^2)$  e rispettivamente in  $\tau' = g(\tau - \Upsilon \cdot s(\tau)/c^2)$ , dove al solito è  $g = (1 - \Upsilon^2/c^2)^{-1/2}$ . Se allora imponiamo la *simultaneità* delle

posizioni di P e Q in  $\mathfrak{S}'$  (come l'abbiamo imposta in  $\mathfrak{S}$  nella definizione di  $\delta$ , vedi la (1)), cioè se imponiamo  $t' = \tau'$  nelle precedenti relazioni, ricaviamo

$$(2) \quad t - \tau = \Upsilon \cdot (r(t) - s(\tau)) / c^2.$$

Quindi, se le posizioni di P e Q sono simultanee in  $\mathfrak{S}'$  non possono esserlo in  $\mathfrak{S}$  (se  $\Upsilon \neq 0$ ), e anzi devono essere sfalsate temporalmente nella misura indicata dalla (2). Per le date  $r(t)$  e  $s(\tau)$  la (2) diventa una equazione lineare affine in  $t - \tau$  se questa differenza è assunta  $O(\delta)$ . Infatti la  $r(t) - s(\tau)$  nella (2) può scriversi  $r(t) - s(t) + s(t) - s(\tau)$ , dove la prima differenza è per definizione  $\delta(t)$  e la seconda va trattata anch'essa come  $O(\delta)$ . Allora, se  $u_{(r)} = u_{(r)}(t)$  è la velocità di P al tempo  $t$  e  $u_{(s)} = u_{(s)}(\tau)$  quella di Q al tempo  $\tau$ , esse sono uguali a meno di termini  $O(\delta)$ , e possono pertanto identificarsi in un'unica  $u(t)$  nella valutazione di

$$(3) \quad s(t) \approx s(\tau) + u_{(s)}(\tau)(t - \tau) \approx s(\tau) + u(t)(t - \tau),$$

dove  $\approx$  significa “= a meno di termini  $o(\delta)$ ”. Sostituendo la (3) nella (2), otteniamo la predetta equazione lineare in  $t - \tau$ :

$$(4) \quad t - \tau \approx \Upsilon \cdot [\delta(t) + u(t)(t - \tau)] / c^2;$$

e risolvendola rispetto a  $t - \tau$ , abbiamo finalmente

$$(5) \quad t - \tau \approx \Upsilon \cdot \delta(t) / (c^2 - \Upsilon \cdot u(t)) \equiv \alpha(t) \Upsilon \cdot \delta(t) / c^2,$$

dove  $\alpha = \alpha(t) = (1 - \Upsilon \cdot u(t) / c^2)^{-1}$ . Questa è coerente con la  $t - \tau = O(\delta)$ , e con la natura relativistica dell'effetto “ $t \neq \tau$ ” (infatti  $(t - \tau)_{c \rightarrow \infty} = 0$ ).

Ci proponiamo ora di calcolare

$$(6) \quad \delta'(t') =: r'(t') - s'(\tau'),$$

dove  $r'$ ,  $s'$ ,  $t'$ ,  $\tau'$  sono le Lorentz-trasformate (parallele) dei corrispondenti oggetti  $r$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $\tau$  (vedi ancora le (2.D, (1)-omogenee)). Troviamo allora  $r'(t') = g[r_{\parallel}(t) - \Upsilon t] + r_{\perp}(t)$ , e similmente  $s'(\tau') = g[s_{\parallel}(\tau) - \Upsilon \tau] + s_{\perp}(\tau)$ . Quindi

$$(7) \quad \delta'(t') = r'(t') - s'(\tau') = g[r_{\parallel}(t) - s_{\parallel}(\tau)] + r_{\perp}(t) - s_{\perp}(\tau) - g\Upsilon(t - \tau)$$

dove  $\tau \approx t - \alpha(t) \Upsilon \cdot \delta(t) / c^2$  secondo la (5). Qui si farà ancora uso della (3) per eliminare  $r(t) - s(\tau) \approx \delta(t) + u(t)(t - \tau)$ , e i componenti  $_{\parallel}$  e  $_{\perp}$  verranno inseriti nella (7). Il risultato è

$$(8_1) \quad \delta'_{\parallel}(t') \approx g[\delta_{\parallel}(t) + u_{\parallel}(t)(t - \tau)] - g\Upsilon(t - \tau),$$

$$(8_2) \quad \delta'_{\perp}(t') \approx \delta_{\perp}(t) + u_{\perp}(t)(t - \tau).$$

Sostituendo in queste  $t - \tau$  mediante la (5), si conclude che (ormai senza più esplicitare le  $t'$  e  $t$  nei due membri)

$$(9_1) \quad \delta'_{\parallel} \approx g[\delta_{\parallel} + (u_{\parallel} - \Upsilon)\alpha\Upsilon \cdot \delta / c^2] \equiv g\delta_{\parallel}(1 + \alpha\Upsilon \cdot u / c^2 - \alpha\Upsilon^2 / c^2) \equiv g^{-1}\alpha\delta_{\parallel},$$

$$(9_2) \quad \delta'_{\perp} \approx \delta_{\perp} + \alpha u_{\perp} \Upsilon \cdot \delta / c^2.$$

Le (9) si possono compendiare nell'unica

$$(10) \quad \delta' \approx \alpha[g^{-1}\delta_{\parallel} + \delta_{\perp} + (\delta \times u) \times \Upsilon / c^2]:$$

infatti il componente parallelo del 2° membro della (10) è  $\alpha[g^{-1}\delta_{\parallel} + (\Upsilon \cdot \delta u_{\parallel} - \Upsilon \cdot u \delta_{\parallel}) / c^2] \equiv g^{-1}\alpha\delta_{\parallel}$ , e quello perpendicolare è  $\alpha[\delta_{\perp} + (\Upsilon \cdot \delta u_{\perp} - \Upsilon \cdot u \delta_{\perp}) / c^2] \equiv \delta_{\perp} + \alpha\Upsilon \cdot \delta u_{\perp} / c^2$ . In conclusione la (10) esprime la L-trasformazione parallela del vettore infinitesimo  $\delta$ , definito come differenza delle posizioni *simultanee*, sia in  $\mathfrak{S}$  che in  $\mathfrak{S}'$ , dei punti P e Q.

Su questa base, giustificheremo adesso l'espressione della L-trasformazione parallela per l'elemento superficiale infinitesimo  $\mathbf{a}$  anticipata con la (9.4.4, 3). Sia  $\Delta$  un secondo vettore infinitesimo dello stesso ordine di  $\delta$  e che come  $\delta$  si L-trasforma secondo la (10), con le stesse  $\Upsilon$  e  $u$ , e si ponga  $\mathbf{a} =: \delta \times \Delta$ . Per definizione,  $\mathbf{a}$  è perpendicolare al parallelogramma di lati  $\delta$  e  $\Delta$ , convenientemente orientato, e ha modulo pari all'area di quel parallelogramma. Posto  $\mathbf{a}' =: \delta' \times \Delta'$ , si dimostra (è materia di algebra vettoriale 3-dim standard) che

$$(11) \quad \mathbf{a}' \approx \alpha(\mathbf{a}_{\parallel} - \Upsilon \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} / c^2 + g^{-1}\mathbf{a}_{\perp}).$$

(Naturalmente qui  $\approx$  significa ancora “uguale a meno di termini  $o(\delta)$ .”) La (11) è la legge di L-trasformazione parallela, nella detta approssimazione, del vettore che rappresenta l'area vettoriale di un elemento di superficie in moto con velocità  $u$ . Questo prova quanto abbiamo anticipato con la (9.4.4, 3). Secondo la (9.4.4, 3bis), esattamente la stessa formula (11) vale per la trasformazione delle forze. Si noti anche che, in favore di una maggior chiarezza, in quanto precede abbiamo sempre distinto le  $\approx$  dalle uguaglianze; ma questa precauzione può essere ormai abbandonata a tutto rigore, perché la (11) ci servirà soltanto per calcolare rapporti tra forze infinitesime e aree infinitesime dello stesso ordine.

Muniti della (11), ci spostiamo ora sull'obbiettivo principale di questa appendice speciale, quello di costruire il L-trasformato parallelo del tensore degli sforzi lungo le linee anticipate nella S.sez. 9.4.4; vale a dire, di rendere esplicite le (9.4.4, 5). Al solito, converrà usare il pedice  $x$  per significare “componente parallela a  $\Upsilon$ ” e i pedici  $y$  e  $z$  per significare “componenti perpendicolari a  $\Upsilon$  e tra loro” (con questo avremo automaticamente a che fare con L-trasformazioni speciali). Denotando con  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  i versori coordinati, riscriviamo più esplicitamente la (11) come

$$(12) \quad \mathbf{a}' = \alpha\{\hat{x}[\mathbf{a}_x - |\Upsilon|(\mathbf{a}_x u_x + \mathbf{a}_y u_y + \mathbf{a}_z u_z) / c^2] + g^{-1}(\hat{y} \mathbf{a}_y + \hat{z} \mathbf{a}_z)\}.$$

Usiamo ora la (12) nelle (9.4.4, 4),  $\sigma' \cdot (L \circ \mathbf{a}) = L \circ (\sigma \cdot \mathbf{a})$ , *richiedendo che queste siano soddisfatte identicamente rispetto a  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  e  $\mathbf{a}_z$* . Poiché  $\alpha \neq 0$  compare a fattore di entrambi i membri, possiamo ignorarlo. Facendo i necessari conteggi, troviamo (con  $|\Upsilon| \equiv \Upsilon_x$ )

$$(131) \quad \sigma'_{xx}\{[\mathbf{a}_x - |\Upsilon|(\mathbf{a}_x u_x + \mathbf{a}_y u_y + \mathbf{a}_z u_z) / c^2] + g^{-1}(\sigma'_{xy} \mathbf{a}_y + \sigma'_{xz} \mathbf{a}_z)\} = \alpha^{-1}(\sigma_{xx} \mathbf{a}_x + \sigma_{xy} \mathbf{a}_y + \sigma_{xz} \mathbf{a}_z) - |\Upsilon|[(u_y \sigma_{yx} + u_z \sigma_{zx}) \mathbf{a}_x + (u_y \sigma_{yy} + u_z \sigma_{zy}) \mathbf{a}_y + (u_y \sigma_{yz} + u_z \sigma_{zz}) \mathbf{a}_z] / c^2$$

per la x-componente, e

$$(13_2) \quad \sigma'_{wx}[\mathbf{a}_x - |\Upsilon|(\mathbf{a}_x u_x + \mathbf{a}_y u_y + \mathbf{a}_z u_z)/c^2] + \mathbf{g}^{-1}(\sigma'_{wy} \mathbf{a}_y + \sigma'_{wz} \mathbf{a}_z) = \mathbf{g}^{-1}(\sigma_{wx} \mathbf{a}_x + \sigma_{wy} \mathbf{a}_y + \sigma_{wz} \mathbf{a}_z)$$

per la w-componente, con  $w \equiv y$  aut  $w \equiv z$ . Collegando i coefficienti delle  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$ ,  $\mathbf{a}_z$  nella (13<sub>1</sub>) otteniamo:

$$(14_1) \quad \sigma'_{xx} = \sigma_{xx} - \alpha |\Upsilon| (u_y \sigma_{yx} + u_z \sigma_{zx}) / c^2$$

collegando i coefficienti di  $\mathbf{a}_x$ , e

$$(14_2) \quad -\sigma'_{xx} |\Upsilon| u_w / c^2 + \mathbf{g}^{-1} \sigma'_{xw} = \alpha^{-1} \sigma_{xw} - |\Upsilon| (u_y \sigma_{yw} + u_z \sigma_{zw}) / c^2$$

collegando i coefficienti di  $\mathbf{a}_w$  (sempre per  $w = y$  aut  $w = z$ ). Mediante la stessa operazione riferita alla (13<sub>2</sub>) otteniamo

$$(15_1) \quad \sigma'_{wx} = \mathbf{g}^{-1} \alpha \sigma_{wx}$$

collegando i coefficienti di  $\mathbf{a}_x$ , e

$$(15_2) \quad -\sigma'_{wx} |\Upsilon| u_s / c^2 + \mathbf{g}^{-1} \sigma'_{ws} = \mathbf{g}^{-1} \sigma_{ws}$$

collegando i coefficienti di  $\mathbf{a}_s$ , con  $s = y$  aut  $s = z$ .

Evidentemente, abbiamo una formula di L-trasformazione nella (14<sub>1</sub>), due formule nelle (14<sub>2</sub>), ancora due formule nelle (15<sub>1</sub>), e quattro formule nelle (15<sub>2</sub>): in totale un sistema di nove formule immediatamente risolvibile rispetto alle nove componenti di  $\sigma'_{\iota\kappa}$ , con  $\iota, \kappa = x, y, z$ . Precisamente, la (14<sub>1</sub>) è già risolta rispetto a  $\sigma'_{xx}$ , le (14<sub>2</sub>) sono banalmente risolvibili rispetto alle  $\sigma'_{xw}$  avendovi sostituito la  $\sigma'_{xx}$  mediante la (14<sub>1</sub>), le (15<sub>1</sub>) sono già risolte rispetto alle  $\sigma'_{wx}$ , e infine le (15<sub>2</sub>) sono ancora banalmente risolvibili rispetto alle  $\sigma'_{ws}$  avendovi sostituito le  $\sigma'_{wx}$  mediante le (15<sub>1</sub>). In definitiva le (14, 15) forniscono le nove componenti di  $\sigma'$  come combinazioni lineari delle componenti di  $\sigma$ , di  $|\Upsilon|$  e di  $u$ . Queste sono le desiderate L-trasformazioni parallele per il tensore degli sforzi, vedi la (9.4.4, 5), e determina la matrice  $L^*$  che vi figura a 2° membro.

Se in particolare si fa  $\Upsilon = u$  (quindi  $u_y = 0$  e  $u_z = 0$ ), allora  $\alpha = \mathbf{g}^2$  e  $\gamma = \mathbf{g}$ . Abbiamo dunque, in questo caso  $\Upsilon = u$ ,

$$(16_1) \quad \sigma'_{xx} = \sigma_{xx}$$

(mediante la (14<sub>1</sub>));

$$(16_2) \quad \sigma'_{xw} = \mathbf{g}^{-1} \sigma_{xw} \equiv \gamma^{-1} \sigma_{xw}$$

(mediante le (14<sub>2</sub>));

$$(16_3) \quad \sigma'_{wx} = \mathbf{g} \sigma_{wx} \equiv \gamma \sigma_{wx}$$

(mediante le (15<sub>1</sub>)); e infine

$$(16_4) \quad \sigma'_{ws} = \sigma_{ws}$$

(mediante le (15<sub>2</sub>)). Ma  $Y = u$  significa che il riferimento  $\mathcal{S}'$  è quello di quiete istantanea, e dunque le (16) si possono riscrivere sostituendo  $\sigma'$  con  ${}^0\sigma$ ; alla fine ritrovando così, con una procedura diversa, le (9.4.4, 22).

#### APP. 9.D: L-TRASFORMAZIONI E L-BOOSTS

§ 1. *Nozioni generali.* Denoteremo al solito con lettere greche indici correnti su  $1 \div 3$  (indici “spaziali”), e con lettere latine indici correnti su  $1 \div 4$  (con  $4 \equiv$  indice “temporale”). Rileviamo anche che gran parte di quanto segue può essere immediatamente generalizzato ad uno spazio pseudoeuclideo (cioè “formalmente euclideo” con coordinata römmeriana immaginaria)  $n$ -dim, con  $n > 1$  arbitrario e in particolare diverso da 4.

Siano  $L$  e  $L'$  L-trasformazioni;  $L$  trasforma la coordinata  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3), x_4 = ict)$  (dove  $\mathbf{x}$  è una terna cartesiana ortogonale) in una simile  $\mathbf{x}'$ , e  $L'$  trasforma  $\mathbf{x}'$  in  $\mathbf{x}''$  secondo la  $\mathbf{x}' = L \circ \mathbf{x}$  e rispettivamente secondo la  $\mathbf{x}'' = L' \circ \mathbf{x}' = (L' \circ L) \circ \mathbf{x}$ . Si può direttamente verificare che  $L' \circ L$  è una L-trasformazione. Più in generale, e come abbiamo già osservato, l'insieme  $L$  delle L-trasformazioni è un gruppo rispetto alla composizione ( $\circ$ ). Vale a dire,

- 1) se  $L \in L$  e  $L' \in L$ , allora  $L' \circ L \in L$  e  $L \circ L' \in L$ ;
- 2) se  $L \in L$ , esiste (unica) una trasformazione di  $L$  che si denota  $L^{-1}$ , per cui  $L \circ L^{-1} = L^{-1} \circ L = \text{Id}$ ;
- 3) se  $L, L', L''$  sono trasformazioni di  $L$ ,  $(L \circ L') \circ L'' = L \circ (L' \circ L'')$ .

Una L-trasformazione  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$  di  $L$  è caratterizzata da sei parametri (reali) continui: le tre componenti della velocità di  $\mathbf{x}'$  (cioè, del riferimento cartesiano ortogonale  $\mathbf{x}'$ ) rispetto a  $\mathbf{x}$  e le tre componenti dell'orientamento di  $\mathbf{x}'$  rispetto a  $\mathbf{x}$ ; quindi  $\mathcal{L}$  è un gruppo continuo a sei parametri.

In forza di questa continuità, il riferimento spaziale cartesiano ortogonale  $\mathbf{x}'$  cui si passa mediante una L-trasformazione partendo da un simile riferimento spaziale  $\mathbf{x}$  è *equiverso* a  $\mathbf{x}$ ; cioè si passa da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}'$  mediante una rotazione *propria*  $\Omega$ , e viceversa, da  $\mathbf{x}'$  a  $\mathbf{x}$  mediante la rotazione propria inversa  $\Omega^{-1}$ . Secondo la definizione datane, (vedi le (2.D, (1)-omogenee)) una L-trasformazione è parallela sse  $\Omega$  è l'identità. Nel presente contesto, una L-trasformazione parallela si dice anche, gergalmente, **L-boost**. Ovviamente una L-boost è caratterizzata da tre soli parametri, le componenti della velocità del riferimento di arrivo rispetto a quello di partenza. Denotando con  $L_{\text{par}}$  l'insieme delle L-boosts, ci si chiede se tale  $L_{\text{par}}$  sia a sua volta, in generale, un gruppo rispetto alla composizione. La risposta è negativa: la composizione di due L-boosts non è, in generale, una L-boost. Vogliamo ora esaminare più da vicino questo problema.

Come sappiamo, la generica L-boost  $x \mapsto x'$  è espressa, in notazione vettoriale (cioè con i vettori spaziali scritti in grassetto), dalle

$$(1_1) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}[(g-1)\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}/v^2 - gt],$$

$$(1_2) \quad t' = g(t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{x}/c^2),$$

dove  $\mathbf{v}$  è la velocità del riferimento  $\mathbf{x}'$  rispetto al riferimento  $\mathbf{x}$ , e  $g$  è il solito fattore di Lorentz  $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$  (se necessario, più avanti useremo la notazione  $g_z$  per  $(1-z^2/c^2)^{-1/2}$ ; quindi il precedente  $g = g_v$ ).

Passando ad una L-trasformazione generalmente non parallela, la (1<sub>1</sub>) va modificata sostituendo a  $\mathbf{x}'$  un vettore  $\Omega^{-1}\mathbf{x}'$  (dove  $\Omega$  può pensarsi come una (3×3)-matrice non singolare che si riduce all'identità se la L-trasformazione è parallela), cioè

$$(2) \quad \Omega^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}[(g-1)\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}/v^2 - gt].$$

La (1<sub>2</sub>) non necessita invece di modifiche. Condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore lineare e invertibile  $\omega$  sullo spazio dei 3-vettori sia una rotazione è che esso preservi il prodotto scalare: cioè, se  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono vettori arbitrari,  $\omega\mathbf{a}\cdot\omega\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ . Questo equivale a che la (3×3)-matrice di  $\omega$  sia ortonormale. Segue in particolare che  $|\omega\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$ .

Applicando alla (2) l'operatore inverso di  $\Omega^{-1}$ ,  $\Omega$ , abbiamo

$$(3) \quad \mathbf{x}' = \Omega\mathbf{x} + \Omega\mathbf{v}[(g-1)\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}/v^2 - gt],$$

Si intuisce facilmente che le relazioni inverse alle (3,1<sub>2</sub>) si ottengono scambiando in esse i simboli con apice con quelli senza apice e  $\Omega$  con  $\Omega^{-1}$ . Vale a dire,

$$(4_1) \quad \mathbf{x} = \Omega^{-1}\mathbf{x}' + \Omega^{-1}\mathbf{v}'[(g'-1)\mathbf{x}'\cdot\mathbf{v}'/v'^2 - g't'],$$

$$(4_2) \quad t = g'(t' - \mathbf{v}'\cdot\mathbf{x}'/c^2),$$

avendo posto  $\mathbf{v}' = -\Omega\mathbf{v}$ , quindi  $v'^2 = v^2$  e  $g' = g$ . (Se in particolare la (3) è parallela,  $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ .) La correttezza delle (4) si può provare, ad esempio, sostituendo le grandezze senza apice a 2° membro delle (3, 1<sub>2</sub>) mediante le (4), e verificando che ne risulta l'identità  $\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x}'$ . Così operando sulla (3), si trova infatti (°)  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}' +$  termini in  $\mathbf{v}'\mathbf{x}'\cdot\mathbf{v}'/v'^2 +$  termini in  $\mathbf{v}'t'$ . Tenuto poi conto della  $\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}/v^2 = -\Omega^{-1}\mathbf{x}'\cdot\Omega^{-1}\mathbf{v}'/v'^2 - (g-1)\mathbf{x}'\cdot\mathbf{v}'/v'^2 + gt' = g(-\mathbf{x}'\cdot\mathbf{v}'/v'^2 + t')$ , il coefficiente di  $\mathbf{v}'\mathbf{x}'\cdot\mathbf{v}'/v'^2$  nel 2° membro della (°) risulta uguale a  $(g-1)(g+1) - g^2v^2/c^2 \equiv 0$ , e quello di  $\mathbf{v}'t'$  uguale a  $-g - g(g-1) + g^2 \equiv 0$ . La (°) si riduce dunque a  $\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x}'$ , come previsto. Analoga procedura effettuata sulla (1<sub>2</sub>) conduce a  $t' \equiv t'$ . Abbiamo così verificato che le (4) sono veramente le inverse delle (3, 1<sub>2</sub>).

Supponiamo ora che alla L-boost (1)  $L \equiv x \mapsto x'$  con velocità  $\mathbf{v}$  di  $\mathbf{x}'$  rispetto a  $\mathbf{x}$  segua un'altra L-boost  $L' \equiv x' \mapsto x''$  con velocità  $\mathbf{u}'$  di  $\mathbf{x}''$  rispetto a  $\mathbf{x}'$ . L'apice su  $\mathbf{u}$  ricorda trattarsi di una velocità rispetto a  $\mathbf{x}'$ ; ma avendo soltanto questa funzione, per brevità nel seguito esso sarà abolito.

È chiaro che le  $x'$  possono essere eliminate tra le due trasformazioni, giungendo ad una trasformazione di Lorentz “diretta”  $L'' \equiv x \mapsto x''$  del tipo (3, 1<sub>2</sub>)

$$(5_1) \quad \mathbf{x}'' = \Omega \mathbf{x} + \Omega \mathbf{w}[(g_w - 1)\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}/w^2 - g_w t],$$

$$(5_2) \quad t'' = g_w(t - \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}/c^2),$$

dove ora  $\Omega$  è una ben definita rotazione dipendente da  $\mathbf{v}$  e da  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  è la velocità di  $\mathbf{x}''$  rispetto a  $\mathbf{x}$  e  $g_w$  è il fattore di Lorentz di velocità  $\mathbf{w}$ ,  $g_w = (1 - w^2/c^2)^{-1/2}$ .  $\mathbf{w}$  si calcola in termini di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  mediante la formula di L-trasformazione parallela delle velocità: precisamente, nella formula *inversa* della (2.D, 2) si dovrà sostituire  $V$  con  $\mathbf{w}$ ,  $v$  con  $\mathbf{u}$  e  $\Upsilon$  con  $\mathbf{v}$ . Quindi,

$$(6) \quad \mathbf{w} = (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)^{-1} \{ h \mathbf{u} + [1 + (1-h)\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/v^2] \mathbf{v} \},$$

dove per maggior simmetria si è qui scritto  $h$  in luogo di  $g_v^{-1}$ . Quanto a  $\Omega \mathbf{w}$ , questo vettore si ottiene da  $\mathbf{w}$  scambiando  $\mathbf{v}$  con  $\mathbf{u}$  nella sua espressione a 2° membro della (6), quindi:

$$(7) \quad \Omega \mathbf{w} = (1 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2)^{-1} \{ k \mathbf{v} + [1 + (1-k)\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/u^2] \mathbf{u} \},$$

dove  $k = g_u^{-1}$ . Le (6, 7) identificano completamente  $\Omega$ , e mostrano che essa è in generale diversa dall'identità. L'eccezione si ha quando  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$  sono paralleli, diciamo  $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$  per  $\lambda$  reale arbitrario: allora  $\Omega \mathbf{w} = \mathbf{w} = (1 + \lambda)(1 + \lambda v^2/c^2)^{-1} \mathbf{v}$ . In particolare per  $\lambda = 0$ , cioè per  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ . Simmetricamente, avendo posto  $\mathbf{v} = \mu \mathbf{u}$  per  $\mu$  reale arbitrario, si trova  $\mathbf{w} = \Omega \mathbf{w} = (1 + \mu)(1 + \mu u^2/c^2)^{-1}$ , quindi per  $\mu = 0$ , cioè per  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{w} = \Omega \mathbf{w} = \mathbf{u}$ .

Naturalmente deve risultare  $|\Omega \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{w}|^2$ , il che può essere direttamente accertato mediante l'esame dei 2<sup>i</sup> membri delle (6,7). Trascurando il comune fattore  $(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/c^2)^{-1}$ , basta verificare che i contenuti delle  $\{ \}$  in tali 2<sup>i</sup> membri, elevati al quadrato, sono uguali; ovvero, elevando al quadrato una delle  $\{ \}$  e verificando che tale quadrato è simmetrico in  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ . Operando in tal senso ad esempio sulla  $\{ \}$  della (6), mediante qualche passaggio e tenendo conto della definizione di  $h$ , si trova:

$$(8) \quad \{ \}^2 = h^2 u^2 + [1 + (1-h)\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/v^2]^2 v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} h [1 + (1-h)\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}/v^2] = \\ = (v^2 + u^2) - [v^2 u^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2]/c^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} (\equiv (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) - [v^2 u^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})^2]/c^2),$$

che è effettivamente simmetrico in  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{u}$ .<sup>3</sup> La (5<sub>1</sub>) mostra che la L-trasformazione  $L'' = L' \circ L$ , dove  $L'$  e  $L$  sono L-boosts, *non* è una L-boost (salvo il caso eccezionale segnalato più sopra), ma il prodotto a sinistra della rotazione  $\Omega$  per la L-boost di velocità  $\mathbf{w}$ . Questa  $\Omega$  si dice **rotazione di Thomas**<sup>4</sup> associata alla composizione ordinata di  $L'$  (con velocità  $\mathbf{u}$ ) con  $L$  (con velocità  $\mathbf{v}$ ).<sup>5</sup>

<sup>3</sup> È facile, usando la (8), verificare che “ $v^2 < c^2 \wedge u^2 < c^2$ ”  $\Rightarrow$  “ $w^2 < c^2$ ”; cioè, che il modulo della “somma relativistica” di due velocità di moduli minori di  $c$  è minore di  $c$ .

<sup>4</sup> L.W. Thomas, “The kinematics of an electron with an axis”, Phil. Mag. (7), **3**, 1-22 (1927)

<sup>5</sup> Il problema della composizione ordinata ( $\circ$ ) di due L-boosts generalmente non collineari ha ricevuto una sistemazione matematica definitiva in tempi sorprendentemente recenti (si veda soprattutto in A. Ungar, “Beyond the Einstein



Se in particolare  $\mathbf{u}$  è  $O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  essendo un fattore di piccolezza,  $\Omega$  differisce dall'identità per termini  $O(\varepsilon)$ . Calcolando  $\mathbf{w}$  e  $\Omega\mathbf{w}$  al 1° ordine in  $\mathbf{u}$ , si trova  $\mathbf{w} = \mathbf{v} + h[\mathbf{u} + (h-1)\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}/v^2]$  e rispettivamente  $\Omega\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}/c^2$ , quindi (sempre al 1° ordine in  $\mathbf{u}$ )  $|\mathbf{w}|^2 \equiv w^2 = |\Omega\mathbf{w}|^2 = v^2 + 2h^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$ . Con lo stesso ordine di accuratezza, si trova anche che  $g_w = g_v(1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}/c^2)$ . Al 1° ordine in  $\mathbf{u}$  si ha dunque  $\mathbf{w} - \Omega\mathbf{w} = (1-h)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\mathbf{v}/v^2 - \mathbf{u})$ <sup>6</sup>; e come è naturale, il contenuto dell'ultima parentesi è zero sse  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli. Sempre al 1° ordine in  $\mathbf{u}$ , risulta poi  $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \mathbf{u}t'$  e  $t'' = t' - \mathbf{u}\cdot\mathbf{x}'/c^2$ . Sostituendo in queste le  $\mathbf{x}'$  e  $t'$  date dalle (1), e continuando a calcolare al 1° ordine in  $\mathbf{u}$ , si trova allora  $\Omega\mathbf{x} = \mathbf{x} + \delta\vartheta \times \mathbf{x}$ , dove  $\Omega$  è quella che figura nella (5<sub>1</sub>) e il vettore  $\delta\vartheta$  è dato da  $v^{-2}(g_v-1)\mathbf{v}\times(\mathbf{w}-\mathbf{v})$ . ( $\delta\vartheta$  è del 1° ordine in  $\mathbf{u}$  in quanto lo è  $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ .)<sup>7</sup> Si noti che  $\Omega\mathbf{x}\cdot\Omega\mathbf{x} = (\mathbf{x} + \delta\vartheta \times \mathbf{x})\cdot(\mathbf{x} + \delta\vartheta \times \mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} +$  termini del 2° ordine in  $\delta\vartheta$ ; quindi  $\Omega$  è realmente una rotazione nella stessa approssimazione. L'angolo  $|\delta\vartheta|$  si dice **angolo di Thomas** e l'effetto in sé si dice **precessione di Thomas**. Si tratta di un effetto *cinematico* e strettamente *relativistico*: infatti  $g_v \rightarrow 1+$  se  $c \rightarrow \infty$ , e la precessione sparisce. La precessione sparisce peraltro anche se  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ; ma questo ci era già noto, in quanto segue allora  $\Omega\mathbf{w} = \mathbf{w}$  per ogni  $\mathbf{w}$ , e  $\Omega$  si riduce all'identità.

---

addition Law and its Gyroscopic Thomas Precession: The Theory of Gyrogroups and Gyrovector Spaces”, Kluwer 2002), con l'introduzione di uno speciale gruppoide che traduce la natura della legge di composizione relativistica delle velocità: il “girogruppo”. Diamo qui appresso le informazioni essenziali su questo concetto. Un **girogruppo**  $(G, \oplus)$  è un gruppoide la cui operazione  $\oplus$  (“girosomma”, scritta “tra”) soddisfa i seguenti assiomi: 1) in  $G$  esiste un elemento neutro a sinistra, scritto  $\diamond$ , per il quale  $\diamond \oplus a = a \forall a \in G$ ; 2)  $\forall a \in G$ , esiste in  $G$  un elemento  $\ominus a$  (“giroinverso a sinistra” di  $a$ ) per il quale  $\ominus a \oplus a = \diamond$ ; 3)  $\forall (a, b, c)$  di  $G$ , esiste in  $G$  un unico elemento  $\text{gyr}\langle a, b \rangle c$  tale che  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus \text{gyr}\langle a, b \rangle c$  (“giroassociatività a sinistra”); 4)  $\forall (a, b)$  di  $G$  l'applicazione  $\text{gyr}\langle a, b \rangle: G \rightarrow G$  è un automorfismo di  $(G, \oplus)$ , il “giroautomorfismo di  $G$  associato alla coppia ordinata  $\langle a, b \rangle$ ”. (L'applicazione  $\text{gyr}: G \times G \rightarrow \text{Aut}(G, \oplus)$  si dice “giratore” di  $G$ .); 5)  $\forall (a, b)$  di  $G$ ,  $\text{gyr}\langle a, b \rangle = \text{gyr}\langle a \oplus b, b \rangle$ . Tra le conseguenze di questi assiomi, ricordiamo: 1) vale la “giroassociatività a destra” espressa dalla  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus \text{gyr}\langle b, a \rangle c)$ ; 2)  $\forall (a, b, c)$  di  $G$ ,  $\text{gyr}\langle a, b \rangle c = \ominus(a \oplus b) \oplus (a \oplus (b \oplus c))$  (teorema di girazione). Nel “girogruppo di Einstein”,  $G$  è la palla 3-dim aperta di  $\mathbb{R}^3$  di centro  $R=0$  e raggio  $c$  (celerità della luce, qui corsiva per evitare bisticci notazionali), diciamo  $V^3(c)$ , e  $\oplus$  è la legge di addizione relativistica, in generale non commutativa, delle velocità, cioè:  $\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = 2^\circ$  membro della (6) (con la moltiplicazione di  $\mathbf{u}$  o  $\mathbf{v}$  per un reale definita nel modo standard), o equivalentemente  $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = 2^\circ$  membro della (7) (id. id.). Il girogruppo di Einstein è “girocommutativo” (L. Silberstein, 1914), nel senso che  $\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \text{gyr}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v})$  per arbitrari  $\mathbf{v}, \mathbf{u}$  di  $V^3(c)$ . (Nel girogruppo di Einstein l'operatore  $\text{gyr}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  può essere visto come una particolare  $(3 \times 3)$ -matrice non singolare.) Segue che  $\text{gyr}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \circ \text{gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \text{Id}(V^3(c))$ . Dalla (7) segue anche che l'operatore di rotazione  $\Omega$  più sopra introdotto (che è funzione di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ ) è uguale a  $\text{gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ . Quindi  $\text{gyr}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$  si riduce all'identità su  $V^3(c)$  sse  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono collineari; in questo caso,  $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$ . Siano adesso  $B(\mathbf{v})$  e  $B(\mathbf{u})$  L-boosts (qui  $B$  sta appunto per Boost) di velocità  $\mathbf{v}$  e rispettivamente  $\mathbf{u}$ , sempre in  $V^3(c)$ . Allora la legge di composizione tra boosts si scrive  $B(\mathbf{u}) \circ B(\mathbf{v}) = B(\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \circ \text{Gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \text{Gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \circ B(\mathbf{v} \oplus \mathbf{u})$ , dove  $\text{Gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  (si noti la maiuscola in  $\text{Gyr}$ ) è la  $(4 \times 4)$ -matrice non singolare di elementi  $(\text{Gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)_{ik} = (\text{gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)_{ik}$  e  $(\text{Gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)_{i4} = (\text{gyr}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)_{4i} = \delta_{i4}$ . È anche possibile allargare la nozione di girogruppo di Einstein a quella di “spazio girovettoriale” (di Einstein) aggiungendovi una speciale operazione  $\otimes$  di moltiplicazione scalare (commutativa) del generico reale  $r$  per il generico vettore  $\mathbf{v}$  di  $V^3(c)$ , e definita, per  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  (zero di  $V^3(c)$ ), da  $r \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v} \otimes r = c \text{Th}(r \text{Th}^{-1}(\mathbf{v}/c)) \mathbf{v}/v$ . Si noti che  $0 \otimes \mathbf{v} = \mathbf{0}$  (zero di  $V^3(c)$ ) e  $1 \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v}$ . Valgono inoltre le leggi (scalari) distributiva e associativa,  $(r_1 + r_2) \otimes \mathbf{v} = (r_1 \otimes \mathbf{v}) \oplus (r_2 \otimes \mathbf{v})$  e rispettivamente  $(r_1 r_2) \otimes \mathbf{v} = r_1 \otimes (r_2 \otimes \mathbf{v})$ . In particolare, se  $n$  è un naturale  $\geq 1$ ,  $n \otimes \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \dots \oplus \mathbf{v}$  con  $\mathbf{v}$  ripetuto  $n$  volte.

<sup>6</sup> Questa è peraltro una conseguenza esatta delle precedenti espressioni di  $\mathbf{w}$  e di  $\Omega\mathbf{w}$ .

<sup>7</sup> Il calcolo asintotico in oggetto è piuttosto noioso, ed è svolto esplicitamente, ad esempio, in H. Arzeliès, “Relativistic Kinematics”, pp 175-178, vedi Bibl. Gen. B.

2. *Le L-boosts infinitesime e la composizione ordinata di infinite L-boosts infinitesime.* Una L-trasformazione diversa dall'identità per termini di ordine  $\varepsilon$ , dove  $\varepsilon$  è un fattore di piccolezza, si dice **infinitesima**. Gli elementi della matrice corrispondente ad una tale trasformazione infinitesima sono quindi del tipo

$$(9) \quad \alpha_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik},$$

dove gli  $\varepsilon_{ik}$  sono  $O(\varepsilon)$ . Sempre operando con coordinata römmeriana immaginaria, le condizioni di ortonormalità formale  $\delta_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jk}$  diventano  $\delta_{ij} = (\delta_{ik} + \varepsilon_{ik})(\delta_{jk} + \varepsilon_{jk}) = \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} + o(\varepsilon)$ , ovvero

$$(10) \quad \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji} = 0.$$

La matrice infinitesima “di scostamento dall'identità”  $\varepsilon_{ij}$  deve dunque essere antisimmetrica. Se in particolare la L-trasformazione infinitesima  $L \equiv x \mapsto x'$  è parallela con velocità (infinitesima)  $\mathbf{v}$ , la relativa  $\alpha_{ik}$  ha la struttura (2.D, 8), e la matrice infinitesima di scostamento dall'identità è data da

$$(11) \quad \varepsilon_{ik} = 0, \quad \varepsilon_{i4} = -\varepsilon_{4i} = i v_i / c, \quad \varepsilon_{44} = 0,$$

dove  $v_i$  sono le componenti di  $\mathbf{v}$  (si tenga anche presente che  $g_v = 1 + o(\varepsilon)$ ).

Siano  $L$  e  $L'$  L-boosts di matrici  $\{\alpha\} \equiv \{\alpha_{jh}\}_{j,h=1+4}$  e rispettivamente  $\{\alpha'\} \equiv \{\alpha'_{ik}\}_{i,k=1+4}$ , e sia  $\{\alpha'' = \alpha' \circ \alpha\}$ , con  $\alpha''_{ik} = \alpha'_{ip}\alpha_{pk}$ , la matrice della L-trasformazione  $L'' = L' \circ L$ . Sappiamo che  $L''$  non è, in generale una L-boost. Invece  $\{\alpha''\}$  continua ad essere, come ci si aspetta, ortonormale al 1° ordine: infatti,  $\alpha''_{ik}\alpha''_{jk} = \alpha'_{ip}\alpha_{pk}\alpha'_{jq}\alpha_{qk} = \delta_{pq}\alpha'_{ip}\alpha'_{jq} = \alpha'_{ip}\alpha'_{jp} = \delta_{ij}$ . Come vedremo tra un momento, composizioni di sequenze ordinate di infinite L-boosts infinitesime, che sono particolari L-trasformazioni, trovano importanti applicazioni in relatività.

Nel riferimento  $\mathfrak{s} \equiv (x) = (\mathbf{x}, ict)$ , sia  $x_i = f_i(\tau)$  la linea di universo orientata verso il futuro di un punto materiale P, <sup>8</sup> supposta di CdC 2 e descritta in termini del suo tempo proprio  $\tau$  in un intervallo aperto I intorno a  $\tau = 0$ . Sia

$$(12) \quad U_i = U_i(\tau) =: d_\tau f_i$$

la velocità 4-dim propria di P in  $\mathfrak{s}$ ; quindi, se  $\mathbf{u} = d\mathbf{f}$  è la corrispondente velocità 3-dim in  $\mathfrak{s}$ , risulta

$$(13) \quad U_i = g_u(\mathbf{u}, ic),$$

(dove al solito  $g_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ). Come è vero per qualsiasi velocità 4-dim propria, per  $i = 4$  la (13) comporta che  $(ic)^{-1}U_4 = g_u \geq 1$ . Inoltre le (13) implicano che

$$(13') \quad U_i U_i = d_\tau f_i d_\tau f_i = -c^2.$$

Ci proponiamo ora di determinare una successione continua, parametrizzata in  $\tau \in I$ , di sistemi di quiete istantanea rispetto a P tali che due consecutivi di essi siano legati da una L-boost.

<sup>8</sup> L'introduzione di P come “punto materiale” può suggerire l'idea che quanto ci accingiamo ad esporre sia legato in senso stretto alla *dinamica* relativistica. In realtà, P può pensarsi come mero “punto cinematico”, a condizione che il suo moto nel sistema  $(x)$  abbia velocità 3-dim di modulo  $< c$ , cioè che la tangente alla sua linea d'universo sia interna al cono di luce locale. Il fatto che la linea d'universo di P sia orientata verso il futuro comporta poi che  $i^{-1}d_\tau f_4 > 0$ .

Siano  $\mathfrak{s}'$  e  $\mathfrak{s}''$  riferimenti di quiete istantanea rispetto a P ai tempi  $\tau$  e rispettivamente  $\tau + d\tau$  in I. La velocità 4-dim propria di  $\mathfrak{s}''$  rispetto a  $\mathfrak{s}$  è

$$(14) \quad U_i^* =: U_i + dU_i = d_\tau f_i + d_\tau^2 f_i d\tau.$$

Il simbolo  $U_i^*$  – e analogamente il simbolo  $U_i'^*$ , vedi più sotto – ha mero ruolo di abbreviatore e alla fine sparisce. Essendo  $\{\alpha\} = \{\alpha(\tau)\}$  la matrice della L-trasformazione da  $\mathfrak{s}$  a  $\mathfrak{s}'$ , e  $\{\alpha'\} = \{\alpha'(\tau)\}$  la matrice della L-boost infinitesima da  $\mathfrak{s}'$  a  $\mathfrak{s}''$ , calcoliamo la matrice  $\{\alpha''\} = \{\alpha''(\tau)\} = \{\alpha'(\tau) \circ \alpha(\tau)\}$  della L-trasformazione diretta da  $\mathfrak{s}$  a  $\mathfrak{s}''$ . (Il nostro scopo è evidentemente quello di ricavare un SDO di evoluzione per le matrici  $\alpha$ .) Nel riferimento  $\mathfrak{s}'$ , le  $U_i$  e  $U_i^*$  diventano

$$(12') \quad U_i = (\mathbf{0}, ic) = \alpha_{ik} U_k,$$

e rispettivamente

$$(14') \quad U_i'^* =: U_i' + dU_i' = \alpha_{ik}(U_k + dU_k),$$

dove si sottintende che tutto sia riferito al tempo  $\tau$ . Abbiamo  $\alpha''_{ik} = \alpha'_{ip} \alpha_{pk} = (\delta_{ip} + \varepsilon'_{ip}) \alpha_{pk} = \alpha_{ik} + \varepsilon'_{ip} \alpha_{pk}$ , ove  $\varepsilon'_{ik} = 0$ ,  $\varepsilon'_{i4} = -\varepsilon'_{4i} = iU_i'^*/c$ ,  $\varepsilon'_{44} = 0$ ; cioè,

$$(15) \quad \varepsilon'_{ik} = (U_i'^* U_k' - U_k'^* U_i')/c^2.$$

Infatti,  $\varepsilon'_{ik} = (U_i'^* U_k' - U_k'^* U_i')/c^2 = 0$  per la (12'),  $\varepsilon'_{i4} = (U_i'^* U_4' - U_4'^* U_i')/c^2 = iU_i'^*/c$  ancora per la (12'), e  $\varepsilon'_{44} = (U_4'^* U_4' - U_4'^* U_4')/c^2 = 0$ . In definitiva, tenendo conto delle (15) abbiamo

$$(16) \quad \varepsilon'_{ik} = (U_i'^* U_k' - U_k'^* U_i')/c^2 = (dU_i' U_k' - dU_k' U_i')/c^2.$$

Si vede così che

$$(17) \quad \alpha''_{ik} - \alpha_{ik} = \alpha_{pk}(dU_i' U_p' - dU_p' U_i')/c^2 = \alpha_{iq}(dU_q U_k - dU_k U_q)/c^2,$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene mediante le (12', 14') e tenendo conto delle relazioni di ortonormalità formale cui è soggetta la matrice  $\{\alpha\}$ . Ora  $\alpha''_{ik} - \alpha_{ik}$  è uguale a  $d\alpha_{ik}$ , e si conclude così che le  $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(\tau)$  soddisfano il SDO lineare del 1° ordine

$$(18) \quad d_\tau \alpha_{ik} = \alpha_{ip}(d_\tau U_p U_k - d_\tau U_k U_p)/c^2 = \alpha_{ip}(d_\tau^2 f_p d_\tau f_k - d_\tau^2 f_k d_\tau f_p)/c^2 \equiv \alpha_{ip} \eta_{pk},$$

dove la matrice antisimmetrica  $\{\eta\} = \{\eta(\tau)\}$  è definita dall'ultima  $\equiv$ , e il 2° membro è evidentemente continuo. Per le date  $\eta_{pk}$  (cioè per le date  $f_i$ ), il SDO (18) identifica un'unica matrice  $\{\alpha\}(\tau)$  sotto una condizione iniziale, che converremo sia la (°)  $\{\alpha\}(0) = \text{Id}$ , quindi  $\mathfrak{s}'(0) = \mathfrak{s}$ . Inoltre il SDO (18) conserva  $\alpha_{ik} \alpha_{jk}$ : infatti  $d_\tau(\alpha_{ik} \alpha_{jk}) = d_\tau \alpha_{ik} \alpha_{jk} + \alpha_{ik} d_\tau \alpha_{jk} = \eta_{pk}(\alpha_{ip} \alpha_{jk} + \alpha_{ik} \alpha_{jp}) = 0$  (perché le  $\eta_{pk}$  sono antisimmetriche, e le  $\alpha_{ip} \alpha_{jk} + \alpha_{ik} \alpha_{jp}$  simmetriche, in  $(p,k)$ ). Quindi se la  $\{\alpha\}(0)$  era ortonormale (e certo lo era con la condizione iniziale (°)), tale rimane  $\forall \tau$  in I. In particolare, la  $\{\alpha\}$  conserva in I il suo carattere non singolare,  $\det^2 \{\alpha\} = 1$ ; né il valore di  $\det \{\alpha\}$  può cambiare segno saltando da +1 a -1 nel corso della sua evoluzione. Infine, poiché le L-trasformazioni sono omogenee, se si richiede che,  $\forall \tau$  in I,  $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}'(\tau)$  abbia la sua origine coincidente con P( $\tau$ ) (oltre che

essere un riferimento di quiete istantanea rispetto a  $P(\tau)$ ,  $\forall \tau$  in  $I$  le trasformazioni  $x' \mapsto x$  risultano del tipo Poincaré, ovvero (l'inversa di  $\alpha$  essendo uguale alla sua trasposta)

$$(19) \quad x_i = f_i(\tau) + x'_k \alpha_{ki}(\tau).$$

Qui è inteso che  $\{\alpha\}(\tau)$  è determinata dal SDO (18) sotto la  $\{\alpha\}(0) = \text{Id}$  (e per le date  $f_i(\tau)$ ). Rimarchiamo infine che, essendo  $\mathfrak{s}'$  riferimento di quiete istantanea rispetto a  $P \forall \tau$  in  $I$ , ed essendo  $\mathfrak{s}' \equiv \mathfrak{s}$  per  $\tau = 0$ ,  $P$  è fermo in  $\mathfrak{s}$  per  $\tau = 0$ ; cioè,  $d_\tau \mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$  e  $d_\tau f_4(0) = ic$ . Riassumendo, le  $f_i$  devono soddisfare otto condizioni iniziali:  $f_i(0) = 0$ ,  $d_\tau \mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$  e  $d_\tau f_4(0) = ic$ . Segue da ciò che  $\eta_{ik}(0) = 0$  e  $\eta_{i4}(0) = -\eta_{4i}(0) = ic d_\tau^2 f_i(0)$ .

Per inciso, è sufficiente supporre che  $\{\alpha\}$  sia in evoluzione governata da un SDO del tipo (18) con coefficienti  $\{\eta\}$  indeterminati (ma funzioni continue di  $\tau$  in  $I$ ), per ritrovare l'effettiva espressione di  $\{\eta\}$ . Infatti:

$$1) \text{ poiché } (\mathbf{0}, ic) = U'_k = \alpha_{ki} U_i, \quad 0 = d_\tau(\alpha_{ki} U_i) = d_\tau \alpha_{ki} U_i + \alpha_{ki} d_\tau U_i = \alpha_{kp}(\eta_{pi} U_i + d_\tau U_p);$$

2) poiché  $\{\alpha\}$  è non singolare, (\*)  $\eta_{pi} U_i + d_\tau U_p = 0$ . Contraendo questa con  $U_p$ , e tenendo conto della  $U_p d_\tau U_p = 0$ , segue che  $\eta_{pi} U_i U_p = 0$  per  $U_i$  arbitrari (entro la  $U_i U_i = -c^2$ ), e quindi che le  $\eta_{pi}$  sono antisimmetriche;

3) consideriamo le (\*) come sistema lineare in  $\{\eta\}$ , con le  $d_\tau U_p$  come termini liberi. Le (\*) sono soddisfatte da (°)  $\eta_{pi} = d_\tau U_p U_i / c^2$  (infatti  $d_\tau U_p U_i / c^2 = -d_\tau U_p$ ). D'altra parte il sistema omogeneo associato alle (\*),  $\eta_{pi} U_i = 0$ , ha per soluzione generale (°°)  $\eta_{pi} = K U_p d_\tau U_i$ , dove  $K = K(\tau)$  è un fattore arbitrario continuo per  $\tau$  in  $I$ . Dunque la soluzione più generale delle (\*) è la somma delle (°) e delle (°°),  $\eta_{pi} = d_\tau U_p U_i / c^2 + K U_p d_\tau U_i$ . Queste  $\eta_{pi}$  sono identicamente antisimmetriche sse  $K(\tau) = -(1/c^2) \forall \tau$  in  $I$ . Come avevamo anticipato, si conclude ritrovando l'effettiva matrice antisimmetrica  $\{\eta\}(\tau)$ .

Sia ora  $r'_i$  un vettore 4-dim puramente *spaziale* di  $\mathfrak{s}'$  con componenti costanti ( $\equiv$  indipendenti da  $\tau$ ), diciamo  $r'_i = (\mathbf{r}', 0)$ , e sia  $r_j = r_j(\tau)$  la sua immagine nel riferimento  $\mathfrak{s}$  attraverso  $\{\alpha\}^{-1}(\tau)$ , cioè  $r_j(\tau) = r'_k \alpha_{kj}(\tau) = r'_k \alpha_{kj}(\tau)$ . L'invariante  $r_j U_j$  è nullo perché nel riferimento  $\mathfrak{s}'$  vale  $r'_k U'_k + r'_4 U'_4 = 0$  (essendo  $U'_k = 0$  e  $r'_4 = 0$ ). Allora

$$(20) \quad d_\tau r_j = r'_k d_\tau \alpha_{kj} = r'_k \alpha_{kp} \eta_{pj} = r_p (d_\tau U_p U_j - d_\tau U_j U_p) / c^2 = r_p d_\tau U_p U_j / c^2.$$

Per la data  $U_i(\tau)$ , il SDO lineare (20) governa l'evoluzione delle  $r_j$ , ed è immediato constatare che ne conserva il modulo: infatti  $d_\tau(r_j r_j) / 2 = r_j d_\tau r_j = r_j r_p d_\tau U_p U_j / c^2 = 0$ .<sup>9</sup> La variazione con  $\tau$  delle  $r_j$  governata dalle (20) è un effetto relativistico (è proporzionale a  $c^{-2}$ ) che come ci si aspetta sparisce se  $d_\tau U_p = 0$ . Poiché  $\mathfrak{s}'(0)$  coincide con  $\mathfrak{s}$ , per definizione  $P$  è fermo ( $U_i = 0$ ) in  $\mathfrak{s}$  al tempo  $\tau = 0$ . Se  $P$

<sup>9</sup> Alternativamente, basta osservare che  $r_j r_j = r'_k \alpha_{kj} r'_h \alpha_{hj} = r'_k r'_h \delta_{kh} = r'_k r'_k = r'_k r'_k$  indipendente da  $\tau$ .

torna a fermarsi rispetto a  $\mathfrak{s}$  al tempo  $\tau_1 \neq 0$ ,  $r_4(\tau_1) = 0$  (infatti a  $\tau = \tau_1$   $0 = r_j U_j = r_1 U_1 + r_4 U_4 = r_4 ic$ , quindi  $r_i(\tau_1) = (\mathbf{r}(\tau_1), 0)$ ), e  $r_i$  è di nuovo spaziale al tempo  $\tau_1$ . Non è detto tuttavia che  $\mathbf{r}(\tau_1)$  sia uguale a  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}'$ ; ma il modulo 4-dim, e quindi anche il modulo 3-dim (spaziale), di  $\mathbf{r}(\tau_1)$  deve essere uguale a quello di  $\mathbf{r}(0)$ . In conclusione il vettore visto da  $\mathfrak{s}$  come  $\mathbf{r}$  (ad esempio, un versore coordinato di  $\mathfrak{s}'$ ) subisce una rotazione (spaziale) generalmente  $\neq 0$  da  $\tau = 0$  a  $\tau = \tau_1$ . Si intuisce che questa rotazione relativistica è riconducibile a quella di Thomas, applicata al caso presente.

**3. Complementi sulle trasformazioni di Møller.** Torniamo al continuo di trasformazioni di Poincaré (19) parametrizzate in  $\tau \in I$ . È chiaro che per completare le argomentazioni che ad esse hanno condotto, e dar loro significato fisico, occorre legare le coordinate  $x_{1 \leq i \leq 4}$  di  $\mathfrak{s}$  alle coordinate *inerziali*  $X_{1 \leq i \leq 4}$  del riferimento  $\mathfrak{S}$  di laboratorio. Sulla base di ragionevoli argomentazioni (che comprendono il ricorso alle equazioni einsteiniane *omogenee*, cioè nel vuoto), Møller<sup>10</sup>, e altri dopo di lui, hanno suggerito di porre

$$(21) \quad X_i = f_i(t) + x_\kappa \alpha_{\kappa i}(t) = X_i(x)$$

dove  $t = (ic)^{-1}x_4$ . Rinviando alla memoria di Møller per una giustificazione della scelta del riferimento  $x \equiv x^{1 \leq i \leq 4}$  definito dalle (21) (per le date  $f_i(t)$  e  $\alpha_{\kappa i}(t)$ ), ci limiteremo qui a verificare che tale scelta genera un quadro molto elegante e simmetrico della teoria delle trasformazioni tra riferimenti in moto generalmente non uniforme l'uno rispetto all'altro. Si noti che le (21) equivalgono ad identificare le  $X_i$  con i  $2^i$  membri delle (19) in cui si ponga  $x_\kappa$  in luogo di  $x'_\kappa$ , zero in luogo di  $x'_4$ , e  $t$  in luogo di  $\tau$ . Facendo nelle (21)  $i = \iota$ , si ottiene un sistema lineare nelle  $x_\kappa$  unicamente risolvibile rispetto a queste ultime perché la submatrice  $\{\alpha_{\kappa \iota}\}_{\kappa, \iota=1+3}$  è non singolare<sup>11</sup>. Quanto alla coordinata  $x_4 = ict$ , essa è identificata con  $ict$ , come anzidetto. Quindi, per la data  $\mathbf{f}$ , le  $x_i = (\mathbf{x}, ict)$  sono determinate in termini di  $\mathbf{X}$  e  $\tau$  mediante le prime tre (21) e la  $t = \tau$ . Infine la quarta delle (21) dà il tempo  $T$  di laboratorio in funzione delle  $x_i$  attraverso la relazione  $icT = f_4(t) + x_\kappa \alpha_{\kappa 4}(t)$ . (Per  $t = 0$ , quest'ultima dà come deve  $icT(x, 0) = f_4(0) + x_\kappa \alpha_{\kappa 4}(0) = 0$ , perché  $f_4(0) = 0$  e  $\alpha_{\kappa 4}(0) = 0$ .)

Sotto la condizione che lo jacobiano  $\det\{\partial X_i / \partial x_j\}_{i,j=1+4} \neq 0$  (e che le  $f_i$  siano di CdC 2), le (21) descrivono un 1-diffeomorfismo tra  $\mathfrak{S}$  e  $\mathfrak{s}$ . Come è vero per qualunque diffeomorfismo, la

<sup>10</sup> C. Møller, "On homogeneous gravitational fields in the general theory of relativity and the clock paradox", Danske Vid. Sel. Mat-Fys. Med., B. XX, n° 19, 1943. Dopo che Einstein ebbe segnalato il paradosso dei gemelli (vedi S.sez 9.4.2) come «conseguenza peculiare» della relatività nel suo lavoro del 1905, la letteratura su di esso, e sulle non poche questioni connesse, si è incredibilmente sviluppata. Rinviamo il lettore ad Arzeliès 1966 (v. Bibl. Gen. B), [98], p. 187, per una bibliografia storica. Naturalmente le memorie sull'argomento continuano ben oltre il 1966; come recente fonte di informazioni in proposito, segnaliamo ad esempio la raccolta curata da J-P Hsu e D. Fine "100 Years of Gravity and Accelerated Frames", Vol. 9 of Adv. Series Theor. Phys. Science, World Sci. 2005.

<sup>11</sup>  $\det\{\alpha_{\kappa \iota}\}_{\kappa, \iota=1+3}$  è il prodotto del determinante della corrispondente sub-matrice della L-boost di velocità  $\mathbf{v}$ , che è  $g_v \geq 1$ , per il determinante di una rotazione propria, che è +1.

condizione che un campo tensoriale sia nullo in un dato aperto è carta-indipendente. Poiché il tensore di Riemann è per definizione identicamente nullo in  $\mathfrak{S}$ , esso lo è quindi anche in  $\mathfrak{s}$ : la geometria di  $\mathfrak{s}$  è cioè “piatta”. Infine altrettanto piatta è la geometria di  $\mathfrak{s}'$  ( $\forall \tau \in I$ ), perché si passa da  $\mathfrak{s}$  a  $\mathfrak{s}'$  mediante una L-trasformazione, risultante dal prodotto di una successione continua di L-boosts parametrizzata in  $\tau$ . In conclusione, per ogni  $\mathfrak{s}'$  esiste un sistema di coordinate per il quale la metrica è identicamente minkowskiana. La differenza con una varietà p.riemanniana in senso stretto è che in quest'ultima non esiste, in generale, una trasformazione di coordinate che porti ad una metrica minkowskiana simultaneamente in tutti i punti di un suo aperto.

Specializzeremo adesso tutto quanto precede al caso fondamentale in cui una sola coordinata spaziale, diciamo la  $x_1$ , sia significativa. Sottintendendo che gli indici latini siano ormai 1 o 4, avremo  $f_i = (f_1, f_4)$ , per cui  $U_i = d_\tau f_i = (U_1 = d_\tau f_1, U_4 = d_\tau f_4)$ . L'invariante canonico  $U_i U_i = -c^2$  si riduce allora a  $U_1^2 + U_4^2 = -c^2$ ; e a questo vincolo si soddisfa con il porre  $U_1 = c \text{Sh}\theta$ ,  $U_4 = ic \text{Ch}\theta$ , dove  $\theta = \theta(\tau)$  è una funzione di  $\tau$  di CdC 1 definita in  $I$  per le date  $f_i$ <sup>12</sup>, e che si annulla per  $\tau = 0$ . Tenuto conto che le  $f_i$  sono le coordinate dell'origine di  $\mathfrak{s}'$  in  $\mathfrak{s}$ , nulle per  $\tau = 0$ , mediante una integrazione si ottiene

$$(22) \quad f_i = f_i(\tau) = (c \int_0^\tau \text{Sh}\theta(q) dq, ic \int_0^\tau \text{Ch}\theta(q) dq).$$

Queste sono in accordo con le  $f_i(0) = 0$ ; e attraverso le (19) e la  $\{\alpha\}(\tau=0) = \text{Id}$ , con le  $x_i = x_i'$  per  $\tau = 0$ .

Possiamo subito calcolare la matrice (2.D, 8) nel caso di presente interesse ponendovi  $Y_1 = U_1/g_Y$  con  $g_Y = (1 - Y^2/c^2)^{-1/2}$ ,  $Y_2 = Y_3 = 0$  (quindi  $Y^2 = Y_1^2 = (U_1/g_Y)^2$ ). Si ottiene così, sopprimendo la 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> riga e colonna della matrice (qui prive di interesse), e ricordando che  $U_i \equiv (U_1, U_4) = g_Y(Y_1, ic)$ :  $\alpha_{11} = \alpha_{44} = g_Y = U_4/(ic) = \text{Ch}\theta$ , e  $\alpha_{14} = -\alpha_{41} = ig_Y Y_1/c = iU_1/c = i \text{Sh}\theta$ . Si verifica subito che questa (2×2)-matrice  $\{\alpha_{ik}\}_{i,k=1,4}$  è formalmente ortonormale.

A questo punto possiamo calcolare le  $X_i$  mediante le (21). Scrivendo  $X$  per  $X_1$  e  $x$  per  $x_1$ , abbiamo:

$$(23_1) \quad X = X(x, t) = f_1(t) + x \alpha_{11}(t) = c \int_0^t \text{Sh}\theta(q) dq + x \text{Ch}\theta(t),$$

$$(23_2) \quad icT = f_4(t) + x \alpha_{14}(t) = ic \int_0^t \text{Ch}\theta(q) dq + ix \text{Sh}\theta(t);$$

vale a dire, precisamente le trasformazioni di Møller (9.4.1, 23).

In realtà, il problema la cui soluzione ha guidato Møller alle sue trasformazioni è quello in cui il moto dell'origine di  $\mathfrak{s}'$  rispetto a  $\mathfrak{s}$  è iperbolico incipiente: la generalizzazione alle trasformazioni (9.4.1, 23) è di fatto una specie di breve appendice al suo lavoro. Avendo qui seguito

<sup>12</sup> Si tenga presente che l'equazione  $\text{Sh}z = b$  ha una e una sola soluzione reale  $z$  per qualunque  $b$  reale. Tale  $z$  soddisfa simultaneamente la  $\text{Ch}z = a$  se  $a^2 = 1 + b^2$  e  $a \geq 1$ .

il percorso inverso, dobbiamo specializzare le (23)  $\equiv$  (9.4.1, 23) alle (9.4.1, 24). Questo si ottiene ormai facilmente. Basta usare la relazione tra  $d\tau$  e  $dt$  appropriata, cioè  $d\tau = [1 - (d_t x)^2/c^2]^{1/2} dt = [1 + a^2 t^2/c^2]^{-1/2} dt$ , e integrarla sotto la condizione  $\tau(t=0) = 0$ . Ricordando che  $d_z \text{Sh}^{-1}(z) = (1+z^2)^{-1/2}$ , si ottiene subito  $\tau = (c/a) \text{Sh}^{-1}(a\tau/c)$ , ovvero  $t = (c/a) \text{Sh}(a\tau/c)$ . La (9.4.1, 21) dà  $x(t) \equiv x_1(t)$  come  $(c^2/a)[(1+a^2 t^2/c^2)^{1/2} - 1]$ ; sostituendo in questa  $a^2 t^2/c^2$  come  $\text{Sh}^2(a\tau/c)$  si ha  $x_1(t) = (c^2/a)[\text{Ch}(a\tau/c) - 1]$ , cioè la  $x_1$  come funzione di  $\tau$ . Questa non è altro che l'attuale  $f_1(\tau)$ . Similmente, si trova  $x_4(t) = ict = i(c^2/a) \text{Sh}(a\tau/c)$ , ossia l'attuale  $f_4(\tau)$ . Abbiamo così, per derivazione,

$$(24_1) \quad U_1(\tau) = d_\tau f_1(\tau) = c \text{Sh}(a\tau/c),$$

$$(24_2) \quad U_4(\tau) = d_\tau f_4(\tau) = ic \text{Ch}(a\tau/c).$$

Confrontando le (24) con le  $U_1(\tau) = c \text{Sh}\theta(\tau)$ ,  $U_4(\tau) = ic \text{Ch}\theta(\tau)$  del caso generale, si vede subito che si deve ora porre  $\theta(\tau) = a\tau/c$  (si riconsideri la nota precedente). Questa funzione si annulla per  $\tau = 0$  ed è addirittura analitica. Si ottengono finalmente, in questo modo, le trasformazioni *speciali* di Møller (9.4.1, 24). In questo caso il determinante jacobiano  $\det\{\partial(X,T)/\partial(x,t)\}$  si può facilmente calcolare, e risulta uguale a 1.<sup>13</sup>

Concludiamo con la determinazione delle  $d_\tau U_i$  nel riferimento di quiete istantanea  $\mathfrak{s}'$ , cioè delle  $(d_\tau U_i)' = \alpha_{ik} d_\tau U_k$ . Partendo dalle (24), troviamo immediatamente  $d_\tau U_1(\tau) = a \text{Ch}(a\tau/c)$  e  $d_\tau U_4(\tau) = ia \text{Sh}(a\tau/c)$ ; e tenendo presente che ora è  $\alpha_{11} = \alpha_{44} = \text{Ch}(a\tau/c)$  e  $\alpha_{14} = -\alpha_{41} = i \text{Sh}(a\tau/c)$ ,

$$(25_1) \quad (d_\tau U_1)' = \alpha_{11} d_\tau U_1 + \alpha_{14} d_\tau U_4 = a \text{Ch}^2(a\tau/c) - a \text{Sh}^2(a\tau/c) = a,$$

$$(25_2) \quad (d_\tau U_4)' = \alpha_{41} d_\tau U_1 + \alpha_{44} d_\tau U_4 = -i \text{Sh}(a\tau/c) a \text{Ch}(a\tau/c) + \text{Ch}(a\tau/c) ia \text{Sh}(a\tau/c) = 0.$$

In definitiva,  $(d_\tau U_i)' = (a, 0)$ : cioè, la accelerazione propria 4-dim di P nel riferimento di quiete è puramente spaziale, ed è uguale, come ci si aspetta, alla accelerazione 3-dim di quiete  $\mathbf{a}$ .

#### APP. 9.E MOTI RADIALI E CIRCOLARI DI PUNTI MATERIALI O DI FOTONI IN UNA VARIETÀ DI SCHWARZSCHILD ESTERNA

Nella S.sez. 9.5.4 abbiamo trattato delle linee di universo di un punto materiale (v. §2) e rispettivamente di un fotone (v. §3) in una varietà di Schwarzschild esterna con  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$ ,  $x^3 = \phi$ ,  $x^4 = ct$ , la cui metrica riproduciamo qui per comodità del lettore:

<sup>13</sup> Diamo qui una guida per questo calcolo. Innanzitutto,  $\partial X/\partial x = \alpha_{11}$ ;  $\partial X/\partial t = (d\tau/dt)[d_\tau f_1 + (x\alpha_{1k} + ict\alpha_{4k})\eta_{k1}]$ ;  $\partial T/\partial x = \alpha_{14}/(ic)$ ;  $\partial T/\partial t = (d\tau/dt)[d_\tau f_4 + (x\alpha_{1k} + ict\alpha_{4k})\eta_{k4}]/(ic)$ , ove  $\eta_{14} = -\eta_{41} = (d_\tau f_4 d_\tau^2 f_1 - d_\tau f_1 d_\tau^2 f_4)/c^2 = ia/c$  (tenuto conto delle attuali espressioni delle  $d_\tau f_i$ ,  $d_\tau^2 f_i$ ). Sostituendo le  $\alpha_{ik}$ , e trascurando per brevità di trascrivere l'argomento  $a\tau/c$  delle funzioni iperboliche, si trova  $(x\alpha_{14} + ict\alpha_{44})\eta_{41} = (a/c)(x \text{Sh} + ct \text{Ch})$  e  $(x\alpha_{11} + ict\alpha_{41})\eta_{14}/(ic) = (a/c^2)(x \text{Ch} + ct \text{Sh})$ . A questo punto lo jacobiano si calcola subito e risulta uguale a  $(d\tau/dt)(1 + ax/c^2)$ . Ma  $d\tau/dt = (1 + ax/c^2)^{-1}$ , da cui la tesi  $\det\{\partial(X,T)/\partial(x,t)\} = 1$ . In conclusione il diffeomorfismo tra  $\mathfrak{S}$  e  $\mathfrak{s}$  conserva le aree (oltre ad essere equiverso).

$$(1) \quad ds^2 = (1-C/r)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (1-C/r)c^2 dt^2,$$

per  $r > C \equiv$  raggio di Schwarzschild. L'applicazione illustrata in (9.5.4, §2) si riferiva alla precessione di un'orbita kepleriana, e quella in (9.5.4, §3) alla deflessione di un raggio di luce. Per brevità, e accettando la consuetudine, diremo “non-nulle” le geodetiche di un punto materiale, e “nulle” (oltre che luminali o isotrope) quelle di un fotone. Se  $\lambda$  è il solito generico parametro affine lungo la geodetica,  $\lambda = \alpha s + \beta$  (con  $\alpha = \text{cost} \neq 0$ ,  $\beta = \text{cost}$ ), riscriveremo le equazioni delle geodetiche (9.5.4, 13) (indifferentemente se non-nulle o nulle) nella forma leggermente diversa, ma equivalente

$$(2_1) \quad (1-C/r)^{-1} d_\lambda^2 r - [(1-C/r)^{-2} (d_\lambda r)^2 - c^2 (d_\lambda t)^2] - r[(d_\lambda \theta)^2 + \sin^2\theta (d_\lambda \phi)^2] = 0,$$

$$(2_2) \quad d_\lambda^2 \theta + 2d_\lambda r d_\lambda \theta - \sin\theta \cos\theta (d_\lambda \phi)^2 = 0,$$

$$(2_3) \quad r^2 \sin^2\theta d_\lambda \phi = \text{cost}_3,$$

$$(2_4) \quad c(1-C/r) d_\lambda t = \text{cost}_4.$$

(In realtà, la (2<sub>3</sub>) è la presente versione della (9.5.4, 14).) L'indifferenza delle (2) alla scelta del parametro affine è evidente per le (2<sub>1</sub>, 2<sub>2</sub>); per le (2<sub>3</sub>, 2<sub>4</sub>), che hanno già subito una integrazione, bisogna moltiplicare le relative cost<sub>3</sub> e cost<sub>4</sub> per un'altra costante comune. (Se  $\lambda^* = \alpha^* s + \beta^*$  (sempre con  $\alpha^* = \text{cost} \neq 0$ ,  $\beta^* = \text{cost}$ )) è il nuovo parametro affine, la costante in oggetto è  $1/\alpha^*$ ).

Come sappiamo, la (2<sub>2</sub>) ammette la soluzione  $\theta = \pi/2$ , e quindi nel seguito ci limiteremo a traiettorie (spaziali) nel piano equatoriale. Le (2<sub>1</sub>, 2<sub>3</sub>) si semplificano allora in conformità, ponendovi  $d_\lambda \theta = 0$  e  $\sin^2\theta = 1$ . Sussistono inoltre gli usuali integrali primi:

$$(3a) \quad g_{ik} d_\lambda x^i d_\lambda x^k = (d_\lambda s)^2 \quad (\text{per geodetiche non nulle}),$$

$$(3b) \quad g_{ik} d_\lambda x^i d_\lambda x^k = 0 \quad (\text{per geodetiche nulle}).$$

Se in particolare il parametro  $\lambda$  è il tempo proprio  $\tau$  (ovviamente affine, in quanto  $d\tau = ids/c$ ) sarà comodo scrivere cost<sub>3</sub> come H, e quindi la (2<sub>3</sub>) come

$$(2_3') \quad r^2 d_\tau \phi = H;$$

e similmente, scrivere cost<sub>4</sub> come Fc, quindi la (2<sub>4</sub>) come

$$(2_4') \quad (1-C/r) d_\tau t = F. \quad ^{14}$$

Inoltre nella (3a) (geod. non nulla) bisogna porre  $(d_\lambda s)^2 = (d_\tau s)^2 = (c/i)^2 = -c^2$ , e quindi

$$(3a') \quad g_{ik} d_\tau x^i d_\tau x^k = -c^2.$$

Scritta esplicitamente, questa è

---

<sup>14</sup> Ricordiamo (cfr. 9.5.4, 8) che l'energia totale E di un punto di massa propria  $m_0$  è uguale, in una varietà con metrica tempo-ortogonale e stazionaria come quella di Schwarzschild, a  $m_0 c^2 \Gamma(-g_{44})$ ; quindi  $E = m_0 c^2 F$  in forza della (2<sub>4</sub>'). Questa relazione dà il significato fisico della costante adimensionale F, rapporto tra l'energia totale e l'energia intrinseca, e quindi  $\geq 1$ . Quando la prima energia si riduce alla seconda, come avviene per un punto fermo all'infinito, allora  $F = 1$ . Questo è in accordo con quanto ci dice direttamente la (2<sub>4</sub>'): facendovi  $r \rightarrow \infty$ , e  $d_\tau t = \Gamma \rightarrow 1$  (velocità  $\rightarrow 0$ ), si ha appunto  $F = 1$ .



$$(3a'') \quad -(1-C/r)^{-1}(d_\tau r)^2 - r^2(d_\tau \phi)^2 + (1-C/r)c^2(d_\tau t)^2 = c^2.$$

La (2<sub>3</sub>') ci offre una interpretazione della costante H: vale a dire, H è il momento angolare (rispetto all'origine) del punto di massa relativistica (=  $\Gamma \times$  massa propria, cfr. (9.5.4, 4)) unitaria<sup>15</sup>, se r si interpreta come sua distanza dall'origine stessa.

Per le geodetiche non nulle, alla (2<sub>1</sub>) possiamo sostituire la (3a'); e per le geodetiche nulle la

$$(3b') \quad g_{ik}d_\tau x^i d_\tau x^k = 0.$$

Sostituendo le (2<sub>3</sub>') e (2<sub>4</sub>') nella (3a'') (geod. non nulla), otteniamo

$$(4a) \quad (d_\tau r)^2 + H^2(1-C/r)/r^2 - c^2 C/r = c^2(F^2 - 1);$$

e se invece le sostituiamo nella (3b') (geod. nulla),

$$(4b) \quad (d_\tau r)^2 + H^2(1-C/r)/r^2 = c^2 F^2.$$

L'equazione della traiettoria di un punto materiale si ottiene sostituendo nella (4a)  $d_\phi r d_\tau \phi = H d_\phi r / r^2$  a  $d_\tau r$ ; posto al solito  $\rho$  per  $1/r$ , se  $H \neq 0$  e  $d_\phi \rho \neq 0$  risulta

$$(5a) \quad d_\phi^2 \rho + \rho = C(c^2/H^2 + 3\rho^2)/2.$$

Facendo invece la stessa sostituzione nella (4b), e sotto le stesse condizioni, risulta

$$(5b) \quad d_\phi^2 \rho + \rho = 3C\rho^2/2.$$

Alla luce delle formule precedenti, che in parte riassumono cose già note dalle S.sez. 9.5.3 e 9.5.4, studieremo ora la dinamica "radiale" (cioè lungo un raggio,  $d\phi = 0$ ) sia del punto materiale (v. §1) che del fotone (v. §2) nella varietà di Schwarzschild; nonché la dinamica "circolare" (lungo un cerchio di centro nell'origine,  $dr = 0$ ) degli stessi (v. §3, §4), nella stessa varietà.

§1. *Dinamica radiale di un punto materiale.* Ovviamente nel caso di moto lungo un raggio non vi è alcun interesse per la traiettoria, e ci si deve fermare alla (4a) facendovi  $H = 0$ . Converrà anche limitarsi al caso del punto che parte fermo dall'infinito (diretto verso il centro), e quindi con  $F = 1$ . La (4a) si riduce così alla  $(d_\tau r)^2 = c^2 C/r$ ; e poiché  $d_\tau r$  deve (ragionevolmente) conservarsi negativo, scriveremo  $d_\tau r = -c(C/r)^{1/2}$ . Questa si integra subito per separazione di variabili, e dà:

$$(6) \quad \tau = -(2/3)r^{3/2}/(c\sqrt{C}) + \text{cost}_\tau.$$

Risolta rispetto a r, e avendo fissato  $\text{cost}_\tau$ , la (6) fornisce la legge oraria in funzione del tempo proprio,  $r = r(\tau)$ . Si noti che  $\tau(r \rightarrow C+)$  vale  $-(2/3)C/c + \text{cost}_\tau$ , e dunque il punto raggiunge C in un tempo proprio finito.

Un po' meno semplice è il calcolo della  $d_\tau r = d_\tau r d_\tau \tau = -c(C/r)^{1/2}(1-C/r)$  (vedi la (3a'')).

Anche questa EDO si integra per separazione, e dà:

$$(7) \quad t = -(2/3)r^{3/2}/(c\sqrt{C}) - 2\sqrt{Cr}^{1/2}/c + (C/c) \ln[(r^{1/2}/\sqrt{C} - 1)/(r^{1/2}/\sqrt{C} + 1)] + \text{cost}_t.$$

<sup>15</sup> O se si preferisce, il momento angolare "proprio" (cioè riferito al tempo proprio) di un punto di massa propria  $m_0$  unitaria.

Secondo la (7),  $t(r \rightarrow C^+) \rightarrow \infty$ : il tempo  $t$  necessario al punto per raggiungere  $C$  è infinito, a differenza di quanto è vero per il tempo proprio  $\tau$ . Può essere opportuno fissare le due costanti nelle (6, 7) in modo che sia  $\tau = 0$ , e rispettivamente  $t = 0$ , per  $r = \underline{r}$ ,  $\underline{r}$  essendo un valore arbitrario, ma  $> C$ , di  $r$ . Così ad esempio risulterebbe  $\text{cost}_\tau = (2/3)\underline{r}^{3/2}/(c\sqrt{C})$ .

È abbastanza naturale, a questo punto, definire  $(dr^*)^2 =: g_{11}(dr)^2$  e  $(dt^*)^2 =: -g_{44}(dt)^2$ , per cui  $(dr^*/dt^*)^2 = -(g_{11}/g_{44})(dr/dt)^2 = c^2C/r$ , o  $dr^*/dt^* = -cr^{-1/2}\sqrt{C}$ . Nelle coordinate  $r^*$  e  $t^*$ , la “velocità” del punto tende a  $-c$  se  $r$  tende a  $C^+$ . Si noti che le coordinate con asterisco sono quelle che userebbe un osservatore inerziale in quiete rispetto al punto, in  $r$ , e con il suo tempo proprio: infatti  $(dr^*)^2 = ds^2$  (per  $dt = 0$ ), e  $c^2(dt^*)^2 = -ds^2$  (per  $dr = 0$ ). §

§2. *Dinamica radiale di un fotone.* L’equazione da usare è la (4b) con  $H = 0$ , e quindi la

$$(8) \quad d_\tau r = \pm c(1-C/r),$$

con il segno  $+$  o il  $-$  a seconda che il fotone si allontani dal centro o gli si avvicini. Anche la (8) si integra per separazione di variabili, e risulta:

$$(9) \quad \pm ct = r + C \ln(r/C-1) + \text{cost.}$$

Per  $r \rightarrow C^+$ , la (9) dà  $\pm ct \rightarrow -\infty$ : il fotone in avvicinamento (segno  $-$  nella (8)) raggiunge  $C$  in un tempo  $t$  infinito. §

§3. *Dinamica circolare di un punto materiale.* L’equazione da usare è la (5a) con  $d_\phi^2 \rho = 0$ , quindi la  $\rho = C(c^2/H^2 + 3\rho^2)/2$ , ovvero

$$(10) \quad H^2 = Cc^2r^2/(2r-3C).$$

Ponendo  $d_\tau r = 0$  e questo valore di  $H^2$  nella (4a), otteniamo  $C(1-C/r)/(2r-3C) - C/r = F^2 - 1$ ; e risolvendo questa rispetto a  $F^2$ ,

$$(11) \quad F^2 = (1-C/r)^2/(1-3C/(2r)),$$

che è costante per  $r$  costante. Quanto alla legge oraria del moto, per ragioni di simmetria ci si aspetta che la velocità angolare  $d_\tau \phi$  sia costante. In realtà, eliminando  $H$  con la (10) nella (2<sub>3</sub>'), otteniamo  $(d_\tau \phi)^2 = c^2Cr^{-2}(2r-3C)^{-1}$ , che è ancora costante per  $r$  costante. Ma quest’ultima relazione dice anche che  $d_\tau \phi$  può essere reale soltanto se  $r > 3C/2$ : il punto materiale può percorrere un’orbita circolare *soltanto* se di raggio maggiore del raggio limite  $3C/2$ . Questo è del tutto diverso da quanto accade nella meccanica newtoniana, nella quale l’orbita circolare è permessa con qualunque raggio, purché l’accelerazione centripeta sia equilibrata dalla forza di attrazione (su una massa potenziata unitaria).

In modo analogo si può calcolare  $(d_\tau \phi)^2 = (d_\tau \phi)^2(d_\tau \tau)^2 = (d_\tau \phi)^2(1-C/r)^2/F^2 = c^2Cr^{-3}/2$  (per la (11)). Formalmente, cioè dando a  $r$  il significato di distanza (e non di coordinata) radiale, e

ricordando che  $C = 2\kappa M/c^2$ , quest'ultima è identica alla corrispondente formula newtoniana,  $r(d_t\phi)^2 = \kappa M/r^2$ . §

§4. *Dinamica circolare di un fotone.* L'equazione da usare è la (5b) con  $d_\phi^2\rho = 0$ , ovvero la

$$(12) \quad r = 3C/2.$$

Questo raggio è piccolo a causa del fattore  $c^{-2}$  in  $C$ , e quindi per lo più è molto minore del raggio della palla potenziante: ad esempio  $C$  vale soltanto  $\approx 2,95$  km per il sole, il cui raggio effettivo è  $\approx 0,7 \cdot 10^6$  km. Lo stesso vale per la grande maggioranza dei corpi celesti, che hanno densità medie di gran lunga troppo piccole affinché la circolazione sia possibile (una possibile eccezione è quella di una stella di neutroni). §

Quasi tutti gli oggetti massivi (da rappresentarsi qui sempre come oggetti a simmetria sferica, cioè come palle) hanno dunque raggio di Schwarzschild  $C$  largamente al loro interno, dove le equazioni geometrodinamiche di vuoto non si applicano. È tuttavia legittimo chiedersi cosa succederebbe nelle vicinanze di oggetti con densità così alte da risultare *interni* alla sfera concentrica di raggio  $C$ . Diremo “regione I” [“regione II”] quella per cui  $r > C$  [ $r < C$ ]. Sempre facendovi  $d\Omega^2 = 0$ , dalla (1) si vede subito che nella regione I  $t$  è time-like e  $r$  è space-like, mentre le parti si invertono nella regione II:  $t$  diventa space-like e  $r$  time-like. Calcolando inoltre l'invariante scalare di curvatura  $\rho_{ikrs}\rho^{ikrs}$  per la metrica (1), si trova  $12C^2/r^6$ , cioè una funzione di  $r$  singolare per  $r = 0$  ma regolare per  $r = C$ . Questo suggerisce che  $r = 0$  sia una singolarità “intrinseca” (o “non rimuovibile”), e che  $r = C$  sia invece una singolarità “apparente”, legata alla scelta delle coordinate, e quindi rimuovibile esprimendo la stessa metrica (1) in altre convenienti coordinate (naturalmente in tal caso le nuove coordinate non possono essere funzioni diffeomorfe delle vecchie nel loro dominio di definizione).

Una possibilità in questo senso è la seguente. Per  $r \neq C$ , da  $(r,ct)$  passiamo a  $(r',ct')$  secondo le

$$(13) \quad r' =: r, \quad ct' =: ct + C \ln(|r/C - 1|).$$

Ovviamente, qui il valore assoluto significa che  $|r/C - 1|$  è uguale a  $r/C - 1$  per  $r > C$  e a  $1 - r/C$  per  $r < C$ . Si trova subito, allora, che per  $r > C$   $c\partial t'/\partial r = C/(r-C)$ , e per  $r < C$ ,  $c\partial t'/\partial r = -C/(C-r) \equiv C/(r-C)$  (esattamente come nel primo caso); quindi, che  $c\partial t'/\partial r \rightarrow \pm\infty$  a seconda che  $r \rightarrow C\pm$ . questo significa che la trasformazione  $(r,ct) \rightarrow (r',ct')$  non è diffeomorfa in tutto il dominio  $r > 0$ . Calcolando i coefficienti della metrica nelle nuove coordinate (li denoteremo aggiungendo un apice su  $g$ ) mediante le usuali formule di trasformazione covariante, abbiamo:

$$(14) \quad g'_{rr} = 1 + C/r', \quad g'_{tt} = -c^2(1 - C/r'), \quad g'_{tr} = g'_{tr} = cC/r',$$

e quindi la metrica originale diventa, conservando il suo valore numerico, e tenendo conto della prima (13),

$$(15) \quad ds^2 = (1+C/r)dr^2 + 2C/r \cdot dr c dt' - (1-C/r)c^2 dt'^2,$$

manifestamente regolare per ogni  $r > 0$  (ma ovviamente ancora singolare per  $r = 0$ ). Le  $(r' \equiv r, ct')$  si dicono **coordinate di Eddington-Finkelstein**<sup>16</sup> “anticipate” (perché  $t'$  è anticipato rispetto a  $t$ ), e sono un esempio di coordinate atte a regolarizzare la metrica originale di Schwarzschild.

Le coordinate di Eddington-Finkelstein sono convenienti per l'analisi delle geodetiche radiali di fotoni-test. In questo caso la  $ds^2 = 0$  equivale all'equazione di 2° grado in  $cdt'/dr$

$$(16) \quad -(1-C/r)(cdt'/dr)^2 + (2C/r)cdt'/dr + (1+C/r) = 0,$$

che ha le due radici reali

$$(17_1) \quad cdt'/dr = -1,$$

$$(17_2) \quad cdt'/dr = 1 + 2C/(r-C).$$

Le (17) sono immediatamente integrabili a

$$(18_1) \quad ct' = -r + \text{cost}_1$$

e rispettivamente a (per  $r \neq C$ )

$$(18_2) \quad ct' = r + 2C \ln(|r/C - 1|) + \text{cost}_2.$$

Nel piano  $(r, ct')$ , le geodetiche (18<sub>1</sub>) sono rette parallele con inclinazione  $-1$  e parametro  $\text{cost}_1$  (la loro intersezione con l'asse  $(r)$ ); mentre le geodetiche (18<sub>2</sub>) sono curve “quasi simmetriche” rispetto alla retta  $r = C$  nelle immediate vicinanze di questa (dove  $1$  è trascurabile rispetto a  $2C/(r-C)$ ) e che da essa si allontanano al crescere di  $t'$ . È così determinata la struttura dei coni (con una sola dimensione spaziale) luminali locali, e con essa le proprietà del moto radiale di un fotone test. Si constata dunque che tale fotone può attraversare il punto  $r = C$  soltanto dall'esterno verso l'interno; e una volta all'interno (regione II), non può più riemergere all'esterno (regione I) qualunque sia la sua posizione iniziale, essendo destinato, per  $t'$  abbastanza grande, a procedere ulteriormente verso il centro  $r = 0$ , fino al bordo della palla potenziante. Si tenga presente che  $dt/dt' = r/(r+C)$  lungo la geodetica, e quindi che  $0 < dt/dt' < 1$  per  $r > 0$ .<sup>17</sup> Infine le stesse conclusioni si estendono facilmente al caso di due o tre dimensioni spaziali, sempre sotto il vincolo della simmetria sferica.

<sup>16</sup> A. Eddington, *Nature*, **113**, 192 (1924); D. Finkelstein, *Phys. Rev.*, **110**, 965 (1958).

<sup>17</sup> Quanto alle geodetiche dei punti materiali, esse possono essere calcolate servendosi del solito integrale primo  $g_{ik} d_\tau x^i d_\tau x^k = -c^2$  (con  $\tau \equiv$  tempo proprio); oppure, più semplicemente (ma sufficiente ai nostri fini presenti) ci si può fare un'idea del loro andamento ricordando che esse devono comunque essere interne ai coni luminali locali. Si trova così che per il moto radiale di un punto materiale valgono conclusioni del tutto simili a quelle valide per il moto di un fotone. Il punto  $r = C$  (che si dice anche “orizzonte causale”) si comporta insomma, a tutti gli effetti, come una membrana “semipermeabile” che permette il passaggio di fotoni aut di punti materiali dalla regione I alla regione II, ma non quello in senso contrario.

La precedente analisi è stata per lungo tempo considerata come una mera elucubrazione matematica; ma a partire dagli anni '60 circa, si è cominciato a comprendere che oggetti cosmici con le proprietà da essa previste potevano effettivamente esistere. Questi oggetti, la cui realtà fisica è da tempo indubitabile, sono universalmente noti come **buchi neri**.<sup>18</sup> Un buco nero cresce dunque assorbendo massa-energia dal suo esterno senza mai ad esso restituirla. Di fatto, vi sono evidenze osservative che depongono per l'esistenza di buchi neri "supermassivi" con masse comprese tra  $10^5$  e  $10^9$  masse solari. Essi si ritengono derivati dal collasso gravitazionale di stelle abbastanza massive, e sarebbero presenti nella regione centrale della maggior parte delle galassie. Alle altissime densità di questi oggetti, gli elettroni interagirebbero con i protoni via decadimento  $\beta$  inverso, formando così neutroni (più neutrini che si disperdono) e dando origine a "stelle di neutroni" stabili, con densità tipiche dell'ordine di  $10^{16}$  kg/m<sup>3</sup>.<sup>19</sup>

#### APP. 9.F SULLE VARIETÀ CARATTERISTICHE DELLE EQUAZIONI DI EH

La questione delle varietà caratteristiche di un SDP quasi lineare (un argomento di natura schiettamente analitica) è stato affrontata in termini discretamente generali nella App. Spec. 7.A, che converrà riguardare attentamente. Si tratta quindi, adesso, di applicare al SDP di EH i risultati colà riferiti, per determinarne le varietà caratteristiche. La sola parte che ci interessa di  $E_{(2)}$ , considerato come operatore differenziale del 2° ordine quasi lineare agente sulla metrica  $g_{(2)}$ , è ovviamente quella principale, lineare nelle  $\partial^2 g_{(2)}$ ; e questo, in quanto sia le  $g_{(2)}$  che le  $\partial g_{(2)}$  (e quindi anche i simboli di Christoffel), nonché il tensore energetico  $T_{(2)}$ , sono da considerarsi continui attraverso la 3-varietà  $\Sigma$  (o 2-superfici mobili) di possibile discontinuità delle  $\partial^2 g_{(2)}$ .

La valutazione dei salti ( $\Delta$ ) delle componenti di  $E_{(2)}$  attraverso  $\Sigma$  dà:

<sup>18</sup> O più propriamente come buchi neri "semplici", cioè caratterizzati soltanto dalla loro massa. In realtà è difficile che un buco nero non abbia anche un momento angolare, e possibilmente una carica. Non ci occuperemo qui di questi oggetti, che sono stati previsti e largamente studiati, e che comportano metriche più generali di quella di Schwarzschild (metrica di Kerr, metriche di Reissner-Nordström). La previsione teorica della possibile esistenza dei buchi neri è stata paragonata a quella dell'esistenza del positrone, come addizionale esempio del potere predittivo di una scienza esatta.

<sup>19</sup> Una elucubrazione matematica ugualmente legittima della precedente è quella che parte dalla trasformazione  $r'' = r$ ,  $ct'' = ct - C \ln(|r/C - 1|)$  anziché dalla (13). Le coordinate  $(r'' \equiv r, ct'')$  (che si dicono "di Eddington-Finkelstein ritardate") regolarizzano la metrica (1) secondo la  $ds^2 = (1+C/r)dr^2 - 2Cc/r \cdot dt'' dr - (1-C/r)c^2$  (cfr. la (15)); cioè si passa dall'una all'altra espressione della metrica (1) regolarizzata semplicemente scambiando tra loro  $t'$  con  $-t''$ . Come ben si comprende, le coordinate ritardate danno tuttavia luogo a geodetiche luminali locali "ribaltate" rispetto a quelle che si ricavano con le coordinate anticipate. Di conseguenza, il punto  $r = C$  si comporta ancora come una membrana semipermeabile, ma con l'opposta proprietà di permettere il passaggio (di fotoni aut punti materiali) dalla regione interna (II) a quella esterna (I) e non quello in senso contrario. Si originerebbe così un (presunto e cosiddetto) **buco bianco** che, al contrario di un buco nero, depositerebbe massa-energia al suo esterno senza mai da questo assorbirne. L'effettiva esistenza di buchi bianchi sembra tuttavia alquanto irrealistica, non essendovi di essi alcuna evidenza osservativa.

$$(1) \quad \Delta E_{ik} = (1/2)g^{jh}[\Delta\partial^2 g_{ik}/\partial x^j \partial x^h + \Delta\partial^2 g_{jh}/\partial x^i \partial x^k - \Delta\partial^2 g_{ih}/\partial x^j \partial x^k - \Delta\partial^2 g_{jk}/\partial x^i \partial x^h],$$

e la velocità di avanzamento normale del fronte di discontinuità  $\tau = \tau(x) = \text{cost}$  è espressa al solito come

$$(2) \quad u = |\partial_t \tau| / (\gamma^{ik} \tau_{,i} \tau_{,k})^{1/2},$$

dove  $\gamma^{ik}$  è la metrica (controvariante) dello spazio 3-dim. Sappiamo che i salti delle  $\partial^2 g$  devono allora soddisfare le dieci condizioni di compatibilità

$$(3) \quad \Delta\partial^2 g_{ik}/\partial x^j \partial x^h = \lambda_{ik} \tau_{,j} \tau_{,h},$$

dove i  $\lambda_{ik} \equiv \lambda_{ki}$  sono dieci moltiplicatori per il momento arbitrari, ma che in forza del carattere 2-tensoriale simmetrico delle  $\Delta E_{ik}$ , devono essere componenti covarianti di un 2-tensore simmetrico. Sostituendo le (3) nelle (1) uguagliate a zero (in forza del SDP di EH), troviamo che i dieci moltiplicatori devono soddisfare il sistema lineare omogeneo di altrettante equazioni

$$(4) \quad g^{jh}[\tau_{,j} \tau_{,h} \lambda_{ik} + \tau_{,i} \tau_{,k} \lambda_{jh} - \tau_{,j} \tau_{,k} \lambda_{ih} - \tau_{,i} \tau_{,j} \lambda_{kh}] = 0.$$

Contraendo le (4) con  $g^{pk} \tau_{,p}$ , cioè con  $\tau^{/k}$ , se ne deducono le quattro conseguenze lineari

$$(5) \quad (\lambda_{,j}^j \tau_{,h} \tau^{/h} - \lambda_{hk} \tau^{/h} \tau^{/k}) \tau_{,i} = 0,$$

dove  $\lambda_{,j}^j$  è l'invariante lineare di  $\lambda_{(2)}$ . D'altra parte lo scalare dentro le ( ) nelle (5) si riconosce essere identicamente nullo: basta contrarre le (4) con  $g^{ik}$ , ottenendo il doppio delle dette ( ). Quindi le (5) sono quattro identità, e al più sei delle dieci (4) sono indipendenti; ovvero, la caratteristica algebrica del sistema (4) è  $\leq 6$ . Si può anche facilmente provare che essa è uguale a 6 se  $g_{ik} \tau^{/i} \tau^{/k} \neq 0$ , e  $< 6$  in caso contrario. Si vede così che le varietà caratteristiche del sistema di EH sono quelle 3-varietà  $\tau(x) = \text{cost}$  per cui la caratteristica algebrica delle (4) è  $< 6$ , cioè quelle per cui

$$(6) \quad g_{ik} \tau^{/i} \tau^{/k} \equiv g^{ik} \tau_{,i} \tau_{,k} = 0.$$

In un riferimento tempo-ortogonale (cioè per cui  $g_{i4} = 0$  e  $g_{ik} = \gamma_{ik}$ ) risulta  $ds^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k - g_{44} (dx^4)^2$ , e le (6) diventano

$$(7) \quad \gamma^{ik} \tau_{,i} \tau_{,k} + g^{44} (\partial_t \tau / c)^2 = 0;$$

ma  $g^{44} = (g_{44})^{-1} = -c^2 / \mathcal{V}^2$ ,  $\mathcal{V}^2$  essendo il quadrato della celerità (locale) della luce. Confrontando questo risultato con la (2), si conclude che

$$(8) \quad u^2 = \mathcal{V}^2;^{20}$$

vale a dire, i fronti di discontinuità delle  $\partial^2 g_{(2)}$ , o **onde di gravità** (o **gravitazionali**), si propagano con la stessa celerità (locale) della luce. Questa *conseguenza* delle equazioni di EH è profondamente significativa: le azioni gravitazionali non sono istantanee, ma si propagano nello

<sup>20</sup> Se poi il calcolo di  $u$  viene fatto in un riferimento generico, non necessariamente tempo-ortogonale, si trova che la (8) è ancora valida, come ci si deve aspettare. È appena il caso di aggiungere che qualunque SDP lineare o quasi-lineare di tipo d'alembertiano ha la (6) come equazione delle sue varietà caratteristiche. Ad esempio, e come sappiamo, le equazioni di Maxwell scritte in termini di 4-potenziale elettromagnetico sono del tipo d'alembertiano nel gauge di Lorenz.

spazio fisico con la stessa celerità di quelle elettromagnetiche. Questo elemento comune alle due forme di energia radiante, la loro velocità di propagazione, è poi anche la velocità limite ammessa dalla teoria RG.

Come abbiamo già accennato, l'estrema esiguità del segnale – in pratica sommerso da rumore locale di origine spuria – rende assai difficile la rivelazione delle onde gravitazionali. Si è quindi cercato di ovviare a questo inconveniente soprattutto mediante tecniche di coincidenza remota, e questo ha permesso di ottenere alcune conferme discretamente convincenti. È ben comprensibile, comunque, che se la diagnostica gravitazionale dovesse migliorare in modo significativo, l'astrofisica verrebbe a disporre di un nuovo potente strumento per l'osservazione di oggetti celesti lontani, soprattutto extragalattici. Diversamente da quanto accade nel caso della radiazione elettromagnetica, praticamente nessun ostacolo può infatti arrestare o indebolire quella gravitazionale (salvo l'ovvio effetto geometrico  $1/r^2$ ).

È opportuno un ultimo breve commento. Il fatto che sia così difficile rivelarle, come del resto è largamente prevedibile, non autorizza a mettere in dubbio l'esistenza delle onde di gravità come sopra definite. Infatti, negare la correttezza della (6) equivarrebbe a negare la correttezza del SDP di EH, e quindi dell'intera teoria RG come oggi la conosciamo. In altre parole, non la validità della (6) dovrebbe essere messa in discussione, ma al più, possibilmente, la sua interpretazione.

#### APP. 9.G      NOTA SULLE COORDINATE PSEUDOARMONICHE

Nell'introdurre il SDP di EH, abbiamo sottolineato come la solenoidalità dei due 2-tensori simmetrici a primo e secondo membro ne abbassa il rango funzionale da dieci a sei. Poiché le incognite effettive – pensando al tensore energetico come dato – sono le dieci componenti della metrica  $g_{ik}$ , ci si aspetta che sia possibile aggiungere quattro *opportuni* vincoli tra le stesse incognite  $g_{ik}$  alle equazioni di EH, per stabilire il corretto bilancio tra incognite ed equazioni. Ad avviso di chi scrive, questo punto non è sempre approfondito come meriterebbe nella trattatistica RG.<sup>21</sup> È in proposito interessante una procedura suggerita da De Donder<sup>22</sup> e da Lanczos,<sup>23</sup> e che consiste nell'imporre alle  $g_{ik}$  i quattro vincoli differenziali addizionali

<sup>21</sup> Ad esempio, il carattere sottodeterminante del SDP di EH è così commentato nel trattato di Landau e Lifchitz ("Théorie du champ", trad. russa in francese, § 95): «Les quatre coordonnées peuvent être soumises à une transformation arbitraire. Cette transformation permet de choisir arbitrairement quatre des dix composantes du tenseur  $g_{ik}$ . Par conséquent, seules six quantités  $g_{ik}$  sont indépendantes.» Evidentemente, il criterio qui adottato è quello, un po' vago, della uguaglianza del numero delle incognite e delle equazioni. D'altra parte le quattro  $g^{ik}_{/k} = 0$  sono inutilizzabili, risultando una mera conseguenza della definizione di derivata covariante (insieme alle quaranta  $g^{ik}_{/h} = 0$ ).

<sup>22</sup> De Donder T.: "La gravifique Einsteinienne", Gauthier-Villars, 1921

<sup>23</sup> Lanczos, C. Phys. Z. **23**, 537 (1923).

$$(1) \quad \partial_i(g^{ik}(-g)^{1/2}) = 0,$$

dove al solito  $g$  denota il  $\det\{g_{ik}\}$ . Oltre a provare che le (1) sono realmente compatibili con le equazioni di campo, dobbiamo chiarirne il significato.

All'operatore di Laplace in uno spazio euclideo  $n$ -dim riferito a coordinate cartesiane ortogonali, cioè all'operatore  $\sum_{i=1}^n \partial^2/(dx^i)^2$ , corrisponde, in uno spazio pseudoeuclideo-lorentziano  $n$ -dim riferito a coordinate cartesiane pseudortogonali, l'operatore di d'Alembert  $\sum_{i=1}^{n-1} \partial^2/(dx^i)^2 - \partial^2/(dx^n)^2$ . Infatti si passa dal primo al secondo operatore semplicemente moltiplicando per l'unità immaginaria la coordinata  $n$ -ma; ma come è ben noto, un profondo divario separa i due operatori in questione. Per dirla in breve, tra gli operatori DP lineari del 2° ordine, quello di Laplace è il prototipo di operatore DP *ellittico*, e quello di d'Alembert è il prototipo di operatore DP *iperbolico*; e questo dovrebbe bastare ad "occhi matematici" appena adulti. In coordinate generali, i due operatori si scrivono nella stessa forma invariante  ${}_{/ik}g^{ik}$ , nella quale il sopraddetto divario risiede nella segnatura della matrice non singolare  $g^{ik}$ , che è  $(n,0)$  nel primo caso, e  $(n-1,1)$  nel secondo. Una generica soluzione  $\varphi = \varphi(x)$  della

$$(2) \quad g^{ik} \varphi_{/ik} \equiv \varphi^i_{/i} = 0$$

si dice, come tutti sanno, "armonica" nel caso ellittico, e "pseudoarmonica" (ma spesso, per trascuratezza, ancora "armonica") nel caso iperbolico. Ovviamente, l'oggetto a 1° membro della (2) ha lo stesso rango tensoriale di  $\varphi$ , perché  ${}^i_{/i}$  non dipende dalla scelta delle coordinate. Infine  ${}^i_{/i}$  si denota di norma come  $\Delta$  (spesso anche come  $\nabla^2$ ) nel caso del laplaciano, e come  $\square$  in quello del d'alembertiano.

Sempre in coordinate generali, l'operatore di d'Alembert è dato da (con  $g < 0$ ):

$$(3) \quad \square(\cdot) = (-g)^{-1/2} \partial_i [g^{ij} (-g)^{1/2} \partial_j (\cdot)];$$

quindi, scegliendo la coordinata  $x^k$  come funzione operanda, e trascurando la parentesi dopo il  $\square$ , abbiamo

$$(4) \quad \square x^k = (-g)^{-1/2} \partial_i [g^{ij} (-g)^{1/2} \delta_j^k] = (-g)^{-1/2} \partial_i [g^{ik} (-g)^{1/2}].$$

Quindi la (1) equivale a  $\square x^k = 0$ , e corrisponde alla scelta di **coordinate pseudoarmoniche** (ovviamente) tra loro indipendenti. Nel seguito sottintenderemo che  $n = 4$ .

Applicando a  $g$  la formula che dà la derivata  $\partial_r$  di un determinante con elementi funzioni di  $x$ , abbiamo  $\partial_r g = g g^{ik} \partial_r g_{ik}$ ; ed eliminando  $\partial_r g_{ik}$  come somma dei due corrispondenti Chr1, concludiamo che

$$(5) \quad \partial_r g = 2g \Gamma_{1r}^i:$$

una identità che già conosciamo. Per brevità, converrà porre

$$(6) \quad \Gamma^k =: -\square x^k = -\partial_i g^{ik} - g^{ik} \Gamma_{1j}^j,$$



e

$$(6') \quad \Gamma_h =: g_{hk}\Gamma^k = g^{jk}\partial_k g_{jh} - \Gamma_h^j{}_j.$$

Si noti che le  $\Gamma^k$  [le  $\Gamma_h$ ] *non* sono componenti controvarianti [covarianti] di un vettore (e in particolare dello stesso vettore), sebbene si passi dalle une alle altre come se lo fossero. Conviene anche introdurre le

$$(7) \quad \Gamma_{ij} =: (\partial_j \Gamma_i + \partial_i \Gamma_j)/2 - \Gamma_h \Gamma_i^h{}_j = \Gamma_{ji},$$

che si formano come la parte simmetrica delle derivate covarianti di un vettore (ma, ripetiamo, le  $\Gamma_i$  non lo sono, e quindi le  $\Gamma_{ij}$  non sono componenti covarianti di un 2-tensore). Ancora per brevità, porremo:

$$(8) \quad y_i =: \Gamma_i^j{}_j,$$

che a loro volta non sono componenti covarianti di un vettore.

Esprimeremo adesso il tensore di Einstein  $E^{ik}$  in modo che, a parte un contributo di 2° ordine d'alembertiano, in tutti i rimanenti termini contenenti derivate seconde della metrica queste vi appaiano attraverso derivate prime delle  $\Gamma_h$ . Questo si ottiene mediante le seguenti:

$$(9) \quad E^{ik} = -(-g)^{-1/2} g^{jh} \partial_{jh}^2 [(-g)^{1/2} g^{ik}]/2 + g^{ik} [y^j (y_j + \Gamma_j) + \Gamma + L] - \Gamma^{ik} + y^j \partial_j g^{ik} + g^{pr} g^{qs} \Gamma_{rs}^i \Gamma_p^k{}_q,$$

ove abbiamo posto  $\Gamma =: g^{rs} \Gamma_{rs}$ ,  $\Gamma^{ik} =: g^{ir} g^{ks} \Gamma_{rs} = \Gamma^{ki}$ ,  $L =: g^{jh} (\Gamma_j^s{}_r \Gamma_h^r{}_s - \Gamma_j^r{}_h \Gamma_r^s{}_s)$  e  $y^j =: g^{ij} y_i$ . Si noti che il 2° membro della (9) è simmetrico in  $^{ik}$ , come deve essere. Evidentemente, il contributo del d'alembertiano è in  $-g^{jh} \partial_{jh}^2 (g^{ik})/2$ ; ma derivate seconde della metrica sono contenute anche in  $\Gamma$  e in  $\Gamma^{ik}$ .

Per costruzione, a 2° membro della (9) vi è un 2-tensore simmetrico solenoidale, e questo fatto è ovviamente indipendente dalle coordinate scelte. Se tuttavia le coordinate sono pseudoarmoniche, cioè se esse sono soluzioni indipendenti delle  $\square x^k = 0$ , allora  $\Gamma^k = 0$ ,  $\Gamma_h = 0$ ,  $\Gamma_{jh} = 0$ ,  $\Gamma^{ik} = 0$ , e  $\Gamma = 0$ , e la (9) si riduce alla

$$(10) \quad E^{ik} = -(-g)^{-1/2} g^{jh} \partial_{jh}^2 [(-g)^{1/2} g^{ik}]/2 + g^{ik} (y^j y_j + L) + y^j \partial_j g^{ik} + g^{pr} g^{qs} \Gamma_{rs}^i \Gamma_p^k{}_q,$$

ove *tutte* le derivate seconde della metrica sono nel termine d'alembertiano  $-g^{jh} \partial_{jh}^2 (g^{ik})/2$ . In conclusione, l'uso di coordinate pseudoarmoniche prova la compatibilità delle (1) con le equazioni di EH, e delle (1) illustra il significato. Inoltre, esso fornisce una versione semplificata del 2-tensore  $E^{ik}$ , ovviamente ancora adeguata alla ricerca di soluzioni delle stesse equazioni. Non a caso la memoria di Lanczos nomina il sistema delle coordinate pseudoarmoniche come «ein vereinfachendes Koordinatensystem».

## APPENDICE GEN. A

### NOZIONI ELEMENTARI DI LOGICA E DI TEORIA DEGLI INSIEMI

#### A.0) PREMESSA <sup>1</sup>

Probabilmente in nessun settore della matematica vi è una varietà di presentazioni di oggetti sostanzialmente equivalenti così difformi come nella Logica Matematica <sup>2</sup> e nella Teoria degli Insiemi che ne include una qualche versione. Non contando l'influenza delle sue radici storiche, questa difformità non è casuale: al matematico è sufficiente una teoria degli insiemi minimale, che contenga lo stretto necessario per descrivervi e fondarvi le sue teorie, mentre il logico matematico mira a quadri più flessibili, che gli permettano una visione per quanto possibile generale della sua disciplina.

Cominciamo con la simbolica logico-insiemistica. Va da sé che una sua descrizione anche blandamente “ragionata” comporta che si diano molte definizioni (e talvolta, per interna coerenza, che si enuncino certi teoremi o metateoremi) della teoria degli insiemi. In questa App. Gen. A, per significare che un enunciato è *deducibile* in un dato sistema formale (SF)  $S$  lo si racchiuderà tra i segni metalinguistici  $S\vdash$  e  $|$  (l'uso standard è quello di soltanto *anteporgli* i segni  $S\vdash$ , ciò che ha talvolta l'inconveniente di non chiarire dove finisce l'effetto di  $S\vdash$ ); o se il riferimento a  $S$  è ovvio, anche tra i segni  $\vdash$  e  $|$ . Più in generale, se l'enunciato è deducibile da un insieme di enunciati  $\Sigma$  considerati come assiomi (per linguaggio e regole di inferenza dati), esso si racchiuderà tra  $\Sigma\vdash$  e  $|$ . Il segno metalinguistico  $\vdash$  è stato introdotto da G. Frege.

Contrariamente ad una opzione altrettanto frequente, converremo che gli assiomi *non* siano teoremi. Sarà allora opportuno nominare come Teoremi (maiuscolo) gli enunciati che sono assiomi

---

<sup>1</sup> Oltre che con finalità sue proprie, l'intera presente App. Gen. A è stata concepita come “ragionevole complemento” alla Introduzione 0.1, e soprattutto alla sua S.sez. 0.1.3.

<sup>2</sup> Uno fra gli esempi possibili è il seguente. Nella cosiddetta assiomatizzazione hilbertiana (vedi Hilbert e Ackermann nella bibliografia alla fine di questa premessa), il Calcolo Proposizionale (CP) – il più semplice tra i sistemi formali importanti della logica matematica – è fondato su dieci schemi di assiomi ed un'unica regola di inferenza (il Modus Ponens (MP)). In Mendelson (vedi bibl.), CP è fondato su tre schemi di assiomi e la MP. In Bourbaki (vedi bibl.), gli schemi sono quattro, più ancora MP come regola di inferenza; ma cambia il linguaggio rispetto ad altre versioni, perché da esso spariscono i quantificatori intesi come oggetti primitivi. In Ershov e Palyutin (vedi bibl.), lo stesso CP è fondato su un unico schema di assiomi e ben dodici regole di inferenza; e inoltre, tra le parole fondamentali non vi sono soltanto termini e formule, ma anche “sequenti” contenenti il segno (qui non metalinguistico)  $\vdash$ . Si potrebbe continuare a lungo menzionando opzioni alternative. Anche se non sempre raggiungono livelli di difformità così alti, in logica matematica le variazioni su uno stesso tema sono in generale più numerose e importanti che in altri settori della matematica, e quasi sempre disorientano il neofita che voglia farsi un'idea panoramica della materia.

aut ( $\equiv$  disgiunzione esclusiva) teoremi ( $\equiv$  enunciati deducibili dagli assiomi, o enunciati provabili). Un enunciato metalinguistico (o “metaenunciato”) posto tra « » andrà letto in senso *assertivo*, cioè “S+ ...|” equivale a “« ... è un teorema di S»”. A scampo di pedanteria, il rigore di queste convenzioni sarà gradualmente indebolito man mano che si presuma aumentata l’esperienza del lettore.

Le notazioni di un linguaggio con operatori ( $n \geq 1$ )-ari sarebbero inequivocabili convenendo di premettere il simbolo dell’operatore agli operandi ordinati, oppure facendo uso di parentesi ( ) tutte le volte che sia necessario. La prima convenzione è troppo uniforme per essere leggibile senza fatica; mentre la seconda riesce a sua volta di lettura laboriosa se le parentesi sono molte. Una terza alternativa è quella di convenire una gerarchia tra gli operatori; ma allora tale gerarchia dovrà essere memorizzata, ed anche questo può diventare un inconveniente. La convenzione da noi scelta sarà facilmente appresa con un po’ di pratica.

La definizione strettamente formalistica delle varie espressioni come successioni finite (o “stringhe”) di segni di un alfabeto di base (o segni “primitivi”) non è indispensabile ai fini presenti, e sarà evitata nella sua accezione piena, pur essendo sempre ricostruibile in linea di principio. Ciò può creare talvolta problemi di rigore espositivo, ai quali dovrebbero far fronte l’intuizione e l’esercizio. In realtà la generosa adozione di “segni abbreviatori” ( $\equiv$  non appartenenti all’alfabeto di base, da memorizzare come i segni primitivi) è comune a tutte le trattazioni di questa materia.

Segue una breve illustrazione delle sezioni A.1 ÷ A.5 della presente Appendice Generale.

§1. Nella Sez. A.1 sono elencate le definizioni, le corrispondenti locuzioni <sup>3</sup> (in **grassetto**) e le notazioni logico-insiemistiche di uso più comune che sono adottate in questo libro. (Sia le locuzioni che le notazioni variano da scuola a scuola: per esempio quelle che sono qui dette “formule”, come in Casari 1997 – vedi la bibliografia alla fine di questa premessa –, sono le “relazioni” di Bourbaki 1970.) A ciascuna locuzione/notazione segue la relativa interpretazione intuitiva ed alcuni

---

<sup>3</sup> Salvo rare eccezioni, le parole usate dai matematici sono prese a prestito dal linguaggio naturale. Questa scelta è manifestamente finalizzata a farsi meglio intendere: invece di inventare una terminologia ad hoc ad essi riservata, i matematici preferiscono da sempre le parole naturali, selezionandole (più o meno felicemente) in modo che “alludano” efficacemente alle immagini intuitive nascoste dietro alle loro definizioni formali. Benché apprezzabile, questa circostanza conduce spesso il profano a catastrofici malintesi. Il caso dei numeri “reali” vs. i numeri “immaginari” è uno dei tanti. Un altro esempio: se, da logico-matematico, affermo che “il tale enunciato è provabile” questa frase ha un significato anche nel linguaggio naturale, e precisamente significa che quanto quell’enunciato esprime (nel linguaggio naturale) può, per l’appunto, essere provato. Ma se, *legittimamente*, avessi scelto di nominare come “asini” gli oggetti sintattici definiti come “enunciati” e di dire “vola” per il predicato sintattico “è provabile”, allora nessuno avrebbe pensato alla frase “il tale asino vola” come degna di una attenzione non giocosa. Se poi più radicalmente avessi scelto di usare per “enunciato” e per “è provabile” sequenze di lettere (convenute una volta per tutte) che non fossero parole della lingua italiana, il profano avrebbe pensato ad una frase di una lingua a lui sconosciuta, o ad un messaggio in codice; non ne avrebbe tentato alcuna interpretazione, e non sarebbe caduto in alcun equivoco. Così facendo, tuttavia, avrei appesantito insopportabilmente il linguaggio matematico. C’è da aggiungere che altre categorie di “addetti ai lavori” seguono abitualmente opzioni comunicazionali diverse. Ad esempio, in clinica medica si dice comunemente “in posizione ortostatica” per significare “in piedi”; col bel risultato di non farsi capire dal volgo. Ma come si sa, per lunghi secoli i “dottori” (e non loro soltanto) hanno tratto più vantaggi che svantaggi dal *non* farsi capire ...

commenti. Tutto ciò non è altro che uno stralcio minimale della morfologia, della sintassi e della semantica della teoria degli insiemi, e va considerato alla luce di una assiomatizzazione classica del tipo Zermelo-Fraenkel con assioma di scelta (ZFC, dove “C” sta per “Choice”), o con alcune differenze, del tipo Bourbaki (B). Si sa poi che le notazioni della teoria formale sono comunemente usate, con il loro significato intuitivo, anche come *stenografia* di espressioni del linguaggio naturale che “parlano” (di oggetti) di teorie matematiche. Seppur secondario, anche questo è un loro ruolo di interesse pratico per il matematico ed il fisico matematico. §

§2. La Sez. A.2 offre una breve introduzione alla Teoria della Deduzione, ed anticipa alcuni contenuti della sezione successiva. §

§3. La Sez. A.3 presenta una sintesi dell’assiomatizzazione della teoria degli insiemi secondo Bourbaki. Questa assiomatizzazione fu concepita da matematici, e dai matematici è apprezzata per la sua particolare economia. Si parte quindi con i cinque schemi di assiomi logici (proposizionali e di quantificazione) sufficienti alla assiomatizzazione di una teoria logica del 1° ordine con i due soli connettivi  $\neg$  (negazione) e  $\vee$  (disgiunzione inclusiva), e in cui si disponga del cosiddetto “operatore di Hilbert”  $\varepsilon$  (vedi la prossima nota <sup>(7)</sup>) che permette la decostruzione del quantificatore esistenziale mediante una operazione di sostituzione. Con tali schemi, sono illustrate alcune delle loro conseguenze di maggior importanza. La presentazione degli assiomi o schemi di assiomi che completano la lista insiemistica, a cominciare dagli assiomi egualitari, segue nello stesso spirito. Si noterà in particolare la presenza del bourbakiano schema di assiomi “di selezione ed unione” (SU), poco intuitivo ma assai potente, in alternativa con le parecchie possibilità concorrenti. <sup>4</sup> Ricordiamo che nell’assiomatizzazione di Bourbaki l’assioma di scelta (AS), ma non l’ipotesi del continuo (IC), figura come teorema. §

§4. La Sez. A.4 propone alcuni addizionali commenti sul programma hilbertiano di fondare la matematica sulla sua formalizzazione stretta, e sul suo sostanziale fallimento a seguito dei teoremi di incompletezza (Gödel 1931). §

§5. La Sez. A.5 offre qualche informazione di base sulla Teoria dei Modelli. §

Nella nota <sup>5</sup> è riportata una lista essenziale (ordinata cronologicamente) di trattati classici di logica matematica e di teoria degli insiemi, ai quali il lettore è comunque rinvio per le

<sup>4</sup> Qui “selezione” (“sélection”) non è da confondere con “scelta” (“choix”).

<sup>5</sup> D. Hilbert, W. Ackermann: “Grundzüge der theoretische Logik”, 1. Ausg. Springer (1928), 4. Ausg. Springer (1959); engl. transl. of the 2<sup>nd</sup> german ed., Springer (1938), “Principles of mathematical Logic”, Chelsea (1950); S. Kleene: “Introduction to Metamathematics”, North Holland (1952); E. Beth: “Les fondements logiques des mathématiques”, Gauthier-Villars (1955), trad. It. in Feltrinelli (1963); A. Church: “Introduction to Mathematical Logic”, Princeton Un. Press (1956); P. Halmos: “Naïve Set Theory”, Van Nostrand (1960); R. Smullyan: “Theory of formal systems”, Princeton Un. Pr. (1961); W. & M. Kneal: “The Development of Logic”, Clarendon Pr. (1962); G. Kneebone: “Mathematical Logic”, Van Nostrand (1963); E. Mendelson: “Introduction to Mathematical Logic”, Van Nostrand (1964), trad. it. in Boringhieri (1972); S.C. Kleene: “Mathematical Logic”, Wiley (1967); J. Shoenfield: “Mathematical Logic”, Addison-Wesley (1967), trad. it. in Boringhieri (1980); D. Hilbert, P. Bernays: “Die Grundlagen der

presentazioni alternative della materia, e per le innumerevoli informazioni qui non riferite. Ovviamente la lista riflette le esperienze e le preferenze personali di chi l'ha compilata.

#### A.1) LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI: NOTAZIONI, MORFOLOGIA, INTERPRETAZIONE INTUITIVA

Prima di presentare le notazioni, occorre dare alcune informazioni di tipo morfologico, cioè specificare il **linguaggio** L (nel caso presente, quantificato del 1° ordine) in cui esse si collocano. Una scelta minimale dei segni primitivi di L, sostanzialmente ispirata a Bourbaki (1970), è la seguente:

- 1) i **connettivi**  $\neg$  (**negazione**),  $\vee$  (**disgiunzione inclusiva**, o semplicemente **disgiunzione**) e il **segno di Hilbert**  $\varepsilon$ ;
- 2) i **segni oggettuali**, cioè un insieme non vuoto e numerabilmente infinito di **variabili** e un insieme (di norma finito) di **costanti**;
- 3) un insieme (di norma finito) di **segni relazionali** ( $n \geq 0$ )-ari (detti anche **segni enunciativi** per  $n = 0$ ), non vuoto per almeno un  $n$  (ad esempio un segno relazionale binario nella teoria formalizzata degli insiemi è “ $\in$ ”, che si interpreta come “appartiene a”);
- 4) alcuni segni ausiliari (diciamo  $\blacklozenge$ , nonché un segno vicario per esprimere un “legame” tra  $\varepsilon$  e  $\blacklozenge$ ).

Con questi segni, le regole di formazione dei **termini** e delle **formule** sono specificate per induzione come segue (ove T sta per “termini”, e F per “formule”):

(T<sub>1</sub>): una variabile o una costante sono termini;

(T<sub>2</sub>): una **parola** ( $\equiv$  successione finita, o stringa, di segni) è un termine se comincia con  $\varepsilon$  seguito da una variabile;

(T<sub>3</sub>): niente altro è un termine;

(F<sub>1</sub>): un segno relazionale ( $n \geq 0$ )-ario (con gli  $n$  posti occupati da termini se  $n \geq 1$ ) è una formula, che si dice **atomica** o **elementare**;

---

mathematik”, 1. Band, 2. Ausg. Springer (1968), 2. Band, 2. Ausg. Springer (1970); W. Hatcher: “Foundations of Mathematics”, W.B. Saunders (1968); N. Bourbaki: “Théorie des ensembles” (“Éléments de Mathématique vol I”), Hermann (1970); A. Fraenkel, Y. Bar-Hillel: “Foundations of Set Theory”, North Holland (1973); G. Lolli: “Teoria assiomatica degli insiemi”, Boringhieri (1974); G. Takeuti: “Proof Theory”, Springer (1975); K. Kuratowski, A. Mostowski: “Set Theory”, North-Holland (1976); K. Schütte: “Proof Theory”, Springer (1977); K. Hrbacek, T. Cech: “Introduction to Set Theory”, M. Dekker (1978); G. Takeuti, W. Zaring: “Introduction to Axiomatic Set Theory”, Springer 2<sup>nd</sup> ed. (1982); Yu. Ershov, E. Palyatin: “Mathematical Logic”, engl. transl. MIR (1984); E. Casari: “Introduzione alla logica”, UTET (1997). In campo saggistico, segnaliamo due recenti lavori italiani: “Il diavolo in cattedra – La logica da Aristotele a Gödel”, Einaudi (2003), di P. Odifreddi, in brillante equilibrio tra lo stile divulgativo e quello (semi)tecnico; e limitatamente ai teoremi di incompletezza, “Tutti pazzi per Gödel”, Laterza (2008), di F. Berto, di apprezzabile efficacia didattica.

(F<sub>2</sub>): la negazione di una formula e la disgiunzione di due formule sono formule, così come lo sono le combinazioni finite (mediante negazioni e/o disgiunzioni) di formule;

(F<sub>3</sub>): niente altro è una formula.

I termini e le formule sono dunque parole di certi tipi distinti.

«Con queste regole di formazione, l'operazione di sostituzione di una variabile con un termine in un termine [in una formula] è un termine [una formula].» Ad esempio, denotando con  $(\clubsuit|\spadesuit)$  l'operatore di sostituzione di  $\spadesuit$  con  $\clubsuit$ ,  $(\exists xA|x)A$  (dove  $x$  è una variabile,  $A$  è una formula e  $\exists xA$  è un termine) è una formula che si abbrevia in  $\exists xA$  (**esistenziale** di  $A$  rispetto alla variabile  $x$ ). Quanto al termine  $\exists xA$ , dove  $A$  è una formula, esso si ottiene come segue: si premette  $\varepsilon$  ad  $A$ , si unisce mediante un "legame" (una linea i cui due estremi indicano inequivocamente i due segni legati) tale  $\varepsilon$  con ogni occorrenza di  $x$  in  $A$ , e infine si sostituisce ogni occorrenza di  $x$  in  $A$  con un  $\diamond$ . Considerando anche le operazioni di sostituzione, si possono così costruire termini in cui ogni  $\varepsilon$  è legato ad uno o più  $\diamond$  alla sua destra (ma ogni  $\diamond$  è legato ad esattamente un  $\varepsilon$  alla sua sinistra). Per avere una genuina successione di segni, i legami che uniscono gli  $\varepsilon$  con i  $\diamond$  alla loro destra si devono eliminare mediante un segno vicario ed una opportuna convenzione: ad esempio, convenendo che  $\diamond^{**}$  significhi che il  $\diamond$  in oggetto, seguito da *due* \*, sia legato al *secondo*  $\varepsilon$  che si incontra procedendo da  $\diamond$  verso sinistra. È evidente che  $x$  non figura in  $\exists xA$ . Con queste regole morfologiche, si ottiene una scrittura strettamente sequenziale delle parole. Come anticipato, di norma si rinuncia a questa scrittura in cui figurano soltanto i segni primitivi di  $L$  in favore di convenzioni più evocative e flessibili (cioè mediante l'uso, regolato da opportune convenzioni, di parentesi, virgole, ecc., e soprattutto di segni abbreviatori). Un po' di pratica sarà più efficace di qualsiasi descrizione sistematica.<sup>6</sup>

$A, B, C, \dots$  si usano come nomi metalinguistici per formule. Tutte le operazioni su formule della lista che segue, fino a §18 inclusa, producono una formula; le successive producono termini. In alcuni §§ (ad esempio in §2, §3, §4) si sono anticipate proprietà che si possono giustificare soltanto alla luce dei contenuti di A.3. Le definizioni nei §§ che seguono, da §1 a §45, sono per lo più quelle di Bourbaki (1970).

**§1.  $\neg$  : negazione (non).** È un'operazione unaria su formule e si scrive a sinistra della formula negata (accettando l'uso di parentesi, e se la formula negata ne contiene, occorrerà racchiuderla a sua volta tra parentesi); §

<sup>6</sup> Ad esempio, il termine  $\varepsilon y(\forall x(\neg \varepsilon xy))$ , dove  $\neg \varepsilon xy$  significa "x non appartiene a y", si realizza come  $\varepsilon \neg \neg \neg \varepsilon \neg \neg \varepsilon \neg \neg \diamond^{**} \diamond^{**}$ . Qui il primo  $\diamond$  (da sinistra) è legato al primo  $\varepsilon$  che lo precede (in quanto quel  $\diamond$  è seguito da un  $*$ ), mentre il secondo (o il terzo)  $\diamond$  è legato al secondo  $\varepsilon$  che lo precede (in quanto quel  $\diamond$  è seguito da due  $*$ ), cioè al primo  $\varepsilon$  dell'intera stringa. Questo esempio è importante, perché la parola-termine di 17 segni in oggetto rappresenta un "insieme" al quale non appartiene alcun oggetto; cioè l'importantissimo insieme "vuoto", che si denota con il segno abbreviatore  $\emptyset$  (cfr. anche la nota seguente e l'articolo § 24).

§2.  $\vee$  : **disgiunzione inclusiva (e/o, vel)**. È una operazione binaria su formule, e sarà scritta “tra” accettando l’uso di parentesi. «a meno di un’equivalenza (“bicondizionale”, vedi oltre)  $\vee$  è simmetrica (v. A.3, L<sub>3</sub>) e associativa»; §

§3.  $\wedge$  : **congiunzione (e, et)**. È l’operazione binaria su formule, scritta “tra” e definita da  $A \wedge B \equiv \neg((\neg A) \vee (\neg B))$ , cioè  $\neg \vee \neg A \neg B$  nella realizzazione senza parentesi. « $\wedge$  è simmetrica e associativa (a meno di un’equivalenza).»; §

§4.  $\underline{\vee}$  : **disgiunzione esclusiva (aut)**. È l’operazione binaria su formule, scritta “tra” e definita da  $A \underline{\vee} B \equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$ . « $\underline{\vee}$  è simmetrica e associativa (a meno di un’equivalenza).» §

§5.  $\Rightarrow$  : **implicazione** (“implica”). È l’operazione binaria su formule, scritta “tra” e definita da  $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$  (che è  $(\neg A) \vee B$ , e non  $\neg(A \vee B)$ ). Talvolta  $A \Rightarrow B$  si scrive anche  $B \Leftarrow A$ . ( $\Rightarrow$  è nominata anche come “implicazione materiale”, per distinguerla da altre accezioni di implicazione.); §

§6.  $\Leftrightarrow$  : **equivale a**. È un’operazione binaria su formule, scritta “tra” e definita da  $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ , simmetrica per la simmetria di  $\wedge$ . La formula  $A \Leftrightarrow B$  si dice **bicondizionale** (o **equivalenza**) tra A e B. Gli assiomi logici proposizionali (v. A.3) generano certe equivalenze elementari notevoli, ad es.  $\vdash A \Leftrightarrow A$ . « $\Leftrightarrow$  è riflessiva, simmetrica e transitiva»; non a caso, quindi, è anche detta equivalenza; §

x, y, z, ... sono nomi (metalinguistici) per variabili.

§7.  $\exists$  : **quantificatore esistenziale** (“per qualche”).  $\exists x$  è una operazione unaria su una formula in cui può figurare x, e produce una particolare formula in cui x non figura più.  $\exists$  si scrive a sinistra della formula quantificata, e  $\exists x A$  si interpreta come “per qualche x, A”. «Se x non figura in A,  $\vdash \exists x A \Leftrightarrow A$ ». x si dice “muta” (o “legata”) in  $\exists x A$  (si pensi per analogia ad una variabile di integrazione). Lo stesso vale per tutti i casi analoghi. Se non si riduce ad una lettera-nome per formule, la formula oggetto di  $\exists x$ , o **scopo di  $\exists x$** , viene posta tra { }; §

§8.  $\forall$  : **quantificatore universale** (“per ogni”).  $\forall x$  è una operazione unaria (come  $\exists x$ ) su una formula in cui può figurare x, e si scrive a sinistra della formula quantificata.  $\forall x A$  si definisce come  $\neg(\exists x \{\neg A\})$ , e si interpreta come “non esiste un x per cui non-A”, ovvero “per ogni x, A”. Se non si riduce ad una lettera-nome per formule, la formula oggetto di  $\forall x$ , o scopo di  $\forall x$ , viene analogamente posta tra { }. Risulta  $\vdash \exists x A \Leftrightarrow \neg(\forall x \{\neg A\})$ . Ovviamente x è legata anche in  $\forall x A$ , e se x non figura in A,  $\vdash \forall x A \Leftrightarrow A$ ; §<sup>7</sup>

<sup>7</sup> La formula A in  $\exists x A$  [in  $\forall x A$ ] si dice anche **campo d’azione** di  $\exists$  [di  $\forall$ ]. La disponibilità del cosiddetto **operatore di Hilbert**  $\epsilon x$  (scritto da altri “ $\epsilon_x$ ”, o in Bourbaki, “ $\tau_x$ ”) permette di esprimere il quantificatore esistenziale (e quindi quello universale), e rende possibile presentare una teoria logica quantificata mediante un solo schema d’assiomi di quantificazione (ad esempio il  $\exists$ -schema (Q<sub>1</sub>), v. A.3). Se A è un predicato esprimente una proprietà di una variabile x

§9.  $\exists(x,y)$  : **quantificatore esistenziale su due variabili** (“per qualche  $x$  e qualche  $y$ ”).  $\exists(x,y)A$  è una abbreviazione per  $\exists x\{\exists yA\}$ ; e poiché  $\vdash\exists x\{\exists yA\}\Leftrightarrow\exists y\{\exists xA\}$  (v. A.3)  $\vdash\exists(x,y)A\Leftrightarrow\exists(y,x)A$ .<sup>8</sup> Analogamente per i quantificatori esistenziali su un numero (finito) arbitrario di variabili; §

§10.  $\forall(x,y)$  : **quantificatore universale su due variabili** (“per ogni  $x$  e ogni  $y$ ”). Si ricava in analogia con la definizione di  $\forall x$  in termini di  $\exists x$ , e quindi  $\forall(x,y)(\cdot)$  è uguale per definizione a  $\neg[\exists(x,y)\{\neg(\cdot)\}]$ . Segue che anche  $\vdash\forall(x,y)A \Leftrightarrow \forall(y,x)A$ . Analogamente per il quantificatore universale su un numero (finito) arbitrario di variabili. §

Le formule si possono dividere in **chiuse** (o **complete**) aut **aperte** (o **incomplete**). Una formula si dice chiusa se, ovunque vi compaia una variabile, questa è nel campo di azione di un quantificatore, e aperta in caso contrario. Le formule chiuse si dicono anche **enunciati** (o **sentenze**).

$X, Y, Z, \dots$  si usano come nomi per termini che sono “insiemi”; e  $x, y, z, \dots$ , oppure  $a, b, c, \dots$ , come nomi per termini che sono “elementi” di insiemi.<sup>9</sup>

§11.  $\in$  : **appartiene a** (di un termine, che viene pensato come elemento di insieme, ad un termine che viene pensato come insieme). È un simbolo relazionale binario su un elemento (di insieme) e su un insieme, produce una formula e si scrive “tra” con il simbolo dell’insieme a destra di  $\in$ .  $\in$  è il simbolo relazionale fondamentale della teoria degli insiemi, e  $x \in X$  si interpreta come “ $x$  appartiene a  $X$ ”.  $\neg(x \in X)$  si abbrevia usualmente in  $x \notin X$ . §

§12.  $\exists_{B \times X}$  : **quantificatore esistenziale tipico per B**.  $\exists_{B \times X}A$  è un’abbreviazione per  $\exists x\{B \wedge A\}$  (quindi  $\vdash\exists_{B \times X}A \Leftrightarrow \exists_A X B$  per la simmetria di  $\wedge$ ), e si interpreta come “per qualche  $x$ , sia  $A$  che  $B$ ”. Se  $X$  è pensato come un insieme, e  $B$  è del tipo “ $x \in X$ ”, è più espressivo scrivere  $\exists(x \in X)A$  in luogo di  $\exists x\{(x \in X) \wedge A\}$  (quantificatore esistenziale “ristretto” a  $X$ , che si interpreta come “per qualche  $x$  di  $X$ ,  $A$ ”). Analoghe e ovvie definizioni per  $\exists(x \in X, y \in Y)A$ , ecc.; §

§13.  $\forall_{B \times X}$  : **quantificatore universale tipico per B**.  $\forall_{B \times X}A$  si ricava dalla definizione di  $\forall$  in termini di  $\exists$ , ed è quindi definito come  $\neg\exists_{B \times X}\{\neg A\}$ . Si verifica facilmente che  $\vdash\forall_{B \times X}A \Leftrightarrow \forall x\{B \Rightarrow A\}$ . Si

della teoria,  $\varepsilon x\{A\}$  – o  $\varepsilon xA$ , o anche  $\varepsilon_x A$ , ecc. –, in cui  $x$  non figura, «rappresenta un oggetto privilegiato che possiede quella proprietà *se un tale oggetto esiste*; altrimenti, rappresenta un oggetto di cui non si può dire nulla.» (Bourbaki, “Théorie des Ensembles” 1970, I, 18). A questo punto,  $\exists xA$  si *definisce* sostituendo tutte le occorrenze di  $x$  in  $A$  con  $\varepsilon xA$ ; cioè, denotando ancora con  $(\clubsuit|\spadesuit)$  l’operatore che sostituisce  $\clubsuit$  a  $\spadesuit$ , come  $(\varepsilon xA|x)A$ . Come abbiamo già detto, tra i segni dell’alfabeto bourbakiano vi è anche il “legame” tra un  $\varepsilon$  e un  $\spadesuit$  alla sua destra, che evidentemente non è un segno, ma che può essere abolito con l’introduzione di un nuovo segno (come  $*$ ) che ne faccia le veci, sotto una opportuna convenzione.

<sup>8</sup> In pratica,  $\exists(x,y) [\forall(x,y)]$  ha senso soltanto se  $x$  e  $y$  sono variabili distinte. Infatti  $\exists(x,x)A$  equivale a  $\exists xA$ .

<sup>9</sup> Naturalmente ci si aspetterebbe una definizione di “insieme”; ma dal punto di vista intuitivo, essa si riduce necessariamente a una parafrasi (notissima tra le altre quella di Cantor (Georg, 1845-1918)). In altre parole, “ $X$  è un insieme”, oppure “ $x$  è un elemento” (di insieme), ha soltanto un significato intuitivo; dal punto di vista formale, “insiemi”, “elementi” e “termini” sono qui sinonimi. (Un rimedio a questa situazione fu ricercata ad esempio con la teoria dei tipi.) La discussione sui fondamentali concetti di “molteplicità” (di oggetti) e di “unità” che in sé li riassume ha una storia antichissima, risalendo ad Aristotele e a Platone. Talvolta sarà comodo (ma non indispensabile) chiamare **famiglia** di insiemi un insieme tutti gli elementi del quale sono a loro volta insiemi, cioè un insieme di insiemi.



noti inoltre che  $\forall_B X A$  e  $\forall_A X B$  non sono in generale equivalenti, perché  $\Rightarrow$  non è simmetrica. Anche in questo caso, se  $B$  è del tipo “ $x \in X$ ” è più espressivo scrivere  $\forall(x \in X) A$  in luogo di  $\forall x \{ (x \in X) \Rightarrow A \}$  (che si interpreta come “per ogni  $x$  di  $X$ ,  $A$ ”). Analoghe definizioni per  $\forall(x \in X, y \in Y) A$ , ecc.; §

§14. = : **uguale a**. È un simbolo relazionale binario su termini, produce una formula e si scrive “tra”.  $\neg(x=y)$  si abbrevia in  $x \neq y$ . Oltre alla  $A \Leftrightarrow B$ , la  $x = y$  è un altro prototipo di equivalenza, perché in forza degli assiomi egualitari (v. A.3) «risulta riflessiva, simmetrica e transitiva» rispetto ai due termini che vi sono coinvolti. Le teorie logiche quantificate con uguaglianza si dicono **egualitarie**; §

§15.  $\exists! x$  : **quantificatore esistenziale stretto** (“per esattamente un”).  $\exists! x A$  esprime non soltanto l’esistenza ma anche l’unicità (a meno di un’uguaglianza) dell’ $x$  per cui  $A$ . Se  $y$  e  $z$  sono lettere distinte tra loro e da  $x$ , e che non figurano in  $A$ , essa sta quindi per  $\exists x A \wedge \forall(y, z) \{ ((y|x)A \wedge (z|x)A) \Rightarrow (y=z) \}$ , dove  $(\clubsuit|\spadesuit)$  è al solito l’operatore che sostituisce  $\clubsuit$  a  $\spadesuit$ . Se la precedente formula in  $x \forall(y, z) \{ ((y|x)A \wedge (z|x)A) \Rightarrow (y=z) \}$  è deducibile, la  $A$  che vi figura si dice **univoca in  $x$** . «Per una formula  $A$  in cui  $x$  non figura, e univoca in  $x$ , risulta  $\vdash \neg A$ ». Una formula  $A$  per la quale  $\vdash \exists x A$  si dice **soddisfacibile in  $x$** . Una formula  $A$  per la quale  $\vdash \exists! x A$  si dice **funzionale in  $x$** . «Le formule funzionali in  $x$  sono tutte e sole quelle soddisfacibili e univoche in  $x$ ». «Se  $x$  non figura in  $A$ ,  $A$  non può essere al contempo soddisfacibile in  $x$  e univoca in  $x$ »; §

§16.  $\subset$  : **è incluso in**. Si dice di un insieme in un insieme e si scrive “tra”. È un’abbreviazione per  $\forall x \{ (x \in X) \Rightarrow (x \in Y) \}$ , e si legge “ $X$  è incluso in  $Y$ ” o “ $Y$  include  $X$ ”. (Raramente,  $X \subset Y$  si scrive anche  $Y \supset X$ .) Si tenga presente che, secondo la definizione,  $X \subset Y$  *non* esclude in generale l’uguaglianza  $X = Y$ . “ $X \subset Y \wedge X \neq Y$ ” si legge “ $X$  è strettamente incluso in  $Y$ ” (o “ $Y$  include strettamente  $X$ ”), e si scrive “ $X \subsetneq Y$ ”, o anche “ $X \subsetneq Y$ ”<sup>10, 11</sup>; §

§17.  $= (x_1, x_2, \dots, x_n)$  (con  $n \geq 2$ ) : è un’abbreviazione per “ $x_i = x_j$  per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ”; §

§18.  $\neq (x_1, x_2, \dots, x_n)$  (con  $n \geq 2$ ) : è un’abbreviazione per “ $x_i \neq x_j$  per ogni  $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$ ”<sup>12</sup>; §

<sup>10</sup> Se si conviene invece che  $\subset$  *escluda* l’uguaglianza, allora si usa  $\subseteq$  come simbolo insiemistico che disgiunge strettamente  $\subset$  e  $=$ . In questo caso,  $X \subseteq Y$  si interpreta come “ $X$  è incluso strettamente in  $Y$  aut  $X$  è uguale a  $Y$ ”. Questa notazione è indubbiamente la più razionale. Con la notazione qui adottata, occorre usare un simbolo ad hoc per denotare l’inclusione senza eguaglianza (o inclusione *stretta*), che abbiamo indicato in  $\subsetneq$  (o in  $\subset$ ). Si noti anche che il simbolo  $\subsetneq$  (tipograficamente più comodo) presenta il rischio di essere confuso con la negazione di  $\subset$ ; questo si evita scrivendo sempre esplicitamente tale negazione mediante il segno  $\neg$ . Alla base di questi (blandi) problemi notazionali relativi all’inclusione vi è il fatto che l’inclusione con uguaglianza è in pratica di uso *molto più comune* di quella senza.

<sup>11</sup>  $\in$  fu introdotto da Peano, in imitazione della iniziale di “ $\epsilon\sigma\tau\iota$ ” (“ $\epsilon$ ”) nei “Principi di logica matematica” (1898);  $=$  fu introdotto da Records (Robert, 1510-1558) in “The Whetstone of Witte” (1557), il primo trattato inglese di Algebra;  $\subset$  fu introdotto da Gergonne (Joseph, 1771-1859) in imitazione dell’iniziale di “contenu” nell’ “Esquisse d’un tableau historique des progrès de l’esprit humain” (1793).

<sup>12</sup> Si noti che  $\neq (x_1, x_2, \dots, x_n)$  è più forte della negazione di  $= (x_1, x_2, \dots, x_n)$  per  $n > 2$ .

§19.  $\{z|A\}$  : (ovviamente non si tratta dell'operatore che sostituisce  $z$  con  $A$ , perché  $z$  è un termine e  $A$  è una formula) è una espressione simbolica che sotto certe condizioni si interpreta come l'**insieme dei  $z$  per cui  $A(z)$** . È importante rendersi conto che *non per tutte le formule  $A$*  la scrittura  $\{z|A\}$  si può interpretare come un insieme.<sup>13</sup> Sse questo è il caso,  $A$  si dice "collettivizzante in  $z$ " (v. A.3) e  $\{z|A\}$  è allora un termine; altrimenti  $\{z|A\}$  è una scrittura senza senso. Per questa ragione, converremo che *quando si usi il simbolo  $\{z|A\}$  si sottintenda che la formula  $A$  sia collettivizzante in  $z$* . Allora  $\{z|A\}$  si dice **estensione di  $A$**  (rispetto a  $z$ ). « $\vdash\{z|z\in X\} = X$  per qualunque insieme  $X$ ». §

§20.  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  : è l'insieme  $\{z|z=x_1 \vee \dots \vee z=x_n\}$ , dove  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono termini, e si interpreta come l'insieme a  $n$  elementi, o **n-pla**, i cui elementi sono tutti e soli gli  $x_1, \dots, x_n$  prescindendo dall'ordine nel quale sono nominati. Come anticipato, la scrittura  $\{z|z=x_1 \vee \dots \vee z=x_n\}$  presuppone tacitamente che la formula  $z=x_1 \vee \dots \vee z=x_n$  sia collettivizzante in  $z$ , come effettivamente risulta *in forza di convenienti assiomi* (v. ancora A.3). Salvo eccezioni, nel seguito ci risparmieremo quest'ultimo tipo di commento in casi analoghi; §

§21.  $\{x\}$  : **singoleto di  $x$** . È l'insieme a un elemento costituito del singolo termine  $x$ ,  $\{z|z=x\}$ . Quindi  $\vdash(z \in \{x\}) \Leftrightarrow (z = x)$ ; §

§22.  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  : è l'insieme  $\{x_1, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \dots, \{x_1, \dots, x_n\}\}$  e si dice **n-pla ordinata**. «La formula  $\{x_1, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \dots, \{x_1, \dots, x_n\}\} = \{y_1, \{y_1, y_2\}, \{y_1, y_2, y_3\}, \dots, \{y_1, \dots, y_n\}\}$ , dove  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ( $n \geq 2$ ) sono termini, equivale alla  $x_1=y_1 \wedge \dots \wedge x_n=y_n$ ».<sup>14</sup> Intuitivamente, esso si interpreta come l'insieme degli oggetti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , presi nell'ordine  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_n$ . La definizione può estendersi al caso  $n = 1$ , identificando così  $\langle x \rangle$  con  $\{x\}$ <sup>15</sup>; §

§23.  $pr_i \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$  : **proiezione (1 $\leq i \leq n$ )-ma** della  $n$ -pla ordinata  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ ; è per definizione  $x_i$ ; §

§24.  $\emptyset$  : **insieme vuoto**. Nessun oggetto gli appartiene, quindi  $\vdash \forall x \{x \notin \emptyset\}$  e  $\vdash \forall Y \{\emptyset \subset Y\}$ <sup>16</sup>; §

<sup>13</sup> L'esempio più famoso è quello di  $A \equiv z \neq z$ . Se esistesse un insieme  $X$  per cui  $(z \in X) \Leftrightarrow (z \neq z)$ , si otterrebbe una contraddizione (paradosso di Russell, vedi oltre, in A.3). D'altra parte, se  $A \equiv z = z$ ,  $\{z|A\}$  sarebbe l'insieme "di tutti i possibili oggetti". Se questo esistesse, allora (si dimostra) ogni enunciato sarebbe "collettivizzante in  $z$ " (vedi A.3); ma esistono enunciati non collettivizzanti, e di nuovo nascerebbe una contraddizione. «Se  $S$  è un insieme, la formula  $(z \in S) \wedge A$  è collettivizzante in  $z$ ». In certi casi il carattere collettivizzante di una data formula rispetto a una data variabile è *assunto* direttamente come un assioma; in certi altri, è *dimostrato* all'interno della teoria.

<sup>14</sup> Le  $\langle \dots \rangle$ , per rappresentare le  $n$ -ple ordinate, non sono molto in uso, e spesso sono sostituite da  $(\dots)$ .

<sup>15</sup> Si ottiene una definizione alternativa, ma altrettanto valida, di  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ , fruendo della sola nozione di coppia ordinata, secondo  $\langle x, y, z \rangle =: \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$ , ecc.

<sup>16</sup> Facendo uso degli assiomi della teoria degli insiemi si dimostra che «le formule  $\forall x \{x \notin X\}$  e  $\forall Y \{X \subset Y\}$  sono funzionali in  $X$ » ( $\equiv$  individuano uno ed un solo  $X$ ); questo insieme  $X$  è precisamente  $\emptyset$ . Si può anche scrivere  $\emptyset = \{z|z \neq z\}$ , o anche  $\emptyset = \{z|P(z)\}$  dove  $P(z)$  è una qualunque formula in  $z$  non soddisfacibile, ecc.

§25.  $X \times Y$  : **prodotto cartesiano** (o semplicemente **prodotto**) di  $X$  per  $Y$  (nell'ordine). È un'abbreviazione per l'insieme  $\{z | \exists (x \in X, y \in Y) \{z = \langle x, y \rangle\}\}$ . Banalmente, «se  $X = \emptyset$  e/o  $Y = \emptyset$ , allora  $X \times Y = \emptyset$ ». Il prodotto  $X \times X$  si denota anche  $X^2$ . Analogamente si definisce il prodotto (ordinato) di un numero (finito)  $n > 2$  di insiemi, diciamo  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , che si scrive anche  $\times_{i=1}^n X_i$ . Anche in questo caso, se  $X_1 = X_2 = \dots = X_n \equiv X$ ,  $\times_{i=1}^n X_i$  si denota  $X^n$ . «I prodotti  $X \times Y$  e  $Y \times X$  (e più in generale  $\times_{i=1}^n X_i$  e  $\times_{i=1}^n X_{\pi(i)}$ , ove  $\pi$  è un'arbitraria permutazione di  $\langle 1, \dots, n \rangle$ ), pur essendo generalmente distinti, sono in biiezione tra loro» (cioè “esiste una corrispondenza biunivoca tra i loro elementi”, ovvero, come anche si dice, “hanno la stessa cardinalità”) <sup>17</sup> ; §

§26.  $\cup$  : **unione** (di un insieme con un insieme).  $X \cup Y$  è l'insieme  $\{z | (z \in X) \vee (z \in Y)\}$ ; §

§27.  $\cap$  : **intersezione** (di un insieme con un insieme).  $X \cap Y$  è l'insieme  $\{z | (z \in X) \wedge (z \in Y)\}$ . Insiemi  $X, Y$  per i quali  $X \cap Y = \emptyset$  [ $X \cap Y \neq \emptyset$ ] si dicono **disgiunti** (tra loro) [**congiunti** (tra loro)]. « $\cup$  e  $\cap$  sono entrambe simmetriche e associative, e inoltre distributive l'una rispetto all'altra.» In ogni caso,  $\vdash X \cap Y \subset X \cup Y$ . Se  $\mathcal{E}$  è una famiglia [una famiglia non vuota] di insiemi, potrà far comodo denotare con  $\cup(\mathcal{E})$  [ $\cap(\mathcal{E})$ ] (invece che con  $\cup_{X \in \mathcal{E}} X$  [con  $\cap_{X \in \mathcal{E}} X$ ]) l'unione [l'intersezione] degli insiemi della famiglia  $\mathcal{E}$ ; §

§28.  $\setminus$  : **differenza insiemistica**.  $X \setminus Y$  è l'insieme degli oggetti che appartengono a  $X$  e non appartengono a  $Y$ , cioè  $X \setminus Y \equiv \{z | (z \in X) \wedge z \notin Y\}$ . Se  $S$  è un insieme e  $A \subset S$ ,  $S \setminus A$  si dice **complemento di A rispetto a S** e si denota anche  $\mathbf{C}_S A$  o semplicemente  $\mathbf{C}A$  se il riferimento a  $S$  è chiaro.  $\setminus$  non è associativa: infatti, «in generale  $X \setminus (Y \setminus Z)$  include  $(X \setminus Y) \setminus Z$ »; §

§29.  $\Delta$  : **differenza simmetrica**.  $X \Delta Y$  è l'insieme  $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \equiv (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ .  $\vdash X \Delta \emptyset \equiv X$ . « $\Delta$  è simmetrica (come vuole la sua denominazione) e associativa <sup>18</sup> ; inoltre  $\cap$  è distributiva rispetto a  $\Delta$ »; §

<sup>17</sup> Il prodotto cartesiano di  $n > 2$  insiemi può anche definirsi generalizzando la definizione data più sopra per  $X \times Y$ , ad es. ponendo  $X \times Y \times Z =: (X \times Y) \times Z$ , ecc. L'applicazione invertibile (vedi oltre)  $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle \mapsto \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$  assicura allora che gli insiemi  $(X \times Y) \times Z$  e  $X \times (Y \times Z)$  sono in biiezione; vale a dire, il prodotto  $\times$  è associativo a meno di una biiezione. (Analoghe considerazioni, fondate sull'uso dell'applicazione  $\langle x, y \rangle \mapsto \langle y, x \rangle$ , giustificano il teorema appena riportato nel testo tra « ».)

<sup>18</sup> Si prova infatti che  $X \Delta (Y \Delta Z) \equiv (X \cup Y \cup Z) \setminus [(X \cap Y) \cup (Y \cap Z) \cup (Z \cap X)] \setminus (X \cap Y \cap Z) \equiv Z \Delta (X \Delta Y) \equiv (X \Delta Y) \Delta Z \equiv X \Delta Y \Delta Z$ . In generale, il metodo più semplice e sicuro per provare una identità insiemistica come la precedente è quello delle cosiddette “tavole di appartenenza” (si è detto “identità” e non “eguaglianza” perché essa vale comunque si scelgano  $X, Y, Z$ ). Si supponga di volere verificare la presunta identità di due insiemi espressi ciascuno in termini di insiemi arbitrari  $U_1, \dots, U_n$ ,  $n \geq 1$ , e di essi soltanto, diciamo  $W = W(U_1, \dots, U_n)$  e  $V = V(U_1, \dots, U_n)$ . Sotto ciascuno dei simboli affiancati  $U_1, \dots, U_n$ , si porrà in ogni casella di una colonna di  $2^n$  caselle uno di due simboli distinti, ad esempio  $\bullet$  e  $\circ$ , il primo col significato di  $x \in U_i$  ed il secondo col significato opposto di  $x \notin U_i$ , in modo che tutte le righe della  $(2^n \times n)$ -matrice risultante siano diverse tra loro. In corrispondenza ad ogni riga, si “calcolerà” poi quale dei due simboli  $\bullet$  e  $\circ$  si deve porre sotto  $W$  e rispettivamente sotto  $V$  (con lo stesso significato di appartenenza o non-appartenenza di  $x$  a  $W$  e rispettivamente a  $V$ ). Se le due colonne così “calcolate” sono identiche (cioè hanno lo stesso simbolo nella stessa

§30.  $\cup_{t \in I} X_t$  : **unione della famiglia di insiemi indicizzati**  $X_t$  (per  $t$  nell'insieme d'indici  $I$ ). (La nozione di famiglia di oggetti indicizzati è qui affidata all'intuizione.) È l'insieme  $\{z | \exists (t \in I) \{z \in X_t\}\}$ . «Se  $I = \emptyset$ , risulta  $\vdash \cup_{t \in \emptyset} X_t = \emptyset$ ». Se  $I$  è finito, diciamo  $I = \{1, \dots, n\}$ ,  $\cup_{t \in I}$  si scrive anche  $\cup_{t=1}^n$ , e  $\cup_{t=1}^n X_t$  coincide con  $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ . Se  $I$  è numerabile, diciamo  $I = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ ,  $\cup_{t \in I}$  si scrive  $\cup_{t=1}^{\infty}$ ; §

§31.  $\cap_{t \in I} X_t$  : **intersezione della famiglia di insiemi indicizzati**  $X_t$  (per  $t$  nell'insieme d'indici  $I$  supposto non vuoto<sup>19</sup>). È l'insieme  $\{z | \forall (t \in I) \{z \in X_t\}\}$  (cioè, è l'insieme che si ottiene sostituendo  $\exists$  con  $\forall$  nella definizione di  $\cup_{t \in I} X_t$ ). Si usano notazioni analoghe a quelle adottate per  $\cup$  se  $I$  è finito o numerabile; §

§32.  $\mathcal{P}(X)$  : **insieme delle parti** (o **insieme-potenza**) di  $X$ . È l'insieme degli insiemi inclusi in  $X$ , o **sottoinsiemi** di  $X$ . Il cardinale di  $\mathbb{N}$  ( $\equiv$  insieme dei numeri naturali) si denota  $\aleph_0$ , quello di  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  si denota  $\aleph_1$ , quello di  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$   $\aleph_2$ , ... e così via; §

§33.  $G$  ( $G_1, G_2, G', G'', \dots$ ) sono nomi per un insieme di coppie ordinate, o **grafo**. Se  $G$  è un grafo,  $pr_i G$  (per  $i = 1, 2$ ) è la  **$i$ -ma proiezione di  $G$** , cioè l'insieme  $\{x | \exists y \{ \langle x, y \rangle \in G \}\}$  se  $i = 1$ , e  $\{y | \exists x \{ \langle x, y \rangle \in G \}\}$  se  $i = 2$ . « $G \subset pr_1 G \times pr_2 G$ ». « $X \times Y$  è un grafo con prima [seconda] proiezione uguale a  $X$  [a  $Y$ ]». «Se una delle due proiezioni di un grafo è vuota, il grafo stesso è vuoto». La terna ordinata  $\Gamma =: \langle G, X, Y \rangle$  (ove  $G$  è un grafo e  $X, Y$  sono insiemi), sotto le condizioni  $\vdash pr_1 G \subset X$  e  $\vdash pr_2 G \subset Y$ , si dice una **corrispondenza**, della quale  $X$  è l'**insieme di partenza** e  $Y$  è l'**insieme di arrivo**; §

§34.  $G_2 \circ G_1$  : **grafo composto** ( $\circ$ ) **del grafo  $G_2$  con il grafo  $G_1$**  (nell'ordine). «La formula in  $\langle x, z \rangle$ : « $\exists y \{ (\langle x, y \rangle \in G_1) \wedge (\langle y, z \rangle \in G_2) \}$ », dove  $G_1$  e  $G_2$  sono grafi, è collettivizzante in  $\langle x, z \rangle$ ,<sup>20</sup> e la sua estensione è un grafo, il grafo composto  $G_2 \circ G_1$ ». «( $\circ$ ) è associativa», e quindi ha senso scrivere  $G_3 \circ G_2 \circ G_1$  per  $G_3 \circ (G_2 \circ G_1)$ , ecc.; §

riga), allora e solo allora  $W \equiv V$ . Se poi in una o più righe della colonna sotto  $W$  un  $\bullet$  si affianca ad un  $\circ$  della colonna sotto  $V$ , le altre righe delle due colonne essendo uguali, allora si concluderà che  $V \subsetneq W$  identicamente rispetto agli  $U_1, \dots, U_n$ . Se infine gli insiemi  $U_1, \dots, U_n$  non sono arbitrari ma in qualche modo a priori vincolati, alcune delle  $2^n$  righe sotto la riga dei simboli  $U_1 U_2 \dots U_n$  dovranno essere proibite. Se ad es. è a priori  $U_1 \subset U_2$ , le righe con  $\bullet$  sotto  $U_1$  e  $\circ$  sotto  $U_2$  rappresentano combinazioni irrealizzabili, e non vanno scritte. Il lettore può provarsi ad usare il metodo delle tavole di appartenenza per verificare identità enunciate, ad es. l'identità  $(W \cup V) \setminus (W \cap V) \equiv (W \setminus V) \cup (V \setminus W) (\equiv W \Delta V)$ .

<sup>19</sup> Per  $I = \emptyset$ , la  $\cap_{t \in I} X_t$  non è definita, perché la formula  $\forall (t \in \emptyset) \{z \in X_t\}$  non è collettivizzante in  $z$ . Definendo tuttavia  $\cap_{t \in I} (X_t \subset Y)$ , **intersezione della famiglia di parti indicizzate  $X_t$  di  $Y$**  (un insieme dato), come l'insieme  $\{z | (z \in Y) \wedge \forall (t \in I) \{z \in X_t\}\}$  la formula dopo  $|$  risulta collettivizzante anche per  $I = \emptyset$ , e il relativo insieme si riduce in questo caso a  $Y$ .

<sup>20</sup> Con questo intendiamo dire che la formula in  $w$ :  $\exists (x, z) \{ w = \langle x, z \rangle \wedge \exists y \{ (\langle x, y \rangle \in G_1) \wedge (\langle y, z \rangle \in G_2) \} \}$  è collettivizzante in  $w$  (come si dimostra).

§35.  $G^{-1}$  : **grafo inverso del grafo**  $G$ . «La formula in  $\langle x,y \rangle$ : “ $\langle y,x \rangle \in G$ ”, dove  $G$  è un grafo, è collettivizzante in  $\langle x,y \rangle$ , e la sua estensione è un grafo, il grafo  $G^{-1}$ ».  $\vdash (G^{-1})^{-1} = G|$ ,  $\vdash (G_2 \circ G_1)^{-1} = G_1^{-1} \circ G_2^{-2}|$ ,  $\vdash \text{pr}_1 G^{-1} = \text{pr}_2 G|$ , e  $\vdash \text{pr}_2 G^{-1} = \text{pr}_1 G|$ ; §

§36.  $F$  ( $F_1, F_2, \dots, F', F'', \dots$ ) sono nomi per un **grafo funzionale**, cioè un grafo  $F$  per il quale  $\vdash \forall (x,y,y') \{ (\langle x,y \rangle \in F) \wedge (\langle x,y' \rangle \in F) \Rightarrow (y=y') \}$ .<sup>21</sup> «Se  $F_1$  e  $F_2$  sono grafi funzionali, e  $\text{pr}_2 F_1 \subset \text{pr}_1 F_2$ , il grafo  $F =: F_2 \circ F_1$  è funzionale, e  $\text{pr}_1 F = \text{pr}_1 F_1$ ,  $\text{pr}_2 F \subset \text{pr}_2 F_2$ ». «Se  $F$  e  $F^{-1}$  sono grafi funzionali, i grafi  $F^{-1} \circ F$  e  $F \circ F^{-1}$  (ciascuno inverso di se stesso) sono funzionali»; §

§37.  $\Delta_X$  : **grafo diagonale dell'insieme**  $X$ . È il grafo definito da  $\{z | \exists (x \in X) \{z = \langle x,x \rangle\}\}$ . Si dice anche (sottoinsieme) **diagonale di**  $X^2$ . « $\Delta_X$  è funzionale».  $\vdash \Delta_X^{-1} = \Delta_X|$ , e  $\vdash \text{pr}_1 \Delta_X = \text{pr}_2 \Delta_X = X|$ . Inoltre  $\vdash \Delta_X \circ \Delta_Y = \Delta_{X \cap Y}|$ . «Se  $F$  è un grafo funzionale, e anche  $F^{-1}$  lo è, allora  $\vdash F^{-1} \circ F = \Delta_{\text{pr}_1 F}|$  (quindi  $\vdash F \circ F^{-1} = \Delta_{\text{pr}_2 F}|$ ); §

§38. La corrispondenza  $f =: \langle F, X, Y \rangle$ , dove  $F$  è un grafo funzionale, e sotto le condizioni  $\vdash \text{pr}_1 F = X|$  (e  $\vdash \text{pr}_2 F \subset Y|$ , vigente per ogni corrispondenza) si dice una **funzione** (o **applicazione**). L'insieme di partenza  $X$  di  $f$  si dice **dominio** (o **insieme di definizione**) di  $f$ , e quello di arrivo  $Y$  **codominio** di  $f$ . Si dice anche che  $f$  è **definita in**  $X$  e **prende i suoi valori in**  $Y$ .  $f(x)$  è la seconda proiezione della coppia ordinata di  $F$  che ha per prima proiezione  $x$  ( $\in X$ ), e si dice il **valore di**  $f$  **in**  $x$ . Per significare che una funzione  $f$  ha dominio  $X$  e prende i suoi valori in  $Y$ , si dice anche che è una **funzione** (o una **applicazione**) **di**  $X$  **in**  $Y$ , il che si denota anche con  $f: X \rightarrow Y$ , o con  $x(\in X) \mapsto f(x)(\in Y)$ .<sup>22</sup> Se per ogni  $y$  ( $\in Y$ ) che sia un valore di  $f$  è unico l' $x$  per cui  $y = f(x)$ , allora l'applicazione  $f$  si dice una **iniezione di**  $X$  **in**  $Y$ . Se  $\text{pr}_2 F = Y$ , allora  $f$  e il suo grafo funzionale  $F$  sono sostanzialmente la stessa cosa (nel senso che  $f = \langle F, \text{pr}_1 F, \text{pr}_2 F \rangle$ ) e l'applicazione si dice una **suriezione di**  $X$  **su**  $Y$ . Sono suriezioni le cosiddette **funzioni definite mediante termine**, cioè definite assegnando il termine-valore corrispondente al generico elemento del suo dominio.<sup>23</sup> Una funzione che sia al contempo una iniezione di  $X$  in  $Y$  e una suriezione di  $X$  su  $Y$  si dice una **biiezione di**  $X$  **su**  $Y$ ; §

§39. Siano  $f =: \langle F, X, Y \rangle$  e  $g =: \langle G, U, V \rangle$  due funzioni. Se  $X \subset U$ ,  $\forall x(\in X) \{f(x) = g(x)\}$ , e  $Y \subset V$ , allora «è  $F \subset G$ », e  $g$  si dice **un prolungamento di**  $f$ . Essendo ancora  $f =: \langle F, X, Y \rangle$  una funzione, sia

<sup>21</sup> Non è esagerato affermare che buona parte della matematica è legata a questa definizione, perché da essa scende direttamente il concetto di funzione.

<sup>22</sup> Se fosse  $X = \emptyset$ , allora  $F = \emptyset$ .  $f: \emptyset \rightarrow Y$  non sarebbe definita se  $Y \neq \emptyset$ , mentre è la **funzione vuota**  $\{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}$  se anche  $Y = \emptyset$ .

<sup>23</sup> Vale a dire: in corrispondenza a ogni  $x \in X$ , sia definito un unico termine, che (suggestivamente) denoteremo con  $T(x)$ . Allora la formula in  $x$  e  $y$  “ $(x \in X) \wedge (y = T(x))$ ”, supponendo che  $y$  non figurì in  $T$ , ammette un unico grafo che risulta funzionale in  $y$  ed incluso in  $X \times Y$ , dove  $Y = \{y | \exists x \{x \in X \wedge y = T(x)\}\}$  (**insieme degli oggetti di tipo**  $T(x)$  **per**  $x \in X$ ). Detto  $F$  questo grafo, la funzione  $\langle F, X, Y \rangle$  è una suriezione di  $X$  su  $Y$ , che si denota  $x(\in X) \mapsto T(x)(\in Y)$ .

$X' \subset X$ ; allora «esiste un'unica funzione  $f' = \langle F', X', Y \rangle$  tale che  $\forall x (x \in X') \{f'(x) = f(x)\}$ », la quale si dice **la restrizione di  $f$  a  $X'$** , e si denota  $f|_{X'}$ . §

§40. Sia  $f = \langle F, X, Y \rangle$  una funzione, e sia  $X' \subset X$ . Con  $f[X']$  (o anche con  $F[X']$ ), si denota l'insieme  $\{y | \exists (x \in X') \{ \langle x, y \rangle \in F \} \}$  e si dice l' **immagine di  $X'$  attraverso (o sotto)  $f$**  (o sotto  $F$ ). «In particolare  $f[X]$  è l'insieme dei valori di  $f$ ». <sup>24</sup> «Se l'applicazione  $f: X \rightarrow Y$  è iniettiva, la **restrizione di  $F^{-1}$  a  $f[X]$**  ( $\equiv$  l'insieme delle coppie di  $F^{-1}$  la cui 1<sup>a</sup> proiezione è in  $f[X]$ ), che denoteremo  $F^{-1}|_{f[X]}$ , è funzionale, ed ha 1<sup>a</sup> proiezione uguale a  $f[X]$  e 2<sup>a</sup> proiezione uguale a  $X$ ». Quindi « $f^{-1} = \langle F^{-1}|_{f[X]}, f[X], X \rangle$  è una funzione, e precisamente una suriezione di  $f[X]$  su  $X$ . Ma  $f^{-1}$  è anche una iniezione, e quindi è una biiezione di  $f[X]$  su  $X$ . Viceversa, se  $F^{-1}|_{f[X]}$  è funzionale,  $f$  è una iniezione e  $f^{-1} = \langle F^{-1}|_{f[X]}, f[X], X \rangle$  è una biiezione». La funzione  $f^{-1}$  (se esiste per la data  $f$ ) si dice **funzione inversa** di  $f$ . Infine « $f^{-1}$  è dotata di inversa, e  $(f^{-1})^{-1} = f$ »; §

§41.  $f_2 \circ f_1$  : **funzione composta della funzione  $f_2$  con la funzione  $f_1$**  (nell'ordine). Siano  $f_1 = \langle F_1, X_1, Y_1 \rangle$  e  $f_2 = \langle F_2, X_2, Y_2 \rangle$  due funzioni per le quali  $Y_1 = X_2$ . «Allora  $f = \langle F, X_1, Y_2 \rangle$ , dove  $F = F_2 \circ F_1$ , è una funzione ( $F$  è funzionale perché  $\text{pr}_2 F_1 \subset Y_1 = X_2 = \text{pr}_1 F_2$ ,  $\text{pr}_1 F = \text{pr}_1 F_1 = X_1$ , e  $\text{pr}_2 F \subset \text{pr}_2 F_2 = Y_2$ ), cioè la funzione composta  $f_2 \circ f_1$  (nell'ordine); §

§42.  $\text{Id}_X$  : **funzione identica su  $X$** . È la biiezione di  $X$  su  $X$   $\langle \Delta_X, X, X \rangle$ . « $\text{Id}_X[X] = X$  e  $\forall (x \in X) \{ \text{Id}_X(x) = x \}$ ». «Se la funzione  $f = \langle F, X, Y \rangle$  è dotata di inversa  $f^{-1}$ ,  $f^{-1} \circ f = \text{Id}_X$  e  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{f[X]}$ »; §

§43.  $\{X_t\}_{t \in I}$  : **famiglia di oggetti  $X_t$**  (tipicamente insiemi) **con indice  $t \in I \neq \emptyset$** . È l'insieme dei valori, che sono gli oggetti  $X_t \equiv X(t)$ , di una funzione di dominio  $I$ . «Se  $I = \{1 \div n\}$ , la famiglia  $\{X_t\}_{t \in I}$  è l' $n$ -pla (non ordinata)  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ »; §

§44.  $\mathcal{F}(X, Y)$  : si denota così l'**insieme delle applicazioni di  $X$  in  $Y$** ; §

§45.  $\prod_{t \in I} X_t$  : **prodotto (cartesiano) della famiglia di insiemi indicizzati  $X_t$**  (al variare di  $t$  nell'insieme d'indici  $I \neq \emptyset$ ). È l'insieme di grafi funzionali  $\{z | (z \text{ è un grafo funz.}) \wedge (\text{pr}_1 z = I) \wedge \forall (t \in I) \{z(t) \in X_t\}\}$ . Questo insieme può identificarsi con quello delle funzioni con dominio  $I$  e il cui valore in  $t$  appartiene a  $X_t$ . Quando  $I = \{1 \div n\}$ , esso è anche in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei valori di queste funzioni, e quindi con  $\times_{i=1}^n X_{\pi(i)}$  per una qualunque permutazione  $\pi$  di  $\langle 1, \dots, n \rangle$ . Sia poi  $J \subset I$  e  $F \in \prod_{t \in I} X_t$ ; allora il grafo  $F \circ \Delta_J$  appartiene a  $\prod_{t \in J} X_t$ , e l'applicazione  $F \mapsto F \circ \Delta_J$  di  $\prod_{t \in I} X_t$  in  $\prod_{t \in J} X_t$  si dice "**J-proiezione**" del primo prodotto sul secondo e si denota  $\text{pr}_J$ . Sia  $\{J_\lambda\}_{\lambda \in L}$  una partizione di  $I$  (cioè,  $J_\lambda \subset I \forall \lambda \in L$  e  $\cup_{\lambda \in L} J_\lambda = I$ ); allora «l'applicazione di

<sup>24</sup> In luogo di  $f[X]$  si scrive molto spesso anche  $f(X)$ , che tuttavia non è abbastanza inequivoco fuori dal contesto.

$\prod_{i \in I} X_i$  in  $\prod_{\lambda \in L} (\prod_{i \in J_\lambda} X_i)$  descritta da  $F \mapsto \{pr_{J_\lambda} F\}_{\lambda \in L}$  è una biiezione». Questa proprietà esprime l’“associatività” (in un senso più generale di quello standard) del prodotto di una famiglia d’insiemi indicizzati, e ad essa può ricondursi l’usuale associatività del prodotto (cartesiano) di una famiglia di tre o più insiemi dati nell’ordine. §

L’insieme dei naturali (interi non negativi) è denotato con  $\mathbf{N}$ , quello degli interi relativi con  $\mathbf{Z}$ , quello dei razionali con  $\mathbf{Q}$ , quello dei reali con  $\mathbf{R}$ . (Un’alternativa a quella qui adottata, ed anche più comune, è quella di sostituire ai caratteri  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ , ecc., i caratteri  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , ecc.) Si sottolinea che lo zero è compreso in  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}$ , ecc; quando lo si vuole escludere si scrive  $\mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{Q}^*$ , ecc.<sup>25</sup>

## A.2) GENERALITÀ SULLA TEORIA DELLA DEDUZIONE

Diamo qui appresso alcune elementari informazioni intorno alla nozione di **deduzione**. In generale una teoria della deduzione (riferita ad un dato linguaggio formale, al solito supposto logico-quantificato del 1° ordine) si fonda su un insieme di regole stabilite inequivocamente, e sulla cui base un arbitrario enunciato (formula chiusa) di quel linguaggio appartiene o no ad un insieme privilegiato di suoi enunciati che si dicono (enunciati) **deducibili**. Vi sono due tipi ( $\alpha$ ) e ( $\beta$ ) di enunciati deducibili: quelli che lo sono per una convenzione “effettiva” ( $\equiv$  decidibile) accettata a priori (enunciati deducibili di tipo ( $\alpha$ ), o **assiomi**<sup>26</sup>), e quelli (enunciati deducibili di tipo  $\beta$ , o **teoremi**) che lo sono in quanto si trovano in una particolare relazione con gli assiomi. Una regola che indica esplicitamente l’insieme  $\Sigma$  di enunciati dal quale si “deduce” un generico enunciato, e quindi, alla fine, la particolare relazione che lega i teoremi agli assiomi, si dice una **regola di inferenza** (o **regola deduttiva**). Supporremo che le regole deduttive siano comunque in numero finito.

Nella versione di deduzione che qui presentiamo (la diremo spesso deduzione naturale) esiste una sola regola deduttiva, la quale afferma che se  $A$  e  $A \Rightarrow B$  sono deducibili (cioè sono assiomi aut teoremi), allora  $B$  è deducibile. Questa regola, in cui evidentemente  $\Sigma$  consta di due elementi, si dice **regola di separazione** o del **Modus Ponens** (MP). Un enunciato  $B$  è dunque

<sup>25</sup> Di regola, questi insiemi sono pensati con la struttura standard che li caratterizza, e in certo senso inalienabile. Ad esempio  $\mathbf{R}$  è pensato come campo ordinato (dal  $-$  al  $+$ ) archimedeo e completo, ma non necessariamente come spazio metrico (perché può ricevere metriche diverse) o anche soltanto come spazio topologico.

<sup>26</sup> Oltre agli assiomi “individuali”, si possono considerare insiemi di assiomi con una comune struttura, che si dicono “schemi di assiomi”. (In realtà gli schemi nascondono un linguaggio del 2° ordine.) Gli assiomi compresi in uno schema di assiomi si dicono “impliciti”, e gli assiomi individuali si dicono anche “espliciti”. Tutti gli assiomi sono formule chiuse; quindi, se contengono individui del linguaggio, quegli individui devono essere delle costanti. I sistemi formali con numero finito di assiomi e schemi di assiomi si dicono “finitamente assiomatizzabili” e sono quelli del massimo interesse. Un caso più generale è quello in cui l’insieme degli assiomi e schemi di assiomi è ricorsivo.

deducibile sse è un assioma (caso ( $\alpha$ )) aut esistono enunciati deducibili  $A$  e  $A \Rightarrow B$  (caso ( $\beta$ )). Questa è evidentemente una definizione ricorsiva; si richiederà tuttavia che la catena dei rinvii ad altri enunciati deducibili sia *finita*. Una **dimostrazione** è dunque una successione finita di suoi enunciati ciascuno dei quali, diciamo  $B$ , o è un assioma o è preceduto da un enunciato del tipo “ $A \Rightarrow B$ ” e da  $A$  stessa. Quindi «ogni enunciato di una dimostrazione è un teorema se non è esso stesso un assioma». Come anticipato, sarà comodo designare come Teoremi gli enunciati che sono assiomi aut teoremi.

Un sistema formale (SF)  $S$  si dice **più forte** (o **più potente**) di un SF  $S'$  se tutti i segni di  $S'$  sono segni di  $S$ , se  $S$  e  $S'$  hanno le stesse regole di inferenza e tutti gli assiomi di  $S'$  sono deducibili in  $S$ . “ $S$  è più forte di  $S'$ ” si dice anche “ $S'$  è **più debole** di  $S$ ”. Due SF  $S$  e  $S'$  si dicono poi **equivalenti** se  $S$  è più forte di  $S'$  e viceversa. Usualmente, l'insieme degli assiomi di un SF consta di una base di assiomi in esso più o meno tacitamente presupposti (ad esempio degli schemi di assiomi logici, o addirittura degli assiomi e schemi di assiomi della teoria degli insiemi), oltre che di **assiomi specifici**, che appunto lo distinguono dal (più debole) SF di base.<sup>27</sup>

Alla luce dell'insieme dei suoi assiomi (che si presume “decidibile”, nel senso che un automa (v. S.sez. 0.1.3) posto di fronte ad un enunciato arbitrario deve saper riconoscere se è un assioma o no), e delle regole di inferenza, un automa può sempre verificare se una data sequenza finita di enunciati del SF considerato è, o non è, una dimostrazione. Tuttavia, in generale un automa *non può decidere* (in un numero finito di passi) *se un enunciato  $A$  arbitrariamente dato è, o non è, deducibile*. Nel primo caso l'automa dovrebbe infatti *esibire* una dimostrazione che contenga  $A$ , mentre nel secondo dovrebbe provare che una tale dimostrazione non esiste; ma le dimostrazioni, come si è detto, sono numerabilmente infinite. A causa di questa infinità, sia il reperimento di una dimostrazione di  $A$  che la prova della inesistenza di una sua dimostrazione richiedono, per così dire, “una certa dose di ingegno”, che l'automa ovviamente non ha. Il problema di accertare se un enunciato arbitrariamente dato di un certo SF è un teorema o no è detto (ricordiamo) **problema di decisione** (Entscheidungsproblem) per quel SF. Se il problema di decisione per un dato SF è risolubile da un automa (sempre in un numero finito di passi) il SF si dice **decidibile**. Il caso contrario è quello più comune e interessante. Comunque un automa può sempre *produrre* dimostrazioni, e quindi teoremi, e poi *ordinarli* (ad esempio alfabeticamente); ovvero, un automa può sempre *enumerare* teoremi, cioè fornirne una lista senza fine ordinata in qualche modo.

---

<sup>27</sup> Come alla lunghezza (finita) di un generico enunciato, non si pongono limiti al numero (finito) degli enunciati di una dimostrazione. Sono proprio le assenze di limiti di questo tipo che proiettano la logica, e con essa l'intera matematica, al di là della dimensione di mero “gioco combinatorio finito”; ci sono dunque (numerabilmente) infiniti enunciati e (numerabilmente) infinite dimostrazioni.



Ad ogni enunciato  $A$  di un SF si associa la sua negazione formale  $\neg A$ . «In un SF logico la negazione della negazione di un enunciato equivale logicamente all'enunciato di partenza (v. A.3)». Per brevità, denotiamo con “**a**” il metaenunciato “ $A$  è un Teorema” e con “**b**” il simile metaenunciato “ $\neg A$  è un Teorema”. Un SF logico si dice **contraddittorio** se vale il metaenunciato “*esiste un  $A$  per cui (a e b)*”, e si dice **completo** (“categorico” secondo Bourbaki) se vale il simile metaenunciato “*per ogni  $A$ , allora (a e/o b)*”. La **coerenza** del SF è la negazione della sua contraddittorietà (e infatti un SF coerente si dice anche **non-contraddittorio**); quindi un SF è coerente sse vale il metaenunciato “*per ogni  $A$ , allora (non-a e/o non-b)*”. Avremmo potuto usare questo metaenunciato come definizione di coerenza; confrontata con la definizione di completezza, essa mostra il suo semplice rapporto con quest'ultima (non-a in luogo di a e non-b in luogo di b). Naturalmente “non-a” significa che “ $A$  non è un Teorema”, e “non-b” che “ $\neg A$  non è un Teorema”. «In un SF logico contraddittorio *tutti* gli enunciati sono Teoremi» (v. A.3); il viceversa è ovvio, per cui «in un SF logico coerente esiste un enunciato che non è un Teorema». Il fatto che in un SF logico contraddittorio tutti gli enunciati sono Teoremi viene spesso usato come *definizione* di contraddittorietà. Ovviamente un SF contraddittorio non presenta alcun interesse.

In generale, un automa non può decidere (sempre in un numero finito di passi) se un SF è coerente aut contraddittorio; non solo, ma esistono quasi sempre precisi e ineliminabili limiti obbiettivi *alla possibilità di provare o refutare in modo leale* (o che comunque sia accettato come tale) la sua coerenza. Similmente un automa non può in generale accertare se un SF logico è completo aut incompleto. Sarebbe anche desiderabile escludere che un certo assioma di un SF risulti deducibile da (alcuni de)gli altri assiomi (o avendo accertato che lo è, scartarlo a favore dei rimanenti); ma ovviamente un automa non può in generale fare cose del genere. Sebbene la soluzione di questo cosiddetto **problema dell'indipendenza** (degli assiomi di un SF) possa spesso considerarsi meno essenziale di quello della sua possibile coerenza (o addirittura di valore estetico), e in minor misura, della sua completezza, esso è comunque molto importante; ad esempio, la scoperta delle geometrie non euclidee derivò proprio dallo studio di un problema di indipendenza – quello dell'indipendenza dell'assioma delle parallele dai rimanenti assiomi della geometria euclidea.

La **teoria della dimostrazione** (Beweistheorie, Proof Theory), anche con riferimento a regole di inferenza completamente generali, è ormai un fondamentale capitolo della teoria dei sistemi formali, nell'ambito della logica matematica.<sup>28</sup>

---

<sup>28</sup> Giuste le precedenti osservazioni, le limitazioni che un automa (nonché la nostra stessa mente, apparentemente dotata di “libera capacità intuitiva”) incontra nell'accertamento leale di certe proprietà fondamentali di un SF abbastanza ricco, e innanzitutto della sua coerenza, dovrebbero evitare al lettore l'ingenua tentazione di identificare l'attività matematica, che è quella *di inventare teorie e provare (congetture di) loro teoremi*, con un mero gioco su sequenze di enunciati.

A.3) GLI ASSIOMI E SCHEMI DI ASSIOMI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI, E ALCUNE DELLE LORO  
CONSEGUENZE<sup>29</sup>

Come anticipato, tra le molte possibili alternative che sono state prese in considerazione prima di stendere queste note, abbiamo deciso di seguire sostanzialmente l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi dovuta a Bourbaki (1970) nella presente sezione A.3. Un SF  $\mathcal{T}$  si dice **logico** (o piuttosto **logico-enunciativo**, o **logico-proposizionale**, perché i suoi enunciati si dicono anche **proposizioni**) se ha i seguenti **schemi di assiomi logici**, e la sola regola di inferenza MP. Nel seguito, "schemi" starà brevemente per "schemi di assiomi". A, B, C, ... sono nomi (metalinguistici) per enunciati. Qui di seguito fino all'introduzione dello  $\exists$ -schema ( $Q_1$ ), "SF" sarà da intendere come un "SF logico (enunciativo)", e "teorema" significherà "teorema di quel SF". Gli schemi (di assiomi) logici sono i seguenti (per ogni A, B, C):

$$(L_1) \quad (A \vee A) \Rightarrow A;$$

$$(L_2) \quad A \Rightarrow (A \vee B);$$

$$(L_3) \quad (A \vee B) \Rightarrow (B \vee A);$$

$$(L_4) \quad (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B)).^{30}$$

Se il SF non ha altri assiomi oltre a quelli compresi negli schemi ( $L_1 \div L_4$ ), esso si dice **calcolo enunciativo** (CE) (o **proposizionale** (CP)). Si noti che ( $L_1 \div L_4$ ) si formano con i connettivi  $\vee$  e  $\Rightarrow$ ; per la definizione di  $\Rightarrow$ , si presuppone quindi che l'alfabeto di CP abbia i connettivi  $\vee$  e  $\neg$ .

Mediante ( $L_2$ ) in combinazione con MP, si dimostra<sup>31</sup> che in un SF logico e contraddittorio ( $\equiv$  in cui esiste una coppia di teoremi del tipo  $(A, \neg A)$ ) ogni enunciato è un teorema. Questa è la

Ovviamente non è così. Nelle parole di Courant (Richard, uno dei più noti allievi-collaboratori di Hilbert, 1888-1972): «benché la forma assiomatica sia quella ideale, può essere un pericoloso errore credere che la formalizzazione racchiuda l'essenza della matematica. Il pensiero costruttivo, guidato dall'intuizione, è la vera sorgente del suo progresso.» (in "What is Mathematics?" Oxford Un. Press, 1944). Di fatto, per quanto astratta e trascendente possa apparire ai più, l'attività matematica non può mai staccarsi dalla sua origine profonda, che è quella «dell'esperienza e della pratica umana» (F.E. Browder, S. Mac Lane, "The relevance of mathematics", in "Mathematics today: twelve informal essays", Springer (1978)); e quindi, in ultima analisi, dalla realtà empirica nella quale siamo immersi. Sui ruoli apparentemente lontani dell'intuizione e della formalizzazione nella matematica si è sviluppato uno dei più vivaci e fertili dibattiti del secolo XX, che ha visto tra i suoi protagonisti logici e matematici come Hilbert, Gödel, Tarski, Brouwer, Weyl, Skolem (Thoralf, 1887-1963), Turing (Alan, 1912-1954), e molti altri.

<sup>29</sup> Nota Bene: in qualche occasione, i contenuti di questa A.3 riprendono ed ampliano quelli della S.sez. 0.1.3.

<sup>30</sup> Questi quattro schemi di assiomi sono sostanzialmente quelli che figurano nei Principia Mathematica di Russell e Whitehead.

<sup>31</sup> Se il SF S (logico) è contraddittorio, esiste un suo enunciato, diciamolo  $A^*$ , per il quale " $A^*$  è un teorema et  $\neg A^*$  è un teorema". Sia B un enunciato qualunque di S: allora (per  $L_2$ )  $\neg A^* \Rightarrow (\neg A^* \vee B)$ ; quindi, essendo  $\neg A^*$  un teorema per ipotesi, lo è (per MP)  $(\neg A^* \vee B)$ . Ma  $(\neg A^* \vee B)$  coincide con  $A^* \Rightarrow B$ , e  $A^*$  è un teorema per ipotesi; quindi B è un teorema (ancora per MP). Questo dimostra la tesi.

legge (o metateorema) di Duns Scoto (John, 1266 – 1308)). Segue un numero di altre conseguenze, via MP, di  $(L_1 \div L_4)$  <sup>32</sup>.

- (1) (usando (MP) e  $(L_4)$ ): «se  $\vdash A \Rightarrow B$  e  $\vdash B \Rightarrow C$ , allora  $\vdash A \Rightarrow C$  (proprietà transitiva di  $\Rightarrow$ );
- (2) (usando (1),  $(L_2)$ ,  $(L_3)$ ):  $\vdash B \Rightarrow (A \vee B)$ ;
- (3) (usando (1),  $(L_1)$ ,  $(L_2)$ ):  $\vdash A \Rightarrow A$ ;
- (4) (usando (2)): «per qualunque A, se  $\vdash B$ , allora  $\vdash A \Rightarrow B$ »;
- (5) (usando (3), e  $(L_3)$ ): «per qualunque A,  $\vdash A \vee (\neg A)$ » (**tertium non datur**, o **legge del terzo escluso**);
- (6) (usando (5)): «per qualunque A,  $\vdash A \Rightarrow \neg(\neg A)$ » (**legge debole della doppia negazione**);
- (7) (usando (6),  $(L_4)$ ,  $(L_3)$  e (1)): «per ogni A, B,  $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ » (**legge debole di contrapposizione**);
- (8) (usando (7),  $(L_4)$ ,  $(L_3)$  e (1)): «per ogni A, B, C, se  $\vdash A \Rightarrow B$ , allora  $\vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ » (**transitività di  $\Rightarrow$** );
- (9) «per ogni A, B, C,  $\vdash A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$ ,  $\vdash A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$  e  $\vdash A \underline{\vee} (B \underline{\vee} C) \Leftrightarrow (A \underline{\vee} B) \underline{\vee} C$ » (proprietà **associativa** di  $\vee$ , di  $\wedge$  e di  $\underline{\vee}$ ). Senza rischi di ambiguità,  $A \vee (B \vee C)$  potrà scriversi  $A \vee B \vee C$ , ecc. Lo stesso si dica sostituendo ad A, B, C un qualsiasi numero n di enunciati  $A_1, \dots, A_n$ . L'interpretazione è ovvia: ad esempio  $A_1 \underline{\vee} \dots \underline{\vee} A_n$  significa “esattamente uno di  $A_1, \dots, A_n$ ”;
- (10) «per ogni A, B, C,  $\vdash A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$  e  $\vdash A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ » (proprietà **distributiva** di  $\wedge$  rispetto a  $\vee$ , e di  $\vee$  rispetto a  $\wedge$ );

Un enunciato di CP che è un teorema “identicamente”, cioè indipendentemente dalla provabilità aut refutabilità di ciascuno degli enunciati che lo compongono, come avviene ad es. per  $A \vee (\neg A)$ , o per  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ , si dice una **tautologia**. <sup>33</sup>

Illustriamo ora tre importanti “metodi di (meta)dimostrazione”. Il primo è il **metodo dell'ipotesi ausiliaria** (J. Herbrand, 1908-1931, 1930), si dimostra per induzione e recita: «Sia A un enunciato di S, e S' il SF che si ottiene da S aggiungendogli A come assioma. Se B è un teorema

<sup>32</sup> Chiariamo fin da adesso che questa espressione non implica che l'intera famiglia di schemi  $(L_1 \div L_4)$  sia necessaria per giustificare particolari conclusioni riportate più sotto. Questo varrà a maggior ragione man mano che ci addenteremo nella assiomatizzazione della teoria. Se lo crederà, il lettore curioso e di buona volontà potrà sempre accertare da sé quali degli assiomi fino a quel punto introdotti siano effettivamente necessari per dimostrare che un particolare enunciato riportato *dopo* di essi sia un teorema. Del resto questo tipo di problema (per così chiamarlo) può evitarsi soltanto riportando esplicitamente, teorema per teorema, la lista degli assiomi che compaiono nella dimostrazione cui esso appartiene (come si è fatto per i teoremi (1 ÷ 8)), o addirittura la dimostrazione stessa.

<sup>33</sup> Qui si è tacitamente anticipato che per ogni enunciato A di CP  $A$  aut  $\neg A$  è un teorema (coerenza e completezza di CP). Sia A un enunciato di CP che si forma con gli enunciati  $A_1, \dots, A_n$ , e a ciascuno di questi si assegni il valore “vero” (V) aut “falso” (F) in tutti i modi possibili. Si ottiene così una “tavola di valori di verità”, a  $n^{2^n}$  caselle, diciamo a n colonne e  $2^n$  righe. Allora la corrispondente colonna a  $2^n$  righe di valori di verità di A è costituita di soli (V) sse A è una tautologia.

di  $S'$ ,  $A \Rightarrow B$  è un teorema di  $S$  ». Il secondo è il ben noto **metodo di dimostrazione per assurdo**, e recita: «sia  $A$  un enunciato di  $S$ , e  $S'$  il SF che si ottiene da  $S$  aggiungendogli  $\neg A$  come assioma. Se  $S'$  risulta contraddittorio,  $A$  è un teorema di  $S$ ». Da un punto di vista intuitivo, comunemente si pensa che, se dall'accettare  $\neg A$  come teorema segue una contraddizione, questa conseguenza è inaccettabile “di per sé”, e per questa ragione si deve concludere che  $A$  è un teorema. Per chi affronta ex-novo lo studio della logica formale, sorprende non poco scoprire che questa modalità istintiva (ma più “psicologica” che “logica”) di interpretare la correttezza di una dimostrazione per assurdo è priva di senso.<sup>34</sup> Due teoremi che si possono dimostrare per assurdo sono:

$$(9) \quad \vdash \neg(\neg A) \Rightarrow A|,$$

e quindi, aggiungendo la (6),  $\vdash \neg(\neg A) \Leftrightarrow A|$  (**legge forte della doppia negazione**);

$$(10) \quad \vdash ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)|,$$

e quindi, aggiungendo la (7),  $\vdash ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)|$  (**legge forte di contrapposizione**). Il terzo metodo di dimostrazione è quello cosiddetto **della disgiunzione dei casi**, e recita: «per  $A, B, C$  enunciati qualsiasi di  $S$ , se  $A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C$  sono teoremi, allora  $C$  è un teorema». Se dunque in  $S$  si dispone di un teorema del tipo  $A \vee B$ , se  $C$  segue aggiungendo  $A$  agli assiomi di  $S$  (quindi  $A \Rightarrow C$ , Herbrand), e se similmente  $C$  segue aggiungendo  $B$  agli assiomi di  $S$  (quindi  $B \Rightarrow C$ , ancora Herbrand), allora  $C$  è un teorema. In particolare, «se  $\vdash A \Rightarrow C|$  e  $\vdash \neg A \Rightarrow C|$ , allora  $\vdash C|$ ».

Diamo ancora alcune definizioni applicabili ad un SF  $S$  logico. Come in generale, un enunciato  $A$  di  $S$  si dice **deducibile** ( $\vdash A|$ , o  $S \vdash A|$ ) se in  $S$  esiste una dimostrazione di  $A$  (cioè se  $A$  figura in una *sequenza deduttiva* di enunciati di  $S$ ); e si dice **refutabile** (in  $S$ ) se in  $S$  esiste una dimostrazione di  $\neg A$ . Evidentemente, un enunciato  $A$  di  $S$  può essere deducibile aut non esserlo; e similmente può essere refutabile aut non esserlo. Poiché la deducibilità e la non deducibilità di un enunciato, come pure la sua refutabilità e non refutabilità, si escludono a vicenda, al generico enunciato  $A$  di  $S$  si prospettano quattro possibilità:

- (a)  $A$  è deducibile e refutabile;
- (b)  $A$  è deducibile e non è refutabile;
- (c)  $A$  non è deducibile ed è refutabile;
- (d)  $A$  non è deducibile e non è refutabile (o come anche si dice,  $A$  è **indecidibile**).

<sup>34</sup> Questo è un esempio tra i tanti del potere fuorviante delle parole quando ci si occupa di un sistema formale: se in luogo di “ $S'$  risulta contraddittorio” avessimo convenuto di dire, con lo stesso significato, “ $S'$  risulta giallo” probabilmente la conclusione “ $A$  è un teorema di  $S$ ” non sarebbe apparsa altrettanto (ingannevolmente) ovvia! L'effettiva (meta)dimostrazione è la seguente. Se  $S'$  è contraddittorio, ogni suo enunciato, e in particolare  $A$ , è un suo teorema (Duns Scoto). Usando il metodo dell'ipotesi ausiliaria, si ha quindi che  $(\neg A) \Rightarrow A$  è un teorema di  $S$ . Ma allora, scrivendo  $\neg A$  in luogo di  $A$  e  $A$  in luogo di  $B$  nella  $(L_4)$ ,  $(C \vee (\neg A)) \Rightarrow (C \vee A)$  è a sua volta un teorema di  $S$  per qualunque  $C$ ; e quindi ponendo  $A$  in luogo di  $C$ , lo è  $(A \vee (\neg A)) \Rightarrow (A \vee A)$ . L'antecedente di questa è un teorema (principio del terzo escluso, tertium non datur), mentre la conseguente implica  $A$  per  $(L_1)$ ; dunque  $A$  è un teorema di  $S$  per la transitività di  $\Rightarrow$ , qed.

Sia  $H$  un insieme di enunciati di  $S$ . Se esiste un enunciato  $A$  di  $H$  per cui vale (a) [(d)],  $H$  si dice **incoerente** (o **contraddittorio**) [**incompleto**]; se non esiste,  $H$  si dice **coerente** (o **non contraddittorio**) [**completo**]. (Per brevità, nelle quattro precedenti definizioni abbiamo sottinteso la locuzione “in  $S$ ”.) Ma se  $H$  è incoerente vale la legge di Duns Scoto, e *ogni* enunciato di  $H$  è deducibile; quindi il caso (d) non occorre per alcun enunciato di  $H$ .  $H$  può essere coerente e completo, oppure coerente e incompleto, oppure ancora incoerente e completo, ma non incoerente e incompleto; e se è incoerente, perde in pratica ogni interesse.<sup>35</sup>

Ormai diremo anche, un po' impropriamente<sup>36</sup>, “teoria” (e la denoteremo genericamente  $\mathcal{T}$ ) in luogo di “sistema formale”. Una teoria logica (enunciativa) si dice **logica-quantificata** (o per brevità, **quantificata**) se oltre a  $(L_1 \div L_4)$  ha il seguente  $\exists$ -**schema** (di assiomi):

$$(Q_1) \quad (T|x)A \Rightarrow \exists xA,$$

dove  $T$  è un termine e  $A$  una formula della teoria, e  $(T|x)$  è l'operatore di sostituzione di  $x$  con  $T$ .

All' $\exists$ -schema si può sostituire l'*equivalente*  $\forall$ -**schema**:

$$(Q_2) \quad \forall xA \Rightarrow (T|x)A,$$

con lo stesso significato di  $(T|x)$ . La dimostrazione di questa equivalenza è immediata ricordando che  $\forall xA$  è definito come  $\neg(\exists x\neg A)$ . Si noti che la  $(Q_1)$  (o la  $(Q_2)$ ) ha senso, in pratica, soltanto se  $x$  *figura* in  $A$ . In caso contrario, infatti,  $(T|x)A$  sarebbe identica a  $A$ , e similmente lo sarebbe  $\exists xA$ . Quindi la  $(Q_1)$  si ridurrebbe a  $A \Rightarrow A$ , che è il tertium non datur già conseguente da  $(L_3)$ . Una teoria quantificata priva di assiomi individuali e i cui unici schemi sono  $(L_1 \div L_4, Q_1)$  (o equivalentemente  $(L_1 \div L_4, Q_2)$ ) si dice un **calcolo dei predicati del 1° ordine** o LPC. Un LPC in cui i predicati sono al più unari (LPC “monadico”) si dice un **calcolo sillogistico**.<sup>37</sup>

Conseguenze deduttive di  $(L_1 \div L_4, Q_1)$  sono le seguenti. Per arbitrarie formule  $A, B$ :

$$(11) \quad \vdash \exists x\{A \vee B\} \Leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB),$$

$$(12) \quad \vdash \forall x\{A \wedge B\} \Leftrightarrow (\forall xA \wedge \forall xB),$$

$$(13) \quad \vdash \exists x\{A \wedge B\} \Rightarrow (\exists xA \wedge \exists xB),$$

$$(14) \quad \vdash (\forall xA \vee \forall xB) \Rightarrow \forall x\{A \vee B\},$$

$$(15) \quad \vdash (\exists xA \wedge \forall xB) \Rightarrow \exists x\{A \wedge B\}$$

$$(16) \quad \vdash \forall x\{A \vee B\} \Rightarrow [(\forall xA \vee \exists xB) \wedge (\forall xB \vee \exists xA)]$$

$$(17) \quad \vdash \exists x\{\exists yA\} \Leftrightarrow \exists y\{\exists xA\},$$

<sup>35</sup> Alla luce di questo fatto, alcuni autori definiscono “completezza” di  $H$  l'asserto “ $H$  è coerente e per nessun enunciato di  $H$  vale (d)”.

<sup>36</sup> Oltre che un apparato linguistico (o linguaggio) e un apparato deduttivo, come un SF, una “teoria” presuppone anche una “semantica” del SF associato.

<sup>37</sup> Lo studio della logica sillogistica è stato portato ad un alto grado di sviluppo da Aristotele. Una importante proprietà della sillogistica è quella di essere decidibile, *al contrario* (in generale) di un LPC non monadico.

$$(18) \quad \vdash \forall x \{ \forall y A \} \Leftrightarrow \forall y \{ \forall x A \};$$

$$(19) \quad \vdash \exists x \{ \forall y A \} \Rightarrow \forall y \{ \exists x A \};$$

$$(20) \quad \vdash [(\exists x A \wedge \forall x B) \vee (\exists x B \wedge \forall x A)] \Rightarrow \exists x \{ A \wedge B \}$$

Si noti che nelle tre (17, 18, 19) manca un antecedente con  $\forall x \exists y$ .

Infine, se  $x$  non figura in  $A$ ,

$$(21) \quad \vdash \exists x \{ A \wedge B \} \Leftrightarrow A \wedge \exists x B,$$

$$(22) \quad \vdash \forall x \{ A \vee B \} \Leftrightarrow A \vee \forall x B.$$

La lista degli assiomi insiemistici prosegue con l'introduzione della relazione binaria di **eguaglianza** (o **identità**) tra termini, che si scrive "tra".  $U, V \dots$  siano nomi per termini di  $\mathcal{T}$  (logica-quantificata). Il segno di eguaglianza  $=$  è introdotto insieme agli schemi **egualitari**:

$$(E_1) \quad (U = V) \Rightarrow ((U|x)A \Leftrightarrow (V|x)A)$$

per ogni formula  $A$  di  $\mathcal{T}$ ; e

$$(E_2) \quad \forall x(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\varepsilon x A = \varepsilon x B)$$

per ogni coppia  $A, B$  di formule di  $\mathcal{T}$ . Riferendoci allo schema  $(E_2)$ , ricordiamo che il simbolo di Hilbert  $\varepsilon$  è quello per cui  $\exists x A \equiv: (\varepsilon x A|x)A$ ; quindi se  $x$  non figura in  $A$ , non bisogna fare alcuna sostituzione per ottenere  $\exists x A$ , che è identico a  $A$ , come già detto in (A.1, §7).

Da  $(E_1, E_2)$  segue subito

$$(23) \quad \vdash \forall x(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\exists x A \Leftrightarrow \exists x B),$$

quindi anche la stessa con  $\forall$  al posto di  $\exists$  nel conseguente.<sup>38</sup>

Conseguenze dell'aggiunta di  $(E_1, E_2)$  alla lista che li precede, cioè teoremi di una teoria con gli schemi  $(L_1 \div L_4, Q_1, E_1, E_2)$ , o **teoria logica-quantificata con eguaglianza** (o **identità**), sono, come è facile provare:

$$(24) \quad \vdash \forall x(x=x);$$

$$(25) \quad \vdash \forall(x,y)\{(x=y) \Leftrightarrow (y=x)\};$$

$$(26) \quad \vdash \forall(x,y,z)\{((x=y) \wedge (y=z)) \Rightarrow (x=z)\};$$

vale a dire, « $=$  è riflessiva, simmetrica e transitiva», come anticipato in (A.1, §14).

Aggiungendo agli schemi  $(L_1 \div L_4, Q_1, E_1, E_2)$  i prossimi assiomi e schemi (di assiomi) *entriamo finalmente nella teoria degli insiemi propriamente detta*, perché vi compare il segno binario predicativo di appartenenza  $\in$ , e con esso, quello di inclusione  $\subset$ . Il primo nuovo assioma è

$$(EST) \quad \forall(X,Y)\{((X \subset Y) \wedge (Y \subset X)) \Rightarrow (X=Y)\};$$

<sup>38</sup> Infatti per la legge forte di contrapposizione, se due enunciati sono equivalenti lo sono anche le loro negazioni, e viceversa. Per la (23), si ha  $\forall x \{ A \Leftrightarrow B \} \Leftrightarrow \forall x \{ \neg A \Leftrightarrow \neg B \} \Rightarrow [\exists x \{ \neg A \} \Leftrightarrow \exists x \{ \neg B \}] \Leftrightarrow [\neg \exists x \{ \neg A \} \Leftrightarrow \neg \exists x \{ \neg B \}]$ . L'ultima equivalenza coincide con la  $\forall x A \Leftrightarrow \forall x B$ ; ovvero, nel conseguente della (23) si può porre  $\forall$  in luogo di  $\exists$ , come affermato.

(EST) è comunemente detto assioma **di estensionalità**, e stabilisce un ulteriore collegamento tra  $\subset$  e  $=$ . (Infatti risulta  $\vdash \forall (X, Y) \{ (X=Y) \Rightarrow ((X \subset Y) \wedge (Y \subset X)) \}$  per la definizione di  $\subset$ , che nelle  $\{ \}$  ha l'implicazione inversa di quella tra le  $\{ \}$  di EST).

Per una generica formula  $A$  in cui non figura la variabile  $X$ , conviene introdurre l'abbreviazione  $\text{coll}_x A$  per la formula  $\exists X \{ \forall x \{ A \Leftrightarrow (x \in X) \} \}$  (nella quale non figurano né  $x$  né  $X$ ). Se  $\vdash \text{coll}_x A$ ,  $A$  si dice **collettivizzante in  $x$** . L'aggiunta di (EST) alla lista che lo precede consente di provare che «la formula  $\forall x \{ A \Leftrightarrow (x \in X) \}$  è univoca in  $X$ ». Si conclude che «se  $A$  è collettivizzante in  $x$ , la  $\forall x \{ A \Leftrightarrow (x \in X) \}$  è funzionale in  $X$ ». Come abbiamo anticipato in (A.1, §19),  $X$  si dice allora l'estensione di  $A$ . Con (EST) tra gli assiomi disponibili, è anche possibile provare che  $\vdash \neg \text{coll}_x (x \neq x)$  (dimostrazione per assurdo), un fatto che scioglie il celebre paradosso di Russell.

Un primo assioma insiemistico contenente  $\text{coll}$  è

(CPP)  $\forall (x, y) \{ \text{coll}_z ((z=x) \vee (z=y)) \}$ .

Esso ci assicura l'esistenza dell'insieme costituito da due termini qualsiasi  $a, b$  (cfr. (Q<sub>2</sub>)), che si denota  $\{a, b\}$ . Per questa ragione, (CPP) è detto **assioma della coppia**.

Si prosegue con lo schema di **selezione ed unione** (SU), anch'esso contenente  $\text{coll}$ . Siano  $x$  e  $y$  variabili distinte,  $X$  e  $Y$  variabili distinte da  $x$  e rispettivamente da  $y$ , e  $A$  una generica formula in cui non figurano né  $X$  né  $Y$ . Lo schema in questione è:

(SU)  $\forall y \{ \exists X \{ \forall x \{ A \Rightarrow (x \in X) \} \} \} \Rightarrow \forall Y \{ \text{coll}_x (\exists y \{ (y \in Y) \wedge A \}) \}$ .

Tra gli assiomi e schemi insiemistici della assiomatizzazione bourbakiana della teoria degli insiemi, (SU) è certamente il meno facile da interpretare, e quindi da imparare a manipolare e sfruttare. Conviene analizzare il significato intuitivo di (SU) separando quello dell'enunciato antecedente  $\alpha$  da quello dell'enunciato conseguente  $\beta$ , e rappresentandosi la data formula  $A$  come  $A(x, y)$ . Letto assertivamente,  $\alpha$  afferma che, fissato ad arbitrio l'oggetto  $y$ , esiste un insieme  $X$  in generale contenente  $y$  – che scriveremo  $X(y)$  – per il quale la formula in  $x$  “ $A(x, y) \Rightarrow (x \in X(y))$ ” è vera per ogni  $x$ . A sua volta letto assertivamente,  $\beta$  afferma che, fissato ad arbitrio un insieme  $Y$ , esiste un *suo* elemento in generale contenente  $x$  e  $Y$  – che scriveremo  $z(x, Y)$  – per il quale la formula  $(z(x, Y) | y) A(x, y)$  è collettivizzante in  $x$ ; ossia, che per qualunque  $Y$  esiste (unico) l'insieme degli  $x$  che sono nella relazione  $A(x, y)$  con qualche  $y$  di  $Y$ . Chiariti questi significati intuitivi, (SU) dice ovviamente che  $\alpha$  implica  $\beta$ .

Una delle conseguenze più significative dell'aggiunta di (SU) alla famiglia degli assiomi che lo precede è che «se  $A$  è una formula qualsiasi e  $X$  un insieme qualsiasi in cui non figura  $x$ , la formula “ $A \wedge (x \in X)$ ” è collettivizzante in  $x$ »; ovvero, «se  $x$  non figura nell'insieme  $X$ , esiste (unico) l'insieme  $\{x | A \wedge (x \in X)\}$ » (incluso in  $X$ ). Questo fatto è talvolta nominato come **principio di**

**separazione**, ed è introdotto come assioma in altre assiomatizzazioni della teoria. Un'altra conseguenza è la seguente. «Sia  $X$  un insieme in cui non figurano né  $x$  né  $y$  (variabili distinte), e  $U$  un termine in cui non figura  $y$  (che conviene rappresentarsi come  $U(x)$ ); allora la formula in  $y$  “ $\exists x\{(y=U)\wedge(x\in X)\}$ ” è collettivizzante in  $y$ ». Intuitivamente, ciò afferma che esiste un  $x$  di  $X$  per cui  $y$  è del “tipo  $U \equiv U(x)$ ”. L'insieme  $\{y|\exists x\{(y=U)\wedge(x\in X)\}$  è perciò ben definito, e si dice **l'insieme degli  $y$  del tipo  $U(x)$  per qualche  $x\in X$** .

Con la disponibilità dello schema (SU), si può ancora dimostrare l'esistenza dell'insieme vuoto  $\emptyset$ , dell'insieme complementare a un dato insieme, e degli insiemi-prodotto (cartesiano)  $X\times Y$  e  $Y\times X$  di due dati insiemi  $X$  e  $Y$ . Si noti che «se  $X$  è l'insieme vuoto (o come anche si dice, se “ $X$  è vuoto”), l'insieme  $\{y|\exists x\{(y=U)\wedge(x\in X)\}$  è vuoto», e che «se  $x$  non figura in  $U$ , e  $X$  non è vuoto,  $\exists x\{(y=U)\wedge(x\in X)\}$  equivale a  $y = U$ , e dunque lo stesso insieme si riduce a  $\{U\}$ .

Un insieme di grande interesse matematico è il seguente. Sia  $z$  una variabile,  $D$  un insieme *non vuoto* in cui non figura  $z$ ,  $U$  un termine che converrà scrivere come  $U(z)$ , e  $c$  una costante. L'insieme in oggetto è allora definito come  $Z \equiv \{z|(z\in D)\wedge(U(z)=c)\}$ , e si può denominare come “insieme delle **soluzioni in  $D$  della equazione  $U(z) = c$** ”.<sup>39</sup>  $z$  è detta **incognita** della equazione stessa. Vi sono due casi estremi opposti: 1)  $Z = \emptyset$ : allora l'equazione in oggetto è detta **malsana**. (Talvolta non è facile riconoscere un'equazione malsana.<sup>40</sup>); 2)  $Z = D$ : allora l'equazione è detta **vuota**, e non ci dice nulla che già non sapessimo, cioè che  $z \in D$ . «Se  $z$  non figura in  $U$ , l'equazione è malsana aut vuota». Tra i due casi estremi 1) e 2), il caso intermedio “normale” è che vi sia un insieme non vuoto  $Z$  di soluzioni dell'equazione, strettamente incluso in  $D$ . Ma il caso del massimo interesse matematico è quello in cui  $Z$  è un singolo  $Z = \{\underline{z}\}$  (ovviamente con  $\underline{z} \in D$ ). Allora l'equazione ha una e una sola soluzione  $\underline{z}$  ( $\in D$ ), e  $\vdash U(\underline{z}) = c$ . Una generalizzazione banale della situazione è quella in cui  $z$  è una  $n$ -pla ordinata di variabili, e quindi  $D$  è un prodotto cartesiano di  $n$  insiemi non vuoti, mentre  $U$  è una  $m$ -pla ordinata di termini e  $c$  una  $m$ -pla ordinata di costanti. Si ha allora un sistema di  $m$  equazioni in  $n$  incognite, possibilmente risolvibile in uno e un solo modo.

Con gli assiomi e gli schemi fin qui menzionati ( $L_1\div L_4$ ,  $Q_1$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , EST, CPP, SU), è possibile formalizzare una discreta parte della matematica intuitiva classica. Ad esempio, si può provare che la formula  $\gamma(x) \equiv \exists t\{(t\in I)\wedge(x\in X_t)\}$ , dove  $\{X_t\}_{t\in I}$  è una famiglia di insiemi e  $I$  è un

<sup>39</sup> Nulla vieta di sostituire la costante  $c$  con un altro termine  $V(z)$ . Questo fa comodo se non ci sono costanti. Se poi  $\forall z\{U(z)=V(z)\}$ , allora  $Z = D$ .

<sup>40</sup> Parecchie equazioni (o sistemi di equazioni, vedi appresso) malsane/i, anche se tali non sembrano ad un esame superficiale, dovrebbero essere familiari al fisico matematico: ad esempio, sotto la maggior parte delle ragionevoli condizioni accessorie, il sistema idrodinamico ideale di Eulero è malsano, cioè non ha soluzioni congruentemente regolari. In questi casi un rimedio naturale, ma niente affatto banale, è quello di modificare *minimalmente* l'equazione, indebolendone le richieste ed estendendo in conformità il dominio delle soluzioni. Questo è ad esempio avvenuto con l'avvento dell'analisi “debole” di equazioni/sistemi differenzial-parziali, anche non-lineari (all'incirca a partire dal quarto decennio del secolo scorso).



insieme di indici, è  $\text{coll}_x$ ; e similmente, che se  $I \neq \emptyset$  anche la formula  $\delta(x) \equiv \forall t\{(t \in I) \Rightarrow (x \in X_t)\}$  è  $\text{coll}_x$ . Diventa così legittimo introdurre le relative estensioni: l'insieme  $\{x|\gamma(x)\}$  come unione  $\cup_{t \in I} X_t$  della famiglia  $\{X_t\}_{t \in I}$ , e l'insieme  $\{x|\delta(x)\}$  come intersezione  $\cap_{t \in I \neq \emptyset} X_t$  della famiglia  $\{X_t\}_{t \in I \neq \emptyset}$ .

Mancano ancora due assiomi per completare il quadro bourbakiano degli assiomi insiemistici: quello **delle parti** (P), e quello **dell'infinito** ( $\infty$ ). L'assioma delle parti (detto anche assioma **della potenza**) contiene anch'esso  $\text{coll}$ , ed è (per X e Y variabili distinte):

$$(P) \quad \forall X\{\text{coll}_Y(Y \subset X)\};$$

quindi esso ci assicura l'esistenza dell'insieme di tutti i sottoinsiemi ( $\subset$ ) di un qualsiasi insieme dato X. Unito agli ( $L_1 \div L_4$ ,  $Q_1$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , EST, CPP, SU), (P) consente di *dedurre* il classico **principio di induzione completa**, nonché quello che deve essere qui detto **teorema di Zermelo**: «ogni insieme può essere ben ordinato». <sup>41</sup>

Per presentare l'assioma dell'infinito occorre anzitutto una semplice definizione, quella appunto di **insieme infinito**. Diremo che un insieme X è infinito se esiste un suo sottoinsieme *proprio* Y ed una biiezione di Y su X: cioè se gli elementi di Y possono essere messi in corrispondenza biunivoca con quelli di X (il concetto di biiezione è già attingibile con gli assiomi presentati *prima* di (P)). Per definizione, un insieme è **finito** se non è infinito. L'assioma ( $\infty$ ) afferma allora semplicemente che

$$(\infty) \quad \text{“esiste un insieme infinito”}.$$

Si è congetturato che ( $\infty$ ) potesse essere dedotto dall'insieme dei precedenti assiomi e schemi di assiomi  $\{L_1 \div L_4, Q_1, E_1, E_2, EST, CPP, SU, P\}$ ; ma a tutt'oggi i tentativi di provare questa possibilità non hanno avuto successo. Si presume per lo più, quindi, che ( $\infty$ ) sia effettivamente

---

<sup>41</sup> Ricordiamo che un insieme si dice **ben ordinato** se è ordinato (cioè se su di esso esiste una formula d'ordine, vedi App. Sp. 1.A) ed ogni sua parte ha un elemento minimo. In altre presentazioni della teoria degli insiemi, il metaenunciato qui riportato come “teorema di Zermelo” non è deducibile, e deve essere introdotto come assioma, in generale nella forma equivalente di “assioma della scelta” (AS). L'assioma della scelta recita: “data una famiglia F di insiemi non vuoti e disgiunti due a due, esiste un insieme Y che ha esattamente un elemento in comune con ciascun insieme di F”. In assiomatizzazioni della teoria degli insiemi come ZF, in cui SU è sostituito con assiomi meno potenti e in cui l'asserto di Zermelo sul buon ordinamento non è manifestamente deducibile, nasce il problema della sua indipendenza dagli altri assiomi. Questo problema di indipendenza (dell'assioma di scelta in ZF) ha a sua volta dato luogo ad intense ricerche, culminate con i risultati di Gödel (nel 1940) e di P. Cohen (nel 1963), secondo i quali (i): “se si aggiunge AS alla teoria degli insiemi supposta coerente, essa rimane coerente” (Gödel), e rispettivamente (ii): “AS è indipendente dagli altri assiomi della teoria degli insiemi secondo ZF, supposta coerente” (Cohen). Questa conclusione implica che, accettato ZF come coerente, da esso si possano sviluppare due diverse matematiche: una aggiungendovi AS, e l'altra aggiungendovi la sua negazione. La tendenza dominante nel mondo matematico contemporaneo è per la prima alternativa. I risultati di Gödel si trovano in K. Gödel, “The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory”, Princeton Un. Press (1940); quelli di Cohen, in P. Cohen, “Independence of the Axiom of Choice”, Stanford Univ. Press (1963) e in P. Cohen: “The independence of the Continuum Hypotesis” Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A **50** (1963) e **51** (1964), Questi sono anche riuniti, con altro materiale, nella monografia: P. Cohen, “Set Theory and the Continuum Hypotesis”, Benjamin (1966), della quale esiste una traduzione italiana in Feltrinelli (1966).

indipendente dai precedenti assiomi. Scriveremo I per il SF con gli assiomi  $\{L_1 \div L_4, Q_1, E_1, E_2, EST, CPP, SU, P, \infty \mid MP\}$ , dove  $\mid$  separa gli assiomi dalla regola MP.

#### A.4) ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA FONDAZIONE E LA FORMALIZZAZIONE DELLE TEORIE MATEMATICHE <sup>42</sup>

Per Hilbert, che espresse pubblicamente questa sua convinzione nella conferenze tenute ai Congressi di matematica di Parigi del 1900 e di Bologna del 1904, “fondare” una teoria matematica significa innanzitutto formalizzarla in senso stretto, e poi possibilmente dimostrare – facendo uso di procedure di legittimità indubitabile (i nominati metodi finitari) – la sua coerenza. <sup>43</sup> Per la verità, anche se con meno forza, Hilbert si era spinto oltre la coerenza, aspirando ad una simile dimostrazione di completezza e di indipendenza degli assiomi (per queste nozioni, si veda nella S.sez. 0.1.3). <sup>44</sup> Naturalmente gli assiomi dovevano essere scelti mirando non soltanto ai sopraddetti obiettivi, ma anche ad una loro plausibilità intuitiva, nonché alla economia generale della formalizzazione; e questo, specialmente ai fini di un confronto tra diversi tipi di fondazione, e di una migliore comprensione della loro struttura.

Di fatto, l’esperienza ha dimostrato che rinunciando alla formalizzazione la discussione rischia di degenerare in quello che è stato benevolmente detto «un dibattito oscuro», mentre l’adottarla sistematicamente costringe ad essere del tutto espliciti sui principi che si stanno seguendo. Ci si può tuttavia chiedere se una fondazione della matematica *diversa dalla matematica stessa* sia effettivamente necessaria; ma vi sono forti argomentazioni che si contrappongono a questo dubbio. Obiettivo di fondo della matematica, intesa in senso lato, è comunque quello di ridurre il molteplice al semplice; e se si può accertare che l’insieme delle nozioni usate può essere ridotto ad un insieme più ristretto di nozioni, allora è naturale ricercare e fissare una descrizione precisa di tale più ristretto insieme.

L’assenza di contraddizioni è stata sempre considerata il requisito irrinunciabile di qualsiasi teoria matematica; e come abbiamo visto, da molto tempo si era compreso che da una teoria contraddittoria si può dedurre qualunque tesi. In particolare è l’esistenza di entità matematiche “poco intuitive” che rischia di generare contraddizioni. Con l’affermazione del punto di vista assiomatico-deduttivo sul finire dell’Ottocento, questo dubbio sembrò trovare risposta nella costruzione di

<sup>42</sup> In questa sezione A.4, “matematica” sta per “matematica intuitiva”, cioè ricondotta alla teoria intuitiva degli insiemi.

<sup>43</sup> Ma già nel 1905, Hadamard (J. Hadamard, Bull. Soc. Math. de France, t. XXXIII, p. 261 (1905)) osservava che «l’assenza di contraddizioni, quand’anche non si dimostri, si constata» (beninteso, giorno dopo giorno).

<sup>44</sup> Le proprietà della possibile coerenza e completezza di un generico SF hanno come loro naturali precursori storici il “principio di non-contraddizione” e rispettivamente il “principio del terzo escluso” della gnoseologia aristotelica.

modelli aritmetici, cioè, legati alla teoria standard dei numeri naturali del SF oggetto. Ma non poteva la stessa aritmetica – si dubitò – essere contraddittoria? Questo problema era il secondo tra quelli della lista hilbertiana del Congresso di Parigi del 1900. Un nuovo principio si faceva così luce: mentre nella logica tradizionale la non-contraddittorietà di un concetto rende *possibile* la sua accettazione, per Hilbert essa equivale alla sua stessa *esistenza*. In pratica, questo implica la necessità di dimostrare la coerenza di una teoria matematica prima di svilupparne i presupposti ed applicarla.

Come ognuno sa, o può subito capire, se si vuole descrivere un linguaggio-oggetto  $\mathcal{L}$  ci si deve servire di un linguaggio di servizio, o metalinguaggio,  $\mathcal{L}'$ . In particolare,  $\mathcal{L}'$  può essere lo stesso  $\mathcal{L}$ . L'esempio dell'uso della lingua italiana per descrivere la lingua inglese, e rispettivamente per descrivere la stessa lingua italiana, è un comune espediente didattico per illustrare la situazione. Nel secondo caso, possono nascere apparenti paradossi “diagonali” che in generale si evitano distinguendo con cura tra  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{L}'$  (nonostante sia  $\mathcal{L}' \equiv \mathcal{L}$ ). Si può anche voler similmente descrivere il metalinguaggio  $\mathcal{L}'$ , e allora occorrerà un metametalinguaggio  $\mathcal{L}''$ , ... e così via. L'accettazione di una gerarchia di metalinguaggi, a partire dal linguaggio-oggetto formalizzato  $\mathcal{L}$  e passando poi a metalinguaggi  $\mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L}''$ , ... a loro volta possibilmente formalizzati, è praticamente inevitabile nella logica matematica moderna. È chiaro allora che una conveniente formalizzazione dei vari livelli linguistici aiuta ad evitare confusioni, mantenendoli ben distinti.

La teoria nella quale si fanno affermazioni intorno ad una teoria oggetto formalizzata si dice “metateoria” della prima. Generalmente, si distinguono una metateoria **sintattica** della teoria oggetto, nella quale si studiano soltanto le proprietà strutturali delle successioni finite dei suoi segni, e una sua metateoria **semantica**, in cui si considerano anche i significati assegnabili a quelle successioni. Qui si presenta la naturale questione se il regresso delle teorie verso le corrispondenti metateorie sia “essenziale” o no; cioè se esistano o no teorie “chiuse” rispetto alla corrispondente metateoria. Tarski <sup>45</sup> ha dimostrato che non possono esistere teorie (formalizzate) coerenti e semanticamente chiuse, mentre ne possono esistere di sintatticamente chiuse. Questo si collega ed è in accordo con i teoremi di incompletezza di Gödel (vedi S.sez 0.1.3); ma per vederlo con sufficiente chiarezza, occorrerebbe esaminare in dettaglio quei teoremi e la loro stessa dimostrazione. Su questo aspetto dell'opera di Gödel esiste una vasta letteratura che va dal carattere quasi-divulgativo a quello ipertecnico, alla quale rinviamo. In questa sede ci limitiamo a quanto segue.

Innanzitutto ri-enunciamo con qualche insostanziale variante i teoremi di incompletezza:

---

<sup>45</sup> A. Tarski: “The semantic Conception of Truth and the Foundation of Semantics”, *Philos. and Phenom. Research*, IV (1944).

T1. «In ogni SF  $S$  coerente, contenente una parte minimale dell'aritmetica ( $+$ ,  $\cdot$ ,  $\exists$ , ecc., e le regole per usarli), può essere costruito un enunciato  $A$  indecidibile ( $\equiv$  tale che né  $A$  né  $\neg A$  siano deducibili in  $S$ )»;

T2. «Se certe condizioni naturali di completezza sono soddisfatte, si può prendere come  $A$  (indecidibile) l'enunciato che esprime la coerenza di  $S$ ».

Commenti. Gödel rappresenta l'enunciato indecidibile  $A$  nell'insieme dei naturali  $N$  mediante un processo oggi detto "aritmetizzazione di Gödel", e che consiste nel codificare *invertibilmente* in  $N$  gli oggetti formali di  $S$  (segni, formule, enunciati, successioni finite di enunciati, ecc.) in modo tale che le proprietà di questi oggetti (ad esempio, l'essere un assioma di un enunciato, l'essere una dimostrazione di una successione finita di enunciati, ecc.) possano esprimersi come relazioni tra i numeri che li codificano ( $\equiv$  "gödeliani" di quegli oggetti). È così possibile scrivere una relazione aritmetica  $B(a,b)$  (dove  $a, b$ , sono gödeliani di formule) del tipo  $f(a,b) = 0$  ( $f$  essendo una funzione ricorsiva primitiva a due posti), che esprime la seguente condizione:  $b$  è il gödeliano della formula che si ottiene dalla formula di gödeliano  $a$  sostituendovi il naturale  $a$  alla variabile  $x$ . Se allora  $p$  è il gödeliano della formula  $\forall b\{\neg B(x,b)\}$ , la formula  $\forall b\{\neg B(p,b)\}$  esprime la sua propria non-dimostrabilità, ed è pertanto indecidibile. Ne segue che ogni SF coerente con le previste proprietà nei confronti dell'aritmetica contiene un enunciato di questo tipo vero, ma indimostrabile. (teorema (T1)). Infine il teorema (T2), ma ci limitiamo a suggerirlo, si dimostra formalizzando la dimostrazione del teorema (1).

Con queste considerazioni, probabilmente ci siamo già spinti *troppo* al di là delle vere tematiche di questo libro. Riteniamo dunque opportuno terminare qui questa Sez. A.4.

#### A.5) SEMANTICA DEI SISTEMI FORMALI E TEORIA DEI MODELLI (CENNI)

La formalizzazione della teoria degli insiemi di cui in A.1 ÷ A.3 è ispirata al criterio della massima economia. Almeno per quanto riguarda il linguaggio del SF che ne è derivato, può convenire illustrarne una versione alquanto meno parsimoniosa, legata alla rinuncia al simbolo di Hilbert. Con ciò, non può più dirsi che un termine che non sia una costante aut una variabile debba cominciare per  $\varepsilon$ : occorre rivedere la definizione ricorsiva di termine. È allora necessario introdurre, accanto ai segni relazionali ( $n \geq 0$ )-ari  $R_i^n$  (dove  $i$  appartiene ad un insieme di indici in generale dipendente da  $n$ ), segni funzionali (o "funtori") ( $m \geq 0$ )-ari  $F_j^m$  (dove similmente  $j$  appartiene ad un insieme di indici in generale dipendente da  $m$ ), con ciò intendendosi che sostituendo dei termini negli  $m$  posti di  $F_j^m$  si ottiene un termine. Allora  $F_j^0$  è una costante, e non bisogna più introdurre le

costanti come termini primitivi.<sup>46</sup> Senza simbolo di Hilbert, ma con i funtori, la definizione ricorsiva di termine diventa:

T<sub>1</sub>) le variabili e le costanti sono termini;

T<sub>2</sub>) se  $\langle t_1, \dots, t_m \rangle$  è un' $m$ -pla ordinata di termini, e  $F_j^m$  è un funtore  $m$ -ario,  $F_j^m(t_1, \dots, t_n)$  è un termine (una costante se  $m = 0$ );

T<sub>3</sub>) niente altro è un termine.

La definizione ricorsiva di formula resta invariata (vedi all'inizio di A.1, ricordando comunque che  $R_i^0$  può pensarsi come un enunciato di CP), salvo il fatto che uno dei due quantificatori (per esempio l'esistenziale) deve ora essere introdotto come primitivo, aggiungendo alla lista delle definizioni "l'esistenziale di una formula è una formula". Precisamente, abbiamo cioè:

F<sub>1</sub>) se  $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$  è un' $n$ -pla ordinata di termini, e  $R_i^n$  è un segno relazionale  $n$ -ario,  $R_i^n(t_1, \dots, t_n)$  è una formula (un predicato senza soggetto del tipo "piove" se  $n = 0$ );

F<sub>2</sub>) la negazione di una formula e la disgiunzione di due formule sono formule (assieme a combinazioni finite di negazioni e/o disgiunzioni di formule);

F<sub>3</sub>) se  $x$  è una variabile, e  $\varphi$  è una formula,  $\exists x\varphi$  è una formula;

F<sub>4</sub>) niente altro è una formula.

Ovviamente è sempre possibile continuare a definire la congiunzione in termini di negazione e disgiunzione, e parallelamente, il quantificatore universale in termini di negazione e quantificatore esistenziale<sup>47</sup>.

Lo schema egualitario (E<sub>2</sub>) di A.3 va poi modificato richiedendo che l'equivalenza  $\forall x$  di due formule implica quella dei loro esistenziali (e quindi dei loro universali). Infine (E<sub>1</sub>) va allargato ai funtori: non solo la sostituzione di termini-argomenti in una formula ( $n \geq 1$ ) con corrispondenti termini uguali produce una formula equivalente, ma similmente la sostituzione di termini-argomenti in un termine con corrispondenti termini uguali produce un termine uguale. Con queste modifiche, tutte piuttosto banali, ci si allinea allo standard più diffuso nella letteratura logica (o almeno, nella letteratura logica più familiare a chi scrive)..

Cercheremo adesso di introdurre il lettore alla semantica intuitiva ( $\equiv$  che usa il linguaggio insiemistico intuitivo come metalinguaggio) dei SF, un'impresa didattica *più ardua* di quella di descrivere la sintassi degli stessi SF. I logici che a partire da Frege avevano elaborato la formalizzazione delle teorie matematiche si erano evidentemente lasciati guidare dai significati insiemistico-intuitivi di quelle teorie; ma è chiaro che quanto da essi così creato è soltanto *un gioco*

<sup>46</sup> D'altra parte, se il nostro SF è del 1° ordine D con uguaglianza e simbolo di Hilbert (come ad es. in Bourbaki), il generico funtore  $m$ -ario può essere ignorato, perché gli si può far corrispondere un segno relazionale  $(m+1)$ -ario.

<sup>47</sup> Molti optano per il viceversa, scambiando in quanto precede congiunzione con disgiunzione e universale con esistenziale.

*infinitario con segni*, governato da certe regole. Una prima domanda è dunque: quanto è affidabile questo gioco come specchio della corrispondente teoria matematica? Inoltre, vi sono problemi sintattici ben posti sollevati dal gioco stesso (ad esempio, la questione “è il SF in oggetto coerente?”) ai quali si vorrebbe dare risposta. È stato così naturale *tornare* ai possibili significati dei segni e delle loro stringhe, e in particolare delle stringhe-enunciati. L’obiettivo primo era cioè quello di dare a tali enunciati, mediante una loro conveniente *interpretazione*, significati che li rendessero “veri” aut “falsi” senza possibilità di equivoco; vale a dire di stabilire un “criterio di verità aut falsità”, sotto la data interpretazione, di ogni dato enunciato. Tenuto conto che le teorie matematiche parlano di insiemi, sotto la prevista interpretazione gli enunciati del nostro SF parleranno di insiemi.

Questo tentativo di “legittimare il formalismo”<sup>48</sup> non è né semplice né immediato, e noi ne daremo soltanto una sintesi a grandi linee. Sia  $S \equiv \langle L, D \rangle$  il SF formale in oggetto,  $L$  il suo linguaggio (detto talvolta sua “segnatura”, cioè descrizione dei “segni”) e  $D$  il suo apparato deduttivo (gli assiomi e le regole di inferenza). Per **realizzazione** (o pseudomodello) di  $L$  intendiamo una coppia  $m \equiv \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$ , dove  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{I}$  sono un insieme di termini di  $L$  non vuoto (tipicamente transfinito) detto **dominio** di  $m$ , e rispettivamente una applicazione detta **interpretazione** di  $L$ , collegati a  $L$  e tra loro come segue.  $\mathcal{I}$  mappa il generico segno relazionale ( $n \geq 0$ )-ario di  $L$  in una relazione a  $n$  posti su  $\mathcal{U}$  (e quindi, se  $\rho^{(n)}$  è l’insieme dei segni relazionali  $n$ -ari di  $L$ ,  $\mathcal{I}: \rho^{(n)} \rightarrow \mathcal{U}^n$ ); e similmente,  $\mathcal{I}$  mappa il generico segno funzionale ( $m \geq 0$ )-ario di  $L$  in una funzione a  $m$  argomenti su  $\mathcal{U}$  con valore in  $\mathcal{U}$  – in particolare ogni costante di  $L$  in un elemento di  $\mathcal{U}$  – (e quindi, se  $\eta^{(m)}$  è l’insieme dei funtori  $m$ -ari di  $L$ ,  $\mathcal{I}: \eta^{(m)} \rightarrow \mathcal{U}^m \times \mathcal{U}$ ). Si noti come si parli ormai il (meta)linguaggio insiemistico intuitivo.

Poiché  $\mathcal{I}$  mappa il generico termine (in particolare una costante o una variabile) in un elemento di  $\mathcal{U}$ , (si può riconoscere che) essa mappa la generica formula  $\varphi$  a  $n$  argomenti-termini di  $L$  in una relazione a  $n$  posti su  $\mathcal{U}$ . In forza della effettiva definizione di  $m$ , questa relazione può risultare 1) “vera”; 2) “falsa”; 3) né “vera” né “falsa” (le “ ” ricordano di non dare a questi attributi i loro significati abituali). La formula  $\varphi$  si dirà allora, corrispondentemente, “ $m$ -vera”, “ $m$ -falsa”, “né  $m$ -vera né  $m$ -falsa”. Sfortunatamente la definizione di  $m$  (A. Tarski, 1936) è un po’ troppo lunga e delicata per essere riportata qui (rinviamo il lettore ad un manuale di logica che la illustri in dettaglio, ad es. quello di Mendelson, Chpt. 2). Comunque, essa permette di stabilire che i casi 1) e 2) non possono mai presentarsi simultaneamente, e che il caso 3) è da escludere se la formula originale  $\varphi$  non conteneva variabili libere, cioè se quella formula era un enunciato. Ne viene che  $\varphi$  è

<sup>48</sup> Riprendendo una celebre locuzione kantiana, qualcuno ha visto in esso una vera e propria “Critica della ragion formale”.

sicuramente *m*-vera aut *m*-falsa se è un enunciato. In conseguenza della definizione di “*m*-verità aut *m*-falsità” (o “verità aut falsità nella realizzazione *m*”) di un dato enunciato di L, devono poi essere verificate certe condizioni di “consistenza semantica” di cui diamo qui appresso qualche esempio.

Se A, B, sono nomi per enunciati:

(I): A è *m*-vero sse  $\neg A$  è *m*-falso;

(II): se A e  $A \Rightarrow B$  sono *m*-veri, B è *m*-vero;

(III):  $A \vee B$  [ $A \wedge B$ ] è *m*-vero sse (A è *m*-vero) vel (B è *m*-vero) [sse (A è *m*-vero) et (B è *m*-vero)];

quindi, in particolare,  $A \Rightarrow B$  è *m*-falso sse (A è *m*-vero) et (B è *m*-falso).

Di fatto, (si dimostra che) la portata di (I,II,III) si estende alle formule; cioè le (I,II,III) si possono riscrivere sostituendo ai nomi per enunciati A, B, .. nomi per formule  $\varphi, \psi, \dots$

Supponiamo ora che L abbia una realizzazione *m* come descritta, e inoltre che tutti gli enunciati-assiomi del SF S di cui L è linguaggio siano veri in *m*; allora *m* si dice un **modello** di S, e sarà qui scritto  $\mathcal{M}$ . Supponendo che S abbia dei modelli, di un enunciato A di L che *sia vero in ogni modello di S* si dice che è **valido** (in S), e si scrive  $\models A$  ( $\mathcal{M} \models A$  significa invece che A è vero nel modello  $\mathcal{M}$ ). A essendo un generico enunciato di S, e sempre supponendo che S abbia dei modelli, si pongono allora due questioni complementari, e cioè: (a) “se A è un teorema, è A valido?”; (b) “se A è valido, è A un teorema?” Di un SF per cui la risposta a (a) sia positiva *per ogni* A, si dice che è **corretto** (o “semanticamente coerente”); allora quel SF non ci porta mai fuori strada, comunque lo interpretiamo entro i vincoli stabiliti. Di un SF per cui la risposta a (b) sia positiva *per ogni* A, si dice che è **adeguato** (o “semanticamente completo”); se il SF non è adeguato, esso può essere insufficiente a indicarci tutti gli enunciati validi.

Alla questione (a) è facile rispondere positivamente se S, come supporremo in ogni caso, ha MP, e solo MP, come regola di inferenza: infatti la *m*-verità di un enunciato è *ereditata* attraverso MP qualunque sia *m* (cfr. la precedente condizione (II)), e quindi, se tutti gli assiomi di S sono *m*-veri, ogni suo teorema è *m*-vero. Segue che se S ha modelli, ogni suo teorema è valido. Segue anche che non ha senso considerare un SF contraddittorio; infatti “A e  $\neg A$  sono teoremi” implica “A e  $\neg A$  sono validi”, e questa conclusione è inaccettabile perché in conflitto con la condizione (I). L’unica possibilità è dunque che un S contraddittorio *non abbia modelli*; ovvero, per contrapposizione, che *se S ha un modello, allora è coerente*. Naturalmente un SF coerente è corretto. La proprietà appena illustrata dà un’idea della capacità di previsione del matematico che opera all’interno del SF S, nei confronti della teoria significativa: se gli riesce di accertare che l’enunciato A è un teorema di S, allora sa anche che A è valido in quella teoria, cioè che esso è vero in qualunque modello di S.

Più arduo è rispondere alla questione (b); allora non c'è una risposta generale quale che sia, ma bisogna prendere in esame lo specifico SF in oggetto. È stato accertato (Post 1921) che la risposta è positiva per il calcolo proposizionale (che seguendo l'uso comune denoteremo anche con PC  $\equiv$  Predicate Calculus): quindi, in PC (che ha modelli, quindi è coerente) «gli enunciati validi sono tutti e soli gli enunciati provabili, o teoremi». Inoltre, poiché se  $A$  è un enunciato di PC, o  $A$  o  $\neg A$  è valido, PC è anche adeguato, e quindi (sintatticamente) completo. Infine, (si dimostra) si può definire un algoritmo che partendo da un enunciato qualsiasi di PC, in un numero finito di passi ci dica se esso aut la sua negazione è un teorema. Questo si esprime dicendo che PC è **decidibile**.

A PC può collegarsi un'algebra  $A$  su un insieme a due elementi  $\{V, F\}$ , con una operazione (o funzione) unaria  $\sim$  di  $\{V, F\}$  in  $\{V, F\}$  e un'operazione binaria  $\bullet$  di  $\{V, F\}^2$  in  $\{V, F\}$ , cioè  $A = \{\{V, F\}, \sim, \bullet\}$ . Queste operazioni sono descritte dalle tavole seguenti: “ $\sim V = F$ ;  $\sim F = V$ ”, e rispettivamente “ $\bullet(V, V) = V$ ;  $\bullet(V, F) = \bullet(F, V) = V$ ;  $\bullet(F, F) = F$ ”. Si verifica senza difficoltà, esaminando uno ad uno i  $2^3 = 8$  casi possibili, che  $\bullet$  è, oltre che simmetrica, anche associativa.<sup>49</sup> Se  $x_1, x_2, x_3$  sono nomi per elementi di  $\{V, F\}$ , la associatività di  $\bullet$  si esprime con la  $\bullet(\bullet(x_1, x_2), x_3) = \bullet(x_1, \bullet(x_2, x_3))$ ; è perciò non ambiguo scrivere  $\bullet(x_1, x_2, x_3)$  per uno a piacere dei due oggetti ai lati della precedente uguaglianza. Similmente, è non ambiguo il significato di  $\bullet(x_1, \dots, x_n)$  per ogni  $n > 3$ . Infine in forza della simmetria di  $\bullet$  è  $\bullet(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = \bullet(x_1, \dots, x_n)$  per ogni permutazione  $\pi$  di  $n$  elementi di  $\{V, F\}$ . Le regole di  $\bullet$  si riassumono così nella “ $\bullet(x_1, \dots, x_n) = V$  se (almeno) una delle  $x_1, \dots, x_n$  è  $V$ , e  $\bullet(x_1, \dots, x_n) = F$  in caso contrario”. Evidentemente,  $V$  si interpreta come “vero”,  $F$  come “falso”,  $\sim$  come “non”, e  $\bullet$  come “vel”.<sup>50</sup>

La situazione è molto più complicata per il calcolo dei predicati del 1° ordine LPC ( $\equiv$  Lower Predicate Calculus); ma anche in questo caso, è stato dimostrato che «in LPC gli enunciati validi sono tutti e soli i suoi teoremi» (Gödel 1930). Questo risultato può inoltre estendersi a LPC con eguaglianza,  $LPC_=$ . Se l'interpretazione  $\mathcal{I}$  mappa il segno relazionale binario “ $=$ ” nella relazione a due posti, tra individui di  $\mathcal{U}$ , “è uguale”,  $\mathcal{I}$  si dice **normale**. Un modello la cui interpretazione è normale si dice a sua volta **normale**: in altre parole, un modello normale è isomorfo rispetto all'eguaglianza. Nella dimostrazione di «in  $LPC_=$  gli enunciati validi sono tutti e soli i suoi teoremi»

<sup>49</sup> Una realizzazione dell'algebra  $A$  è quella che si ottiene identificando  $V$  con il numero 0,  $F$  con il numero 1,  $\sim$  con il complemento a 1,  $1 -$ , e  $\bullet$  con il consueto prodotto numerico  $\cdot$  scritto “tra” (che è simmetrico e associativo). Infatti  $\sim(0) \equiv 1 - 0 = 1$ ,  $\sim(1) \equiv 1 - 1 = 0$ ,  $\bullet(0, 0) \equiv 0 \cdot 0 = 0$ ,  $\bullet(0, 1) \equiv 0 \cdot 1 = 0$ ,  $\bullet(1, 0) \equiv 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ , e  $\bullet(1, 1) \equiv 1 \cdot 1 = 1$ .  $A$  è un'algebra di Boole a due elementi, in pratica la più semplice algebra a due operazioni.

<sup>50</sup> Ammettendo che nella precedente operazione  $\bullet_{t \in \{1, \dots, n\}} x_t$  si possa passare dall'insieme finito di indici  $\{1, \dots, n\}$  ad un insieme di indici  $I$  di cardinalità arbitraria, la regola per  $\bullet$  si generalizza nella “ $\bullet_{t \in I} x_t = V$  se per (almeno) un  $t \in I$  è  $x_t = V$ , e  $\bullet_{t \in I} x_t = F$  in caso contrario”. Si ottiene così l'algebra (generalmente) transfinita  $A_\infty = \{\{V, F\}, \sim, \bullet_{t \in I}\}$ . Si noti che in  $A_\infty$  il predicato “per almeno un  $t \in I$  è  $x_t = V$ ” è in generale non costruttivo, in quanto presuppone la ricognizione di un numero transfinito di istanze. Per un tale  $I$ ,  $\bullet_{t \in I} x_t$  si può (intuitivamente) interpretare come esistenziale, stabilendo con ciò un importante ponte da PC verso LPC.



si devono sostituire, rispetto allo stesso asserto riferito a LPC, i modelli con modelli normali. Infine (si dimostra che) già in LPC, almeno in generale, *non* esiste un algoritmo che partendo da un suo enunciato qualsiasi, in un numero finito di passi ci dica se esso aut la sua negazione è un teorema: vale a dire, LPC non è decidibile.

Andando verso SF (finitamente o ricorsivamente assiomatizzabili) più potenti – ma non molto potenti in assoluto, bastando che in essi sia rappresentabile la teoria dei naturali –, interviene il teorema di incompletezza. Pur non sapendo se il dato SF è coerente o no, se lo si suppone coerente, allora esso è per forza essenzialmente incompleto. Tuttavia, con una matematica formalizzata “interessante” semplicemente *supposta* coerente (e quindi anche essenzialmente incompleta) si può convivere, e senza troppe difficoltà.

Con questo, speriamo di aver dato almeno un’idea dell’importanza della teoria dei modelli nella logica matematica. Precisazioni, approfondimenti e commenti, dei quali ovviamente non vi è traccia in questa Sez. A.5, si potranno reperire nella letteratura specifica di cui alla nota <sup>51</sup>. Similmente, rinviamo alla trattatistica generale di cui alla nota (5) per quanto riguarda gli innumerevoli altri concetti e risultati che formano il grande corpus della moderna logica matematica, e che altrettanto ovviamente non hanno trovato posto nella sintesi di finalità “ausiliaria” offerta dalla presente App. Gen. A.

---

<sup>51</sup> In ordine cronologico: A. Robinson, “On the Metamathematics of Algebra”, North Holland (1951); A. Tarski, “Contributions to the theory of models I, II”, Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Sr. A **57** (= Indag. Math. **16**), 572-588 (1954) and “Contributions to the theory of models III”, Koninkl. Ned. Akad. Wetensch. Proc. Sr. A **58** (= Indag. Math. **17**), 56-64 (1955); A. Robinson, “Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra”, North Holland, 2<sup>nd</sup> ed. (1965); M.L. Dalla Chiara Scabia: “Modelli sintattici e semantici delle teorie elementari”, Feltrinelli (1968); C.C. Chang, H.J. Keisler, “Model Theory“, North Holland (1973); W. Hodges: “Model Theory”, Cambridge Un. Pr. (1993).

## APPENDICE GEN. B

### GLOSSARIO DI TOPOLOGIA

#### B.0) PREMESSA

Nonostante le molte anticipazioni intuitive della Topologia intesa come “geometria delle figure di gomma” immerse nello spazio euclideo 2-dim o 3-dim standard, si può ritenere che il vero iniziatore della materia nel senso moderno del termine sia stato ancora B. Riemann, con la sua tesi di laurea nel 1851.<sup>1</sup> In questo importante primo lavoro (che contiene il germe e i primi sviluppi della teoria delle funzioni analitiche), Riemann inaugura lo studio sistematico della topologia – o “Analysis Situs”, come si chiamava allora – come disciplina matematica *autonoma*. Poco dopo Riemann introdurrà la nozione di varietà astratta, oggetto principale della successiva (1854) e celebre Habilitationsvortrag di cui abbiamo detto nella S.sez. 9.1.1, v. nota (<sup>6</sup>). Sulla topologia Riemann tornerà più esplicitamente anche in una memoria del 1857 sulle funzioni abeliane,<sup>2</sup> nella quale leggiamo: «Nello studio delle funzioni che si ottengono mediante integrazione di differenziali esatti, qualche teorema di Analysis Situs è pressoché indispensabile. Sotto questo nome ... si può designare la parte di teoria delle grandezze continue che la considera ... astraendo da qualsiasi idea di misura, e studiando i loro rapporti di posizione e di inclusione.» Si dovrà attendere quasi mezzo secolo affinché dalle idee ancora embrionali di Riemann prenda lentamente corpo, attraverso i numerosi contributi di matematici russi, francesi, polacchi, tedeschi, .. ecc., e soprattutto grazie all’opera di Hausdorff,<sup>3</sup> quella teoria formalizzata che oggi conosciamo, e che si ottiene aggiungendo alla teoria intuitiva degli insiemi certi convenienti “assiomi topologici”.

Proprietà essenziale della topologia moderna è il largo uso dei suoi metodi in molti e vari settori della matematica: ad esempio, nella teoria delle equazioni differenziali (Poincaré), in quella delle varietà differenziabili (da Riemann stesso a de Rham), nella analisi funzionale (da Hilbert a Riesz, a Von Neumann), nella meccanica classica, nella teoria relativistica generale, nelle teorie economiche, .. ecc. Insomma, più o meno dal secondo decennio dello scorso secolo, la topologia è diventata uno dei più potenti strumenti della ricerca matematica, e i suoi metodi hanno acquistato importanza universale. Non a caso, e come abbiamo già accennato (v. alla fine della S.sez. 1.4.3),

---

<sup>1</sup> B. Riemann: “Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Größe”, in “Gesammelte mathematische Werke”, Teubner, 3.43 (1892).

<sup>2</sup> B. Riemann: “Theorie der Abelschen Funktionen”, Journ. für Mathem. (1857).

<sup>3</sup> F. Hausdorff: “Grundzüge der Mengenlehre”, Veit (1914)

Bourbaki ( $\approx 1940$ ) vede nelle strutture topologiche una vera e propria “categoria” delle strutture matematiche (le altre essendo, come si ricorderà, quelle algebriche e quelle d’ordine).

Tutto quanto sopra premesso, sarebbe fuori luogo, nonché velleitario, proporre qui al lettore qualcosa di più che un semplice glossario della materia, con il quale offrirgli un repertorio “a portata di mano” di definizioni fondamentali. Notazioni, locuzioni e nozioni standard della teoria intuitiva degli insiemi, come sono state introdotte nell’App. Gen. A, vi saranno usate liberalmente. Alle definizioni sono intercalati (gli enunciati di) alcuni teoremi/proposizioni (spesso sotto la forma di caratterizzazioni, cioè di definizioni alternative) che aiutano a comprendere il senso, e spesso la ragionevolezza, delle definizioni stesse. Detto diversamente, il nostro glossario sarà, sia pure minimalmente, “ragionato”.<sup>4</sup> Infine, con la nota<sup>5</sup> è fornita una breve lista, ordinata cronologicamente, di trattati di topologia generale abbastanza familiari a chi scrive.

## B.1) DEFINIZIONI FONDAMENTALI

Sia  $S$  un insieme arbitrario. Una **topologia su  $S$**  è una famiglia  $\tau$  di suoi sottoinsiemi (SI) (quindi  $\tau \subset \mathcal{P}(S) =$  insieme dei SI, o “insieme-potenza”, di  $S$ ) che soddisfano alle seguenti condizioni (**assiomi topologici**, che denotiamo (1), .. piuttosto che (A1), .. ):

- (1) l’unione ( $\cup$ ) di un insieme qualsiasi di elementi di  $\tau$  appartiene a  $\tau$ ;
- (2) l’intersezione ( $\cap$ ) di un insieme finito di elementi di  $\tau$  appartiene a  $\tau$ ;
- (3) a  $\tau$  appartengono i SI  $\emptyset$  e  $S$  stesso di  $S$ .<sup>6</sup>

La coppia  $X =: (S, \tau)$  si dice **spazio topologico (ST)**, di cui  $S$  è il **supporto** e  $\tau$  è la topologia; gli elementi di  $S$  si dicono preferibilmente suoi **punti**. In senso lato, la **Topologia** è la teoria degli ST. Il caso  $S = \emptyset$  è ammesso, ma è banale. Gli elementi (SI di  $S$ ) di  $\tau$  si dicono **aperti** (sostantivo) di  $X$ ; ma di un SI di  $X$  che sia un aperto si dice anche che è **aperto** (aggettivo). Ad un qualsiasi

<sup>4</sup> Sfortunatamente la Topologia (e la Teoria delle Varietà, che ad essa in alto grado afferisce) presenta un considerevole tasso di difformità nomenclativa, che è spesso all’origine di equivoci. Naturalmente le denominazioni usate nel nostro testo saranno sempre da intendere nel senso del presente Glossario Topologico (G.T.).

<sup>5</sup> P. Alexandroff, H. Hopf: “Topologie”, Springer (1935), repr. Edwards Bros., (1945); W. Sierpinski: “Introduction to General Topology”, Univ. of Toronto Press (1952); J. Kelley: “General Topology”, Van Nostrand (1955), repr. Springer (1975); H. Kowalsky: “Topologische Räume” (1961), engl. transl. Acad. Press (1964); W. Thron: “Topological Structures”, Holt, Rinehart, Winston (1966); K. Kuratowski: “Topology”, Acad. Press (1966); G. McCarty: “Topology”, McGraw-Hill (1967); N. Bourbaki: “Topologie générale”, Hermann (1971); V. Checcucci, A. Tognoli, E. Vesentini: “Lezioni di topologia generale”, Feltrinelli 5a ed. (1972); Yu. Borisovich, N. Bliznyakov, Ya. Izrailevich, T. Fomenko (engl. transl.) “Introduction to Topology”, MIR (1985).

<sup>6</sup> In realtà (3) si può considerare una conseguenza di (1) e (2). Infatti in “ $\emptyset$  (SI vuoto di  $S$ ) e  $S$  stesso appartengono a  $\tau$ ” il primo [il secondo] assertivo consegue da (1) [da (2)] quando l’insieme d’indici dell’unione [dell’intersezione] è  $\emptyset$  (Bourbaki, Théorie des Ens., I, §4, 1). Al sistema di assiomi (1, 2) si può anche sostituire il sistema equivalente (1, 2\*, 3\*), ove (2\*)  $\equiv$  “l’intersezione di due elementi di  $\tau$  appartiene a  $\tau$ ”, e (3\*)  $\equiv$  “ $S$  appartiene a  $\tau$ ”. Il sistema ridondante di assiomi (1, 2\*, 3) è forse quello che viene più comunemente proposto.

insieme  $S$  possono sempre associarsi almeno due topologie: quella di *tutti* i suoi SI (topologia **discreta**, o **massimale**)<sup>7</sup>, e quella dei soli SI “obbligati”  $\emptyset$  e  $S$  (topologia **banale**, o **minimale**). I **chiusi** (sost.vo; ma la stessa osservazione vale per gli aperti) di  $X$  sono definiti come tutti e soli i complementi degli aperti rispetto al supporto  $S$ . Detto  $\chi$  l’insieme dei chiusi di  $X$  (**cotopologia di**  $X$ ), valgono proprietà (1’, 2’) “duali” delle (1, 2) che da queste si ottengono scambiandovi “unione” con “intersezione”, e (naturalmente) sostituendo  $\tau$  con  $\chi$ .<sup>8</sup> Nel seguito, per brevità spesso eviteremo di usare due diversi simboli per distinguere uno ST dal suo supporto; useremo cioè lo stesso simbolo (per lo più  $X$ , o  $Y$ , ecc), confidando che il contesto chiarisca sempre, caso per caso, se ci si debba riferire allo ST o al suo supporto, o (talvolta) ad entrambi.

In questo paragrafo  $A$  e  $B$  sono generici SI di  $X$  (ST e suo supporto).  $A$  può essere aperto, chiuso, né aperto né chiuso, chiuso e al contempo aperto; in quest’ultimo caso  $A$  si dice un **aperto-chiuso** (al solito, sost.vo e/o agg.). L’unione di tutti gli aperti inclusi in  $A$  si dice sua **parte interna**, e si denota  $A^\circ$  (segue da (1) che  $A^\circ$  è aperto, e tale che ogni aperto incluso in  $A$  è incluso in  $A^\circ$ ); dualmente, l’intersezione di tutti i chiusi includenti  $A$  si dice sua **aderenza** o **chiusura**, e si denota  $A^-$  (segue da (1’) che  $A^-$  è chiuso, e tale che ogni chiuso includente  $A$  include  $A^-$ ).  $A$  è aperto [chiuso] sse è uguale alla sua parte interna [alla sua aderenza]; quindi  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$  e  $(A^-)^- = A^-$ , cioè gli operatori  $^\circ$  e  $^-$  (su  $\mathcal{P}(X)$ ) sono idempotenti. In generale,  $A^\circ \subset A \subset A^-$ , e per qualsiasi coppia  $A, B$ ,  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$ ,  $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$  (leggi duali); altre leggi duali sono  $\mathbf{C}A^- = (\mathbf{C}A)^\circ$  e  $\mathbf{C}A^\circ = (\mathbf{C}A)^-$ , ove  $\mathbf{C}$  è da intendere come complemento rispetto a  $X$ . Infine  $(\emptyset)^\circ = \emptyset$ ,  $(X)^\circ = X$  e  $A \subset B \Rightarrow (A^\circ)^\circ \subset (B^\circ)^\circ$ .<sup>9</sup> Un punto si dice **interno a**  $A$  se appartiene a  $A^\circ$ , ed **esterno a**  $A$  se è interno a  $\mathbf{C}A$ .  $A$  si dice **denso** se  $A^- = X$ , e **denso in** (o **rispetto a**)  $B \subset X$  se  $A^- \supset B$ .  $A$  è denso sse  $A \cap B \neq \emptyset$  per ogni aperto  $B$  di  $X$ .  $X$  si dice **separabile** se ha un SI denso e numerabile. L’insieme differenza  $A^- \setminus A^\circ$  si dice **contorno** o **frontiera** di  $A$ , e si denota con  $\partial A$ . Le seguenti proprietà di  $\partial A$  sono facilmente accertabili:  $\partial A = A^- \cap (\mathbf{C}A)^-$  (per cui  $\partial A$  è chiuso);  $A^- = A \cup \partial A$ ;  $\partial A = \partial(\mathbf{C}A)$ ;  $A^\circ = A \setminus \partial A$ ; “ $A = A^-$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $\partial A \subset A$ ”; “ $A = A^\circ$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $A \cap \partial A = \emptyset$ ”; l’unione di  $A^\circ$ ,  $\partial A$  e  $\mathbf{C}A^-$

<sup>7</sup> Evidentemente, tutte le nozioni che si riferiscono ad uno ST con la topologia discreta hanno natura insiemistica piuttosto che topologica. Ad esempio uno ST con la topologia discreta che sia connesso (vedi oltre) è semplicemente un insieme (il suo supporto) che non può porsi nella forma di unione di due suoi qualsiasi SI non vuoti e disgiunti. Uno ST con la topologia discreta si dice ST **discreto**. Ciò vale abbastanza in generale, cioè lo ST e la sua topologia ricevono di norma lo stesso attributo.

<sup>8</sup> Queste proprietà (1’, 2’) potrebbero assumersi come assiomi per la definizione di  $\chi$ , dicendo poi “aperti” i complementi dei chiusi (definizione duale di una topologia).

<sup>9</sup> Le proprietà 1)  $\emptyset^\circ = \emptyset$ , 2)  $A^\circ \subset A$ , 3)  $(A^\circ)^\circ = A^\circ$  e 4)  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  dell’operatore  $^\circ: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  [le proprietà 1’)  $\emptyset^- = \emptyset$ , 2’)  $A \subset A^-$ , 3’)  $(A^-)^- = A$ , 4’)  $(A \cup B)^- = A^- \cup B^-$  dell’operatore  $^-: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ] potrebbero assumersi come assiomi che lo definiscono; a quel punto, gli aperti [i chiusi] di  $X$  sarebbero tutti e soli i suoi SI  $A$  per cui  $A = A^\circ$  [ $A = A^-$ ], e con essi sarebbe identificata la topologia. Gli assiomi 1)  $\div$  4) [1’)  $\div$  4’)] sono noti come **assiomi topologici** [come **assiomi topologici duali**] di Kuratowski (Kazimir, 1896-1980).

(disgiunti a due a due) è  $X$ .<sup>10</sup> A si dice **raro** se  $(A^-)^\circ = \emptyset$ ; **di 1<sup>a</sup> categoria** se è unione di una famiglia numerabile di SI rari, e **di 2<sup>a</sup> categoria** se non è di 1<sup>a</sup> categoria. Se ogni aperto di  $X$  è di 2<sup>a</sup> categoria,  $X$  si dice uno **spazio di Baire**.

Un  $T \subset S$  (supporto dello ST  $X =: (S, \tau)$ ) può sempre considerarsi come ST  $(T, \tau_T)$  avendo prescritto che  $A \subset T$  sia un **aperto di  $T$**  sse esiste un aperto  $B$  di  $X$  per cui  $A \cap B$  è aperto di  $X$ . Si constata facilmente che gli aperti di  $T$  così definiti soddisfano gli assiomi topologici e quindi formano effettivamente una topologia  $\tau_T \subset \mathcal{P}(T)$ ; essa si dice **indotta da  $X$  su  $T$** , e  $Y =: (T, \tau_T)$  si dice **sottospazio topologico (SST)** di  $X$ . Le definizioni di proprietà topologiche di  $X$  possono essere così estese ad un SI del suo supporto considerato come SST di  $X$ . In tal caso si parlerà di definizione (di quella proprietà topologica) **per relativizzazione rispetto a  $X$** . Non è detto che le due definizioni coincidano: ad esempio un aperto di  $Y$  (SST di  $X$ ) non è necessariamente un aperto di  $X$ . Se poi è  $T = S$ , allora la prescrizione descritta riproduce banalmente la topologia di  $X$  (basta prendere  $B = S$ ), cioè  $\tau_S = \tau$ . Nel seguito, un SI [un punto] del *supporto* di uno ST si dirà ellitticamente un SI [un punto] di quello ST.

Se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono due topologie sullo stesso supporto,  $\tau_1$  si dice **più fine** di  $\tau_2$  (e  $\tau_2$  **meno fine** di  $\tau_1$ ) se  $\tau_2 \subset \tau_1$ ; in questo caso, per brevità lo ST con la topologia più fine può dirsi a sua volta **più fine [meno fine]** di quello con la topologia meno fine [più fine]. Su un dato supporto, la topologia discreta è la più fine, e quella banale la meno fine, tra tutte le topologie possibili su quel supporto.  $\tau_2 \subset \tau_1$  equivale a  $\chi_1 \subset \chi_2$ . Alcune proprietà di uno ST (o di un SI del suo supporto con la topologia indotta), tra quelle che si trovano definite nel seguito, valgono per uno ST con lo stesso supporto e una topologia più fine, altre per uno ST con lo stesso supporto e una topologia meno fine; vedi ad es. la nota<sup>(12)</sup>. Due topologie sullo stesso supporto  $S$ , delle quali l'una più fine dell'altra, si dicono **confrontabili**; ovviamente non tutte le topologie su  $S$  sono confrontabili, ossia non è detto che l'ordinamento  $\subset$  tra le topologie su  $S$  sia un ordinamento totale.

Se  $\{\tau_i\}$  è una famiglia non vuota di topologie sullo stesso supporto  $S$ , si verifica facilmente che  $\tau =: \bigcap_i \tau_i$  è una topologia su  $S$ , la **topologia intersezione** della famiglia  $\{\tau_i\}$ ; tale  $\tau$  si può caratterizzare come la topologia più fine (su  $S$ ) tra tutte le topologie (su  $S$ ) che sono meno fini di ciascuna delle  $\tau_i$ .

Per dato ST  $X = (S, \tau)$ ,  $\mathcal{B} \subset \tau$  si dice una **base di  $\tau$**  (o una **base di aperti**) se ogni aperto di  $X$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$  (il viceversa è ovvio); cioè  $\mathcal{B}$  è uno stock di aperti con le unioni dei quali si può formare ogni aperto di  $X$ , e in particolare  $S$ . In conseguenza di ciò,

---

<sup>10</sup> Anche in questo caso, certe proprietà caratteristiche dell'operatore  $\partial: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  potrebbero usarsi per definirlo assiomaticamente con riferimento ad un insieme qualsiasi  $S$  (**assiomi di frontiera**); dopodiché gli aperti di  $S$  si introdurrebbero come tutti e soli i suoi SI  $A$  per cui  $A \cap \partial A = \emptyset$ , e così sarebbe ancora definita una topologia su  $S$ .

- (4) l'intersezione di due elementi di  $\mathcal{B}$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ ;  
 (5)  $X \in \mathcal{B}$ .

Viceversa, se una famiglia  $\mathcal{B}$  di SI dell'insieme  $S$  ha le proprietà (4,5), o anche:

- (4\*) l'intersezione di un numero finito di elementi di  $\mathcal{B}$  è unione di elementi di  $\mathcal{B}$ ,  
 allora l'insieme delle unioni di elementi di  $\mathcal{B}$  è una topologia su  $S$ , di cui  $\mathcal{B}$  è una base.

Uno ST si dice **2-numerabile** (o **soddisfacente al 2° assioma di numerabilità**) se ha una base di aperti numerabile. Uno ST 2-numerabile è separabile.

In tutto il presente paragrafo,  $A$  è un generico SI proprio, e  $x$  un generico punto di  $X$  (ST). Un SI di  $X$  che include un aperto che include  $A$  si dice un **intorno** (sost.vo) **di**  $A$  (non è detto che un intorno di  $A$  sia un aperto).<sup>11</sup> Se in particolare  $A = \{x\}$ , un intorno di  $\{x\}$  si nomina brevemente come **intorno di**  $x$ .  $A$  è un aperto sse è un intorno di ogni suo punto, ed è un intorno di  $x$  sse  $x \in A^\circ$ . Sarà conveniente denotare con  $\mathcal{N}_A$  [ $\mathcal{N}_x$ ] l'insieme degli intorni di  $A$  [di  $x$ ].<sup>12</sup>  $x$  si dice **punto di aderenza rispetto ad**  $A$  se ogni intorno di  $x$  è congiunto con  $A$ ; cioè, se  $(\dagger) \forall U(\in \mathcal{N}_x)\{U \cap A \neq \emptyset\}$ . L'insieme dei punti di aderenza rispetto ad  $A$ , si dimostra, coincide con l'aderenza  $A^-$  di  $A$ . Più in particolare  $x$  si dice **punto di accumulazione** (o **punto limite**) **rispetto ad**  $A$  se ogni intorno di  $x$  privato di  $\{x\}$  è congiunto con  $A$  (cioè, se  $\forall U(\in \mathcal{N}_x)\{(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$ ); l'insieme dei punti limite rispetto ad  $A$  si dice **derivato di**  $A$  e si denota con  $\mathcal{D}(A)$  (in forza della definizione,  $\mathcal{D}(A) \subset A^-$ ). In generale, l'operatore  $\mathcal{D}$  (su  $\mathcal{P}(X)$ ) non è idempotente, vale a dire  $\mathcal{D}(\mathcal{D}(A))$  è in generale soltanto  $\subset \mathcal{D}(A)$ .  $A$  si dice **denso in sé** se  $A \subset \mathcal{D}(A)$ , e **perfetto** se  $A = \mathcal{D}(A)$ ;  $A$  è perfetto sse è chiuso e denso in sé. Infine  $x \in A$  si dice **punto isolato di**  $A$  se  $x \notin \mathcal{D}(A)$ . L'insieme dei punti isolati di  $A$  si denota  $\mathcal{I}(A)$  (per la definizione,  $\mathcal{I}(A) = A \setminus \mathcal{D}(A) \subset \subset A$ ).  $x \in \mathcal{I}(A)$  equivale a  $\exists U(\in \mathcal{N}_x)\{U \cap A = \{x\}\}$ . Ancora per le definizioni,  $A^- = A \cup \mathcal{D}(A)$ . Le relazioni a) ÷ g) che seguono sono tutte facilmente giustificabili mediante il metodo delle tavole di appartenenza (vedi App. Gen. A): a)  $\mathcal{I}(A) \cap \mathcal{D}(A) = \emptyset$ ; b)  $\mathcal{I}(A) \cup \mathcal{D}(A) = A \cup \mathcal{D}(A) (= A^-)$ ; c)  $A = \mathcal{I}(A) \cup (\mathcal{D}(A) \cap A)$ ; d)  $\mathcal{I}(A) = A^- \setminus \mathcal{D}(A)$ , e) “ $A = A^-$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $\mathcal{D}(A) \subset A$ ”; f) “ $\mathcal{I}(A) = \emptyset$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $A \subset \mathcal{D}(A)$ ”; g) “ $(A = A^-) \wedge (\mathcal{I}(A) = \emptyset)$ ”  $\Leftrightarrow$  “ $A$  è perfetto”.

Le definizioni di punto di aderenza o di accumulazione rispetto ad  $A$ , e di punto isolato di  $A \subset X$ , che abbiamo fin qui limitato alla condizione  $A \neq X$ , si possono estendere al caso  $A = X$ , e si nominano allo stesso modo (ovviamente senza i riferimenti ad  $A$ ); ma allora diventano piuttosto banali. Infatti  $x \in X$  è comunque punto di aderenza (rispetto a  $X$ ); è punto limite (rispetto a  $X$ ) se

<sup>11</sup> Alcuni autori preferiscono richiedere che un intorno di  $A$  sia un aperto che include  $A$ .

<sup>12</sup>  $\mathcal{N}_A$  [ $\mathcal{N}_x$ ] può considerarsi come il valore in  $A$  [in  $x$ ] di un'applicazione  $\mathcal{N}$  di  $\mathcal{P}(X)$  [di  $X$ ] in  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ , univocamente determinata per la data topologia di  $X$ .

ogni suo intorno contiene un punto diverso da  $x$ ; ed è punto isolato (di  $X$ ) se  $\{x\}$  è intorno di  $x$  (ciò avviene sse  $\{x\}$  è aperto).

Dal fatto che  $\mathcal{N}_x$  (per  $x \in X$ , ST) è l'insieme degli intorni di  $x$ ,  $\forall x \in X$  seguono le proprietà:

- (6)  $U \in \mathcal{N}_x \Rightarrow x \in U$ ;
- (7)  $(U \in \mathcal{N}_x \ \& \ U \subset V \subset X) \Rightarrow (V \in \mathcal{N}_x)$ ;
- (8) l'intersezione di due elementi di  $\mathcal{N}_x$  appartiene a  $\mathcal{N}_x$ ;
- (9)  $\forall U (\in \mathcal{N}_x) \exists V (\in \mathcal{N}_x) \forall y (\in V) \{U \in \mathcal{N}_y\}$ .

Se l'applicazione  $\mathcal{N}: S \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ , ove  $S$  è un insieme qualsiasi, è tale che valgano le proprietà (6÷9)  $\forall x \in S$ , allora, si dimostra, esiste una e una sola topologia su  $S$  rispetto alla quale  $\mathcal{N}_x$  è l'insieme degli intorni di  $x$ .

Torniamo ora alla relazione  $(\dagger)$  del terz'ultimo paragrafo, e che definisce  $x \in X$  (ST) come punto di aderenza di  $A \subset X$ . È naturale chiedersi se una definizione equivalente possa ottenersi sostituendo un  $\mathcal{N}'_x \subset \mathcal{N}_x$  alla  $\mathcal{N}_x$  che figura nella  $(\dagger)$ . La risposta è semplice, perché basta e occorre, come è facile verificare, che un tale  $\mathcal{N}'_x$  soddisfi alla relazione  $\forall U (\in \mathcal{N}_x) \exists V (\in \mathcal{N}'_x) \{V \subset U\}$ . Sia ora  $\mathcal{N}_A$  l'insieme degli intorni di  $A \subset X$  (ST). Un'applicazione  $\mathcal{U}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  che  $\forall A \subset X$  soddisfi alle condizioni: (i)  $\mathcal{U}_A$  (valore di  $\mathcal{U}$  in  $A$ )  $\subset \mathcal{N}_A$ , e (ii)  $\forall U (\in \mathcal{N}_A) \exists V (\in \mathcal{U}_A) \{V \subset U\}$ , si dice un **germe di base di intorni (GBI)** (di SI di  $X$ );  $\mathcal{U}_A$  si dice una **base** (o un **sistema fondamentale di intorni di  $A$** ).

Se poi limitiamo le precedenti definizioni al caso in cui i SI  $A$  di  $X$  presi in considerazione sono del tipo singoletto  $\{x\} \subset X$ , allora  $\mathcal{U}$ , il cui valore in  $\{x\}$  si scriverà  $\mathcal{U}_x$  (cfr. l'analogo caso della  $\mathcal{N}$ ), sarà da pensarsi come un'applicazione di  $X$  (piuttosto che di  $\mathcal{P}(X)$ ) in  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  che soddisfa alle condizioni (i') e (ii') ottenute dalle (i) e (ii) (paragr. preced.) sostituendovi formalmente  $A$  con  $x$ ,  $\forall x \in X$ . Tale  $\mathcal{U}$  si dirà un **GBI di punti** (di  $X$ ), e  $\mathcal{U}_x$  una **base** (o un **sistema fondamentale di intorni**) di  $x$ .<sup>13</sup> Si conclude che  $x$  è punto di aderenza di  $A \subset X$  sse esiste un GBI di punti,  $\mathcal{U}$ , per cui vale la precedente  $(\dagger)$  con  $\mathcal{U}_x$  in luogo di  $\mathcal{N}_x$ . Si dimostra che una famiglia  $\mathcal{B}$  di aperti di  $X$  (ST) è una sua base di aperti sse,  $\forall x \in X$ , l'insieme degli elementi di  $\mathcal{B}$  che contengono  $x$  è una base di intorni (aperti) di  $x$ .

Dal fatto che  $\mathcal{U}$  è un GBI di punti (di  $X$ ),  $\forall x \in X$  seguono le proprietà:

- (10)  $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in U$ ;
- (11) l'intersezione di due elementi di  $\mathcal{U}_x$  include un elemento di  $\mathcal{U}_x$ ;
- (12)  $\forall U (\in \mathcal{U}_x) \exists V (\in \mathcal{U}_x) \forall y (\in V) \exists W (\in \mathcal{U}_y) \{W \subset U\}$ .

<sup>13</sup> Evidentemente, e a differenza di quanto accade per  $\mathcal{N}$ , la data topologia di  $X$  non determina univocamente  $\mathcal{U}$ . Un particolare (e banale) GBI di SI [di punti] esiste sempre, ed è quello per cui  $\mathcal{U}_A = \mathcal{N}_A \ \forall A \subset X$  [ $\mathcal{U}_x = \mathcal{N}_x \ \forall x \in X$ ].

Se  $\mathcal{U}: S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ , con  $S$  insieme qualsiasi, è tale che valgano le (10÷12)  $\forall x \in S$ , allora esiste una e una sola topologia su  $S$  per cui  $\mathcal{U}_x$  è una base di intorni di  $x$ ,  $\forall x \in S$ . Infine uno ST  $X$  si dice **1-numerabile** (o **soddisfacente al 1° assioma di numerabilità**) se ha una base di intorni di  $x$  numerabile  $\forall x \in X$ . La 2-numerabilità di uno ST implica la sua 1-numerabilità.

Riassumendo, sussistono le corrispondenze biunivoche ( $\leftrightarrow$ ): “topologia  $\tau \subset \mathcal{P}(S)$ , sotto gli assiomi (1, 2)”  $\leftrightarrow$  “cotopologia  $\chi \subset \mathcal{P}(S)$ , sotto gli assiomi (1',2'”)  $\leftrightarrow$  “applicazione  $\mathcal{N}: S \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ , sotto gli assiomi (6÷9)”  $\leftrightarrow$  “applicazione  $^\circ: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ , sotto gli assiomi di Kuratowski”  $\leftrightarrow$  “applicazione  $\bar{\cdot}: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ , sotto gli assiomi di Kuratowski duali”  $\leftrightarrow$  “applicazione  $\partial: \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ , sotto gli assiomi di frontiera”. Sussistono inoltre le corrispondenze univoche ( $\rightarrow$ ) da “base di aperti  $\mathcal{B}$ , sotto gli assiomi (4, 5)” e da “applicazione  $\mathcal{U}: S \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$ , sotto gli assiomi (10÷12)”, a “topologia  $\tau \subset \mathcal{P}(S)$ ”. Questa lista, che potrebbe ancora allungarsi, testimonia della ricchezza di alternative disponibili per fondare la Topologia come teoria formalizzata. La situazione è analoga per le **topologie speciali**, quelle cioè degli ST caratterizzati da ulteriori specifici assiomi.

## B.2 CONTINUITÀ, CONNESSIONE, COMPATTEZZA, CICLI, GRUPPO FONDAMENTALE, ECC.

Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \upsilon)$  due ST, e sia  $f: X \rightarrow Y$  un'applicazione (o funzione) di  $X$  in  $Y$ .  $f$  si dice **continua in  $x \in X$**  se per ogni intorno  $V$  di  $f(x)$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  per cui  $f(U) \subset V$ ; cioè se  $\forall V (\in \mathcal{N}_{f(x)}) \exists U (\in \mathcal{N}_x) \{f(U) \subset V\}$ .<sup>14</sup> La stessa funzione si dice **continua** se è continua in  $x \forall x \in X$ . Una funzione  $f: X \rightarrow Y$  è continua sse per ogni aperto  $B$  di  $Y$  la preimmagine completa  $f^{-1}(B)$ <sup>15</sup> è aperta (in  $X$ ) (questa proposizione può assumersi come definizione equivalente di funzione continua).<sup>16</sup> Una biiezione ( $\equiv$  applicazione iniettiva e suriettiva)  $f: X \rightarrow Y$  si dice **bicontinua** se è continua insieme alla sua inversa  $f^{-1}$  (che esiste unica per definizione di biiezione); ricordiamo che quella biiezione si dice un omeomorfismo (di  $X$  su  $Y$ ) se  $f$  è bicontinua.  $X$  e  $Y$  (ST) sono detti omeomorfi se esiste un omeomorfismo di  $X$  su  $Y$  (e quindi di  $Y$  su  $X$ ). L'essere omeomorfi è una relazione di equivalenza tra ST; due ST omeomorfi sono topologicamente indistinguibili. La biiezione  $f$  si dice un **omeomorfismo in  $x \in X$**  (o **omeomorfismo locale**) se  $f$  è continua in  $x$  e  $f^{-1}$  è

<sup>14</sup> Questa definizione si riduce a quella classica (la ben nota “ $(\varepsilon, \delta)$ ”) nel caso in cui  $X = Y = \mathbf{R}$  (con la topologia standard).

<sup>15</sup> Non si confonda  $f^{-1}$ , usata in questo senso, con la funzione inversa di  $f$ , che potrebbe anche non esistere.  $f^{-1}(B)$  è semplicemente il SI di  $X \{x \in X: f(x) \in B\}$ .

<sup>16</sup> Se  $f: X \rightarrow Y$  ( $X, Y$  ST) è una funzione continua, allora  $f: X^* \rightarrow Y^*$ , dove  $X^*$  è uno ST più fine di  $X$ , e  $Y^*$  è uno ST meno fine di  $Y$ , è anch'essa continua.



continua in  $y = f(x) \in Y$ . Come ci si aspetta, gli omeomorfismi risultano essere tutti e soli gli omeomorfismi in  $x$  per ogni  $x \in X$ . Per  $A \subset X$ ,  $f: X \rightarrow Y$  (con  $X$  e  $Y$  ST),  $f$  si dice **continua rispetto a  $A$  in  $x \in A$**  se  $f|_A$  (restrizione di  $f$  ad  $A$ ) è continua in quel punto  $x$  del SST (per relativizzazione)  $A$ ; e **continua rispetto a  $A$**  se ciò avviene  $\forall x \in A$ . È importante osservare che, mentre “ $f$  è continua in  $x \in A$ ” implica “ $f$  è continua rispetto a  $A$  in  $x$ ”, l’implicazione inversa è in generale falsa.

Un’applicazione  $\eta: X \rightarrow Y$  (sempre con  $X$  e  $Y$  ST) si dice un **embedding topologico** di  $X$  in  $Y$  se è continua e  $\eta: X \rightarrow \eta(X)$  è un omeomorfismo di  $X$  su  $\eta(X)$  (considerando  $\eta(X)$  come SST di  $Y$ ). Un caso importante di embedding (topologico) si ha quando  $X$  è SST di  $Y$ ,  $\eta(x \in X) = x (\in Y)$ , e  $\eta$  è embedding di  $X$  su  $\eta(X) = X$  (**embedding naturale di  $X$  come SST di  $Y$** ). Le definizioni si estendono in modo ovvio sostituendo a  $X$  un suo SI con la topologia indotta. L’( $r \geq 0$ )-embedding  $\eta$  di un aperto  $U$  di  $\mathbf{R}^n$  su  $\eta(U) \in \mathbf{R}^{m \geq n}$  introdotto nella Sez. 3.3 (in questo Glossario Topologico preferiamo denotare il campo reale con  $\mathbf{R}$  piuttosto che con  $\mathbf{R}$ ) è evidentemente un embedding topologico (con le topologie standard su  $\mathbf{R}^n$  e  $\mathbf{R}^m$ , vedi oltre)

Sia  $X$  lo ST  $(S, \tau)$ ,  $\rho$  una relazione di equivalenza in  $S$ ,  $S/\rho$  il relativo insieme quoziente, e  $\pi: S \rightarrow S/\rho$  la relativa proiezione canonica (che porta  $x \in S$  nella classe di equivalenza di  $x$ ). Diremo **topologia quoziente modulo  $\rho$  di  $\tau$  su  $S/\rho$**  la topologia più fine, tra le topologie su  $S/\rho$ , per la quale  $\pi: S \rightarrow S/\rho$  è continua, e la denoteremo  $\tau/\rho$ . Lo ST  $(S/\rho, \tau/\rho)$  si dice **spazio quoziente modulo  $\rho$  di  $X$**  e si denota  $X/\rho$ .

Lo ST  $X$  si dice **connesso** se non esistono suoi SI distinti da  $\emptyset$  e da  $X$  che siano aperti-chiusi.<sup>17</sup> Se uno ST è connesso, lo è ogni ST di esso meno fine.  $A \subset X$  si dice **connesso in  $X$  (ST)** se il SST  $(A, \tau_A)$  (per relativizzazione rispetto a  $X$ ) è connesso. La specificazione “in  $X$ ” di norma si sottintende quando è chiaro che ci si riferisce ad un SI di  $X$ .  $\emptyset$  e il singoletto  $\{x\}$  (con  $x \in X$ ) sono connessi (in  $X$ ). Se  $X = \emptyset$ ,  $X$  è (banalmente) connesso. Se  $B, C$  sono SI di  $X$  aperti [chiusi] nel SST  $(B \cup C, \tau_{B \cup C})$ , non vuoti e disgiunti, la coppia  $\{B, C\}$  si dice una **decomposizione aperta [chiusa]** di  $B \cup C$ .  $X$  è connesso sse non esiste una sua decomposizione (aperta o chiusa che sia): questo asserito fornisce ancora una definizione alternativa di ST connesso. Se  $A \subset X$  è connesso, ogni  $B$  tale che  $A \subset B \subset A^-$  è connesso; in particolare,  $A^-$  è connesso. Se  $I$  è un insieme d’indici, per una famiglia  $\{A_i\}_{i \in I}$  di SI connessi di  $X$  tali che  $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ ,  $\bigcup_i A_i$  è connesso. In particolare, per una famiglia finita  $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$  di SI di  $X$  tali che  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$  per ogni  $i$  tra 1 e  $n-1$ ,  $\bigcup_i A_i$  è connesso. Se  $A, B$  sono SI di

<sup>17</sup> Riportiamo tre caratterizzazioni della connessione di uno ST, e cioè: 1)  $X$  è connesso sse non è unione di due suoi aperti non vuoti e disgiunti; 2) id. id con “chiusi” in luogo di “aperti”. 3)  $X$  è connesso sse per ogni coppia di suoi SI non vuoti  $X_1$  e  $X_2$  per cui  $X = X_1 \cup X_2$  risulta  $(X_1 \cap X_2^-) \cup (X_1^- \cap X_2) \neq \emptyset$ . Sostituendo in queste caratterizzazioni il “sse” con il “se” si ottengono altrettante definizioni (equivalenti) di ST connesso che si incontrano spesso in letteratura.

$X$ , con  $B$  connesso,  $A \cap B \neq \emptyset$  e  $\mathbf{C}A \cap B \neq \emptyset$ , allora  $\partial A \cap B \neq \emptyset$ ; in particolare, se  $X$  è connesso, ogni  $A \subset X$  distinto da  $\emptyset$  e da  $X$  ha un punto di frontiera. Una coppia  $\{x,y\} \subset S \subset X$  si dice **connessa in  $S$**  se esiste un connesso  $A \subset S$  tale che  $\{x,y\} \subset A$ . Un  $A \subset X$  (ST) è connesso sse ogni coppia di punti di  $A$  è connessa in  $A$ . Infine, e molto importante, se  $f: X \rightarrow Y$  (con  $X, Y$  entrambi ST) è una funzione continua, e  $A \subset X$  è connesso, allora  $f(A)$  è connesso. Un intervallo qualsiasi di  $\mathbf{R}$ , e  $\mathbf{R}$  stesso, (con la topologia standard<sup>18</sup>) sono connessi; viceversa, ogni connesso di  $\mathbf{R}$  è un intervallo.

L'unione  $C(x)$  di tutti i SI connessi di  $X$  (ST) contenenti  $x \in X$  è connessa e automaticamente chiusa, ed è il “più grande” SI connesso di  $X$  contenente  $x$  (nel senso usuale che ogni SI connesso contenente  $x$  è incluso in  $C(x)$ );  $C(x)$  viene detto il **componente connesso di  $X$  rispetto a  $x$**  (il riferimento a  $X$ , in  $C(x)$ , è sottinteso). Se  $y \in C(x)$ ,  $C(y) = C(x)$ , e se  $y \notin C(x)$ ,  $C(y) \cap C(x) = \emptyset$ . Se  $C(x) = \{x\} \forall x \in X$ ,  $X$  si dice **totalmente sconnesso**. Uno ST con la topologia discreta è totalmente sconnesso, ma in generale non vale il viceversa (vedi ad es. il caso di  $\mathbf{Q}$ , che è totalmente sconnesso nella topologia standard,<sup>19</sup> pur essendo quest'ultima meno fine di quella discreta). Se un SI  $C$  di  $X$  (ST) è tale che  $C = C(x)$  per (almeno) un  $x \in X$ ,  $C$  viene detto un **componente connesso di  $X$** . Se  $\{C_i\}$  è la famiglia di tutti i componenti connessi di  $X$ , allora da una parte  $X = \cup_i C_i$ , e dall'altra i  $C_i$  sono non vuoti e disgiunti l'uno dall'altro; quindi quella famiglia è una “partizione” di  $X$ <sup>20</sup>. Le precedenti definizioni e proposizioni si estendono per relativizzazione rispetto a  $X$  al generico  $A \subset X$ ; si definisce così un **componente connesso di  $A$  contenente  $x \in A$** , diciamo  $C_A(x)$ , un **componente connesso di  $A$** , diciamo  $C_A$ , ... e così via.

$X$  (ST) si dice **localmente connesso** se ogni suo punto ha un sistema fondamentale di intorno connessi. Una definizione equivalente che si incontra di frequente è: “ $X$  è localmente connesso se,  $\forall x \in X$  e per ogni intorno di  $x$ , esiste un intorno di  $x$  connesso ed incluso nel primo intorno”: cioè, indicando con  $\mathcal{N}_x^*$  l'insieme degli intorno connessi di  $x$ , se  $\forall x(\in X) \forall U(\in \mathcal{N}_x) \exists U^*(\in \mathcal{N}_x^*) \{U^* \subset U\}$ . Ovviamente se  $X$  è localmente connesso allora ogni suo punto  $x$  ha un intorno connesso. È importante osservare che  $X$  può essere connesso senza essere localmente connesso, o viceversa; o anche, che può essere entrambe le cose al contempo.  $X$  è localmente connesso sse i componenti

<sup>18</sup> La **topologia standard** di  $\mathbf{R}$  è quella che si ottiene prendendo come base di aperti gli intervalli aperti ad estremi (inclusi  $\pm\infty$ ) distinti. Questa topologia è strettamente meno fine della topologia discreta, e coincide con quella indotta (vedi oltre) dalla “metrica uniforme” (valore assoluto della differenza tra i due reali considerati). Un intorno di  $x \in \mathbf{R}$  è un SI di  $\mathbf{R}$  che include un intervallo aperto che contiene  $x$ .

<sup>19</sup> Le **topologie standard** di  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{N}$  sono quelle indotte da  $\mathbf{R}$ . Come è abbastanza ovvio, esse coincidono con quelle indotte dalla metrica uniforme. La topologia standard su  $\mathbf{Z}$  (e quindi quella su  $\mathbf{N}$ ) è quella discreta. Con la topologia standard su  $\mathbf{Q}$ , gli insiemi  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{CQ}$  sono entrambi densi in  $\mathbf{R}$ . Un intorno di  $z \in \mathbf{Z}$  [di  $n \in \mathbf{N}$ ] è un SI di  $\mathbf{Z}$  [di  $\mathbf{N}$ ] che contiene  $z$  [n].

<sup>20</sup> Bourbaki, Théorie des Ens., II, §4, 7.

connessi di ogni suo aperto sono connessi (caratterizzazione alternativa della connessione locale).  $\mathbf{R}$  è localmente connesso,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Z}$  e  $\mathbf{N}$  (topologia standard) sono totalmente sconnessi.

Su un insieme  $S$  con distanza  $d$  (soddisfacente agli assiomi metrici), o spazio metrico (SM)  $D =: (S, d)$ , può sempre definirsi una topologia **indotta da**  $d$  nel seguente modo.  $\forall x \in S$  e  $\forall \varepsilon > 0$ , l'insieme  $D(x, \varepsilon) =: \{y \in S: d(x, y) < \varepsilon\}$  si dice “**disco**”<sup>21</sup> (o anche **palla**) di  $D$ , di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$ . Si dimostra allora che la famiglia dei dischi di  $D$  soddisfa alle condizioni (4) e (5) che caratterizzano una base di aperti, per cui essa è base di una topologia (i cui aperti sono tutte e sole le unioni di dischi), appunto la topologia **indotta da**  $d$  su  $D$ , o **topologia (metrica) canonica** dello SM  $D$ <sup>22</sup>. Questa topologia è la meno fine tra quelle in cui i dischi sono aperti. Non è detto che esista una metrica su  $X$  (ST) che vi induca la sua topologia: se questo è il caso, quello ST si dice **metrizzabile**.<sup>23</sup> Due distanze  $d, d'$  sullo stesso insieme  $S$  si dicono **topologicamente equivalenti** se inducono su  $S$  la stessa topologia. L'essere topologicamente equivalenti (per due distanze su  $S$ ) è una relazione di equivalenza; quindi l'insieme di tutte le distanze su  $S$  può ripartirsi in classi di equivalenza (topologica) disgiunte. Uno ST metrizzabile e separabile è 2-numerabile, quindi anche 1-numerabile. Uno SM con la topologia canonica è 1-numerabile. Uno SM completo ( $\equiv$  tale che ogni sua sequenza di Cauchy converge in esso) è uno spazio di Baire con la topologia indotta.

Uno ST si dice  $\mathbf{T}_2$  (o, più spesso, (di) **Hausdorff** (Felix, 1868-1942) o anche **separato** – da non confondere con “separabile”) se per ogni coppia di suoi punti distinti esistono intorni disgiunti dell'uno e dell'altro. Uno spazio metrico con la topologia canonica è automaticamente Hausdorff. La proprietà di essere  $\mathbf{T}_2$ , per uno ST, fa parte di una gerarchia di proprietà analoghe  $\mathbf{T}_i$  (con  $i$  compreso tra 0 e 4), note come **assiomi di separazione**. Precisamente, uno ST è: 0)  $\mathbf{T}_0$ , se almeno uno di una qualsiasi coppia di suoi punti distinti ha un intorno che non contiene l'altro punto; 1)  $\mathbf{T}_1$ , se entrambi i punti di una qualsiasi coppia di suoi punti distinti hanno un intorno che non contiene l'altro; 2)  $\mathbf{T}_2$ , vedi sopra; 3)  $\mathbf{T}_3$ , se per ogni suo punto e per ogni suo SI chiuso che non contiene quel punto esistono intorni disgiunti dell'uno e dell'altro; 4)  $\mathbf{T}_4$ , se per una qualsiasi coppia di suoi SI chiusi disgiunti esiste una corrispondente coppia di loro intorni disgiunti. Ogni assioma della sequenza  $\mathbf{T}_0 \div \mathbf{T}_2$  è più forte di quello precedente; lo stesso vale per la sequenza  $\mathbf{T}_2 \div \mathbf{T}_4$ , ma soltanto sotto la condizione che valga  $\mathbf{T}_1$ , perché  $\mathbf{T}_1$  non segue né da  $\mathbf{T}_3$  né da  $\mathbf{T}_4$ . Le stesse

<sup>21</sup> O più precisamente “disco aperto”. Per brevità, nel seguito con “disco” significheremo “disco aperto”.

<sup>22</sup> In realtà già un sistema di assiomi leggermente meno forte di quello metrico è in grado di indurre una topologia su  $S$  con analogo meccanismo. Precisamente, ciò si ottiene indebolendo l'assioma metrico  $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$  in  $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$ ; la nuova  $d$  così definita si dice **pseudodistanza**. Si parla allora di assiomi (e spazio) **pseudometrici** e di associata **topologia pseudometrica**.

<sup>23</sup> Se uno ST è metrizzabile, non è detto che vi sia una sola metrica che induce sul suo supporto la topologia assunta. Il problema di ottenere caratterizzazioni della metrizzabilità (di uno ST) alternative alla definizione naturale è piuttosto arduo, ed è stato molto studiato; il primo criterio ottenuto, in ordine di tempo, fu quello di Alexandrov e Urysohn (1923). Esistono anche criteri di metrizzabilità relativamente semplici, ma validi soltanto per classi speciali di ST.

definizioni si applicano alle relative topologie. Esistono parecchi altri assiomi di separazione, come pure una *seria difformità*, nella letteratura corrente, riguardo alle definizioni di  $T_3$  e  $T_4$  (abbiamo qui riportato quelle della scuola russa). Uno ST che soddisfa a  $T_1$  e  $T_3$  [ $T_1$  e  $T_4$ ] è detto **regolare** [**normale**].<sup>24</sup>

Ricordiamo che una famiglia di insiemi  $\mathcal{R}$  si dice un “ricoprimento” [un “ricoprimento giusto”] di un insieme  $S$  se l’unione dei suoi elementi include [è uguale a]  $S$ . Un ricoprimento giusto di  $S$  i cui elementi hanno intersezione vuota si dice una sua “partizione” o “decomposizione”. Un ricoprimento  $\mathcal{R}'$  dell’insieme  $S$  si dice “più fine” (o “un raffinamento”) del ricoprimento  $\mathcal{R}$  di  $S$  se ogni  $A' \in \mathcal{R}'$  è incluso in un  $A \in \mathcal{R}$ , o  $A' \subset A$ . Alternativamente, in tal caso si dice anche che  $\mathcal{R}'$  è “inscritto” in  $\mathcal{R}$ . L’essere più fine, per un ricoprimento rispetto ad un altro, è evidentemente una proprietà transitiva (oltre che riflessiva). Se  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$  ( $\mathcal{R}$  essendo un ricoprimento di  $S$ ), e  $\mathcal{R}'$  è ancora un ricoprimento di  $S$ ,  $\mathcal{R}'$  si dice un “sottoricoprimento” di  $\mathcal{R}$ . Un sottoricoprimento del ricoprimento  $\mathcal{R}$  è più fine di  $\mathcal{R}$ . Queste nozioni sono puramente insiemistiche (nel senso degli insiemi privi di struttura). Se poi  $X$  è uno ST, e i SI di un suo ricoprimento  $\mathcal{R}$  sono tutti aperti [chiusi], allora si parla di **ricoprimento aperto** [**chiuso**] (di  $X$ , o di  $A \subset X$ ).

Una famiglia  $\mathcal{F}$  di SI di  $X$  (ST) si dice **localmente finita in**  $x \in X$  se esiste un intorno  $V$  di  $x$  tale che l’insieme dei SI di  $\mathcal{F}$  congiunti a  $V$  è finito; e **localmente finita** se è localmente finita in ogni  $x \in X$ . Come è naturale, queste definizioni si applicano anche ai ricoprimenti di  $X$ , per cui si parla di ricoprimenti finiti, localmente finiti, ecc. I ricoprimenti che si considerano più comunemente sono quelli aperti e finiti.

Uno ST  $X$  si dice **compatto** se ogni suo ricoprimento aperto ha un sottoricoprimento finito.<sup>25</sup> Uno ST è compatto sse ogni famiglia di suoi chiusi  $\{A_i\}$  la cui intersezione sia vuota (cioè per cui  $\bigcap A_i = \emptyset$ ) ha una sottofamiglia finita con la stessa proprietà. Questa proposizione potrebbe assumersi come definizione alternativa (duale) di compattezza. Una famiglia di SI di un insieme  $S$  è detta avere la “proprietà dell’intersezione finita” se nessuna sua sottofamiglia finita ha intersezione vuota. Uno ST è compatto sse ogni famiglia di suoi chiusi avente la proprietà dell’intersezione finita ha intersezione non vuota. Un SI di  $X$  (ST) si dice **compatto in**  $X$  se è compatto per la topologia indotta, **relativamente compatto** se la sua aderenza è compatta in  $X$ , e  **$\sigma$ -compatto** se può porsi

<sup>24</sup> Nella letteratura occidentale  $T_3$  corrisponde a “regolare”, e  $T_4$  a “normale”; per cui si definisce come “ $T_3$ ” uno ST “ $T_1$  e regolare”, e come “ $T_4$ ” uno ST “ $T_1$  e normale”.

<sup>25</sup> Esiste una lunga storia di definizioni non equivalenti di compattezza (“compattezza nel senso di”), delle quali quella qui riferita è oggi la più comunemente accettata. Ricordiamo in particolare la **BW** (Bolzano-Weierstrass)-**compattezza** (“ $X$  è BW-compatto se ogni suo SI infinito ha un punto limite”), e la **compattezza numerabile** (“ $X$  è numericamente compatto se ogni suo ricoprimento aperto numerabile ha un sottoricoprimento finito”). La possibile compattezza, per uno ST, è una delle più importanti proprietà di cui esso può godere, ed una delle nozioni più fertili dell’intera topologia. Ciò vale anche in maggior misura per gli ST che sono al contempo compatti e  $T_2$ : non a caso, Bourbaki include nella sua definizione di compattezza anche la richiesta di essere  $T_2$  (Topologie Générale, I, §10, 1).

nella forma di unione di una famiglia numerabile di suoi SI compatti. I SI compatti di uno spazio metrico con la topologia canonica sono tutti e soli quelli che sono chiusi e limitati (“limitati” significa qui “inclusi in un disco (beninteso, di raggio finito)”); applicato in particolare a  $\mathbf{R}^{n \geq 1}$  (con la metrica pitagorica e la topologia canonica), questo è il ben noto **teorema di Heine-Borel**.

Una “successione” in un insieme  $X$  è una funzione  $\sigma: \mathbf{N} \rightarrow X$ . I valori di  $\sigma$  costituiscono dunque una famiglia di elementi (punti) di  $X$  indicizzati con insieme di indici uguale a  $\mathbf{N}$ . In pratica spesso non si distingue tra una successione e la famiglia dei suoi valori (proprio come talvolta si fa per una generica funzione). In uno spazio compatto 1-numerabile ogni successione di suoi punti ha un punto limite. Uno ST  $X$  si dice **compatto per successioni** se ogni sua successione ha un punto limite. La compattezza per successioni è più forte della compattezza; ma per gli spazi metrici con la topologia canonica, i due concetti (si dimostra) si equivalgono.

Uno ST  $X$  si dice **paracompatto** se ogni suo ricoprimento aperto ha un raffinamento che è un ricoprimento aperto localmente finito di  $X$ . Uno ST Hausdorff e compatto è paracompatto. In uno ST paracompatto, ogni chiuso è paracompatto (per la topologia indotta). Uno ST  $X$  si dice **localmente compatto** se, per ogni  $x \in X$ ,  $x$  ha un intorno compatto (per la topologia indotta).<sup>26</sup>  $\mathbf{R}^{n \geq 1}$  con la topologia standard (vedi prossimo paragrafo per  $n > 1$ ) è localmente compatto, ma non compatto. Uno ST di Hausdorff localmente compatto è di Baire; se è anche 2-numerabile è paracompatto.

Siano  $(X, \tau)$  e  $(Y, \upsilon)$  due ST, e si consideri la famiglia delle unioni di SI del prodotto cartesiano  $X \times Y$  che siano del tipo  $A \times B$ , ove  $A$  è aperto di  $X$  e  $B$  è aperto di  $Y$ . Poiché, si dimostra,<sup>27</sup> soddisfa agli assiomi topologici, questa famiglia è una topologia su  $X \times Y$ , che viene detta **topologia prodotto di  $\tau$  per  $\upsilon$**  (nell’ordine) e denotata come  $\tau \times \upsilon$ . Lo ST  $(X \times Y, \tau \times \upsilon)$  viene detto **prodotto topologico** (dello ST  $(X, \tau)$  per lo ST  $(Y, \upsilon)$ , nell’ordine). Come il prodotto cartesiano, anche il prodotto topologico è associativo. Il prodotto topologico di due spazi di Hausdorff (risp. compatti) è di Hausdorff (risp. compatto).<sup>28</sup> La **topologia standard su  $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$**  è il quadrato della **topologia standard** su  $\mathbf{R}$  (generata dalla base degli intervalli aperti con estremi distinti), e

<sup>26</sup> Se  $P$  è una proprietà di uno ST  $X$ , spesso si introduce una versione “locale” di quella proprietà, diciamo  $\text{loc-}P$ , (**localizzazione di  $P$** ) richiedendo che,  $\forall x \in X$ , esista un intorno di  $x$  che ha quella proprietà come SST. Naturalmente  $P \Rightarrow \text{loc-}P$ , ma in generale non vale l’inverso. Il caso della finitezza locale (di una famiglia di SI di uno ST) e quello della compattezza locale (di uno ST) rientrano in questo tipo di definizione. Talvolta si definisce un tipo di localizzazione di  $P$  più forte di  $\text{loc-}P$ , diciamo  $\text{loc}'\text{-}P$ , richiedendo che,  $\forall x \in X$  e per ogni intorno di  $x$ , esista un intorno di  $x$ , incluso nel primo intorno, che ha quella proprietà come SST; quindi per definizione  $\text{loc}'\text{-}P \Rightarrow \text{loc-}P$ , ma non è detto che  $P \Rightarrow \text{loc}'\text{-}P$  o viceversa. Abbiamo incontrato un caso del genere nella connessione locale.

<sup>27</sup> Per verificarlo, è utile tener presente che  $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$ , dove  $A, A'$  (risp.  $B, B'$ ) sono generici SI di  $X$  (risp. di  $Y$ ).

<sup>28</sup> Molte altre proprietà topologiche, oltre alla separatezza e alla compattezza, dei fattori di un prodotto topologico sono da esso ereditate: ad es. la separabilità, la connessione, la compattezza locale, la connessione locale, e via dicendo. Queste proprietà sono talvolta dette **moltiplicative**.

coincide con quella indotta dalla metrica pitagorica. La base corrispondente, in  $\mathbf{R}^2$ , è quella delle **mattonelle aperte**, prodotti cartesiani di due intervalli aperti. La generalizzazione a  $\mathbf{R}^{n>2}$  è banale, e porta alla base delle **n-mattonelle aperte**.  $\mathbf{R}^n$  con la topologia standard è paracompatto.

Secondo la definizione che ne abbiamo dato nella S.sez. (4.1.1), una varietà topologica ha (localmente) dimensione  $n \geq 1$  se è (localmente) omeomorfa a  $\mathbf{R}^n$ . Il teorema di Brouwer conforta questa definizione, in quanto afferma che aperti di  $\mathbf{R}^n$  e di  $\mathbf{R}^{n'}$  possono essere omeomorfi soltanto se  $n = n'$ . Esiste tuttavia una definizione alternativa di “dimensione” di un *generico* ST  $X$ , fondata esclusivamente sulla sua topologia. La **molteplicità** di una famiglia finita di insiemi è il più grande intero  $m$  per il quale ci sono in essa  $m$  insiemi con intersezione non vuota (evidentemente, neanche questa è una nozione topologica). La **dimensione topologica** di  $X$ ,  $\dim_{\tau}X$ , si definisce allora come il più piccolo intero  $n$  tale che per ogni ricoprimento aperto e finito (diciamo, af-ricoprimento) di  $X$  esiste un af-ricoprimento di  $X$  di molteplicità  $n + 1$  inscritto in esso. Se  $X$  è una varietà topologica pura, nasce il problema di conoscere sotto quali condizioni la dimensione standard  $\dim X$  e la dimensione topologica  $\dim_{\tau}X$  possono essere uguali. Una condizione necessaria è che  $X$  sia Hausdorff (esistono controesempi di ST non-Hausdorff con i due tipi di dimensione di valore diversi); ma non sembra noto se questa sia anche sufficiente. Una condizione sufficiente è che  $X$  sia paracompatto. Esistono anche altre definizioni puramente topologiche di dimensione (ad es. le cosiddette dimensioni “induttive”), ma esse sono sensate soltanto per particolari classi di ST.

Un **arco** di uno ST  $X$  è un'applicazione continua  $u$  da  $\mathbf{I}$  (intervallo unitario chiuso) in  $X$ ; il punto  $u(0)$  [ $u(1)$ ] si dice punto **iniziale** [**finale**] dell'arco. L'arco  $u(t \in \mathbf{I}) =: c \in X$  si dice **costante**, e per esso i punti iniziale e finale coincidono. L'arco **inverso** (talvolta, “reverso”) di  $u$ ,  $u^{-1}$ , è definito da  $u^{-1}(t) =: u(1-t)$ ,  $t \in \mathbf{I}$  (tale  $u(1-t)$  è continua); i punti iniziale e finale si interscambiano nell'arco inverso. Infine l'**arco-prodotto** (o **composto**) dell'arco  $u(t \in \mathbf{I})$  per l'arco  $v(t \in \mathbf{I})$  (nell'ordine), sotto la condizione  $u(1) = v(0)$ , è l'arco definito da  $w(t) =: u(2t)$  per  $0 \leq t \leq 1/2$ , e  $w(t) =: v(2t-1)$  per  $1/2 \leq t \leq 1$ . Si ha  $w(0) = u(0)$  e  $w(1) = v(1)$ , e  $w(t)$  è continua.<sup>29</sup>

La relazione “essere unito da un arco”, di un punto  $x$  ad un punto  $y$  (entrambi di  $X$ ), cioè “esiste un arco che unisce  $x$  a  $y$ ”, è una relazione di equivalenza: basta usare l'arco costante per verificarne la riflessività, quello inverso per la simmetria, e quello prodotto per la transitività. Questa relazione si dice **connessione per archi**, o più comunemente **pathwise-** (o **arcwise-**) **connessione** di  $x$  a  $y$  (o piuttosto tra  $x$  e  $y$ );  $x$  e  $y$  si dicono allora **pathwise-connessi** tra loro. Uno ST è quindi ripartito in classi di equivalenza (disgiunte) rispetto alla connessione, le quali si dicono suoi **componenti pathwise-connessi**. Se tutte le coppie di punti di uno ST sono pathwise-connesse,

<sup>29</sup> La composizione di archi è associativa, ma l'insieme degli archi di uno ST  $X$  non è un gruppo. L'ovvia ragione è nel fatto che due archi generici  $u, v$  (di  $X$ ) possono essere composti (nell'ordine  $u \rightarrow v$ ) solo se  $u(1) = v(0)$ .

quello ST si dice a sua volta **pathwise-connesso**. Uno ST pathwise-connesso è connesso (ciò dipende essenzialmente dalla proprietà sopra ricordata che **I** sia connesso in **R**); ma in generale non vale il contrario. Un caso importante in cui le due definizioni sono equivalenti è quello delle varietà topologiche: una varietà topologica connessa è anche pathwise connessa. La partizione di  $X$  in componenti pathwise-connessi può essere più fine di quella in componenti connessi; né i componenti pathwise-connessi sono necessariamente chiusi.

Se il punto iniziale e quello finale di una traiettoria coincidono in  $x_0 \in X$  (ST), essa si dice **ciclo** (o **laccio**, o **loop**) **basato in**  $x_0$ , o  **$x_0$ -ciclo**. La teoria dei cicli fa parte dell'Omotopia, che è un importante capitolo della Topologia. Intuitivamente, il fatto che un  $x_0$ -ciclo  $\gamma$  sia “deformabile con continuità” in un  $x_0$ -ciclo  $\gamma'$  è una relazione di equivalenza tra  $\gamma$  e  $\gamma'$ .<sup>30</sup> I  $x_0$ -cicli tra loro equivalenti in tal senso si dicono anche (tra loro) **riducibili**. Un  $x_0$ -ciclo riducibile al  $x_0$ -ciclo costante si dice **banale**. Le classi di equivalenza in cui viene ripartito l'insieme dei  $x_0$ -cicli dello ST  $X$  si dicono **classi di  $x_0$ -omotopia** di  $X$ . L'insieme delle classi di  $x_0$ -omotopia di uno ST  $X$ , con legge di composizione data dal rappresentante prodotto, elemento neutro dato dal rappresentante costante, ed inverso dato dal rappresentante inverso, costituisce un gruppo, che si dice **gruppo fondamentale di  $X$  basato in  $x_0$** , o  **$x_0$ -gruppo fondamentale di  $X$** , e si denota  $\pi_1(X, x_0)$ . Se  $\pi_1(X, x_0)$  e  $\pi_1(X, x)$  sono lo stesso gruppo  $\forall x \in X$ , allora vi è evidentemente un unico gruppo fondamentale (di classi di omotopia), che si dice appunto **gruppo fondamentale di  $X$** . Esso si denota  $\pi_1(X)$ , ed è un invariante topologico di  $X$ .

---

<sup>30</sup> La precisazione rigorosa dell'idea intuitiva di “deformazione continua”, dovuta a Brouwer, è la seguente: due funzioni continue di  $X$  in  $Y$  (ST) (o come si usa dire, “di  $C(X, Y)$ ”),  $f$  e  $g$ , si dicono **omotopiche** ( $\equiv$  deformabili con continuità l'una nell'altra) se esiste una funzione continua  $h: X \times I \rightarrow Y$  tale che  $h(x, 0) = f(x)$  e  $h(x, 1) = g(x)$ .

## APPENDICE GEN. C

### ELEMENTI DI TEORIA DELLA MISURA

#### C.0) CENNI STORICI

Il problema della “misura” di certe regioni di un piano o dello spazio ha occupato il pensiero matematico fin da tempi remotissimi. Già nell’antica Grecia, fu inventato da Eudosso (IV sec. a.C.) e poi perfezionato da Archimede (III sec. a.C.) il cosiddetto “metodo di esaustione”; metodo riconsiderato e ulteriormente sviluppato in epoca molto più tarda da B. Cavalieri (1598-1647), e da lui denominato “metodo degli indivisibili”.<sup>1</sup> Sostanzialmente, questo consisteva nel decomporre la regione in oggetto (diciamo, una regione piana) in “fette” di spessore abbastanza piccolo, valutare (a meno di termini che venivano considerati “trascurabili”) l’area di ciascuna di esse, e sommare le aree. Evidentemente, siamo con ciò ad una tecnica rudimentale, seppur ingegnosa e creativa, di integrazione.

L’intreccio tra analisi e geometria che prese piede nel sec. XVII – dopotutto, l’integrale della funzione positiva  $f(x)$  tra  $x = a$  e  $x = b > a$  uguaglia l’area della regione compresa tra il “grafico” di  $f(x)$  nel piano  $(x,y)$  (la curva  $y = f(x)$ ) e l’asse  $(x)$ , sempre tra  $x = a$  e  $x = b$  – ha stimolato la ricerca di una misura di regioni di  $\mathbb{R}^{n \geq 1}$ ,<sup>2</sup> e precisamente di regioni di  $\mathbb{R}^{n+1}$  per il calcolo di integrali  $n$ -pli. A questo proposito, nelle applicazioni prevale largamente la misura di regioni di  $\mathbb{R}^n$  proposta da Jordan alla fine dell’Ottocento<sup>3</sup> (J-misura, v. S.sez. 1.4.1). Tuttavia la J-misura – che reintroducendo sulle orme di Peano<sup>4</sup> (o addirittura della matematica greca) la doppia approssimazione interna ed esterna per la valutazione di aree, volumi, ecc., mise fine ad una serie di tentativi incompletamente riusciti – non copre il caso della misura di alcuni insiemi (di punti) di  $\mathbb{R}^n$  di notevole importanza. Da una parte queste insufficienze, e dall’altra i grandi progressi della teoria degli insiemi all’inizio dello scorso secolo, spinsero presto verso lo sviluppo di una “teoria

---

<sup>1</sup> Nelle sue “Exercitationes geometricæ sex” (1647) Cavalieri afferma che un segmento è composto da punti come un rosario da grani, una regione piana da segmenti come una stoffa da fili e un volume da regioni piane come un libro da pagine. Le fette di queste decomposizioni erano dette al tempo “indivisibili” delle regioni di partenza. Il termine “esaustione” ( $\equiv$  esaurimento) si riferisce al fatto che il problema consisteva nell’“esaurire” la regione scomponendola appunto in tali fette.

<sup>2</sup> Da qui in avanti riprendiamo a scrivere  $\mathbb{R}$  per  $\mathbf{R}$ .

<sup>3</sup> C. Jordan, “Remarques sur les intégrales définies”, in «Journal de mathématiques pures et appliquées», 1892 (ser. 4, vol 8), 69-99, anche in “Œuvres” (di C.J.) 4 voll., 1961-64; vedi anche il “Cours d’Analyse” (1893-96) dello stesso autore.

<sup>4</sup> G. Peano, “Applicazioni geometriche del calcolo integrale”, 1887.



assiomatica della misura”. Questa mira ad introdurre una ragionevole nozione di misura di certi oggetti astratti, detti per l'appunto “misurabili”. Nella loro più larga accezione, questi oggetti misurabili sono insiemi di una famiglia (di insiemi) soddisfacente a certi convenienti assiomi. Tra i matematici che più contribuirono alla nuova disciplina sono da ricordare R. Baire (1874-1932), E. Borel (1871-1956), H. Lebesgue (1875-1941), C. Caratheodory (1873-1950), J. Radon (1887-1956), A. Haar (1885-1933), O. Nicodým (1889-1974), e altri ancora. Si è giunti così ad una teoria assiomatica della misura sempre più intimamente legata alla teoria (assiomatica) dell'integrazione, che insieme a quella ha trovato una sistemazione praticamente definitiva soltanto in tempi abbastanza recenti (intorno agli scorsi anni '40). Come era prevedibile, la necessità di questa sistemazione assiomatica non fu percepita con la stessa forza dalla comunità dei fisici, che a buona ragione si accontentavano di strumenti e concetti più intuitivi e pragmatici, almeno fino a quando questi erano sufficienti ai loro scopi. Le prossime sezioni di questa App. Gen. C saranno dedicate ad una esposizione per sommi capi dei fondamenti della teoria assiomatica della misura. Con la nota <sup>5</sup> forniamo inoltre una breve lista, ordinata cronologicamente, di trattati contenenti la parte essenziale della teoria, spesso inglobata in soggetti matematici connessi.

### C.1) MISURA DI LEBESGUE SUL QUADRATO UNITARIO

Partiamo con la seguente definizione. Una funzione d'insieme  $\lambda$  a valori reali possibilmente non-limitati, definita su una famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  per ipotesi contenente l'insieme vuoto  $\emptyset$ , si dice **additiva** [ $\sigma$ -**additiva**] se, essendo definita per certi insiemi  $A_1 \in \mathcal{E}$ , ...,  $A_n \in \mathcal{E}$ , dove  $n$  è un intero qualsiasi e  $\geq 2$  [per una sequenza ( $\equiv$  successione) di insiemi  $A_1 \in \mathcal{E}$ ,  $A_2 \in \mathcal{E}$ ... ], disgiunti a due a due, e per  $A =: \cup_{i=1}^n A_i$  [e per  $A =: \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ], risulta  $\lambda(A) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$  [ $\lambda(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ ]. <sup>6</sup> Sia la

---

<sup>5</sup> E. Borel: “Leçons sur la théorie des fonctions”, Gauthier-Villars (1898); P. Halmos: “Measure Theory”, Van Nostrand (1950); F. Riesz, B. Sz-Nagy: “Functional Analysis”, Ungar (1955); C. Goffmann, G. Pedrick: “First Course in Functional Analysis”, Prentice Hall (1965); I Segal, R. Kunze: “Integral and Operators”, McGraw-Hill (1968); B. Epstein: “Linear Functional Analysis”, Saunders (1970).

<sup>6</sup> Se  $\lambda$  assume soltanto valori non-negativi e nelle precedenti  $A =: \dots$  il segno di eguale è sostituito con  $\leq$ ,  $\lambda$  si dice **sub-additiva** [**sub- $\sigma$ -additiva**]. Se, nella definizione di addittività di  $\lambda$ , alla condizione che gli insiemi  $A_i$  siano disgiunti a due a due si sostituisce quella che siano *internamente* disgiunti (a due a due) si ottiene la **addittività in senso stretto** di  $\lambda$ .

possibile additività di  $\lambda$ , che la sua possibile  $\sigma$ -additività, implicano che  $\lambda(\emptyset) = 0$ .<sup>7</sup> Naturalmente la  $\sigma$ -additività è più forte dell'additività.<sup>8</sup>

Il problema centrale della teoria della misura si può descrivere come segue. Innanzitutto si deve identificare una conveniente famiglia  $\mathcal{M}$  di “**insiemi-misura**”, per definizione contenente l'insieme vuoto  $\emptyset$ ; e su tale  $\mathcal{M}$ , definire una funzione d'insieme  $\mu$  (la “misura” su  $\mathcal{M}$ ) che soddisfi alle seguenti condizioni: (i) i valori di  $\mu$  sono reali non-negativi<sup>9</sup> possibilmente non-limitati; (ii) se  $\mathcal{M}$  è chiusa rispetto a una data unione finita [numerabile] di suoi elementi disgiunti,  $\mu$  è additiva [ $\sigma$ -additiva]. Essendo definita su  $\mathcal{M}$ ,  $\mu$  è definita in  $\emptyset \in \mathcal{M}$ , e per la sua additività è  $\mu(\emptyset) = 0$ . A questo punto ci si propone di *prolungare*  $\mu$  su una famiglia di insiemi  $\mathcal{M}'$  (strettamente) più ampia di  $\mathcal{M}$  ( $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$ ) in modo tale che, così prolungata su  $\mathcal{M}'$ , vi conservi le proprietà (i,ii). Questo problema è noto come **problema del prolungamento** (o della estensione, o della continuazione) **della misura**.

Descriviamo un esempio di questa situazione, con cui torniamo al caso delle aree. Riferendoci ad un piano  $\mathbb{R}^2$  (a questo piano apparterranno tutti gli insiemi nominati nei paragrafi immediatamente seguenti), fissiamo due sue direzioni ortogonali; per meglio intenderci, una direzione “orizzontale” ed una direzione “verticale”. In  $\mathbb{R}^2$ , definiamo come rettangoli\* i rettangoli a lati paralleli alle due direzioni ortogonali, comprensivi dei loro lati o privati di qualche, o di tutti, i loro lati; inoltre includiamo tra questi rettangoli\* quelli che sono “degeneri” per avere la lunghezza di un lato, o di entrambi i lati di una coppia contigua, nulla: quindi ad esempio segmenti orizzontali o verticali (chiusi o aperti o semichiusi) o singoletti di punti, o  $\emptyset$  (un rettangolo aperto degenera in  $\emptyset$  se le lunghezze dei suoi lati sono entrambe nulle). Independentemente dal tipo di rettangolo\*, la sua misura (area)  $m$  è *definita* come il prodotto delle lunghezze (supposte finite) di due suoi lati contigui; quindi la misura di rettangoli\* degeneri, e in particolare del rettangolo\*  $\emptyset$ , è nulla. Denoteremo il generico rettangolo\* con  $R, R_1, R_2, \dots$  e scriveremo ormai “rettangolo”, in questa appendice, per “rettangolo\*”. Con queste definizioni, si riconosce che l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo; se poi  $\emptyset \neq R_1 \subset R$ , la differenza  $R \setminus R_1$ , pur non essendo in generale un rettangolo, può sempre considerarsi (in più modi) come unione finita di rettangoli disgiunti. Inoltre

<sup>7</sup> Infatti facendo nel primo caso  $A = A_1 = \dots = A_n = \emptyset$  si ha  $\lambda(\emptyset)(n-1) = \lambda(\emptyset)$ , da cui la tesi. Similmente facendo nel secondo caso  $A = A_1 = A_2 = \dots = \emptyset$  si ha  $\lambda(\emptyset) \lim_{n \rightarrow \infty} n = \lambda(\emptyset)$ ; e questa dà ancora  $\lambda(\emptyset) = 0$ , perché se fosse  $\lambda(\emptyset) \neq 0$ ,  $|\lambda(\emptyset)|n$  sarebbe maggiore di qualunque numero prefissato per  $n$  abbastanza grande, e quindi il suo limite per  $n \rightarrow \infty$  non potrebbe essere 0.

<sup>8</sup> Si supponga infatti  $\lambda$   $\sigma$ -additiva, e si ponga  $A_i = \emptyset$  per  $i > N$  (un intero arbitrario  $\geq 2$ ); allora  $A_h$  e  $A_k$  sono disgiunti per ogni  $h \neq k$  se lo sono per ogni  $h \neq k$  e  $\leq N$ . In questa situazione è  $\cup_{i=1}^N A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ ; se dunque  $\lambda$  è definita in  $A =: \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ , per la sua assunta  $\sigma$ -additività risulta  $\lambda(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_i)$ , quindi  $\lambda(A') = \sum_{i=1}^N \lambda(A_i)$ , avendo posto  $A' =: \cup_{i=1}^N A_i$  ( $= A$ ). Ciò vale per ogni  $N \geq 2$ , e quindi  $\lambda$  è additiva.

<sup>9</sup> Esistono misure che non soggiacciono a questa restrizione, e neppure a quella di avere valori reali, ma non approfondiremo il discorso in queste direzioni.

si riconosce che la misura  $m$  così introdotta su  $\mathcal{M}$  soddisfa le precedenti condizioni (i,ii). In particolare,  $m$  è additiva: se cioè il rettangolo  $R$  è uguale all'unione dei rettangoli disgiunti  $R_1, \dots, R_n$ , con  $n \geq 2$ , ovvero se  $R = \cup_{i=1}^n R_i$ , con  $R_i \cap R_j = \emptyset$  per  $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$ , allora  $m(R) = \sum_{i=1}^n m(R_i)$ .<sup>10</sup>

Ci proponiamo ora di possibilmente prolungare  $m$  ad una famiglia  $\mathcal{M}'$  di insiemi di  $\mathbb{R}^2$  che includa strettamente  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}'$ , in modo che conservi le proprietà canoniche (i,ii). Un primo passo in questa direzione è quello di identificare  $\mathcal{M}'$  con la famiglia degli insiemi  $A$  rappresentabili come unioni finite di rettangoli di  $\mathcal{M}$  disgiunti, o **insiemi elementari**.<sup>11</sup> (È chiaro che uno stesso insieme elementare può avere diverse rappresentazioni di questo tipo.) Si dimostra facilmente che l'unione, l'intersezione, la differenza e la differenza simmetrica di coppie di insiemi elementari è un insieme elementare; quindi  $\mathcal{M}'$  è chiusa rispetto alle quattro soprannominate operazioni  $\cup, \cap, \setminus$  e  $\Delta$ , e alle loro combinazioni finite.<sup>12</sup> La misura prolungata a  $\mathcal{M}'$ , diciamo  $m'$ , si definisce allora richiedendo che, se  $A = \cup R_i$ , dove  $\{R_i\}$  è una famiglia *finita* di rettangoli di  $\mathcal{M}$  disgiunti,  $m'(A) = \sum m(R_i)$ . Si dimostra che la  $m'(A)$  così definita su  $\mathcal{M}'$  non dipende dalla particolare unione finita di rettangoli di  $\mathcal{M}$  disgiunti prescelta per rappresentare  $A$ , e quindi che essa ha carattere intrinseco. Inoltre, se  $A$  è unione finita di insiemi elementari disgiunti, la sua misura  $m'(A)$  è uguale alla somma delle misure  $m'$  degli insiemi elementari componenti. Si riconosce anche, infine, che  $m' = m$  quando  $m'$  sia ristretta a  $\mathcal{M}$  (cioè che  $m'$  è un effettivo prolungamento di  $m$ ), e che le proprietà (i,ii) sono conservate dalla  $m'$  prolungata su  $\mathcal{M}'$ .

Tuttavia la famiglia  $\mathcal{M}'$  degli insiemi elementari non contiene certi insiemi (di  $\mathbb{R}^2$ ) la cui possibile misura è ancora di rilevante interesse nella geometria piana e nell'analisi delle funzioni di due indeterminate reali. Si deve quindi cercare di ulteriormente allargare  $\mathcal{M}'$  ad una conveniente famiglia  $\mathcal{M}''$  di insiemi (sempre di  $\mathbb{R}^2$ ) che ancora la includa strettamente, definendo su quest'ultima una misura prolungata  $m'' \equiv \mu$  sotto il solito vincolo delle proprietà (i,ii). Tra le molte possibili alternative, la strada giusta fu alla fine imboccata da H. Lebesgue nel 1902.<sup>13</sup> Conviene per il momento limitare  $\mathcal{M}''$  ai sottoinsiemi del quadrato unitario (a lati orizzontali/verticali di lunghezza 1, diciamo chiuso)  $E$ , denotando con  $\mathcal{M}''_E$  la corrispondente famiglia di sottoinsiemi di  $E$

<sup>10</sup> Rettangoli *internamente* disgiunti la cui unione sia un rettangolo possono sempre trasformarsi in rettangoli disgiunti senza alterarne la misura, e quindi senza alterare la misura del rettangolo-unione.

<sup>11</sup> Si noti tuttavia che un'unione finita di rettangoli si può sempre considerare come unione finita di rettangoli disgiunti, e quindi anche la prima è un insieme elementare.

<sup>12</sup> Le precedenti affermazioni non sono tutte indipendenti; infatti se ad esempio una generica famiglia di insiemi è chiusa rispetto all'unione e alla differenza di coppie di suoi elementi, allora lo è anche rispetto alla intersezione e alla differenza simmetrica di quelle coppie. Come meglio vedremo, le proprietà nominate di  $\mathcal{M}$  [di  $\mathcal{M}'$ ] qualificano questa famiglia come "semianello [anello] d'insiemi".

<sup>13</sup> H. Lebesgue, "Integral, longueur, aire", in «Annali di matematica pura e applicata», 1902 (ser. 3, vol. 17), 231-359, vedi anche in "Oeuvres scientifiques" (stesso autore), 5 voll., 1972-73.

che si sta cercando di identificare (nonché con  $\mathcal{M}_E$ ,  $\mathcal{M}'_E$  le simili famiglie di rettangoli e rispettivamente di insiemi elementari inclusi in  $E$ ). Ogni  $A \in \mathcal{P}(E)$  ( $\equiv$  insieme delle parti di  $E$ , vedi App. Gen. A) ammette un ricoprimento “contabile” ( $\equiv$  finito o numerabile) di rettangoli  $R_i$  di  $E$  non necessariamente disgiunti, diciamo  $A \subset \cup R_i$  (dove  $\cup$  sta per  $\cup_{i \in I}$ , e  $I$  è un insieme d’indici contabile). Il reale non-negativo

$$(1) \quad \mu^*(A) =: \inf_{A \subset \cup R_i} (\sum m(R_i)),^{14}$$

dove l’ $R_i$  al piede di  $\inf$  sta al solito per  $R_i$ , e  $i$  corre su  $I$  in  $\sum$ , si dice **misura esterna di  $A$** . Si noti che le unioni contabili  $\cup R_i$  non sono necessariamente insiemi elementari (mentre lo sono quelle finite). Questa funzione d’insieme è definita su  $\mathcal{P}(E)$  (perché l’oggetto di  $\inf$  è comunque non-negativo), è essa stessa reale non-negativa, vale 0 in  $\emptyset$  (ma non necessariamente soltanto in  $\emptyset$ ) e 1 in  $E$  (ma non necessariamente soltanto in  $E$ ). Se inoltre  $A \subset \cup A_i$ , dove  $\{A_i\}$  è una famiglia contabile di elementi di  $\mathcal{P}(E)$  (quindi anche  $A \in \mathcal{P}(E)$ ), risulta  $\mu^*(A) \leq \sum \mu^*(A_i)$ . Quindi, se in particolare  $\{A_i\}$  si riduce al solo elemento  $A_1 \neq A$ ,  $A \not\subset A_1$  implica  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1)$ , cioè  $\mu^*$  è monotona non-decrescente; e questo prova che i suoi valori sono tutti in  $[0,1]$ . Tuttavia  $\mu^*$  non è additiva in generale, e quindi non può essere accettata come misura su  $\mathcal{P}(E)$ .

D’altra parte, a  $\mathcal{P}(E)$  appartengono anche gli insiemi del tipo  $\mathbf{C}A \equiv E \setminus A$  ( $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ), sui quali pure è ovviamente definita  $\mu^*$ . Se poniamo,  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,

$$(2) \quad \mu_*(A) =: 1 - \mu^*(\mathbf{C}A),$$

$\mu_*$  risulta essere una funzione d’insieme con proprietà strettamente analoghe a quelle di  $\mu^*$ : essa è cioè definita su  $\mathcal{P}(E)$ , è reale non-negativa, è uguale a  $\mu^*$  in  $\emptyset$  e in  $E$ , è monotona non-decrescente e i suoi valori appartengono a  $[0,1]$ ; ma come  $\mu^*$ , non è additiva in generale. Tale  $\mu_*(A)$  si dice **misura interna di  $A$** ; ed è ovvio che nemmeno  $\mu_*$  può essere accettata come misura su  $\mathcal{P}(E)$ .

Nonostante la loro stretta somiglianza,  $\mu_*$  e  $\mu^*$  *non* sono la stessa funzione d’insieme: si può infatti verificare che, sempre  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ ,

$$(3) \quad \mu_*(A) \leq \mu^*(A),$$

e che esistono insiemi  $A \in \mathcal{P}(E)$  per i quali nella (3) il segno  $<$  vale veramente, così come esistono insiemi  $A \in \mathcal{P}(E)$  per i quali vale il segno  $=$  (ad es. per  $A = \emptyset$ , o  $A = E$ ). Alcune delle enunciate

---

<sup>14</sup> Ricordiamo che, per la definizione di  $\inf$  (estremo inferiore, o “infimo”), la (1) significa che  $\mu^*(A)$  è  $\leq$  della somma delle misure dei rettangoli di *ogni* ricoprimento finito di  $A$ , e che *esiste* un ricoprimento finito (formato da rettangoli) di  $A$  la cui misura è  $< \mu^*(A) + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  prefissato ad arbitrio. Simili e simmetriche proprietà valgono per  $\sup$  (estremo superiore, o “supremo”).

proprietà di  $\mu^*$  e  $\mu_*$  sono evidenti, e altre meno. Una loro quasi <sup>15</sup> completa giustificazione sarà data più oltre.

A questo punto, si *definisce*  $\mathcal{M}''_E$  come la sottofamiglia di  $\mathcal{P}(E)$  costituita dai suoi insiemi che hanno *uguali* misura esterna ed interna, cioè

$$(4) \quad \mathcal{M}''_E =: \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \mu_*(A) = \mu^*(A)\}.$$

$\forall A \in \mathcal{M}''_E$ , il comune valore delle due misure di  $A$  si dice **misura di  $A$**  e si denota  $\mu(A)$ . In particolare  $\emptyset$  ed  $E$  appartengono a  $\mathcal{M}''_E$  (essendo  $\mu_*(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) = 0$ ,  $\mu_*(E) = \mu^*(E) = 1$ ), e  $\mu(A) \in [0,1] \quad \forall A \in \mathcal{M}''_E$ . Gli insiemi di  $\mathcal{M}''_E$  si dicono **misurabili secondo Lebesgue**, o **L-misurabili**.

Che tutto questo sia lecito e ragionevole segue dai teoremi che ci limitiamo qui ad enunciare:

(T<sub>a</sub>) «gli insiemi elementari inclusi in  $E$ , cioè gli insiemi di  $\mathcal{M}'_E$ , sono L-misurabili, mentre esistono insiemi inclusi in  $E$  L-misurabili ma non elementari; cioè  $\mathcal{M}'_E \subsetneq \mathcal{M}''_E$ .»

(T<sub>b</sub>) «per ogni  $A \in \mathcal{M}'_E$ ,  $\mu(A) = m'(A)$ , dove  $m'$  è la misura definita su  $\mathcal{M}'_E$ ; vale a dire,  $m'$  è la restrizione di  $\mu$  a  $\mathcal{M}'_E$ , ovvero  $\mu$  è un prolungamento di  $m'$  su  $\mathcal{M}''_E$ .»

(T<sub>c</sub>) «unioni e intersezioni *contabili* di insiemi di  $\mathcal{M}''_E$  sono insiemi di  $\mathcal{M}''_E$  <sup>16</sup>. Inoltre differenze e differenze simmetriche di due insiemi di  $\mathcal{M}''_E$  (quindi, per induzione, anche differenze simmetriche finite di  $\mathcal{M}''_E$ ) sono insiemi di  $\mathcal{M}''_E$ : cioè  $\mathcal{M}''_E$  è chiusa rispetto a tutte le operazioni nominate.»

(T<sub>d</sub>) «se  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ , dove  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  è una sequenza di insiemi di  $\mathcal{M}''_E$  (e quindi anche  $A \in \mathcal{M}''_E$ ), disgiunti a due a due, allora  $\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ ; cioè  $\mu$  è  $\sigma$ -additiva su  $\mathcal{M}''_E$ .»

(T<sub>e</sub>) «se un insieme  $A$  di un piano è L-misurabile e ha misura  $\mu(A)$  facendo riferimento (per le definizioni dei relativi rettangoli) a una certa coppia di direzioni ortogonali, esso rimane L-misurabile, con L-misura invariata, facendo riferimento ad una qualsiasi altra coppia di direzioni ortogonali.»

In definitiva abbiamo esteso  $m'$  (definita su  $\mathcal{M}'_E$ ) a  $\mu$  (definita su  $\mathcal{M}''_E$ ). La restrizione ai sottoinsiemi di  $E$  (quadrato unitario) di tutta la procedura illustrata può rimuoversi come segue. Rappresentiamo l'intero piano  $\mathbb{R}^2$  (diciamo, il piano “(x,y)”) come unione di quadrati unitari chiusi  $E_{h,k} =: \{h \leq x \leq h+1, k \leq y \leq k+1\}$ , con  $h$  e  $k$  interi. Diremo che  $A$  (generico sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ ) è **finitamente L-misurabile** (cioè ha L-misura finita) se tutte le intersezioni  $A_{h,k} =: A \cap E_{h,k}$  sono L-misurabili secondo la definizione precedente, e se la serie a termini non-negativi

<sup>15</sup> Essenzialmente, mancherà soltanto la dimostrazione di una parte del teorema (T1) di C.3, vedi oltre, che si è omessa per brevità.

<sup>16</sup> Come vedremo, questo fatto qualifica  $\mathcal{M}''_E$  come “ $\sigma$ -anello (d'insiemi)”, e la coppia  $\{\mathcal{M}''_E, E\}$  come “ $\sigma$ -algebra con unità  $E$ ”.

$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu(A_{h,k})$  converge. In questo caso, *definiremo* la L-misura (finita) di  $A \in \mathbb{R}^2$  come il valore (non-negativo) della serie. Se invece la serie diverge, diremo che la L-misura di  $A$  è infinita. La famiglia degli insiemi di  $\mathbb{R}^2$  finitamente L-misurabili si denoterà  $\mathcal{M}''$ ; ed è evidente che  $\mathcal{M}' \subsetneq \mathcal{M}''$ .  $\mathbb{R}^2$  non appartiene a  $\mathcal{M}''$  (la precedente serie diverge per  $A = \mathbb{R}^2$ ), ma vi appartiene qualunque sua retta o qualunque suo punto (singoletto), avendo L-misura nulla. La generalizzazione di quanto precede al  $(n>2)$ -cubo unitario chiuso  $E$  (per un verso), o a  $\mathbb{R}^n$  (per l'altro verso), è ovvia. Ancora, (si dimostra che) la L-misura così ottenuta ha carattere intrinseco (cioè *non* dipende dalle direzioni ortogonali prescelte per la sua definizione). Infine il caso  $n = 1$  è una banale estensione “verso il basso” di quanto sopraddetto.

È naturale, a questo punto, porsi la domanda di come la J-misurabilità e la connessa J-misura (di un  $A \subset E$ ) che abbiamo introdotto e discusso nella Sez. 1.4.1 si rapportino alle corrispondenti L-misurabilità e L-misura. Alle luce delle definizioni, si intuisce che le prime due nozioni sono specializzazioni delle due seconde: basta allo scopo che, nella definizione di  $\mu^*(A)$ , il ricoprimento  $\cup R_i$  di  $A$  si pensi come quello che si ottiene mediante una quadrettatura *finita* di  $E$ , e quindi che sia finito e composto di rettangoli internamente disgiunti (disgiungendo questi rettangoli, il che è sempre possibile, il ricoprimento  $\cup R_i$  diventa un insieme elementare). È chiaro che questo caso rientra in quello considerato da Lebesgue, e quindi che,  $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ , “ $A$  è J-misurabile” implica “ $A$  è L-misurabile”; e che, se  $A$  è J-misurabile, la sua J-misura è uguale alla sua L-misura. Come provano noti controesempi, esistono invece insiemi L-misurabili che *non* sono J-misurabili. Ci si può chiedere infine se insiemi ( $\subset E$ ) *non* L-misurabili esistano del tutto. La risposta è che dei tali insiemi *esistono*, sebbene la loro effettiva costruzione sia abbastanza laboriosa. Vale a dire, la classe degli insiemi L-misurabili è vastissima, e copre la stragrande maggioranza degli insiemi di  $\mathbb{R}^n$  di interesse analitico-geometrico.

## C.2 STRUTTURE DI PRE-MISURA

Ad un esame superficiale, l'introduzione della L-misura nella presente versione prescinde da possibili strutture attribuite allo spazio  $\mathbb{R}^n$ ; ad esempio non si è richiesto che vi sia data una metrica, e nemmeno una semplice topologia, come si fa talvolta per rendere più agile la trattazione. Tuttavia la definizione di L-misura evidentemente richiede la disponibilità della retta reale con le sue strutture standard (algebraica, topologica e d'ordine); e dunque, la presunta indipendenza della teoria da altre strutture matematiche più fondamentali è almeno in parte illusoria. Di fatto,

l'assiomatizzazione di una teoria della misura è impresa più sottile e complessa dell'assiomatizzazione delle strutture matematiche di base, perché queste *vi sono in qualche modo simultaneamente coinvolte*. Cercheremo ora di dare un'idea di questa prospettiva, essendoci dopotutto fin qui limitati alla descrizione di un esempio; sia pure, di un esempio molto illuminante dal punto di vista euristico.

La struttura di uno spazio  $X$  “di tipo misura” ha un punto di contatto formale con quella di uno spazio topologico  $Y$  nel fatto che in entrambi i casi si deve assegnare assiomaticamente una famiglia di sottoinsiemi di quello spazio, ossia una famiglia (che diremo  $\mathcal{M}$ ) di insiemi-misura nel primo caso e una famiglia di aperti  $\tau$  (la topologia) nel secondo. A prima vista l'analogia finisce qui (non approfondiamo altri aspetti della questione); e infatti le assiomatizzazioni delle due teorie – quella della misura e quella topologica – seguono suggestioni empiriche e finalità diverse, la prima cercando di formalizzare l'idea geometrica (intuitiva) di “estensione” e la seconda quella di “continuità”. La stessa identificazione della famiglia di insiemi –  $\mathcal{M}$  e rispettivamente  $\tau$  – procede del resto in modo diverso: infatti  $\mathcal{M}$  si può descrivere senza necessariamente pensarla come inclusa in  $\mathcal{P}(X)$ , mentre sappiamo che  $\tau$  deve essere inclusa in  $\mathcal{P}(Y)$ . Come vedremo nei prossimi paragrafi, esiste una gerarchia di assiomi progressivamente più forti che definiscono *proprio in tal modo* famiglie di tipo  $\mathcal{M}$  progressivamente più ampie. La struttura conferita da questi assiomi alle famiglie di tipo  $\mathcal{M}$  può dirsi di **pre-misura**.

Per cominciare, ricordiamo che una (ri)partizione (o più comunemente in teoria della misura, una **decomposizione**) di un insieme  $X$  è un suo ricoprimento giusto (vedi App. Gen. B) formato da elementi tra loro disgiunti. Si parla di decomposizione finita, di  $n$ -decomposizione, o di decomposizione contabile (di  $X$ ), se la famiglia di insiemi che la costituisce è finita, in particolare se consta di esattamente  $n$  elementi, o se è contabile.

La più debole struttura di pre-misura su una famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  non vuota è quella descritta dai seguenti **assiomi di pre-misura**:<sup>17</sup>

$$(1a) \quad \emptyset \in \mathcal{E};$$

$$(1b) \quad (A \in \mathcal{E} \wedge B \in \mathcal{E}) \Rightarrow ((A \cap B) \in \mathcal{E});$$

(1c) se  $A$  e  $A_1$  sono elementi di  $\mathcal{E}$  per i quali  $A_1 \subset A$ , allora esiste in  $\mathcal{E}$  una  $n$ -decomposizione di  $A$  (con  $n \geq 2$ ) di cui  $A_1$  è un componente.

L'assioma (1c) merita qualche commento. Quanto esso asserisce è vuoto se  $A_1 = \emptyset$  oppure se  $A_1 = A$ : basta infatti porre  $A_2 =: A$ , o rispettivamente  $A_2 =: \emptyset$ , per avere la 2-decomposizione

---

<sup>17</sup> Allo scopo di evitare un numero eccessivo di parentesi, nelle formule insiemistiche che seguono adottiamo spesso una gerarchia tra relazioni intuitivamente evidente. Ad esempio, nell'antecedente della (1b) come in altre occasioni si è tacitamente presupposto  $\in$  più forte di  $\wedge$ .

$A = A_1 \cup A_2$ . Similmente vuoto è (1c) se  $A = \emptyset$ ; e quindi si può senz'altro presupporre  $A \neq \emptyset$ ,  $A_1 \neq \emptyset$  e  $A_1 \neq A$ . In secondo luogo, i componenti (altri da  $A_1$ ) della decomposizione finita di  $A$  si possono anch'essi supporre  $\neq \emptyset$ , perché quello che fosse  $= \emptyset$  si potrebbe cancellare dalla decomposizione. Allora ogni elemento della decomposizione di  $A$ , oltre che  $\neq \emptyset$ , risulta necessariamente  $\not\subset A$ .<sup>18</sup> In definitiva l'assioma (1c) si può riformulare come:

(1c') se  $A \in \mathcal{E}$  e  $\emptyset \neq A_1 \in \mathcal{E}$  sotto  $A_1 \not\subset A$ , esiste in  $\mathcal{E}$  una  $n$ -decomposizione (con  $n \geq 2$ ) di  $A$  di cui  $A_1$  è un componente, e di cui gli altri componenti sono  $\neq \emptyset$  e  $\not\subset A$ .

Una famiglia d'insiemi  $\mathcal{E}$  non vuota e soddisfacente agli assiomi (1a, 1b, 1c') si dice un **semianello d'insiemi**, e sarà qui genericamente denotato con  $\mathcal{H}$ .<sup>19</sup> Oltre che rispetto all'intersezione di due suoi elementi, un semianello è chiuso rispetto all'intersezione finita  $\cap_1^n$  ( $n > 2$ ) di tali elementi, come si prova per induzione sfruttando l'associatività di  $\cap$ .

La seconda struttura di pre-misura su  $\mathcal{E}$  (non vuota) che consideriamo è descritta dagli assiomi seguenti:

(2a)  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ;

(2b)  $(A \in \mathcal{E} \wedge B \in \mathcal{E}) \Rightarrow ((A \cup B) \in \mathcal{E} \wedge (A \setminus B) \in \mathcal{E})$ .

(In realtà (2a) consegue da (2b): infatti se  $\mathcal{E}$  è non vuota, esiste un  $A \in \mathcal{E}$ , e quindi, facendo  $A = B$  nella (2b),  $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{E}$ .)

Una famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  non vuota e soddisfacente all'assioma (2b) si dice un **anello d'insiemi**, e sarà qui genericamente denotata con  $\mathcal{R}$  ( $\mathcal{R}$  come ring). Ad esempio il singoletto  $\{\emptyset\}$  è un anello, per quanto poco significativo. Facendo uso delle identità insiemistiche (valide per arbitrari  $A, B$ ):

(3)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ,

(4)  $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$ ,<sup>20</sup>

si vede subito che un anello è chiuso anche rispetto a  $\Delta$  e  $\cap$ , e quindi rispetto alle loro combinazioni finite.<sup>21</sup> D'altra parte, valgono anche le identità insiemistiche:

<sup>18</sup> Sia infatti  $A = \cup_k A_k$  la decomposizione finita in oggetto, di cui  $A_1$  è un componente. È ovvio che  $A_k \subset A$  per ogni  $k > 1$  della decomposizione (mentre  $A_1 \not\subset A$  per ipotesi). Supponiamo per assurdo che  $A_k = A$  per un certo  $k > 1$  della decomposizione. Allora  $A = A_k \cup (\cup_{k \neq k} A_k) = A_k$ . Questa implica che  $(\cup_{k \neq k} A_k) \subset A_k$ , e quindi che  $\cup_{k \neq k} A_k = A_k \cap (\cup_{k \neq k} A_k)$ . Quest'ultima unione è  $\neq \emptyset$  per ipotesi. Scrivendo il 2° membro della precedente uguaglianza come  $\cup_{k \neq k} (A_k \cap A_k)$ , si conclude che uno almeno dei componenti di questa unione è  $\neq \emptyset$ , contro il fatto che tutti i componenti di una decomposizione sono disgiunti.

<sup>19</sup> Dagli assiomi di semianello si desume quanto segue. Sia  $\mathcal{H}$  un semianello, e siano  $A \in \mathcal{H}$ ,  $\emptyset \neq A_i \in \mathcal{H}$  (per ogni  $1 \leq i \leq p$ ) sotto  $A_i \not\subset A$ , con gli  $A_i$  disgiunti a due a due. Allora esiste una decomposizione finita di  $A$  di cui i  $p$   $A_i$  sono componenti. La dimostrazione è per induzione su  $p$ , partendo da  $p = 1$ , cioè dalla (1c'). Questo risultato amplifica la (1c'), cui si riduce per  $p = 1$ .

<sup>20</sup> In luogo della (4) si può equivalentemente scrivere, avendo posto per brevità  $C =: A \cup B$ : (4')  $A \cap B = C \setminus ((C \setminus A) \cup (C \setminus B))$ . Una ulteriore possibilità è (4'')  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$ , che esprime l'intersezione in termini di sole differenze.



$$(3') \quad A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B),$$

$$(4') \quad A \setminus B = A \Delta (A \cap B);$$

quindi, se  $\mathcal{E}$  (non vuota) è chiusa rispetto a  $\Delta$  e a  $\cap$ , è chiusa anche rispetto a  $\cup$  e  $\setminus$ , ossia è un anello.

Ciò fa sì che l'assioma (2b) si possa equivalentemente riscrivere sostituendone il conseguente con  $(A \Delta B) \in \mathcal{E} \wedge (A \cap B) \in \mathcal{E}$ , come si fa spesso. In particolare, oltre che rispetto a  $\cup$ ,  $\cap$ ,  $\Delta$  e  $\setminus$ , un anello è chiuso rispetto a  $\cup_1^n$ ,  $\cap_1^n$  e  $\Delta_1^n$ , con  $n > 2$ ; la prova è sempre per induzione su  $n$ , tenendo conto della associatività di  $\cup$ ,  $\cap$  e  $\Delta$ .<sup>22</sup> Un anello è anche un semianello; infatti, sotto l'antecedente della (1c'), in un anello  $\mathcal{R}$  si può sempre scrivere  $A = A_1 \cup (A \setminus A_1)$ , ottenendo una decomposizione finita (a due componenti) di  $A$ , con  $A_2 =: A \setminus A_1 \in \mathcal{R}$  (perché in questo caso  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ). Infine, alla luce dell'assioma (2b) si comprende meglio il senso dell'assioma (1c): se  $A$  e  $A_1$  appartengono al semianello  $\mathcal{H}$ , la differenza  $A \setminus A_1$  (sotto  $\emptyset \neq A_1 \subset A$ ), pur *non* appartenendo necessariamente a  $\mathcal{H}$ , è esprimibile come (unione di) una decomposizione finita di insiemi di  $\mathcal{H}$  (se poi questa decomposizione constasse di un solo elemento di  $\mathcal{H}$ , allora  $\mathcal{H}$  sarebbe un anello).

La terza struttura di pre-misura di cui ci occupiamo, sulla solita famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  non vuota è quella cosiddetta di  **$\sigma$ -anello d'insiemi**. Un  $\sigma$ -anello è semplicemente un anello chiuso anche rispetto ad unioni numerabili, quindi rispetto ad unioni contabili; esso sarà qui genericamente denotato con  $\mathcal{S}$ . Gli assiomi di  $\sigma$ -anello sono pertanto i seguenti:

$$(5a) \quad \emptyset \in \mathcal{E};$$

$$(5b) \quad (A \in \mathcal{E} \wedge B \in \mathcal{E}) \Rightarrow ((A \setminus B) \in \mathcal{E});$$

$$(5c) \quad \text{se } A_1 \in \mathcal{E}, A_2 \in \mathcal{E}, \dots, \text{ allora } \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E},$$

dove ancora (5a) consegue da (5b). Che un  $\sigma$ -anello sia un anello segue banalmente facendo  $A_3 = A_4 = \dots = \emptyset$  nella (5c). Poiché inoltre per qualsiasi successione di insiemi  $\{B_i\}_{i=1,2,\dots}$  vale l'identità

$$(6) \quad \cap_{i=1}^{\infty} B_i = B \setminus \cup_{i=1}^{\infty} (B \setminus B_i),^{23}$$

<sup>21</sup> Tenendo conto delle definizioni (vedi App. Gen. A), si verifica che  $\Delta$  e  $\cap$  godono di tutte le proprietà formali dell'addizione e rispettivamente del prodotto di un anello algebrico commutativo; ad esempio, che  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  (distributività di  $\cap$  rispetto a  $\Delta$ ), oppure  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$  (associatività di  $\Delta$ ). Ciò rende conto della terminologia adottata per gli anelli d'insiemi.

<sup>22</sup> Invece la differenza  $\setminus$  non è associativa, perché  $(A \setminus B) \setminus C \subsetneq A \setminus (B \setminus C)$  se  $C \neq \emptyset$  (in caso contrario si ha una banale identità).

<sup>23</sup> Evidentemente, la (6) generalizza la prima identità data nella nota (<sup>19</sup>). Una identità del tipo (6) vale anche per unioni/intersezioni del tipo più generale, quando cioè l'indice  $i \equiv \iota$  corre su un insieme d'indici  $I \neq \emptyset$  e per il resto arbitrario. Si ha cioè: (6')  $\cap_{\iota \in I} B_\iota = B \setminus \cup_{\iota \in I} (B \setminus B_\iota)$ , ove ancora si è scritto  $\cup_{\iota \in I} B_\iota$  come  $B$ . La (6') si dimostra partendo dalle definizioni di  $\cup_{\iota \in I}$  e  $\cap_{\iota \in I}$  (vedi App. Gen. A), come è riassunto qui appresso (le  $\cup$  e le  $\cap$  che seguono in questa nota sottintendono  $\iota \in I$  al loro piede). Sia  $P_\iota \equiv x \in B_\iota$ ;  $B =: \cup B_\iota \leftrightarrow \exists \iota P_\iota$  dove  $B \leftrightarrow \exists \iota P_\iota$  è un'abbreviazione per  $B = \{x | \exists \iota (\iota \in I) P_\iota\}$ , e similmente nel seguito);  $C_\iota =: B \setminus B_\iota \leftrightarrow \exists \kappa P_\kappa \wedge \neg P_\iota$ ;  $Q_\iota \equiv x \in C_\iota \leftrightarrow x \in B \wedge \neg P_\iota$ ;  $C =: \cup C_\iota \leftrightarrow \exists \iota Q_\iota \leftrightarrow \exists \iota P_\iota \wedge \exists \kappa \neg P_\kappa$ ; allora  $B \setminus C \leftrightarrow \exists \iota P_\iota \wedge \neg (\exists \iota P_\iota \wedge \exists \kappa \neg P_\kappa) \leftrightarrow (\exists \iota P_\iota \wedge \neg \exists \iota P_\iota) \vee (\exists \iota P_\iota \wedge \neg \exists \iota \neg P_\iota) \leftrightarrow \exists \iota P_\iota \wedge \forall \iota P_\iota$  (perché  $\exists \iota P_\iota \wedge \neg \exists \iota P_\iota$  è falsa)  $\leftrightarrow (\cup B_\iota) \cap (\cap B_\iota) = \cap B_\iota$  (perché  $\cap B_\iota \subset \cup B_\iota$ ). Si conclude che  $B \setminus C = \cap B_\iota$ , qed.

dove per brevità si è scritto  $\cup_{i=1}^{\infty} B_i$  come  $B$ , applicando quest'ultima ad una sequenza  $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$  di insiemi di  $\mathcal{S}$  si conclude che  $\mathcal{S}$  è chiuso anche rispetto ad intersezioni numerabili, e quindi ad intersezioni contabili.

Una famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  per cui valgono gli assiomi (5a, 5b) e l'assioma che si ottiene sostituendo in (5c)  $\cup_{i=1}^{\infty}$  con  $\cap_{i=1}^{\infty}$  si dice un  $\delta$ -anello d'insiemi. Un  $\sigma$ -anello è un  $\delta$ -anello, ma in generale non vale il contrario. Si potrebbe proporre una notazione per il generico  $\delta$ -anello (come  $\mathcal{S}$  per il generico  $\sigma$ -anello); ma in pratica, i  $\delta$ -anelli non sono strutture di pre-misura molto importanti.

Evidentemente le definizioni delle strutture di pre-misura fin qui introdotte sarebbero vuote se gli antecedenti delle implicazioni in esse coinvolte non potessero essere soddisfatte: ad esempio, nel caso di un anello, se non esistesse in  $\mathcal{E}$  una famiglia finita di almeno due elementi. Questi casi sono sostanzialmente privi di interesse, e saranno esclusi nel seguito.

Tornando alla generica famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$ , sia  $E$  un suo insieme non vuoto (supponendo che ne esista uno) tale che  $A \cap E = A$  (o equivalentemente,  $A \subset E$ ) per ogni  $A \in \mathcal{E}$ , quindi tale che  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ . L'insieme  $E \in \mathcal{E}$  si dice allora (una) **unità di  $\mathcal{E}$** ; ma poiché come è evidente <sup>24</sup> non possono esistere unità di  $\mathcal{E}$  distinte, in tal caso  $E$  è l'unità di  $\mathcal{E}$ . Se appartiene a  $\mathcal{E}$ , l'insieme  $\cup_{A \in \mathcal{E}} A$ , che denoteremo brevemente come  $\cup(\mathcal{E})$ , è l'unità di  $\mathcal{E}$ . Se  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$  per qualche  $E \neq \emptyset$ , risulta  $E \in \mathcal{E}$  e  $(A \in \mathcal{E}) \Leftrightarrow (A \subset E)$ ; quindi  $\mathcal{E}$  ha  $E$  come unità, e  $E = \cup(\mathcal{E})$ .

Un semianello [anello,  $\sigma$ -anello,  $\delta$ -anello] con unità  $E$  si dice anche una **semialgebra [algebra,  $\sigma$ -algebra,  $\delta$ -algebra] (di insiemi) su  $E$** . Per denotare una semialgebra [algebra,  $\sigma$ -algebra,  $\delta$ -algebra] generica, useremo la coppia formata dal simbolo del corrispondente semianello [anello,  $\sigma$ -anello,  $\delta$ -anello] e da quello dell'unità: ad esempio  $\{\mathcal{R}, E\}$  è l'algebra di anello  $\mathcal{R}$  e unità  $E$ . Tuttavia una  $\sigma$ -algebra  $\{\mathcal{S}, E\}$  è più comunemente detta un'**algebra di Borel**, o **B-algebra**, su  $E$ .

In una famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  con unità  $E$  valgono le seguenti **formule generalizzate di De Morgan**, duali tra loro:

$$(7_1) \quad \cup_{i \in I} A_i = \mathbf{C}(\cap_{i \in I} \mathbf{C}A_i),$$

$$(7_2) \quad \cap_{i \in I} A_i = \mathbf{C}(\cup_{i \in I} \mathbf{C}A_i).$$

Qui  $I$  è un insieme d'indici arbitrario <sup>25</sup>,  $A_i \in \mathcal{E} \forall i \in I$ , e  $\mathbf{C}$  denota la complementazione rispetto a  $E$ , o  $E$ -complementazione. Le  $(7_1, 7_2)$  provano che una  $\sigma$ -algebra su  $E$  è una  $\delta$ -algebra su  $E$ , e

<sup>24</sup> Dette  $E_1$  e  $E_2$  due unità di  $\mathcal{E}$ , per la definizione sarebbe al contempo  $E_1 \subset E_2$  e  $E_1 \supset E_2$ , ossia  $E_1 = E_2$ .

<sup>25</sup> In questo caso  $I$  può essere vuoto, e allora come sappiamo  $\cup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ ,  $\cap_{i \in \emptyset} A_i = E$ . Facendo  $I = \emptyset$  nelle  $(7_1, 7_2)$  si ha infatti  $\emptyset = E \setminus E$ , e rispettivamente  $E = E \setminus \emptyset$ . Se  $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ , sappiamo che  $E = \cup(\mathcal{E})$ ; allora la  $(7_2)$  è un caso particolare della più generale  $(6')$  della nota <sup>(22)</sup>.

viceversa; non occorre pertanto distinguere tra queste due nozioni, come occorre invece distinguere tra le nozioni di  $\sigma$ -anello e  $\delta$ -anello, la prima in generale più forte della seconda.

Un anello finito è automaticamente un  $\sigma$ -anello, cioè anelli e  $\sigma$ -anelli finiti sono la stessa cosa. Denotando con  $\mathcal{Q}(E)$  la famiglia dei sottoinsiemi finiti di  $E$ , risulta che anche  $\mathcal{Q}(E)$  è un anello, e  $\{\mathcal{Q}(E), E\}$  è un'algebra sse  $E$  è finito. Anche  $\mathcal{P}(E)$  è un anello; quindi  $\{\mathcal{P}(E), E\}$  è un'algebra. «In generale, una famiglia (non vuota) di insiemi  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E \neq \emptyset)$  (cioè costituita da sottoinsiemi di  $E$ , ma non necessariamente da *tutti* quei sottoinsiemi) che sia chiusa rispetto a  $\cup$  e alla  $E$ -complementazione, è un'algebra su  $E$ , e viceversa». <sup>26</sup> Come corollario, «una famiglia  $\mathcal{E}$  come la precedente, ma chiusa anche rispetto alle unioni numerabili è una B-algebra su  $E$ , e viceversa.» <sup>27</sup> Uno **spazio di Borel**, o **B-spazio**, è un insieme  $E \neq \emptyset$  equipaggiato con un  $\sigma$ -anello  $\mathcal{S}$  di suoi sottoinsiemi contenente  $E$ ,  $E \in \mathcal{S}$ ; per modo che la coppia  $\{\mathcal{S}, E\}$  è una B-algebra. Gli elementi di  $\mathcal{S}$  si dicono allora anche **B-insiemi**, o **boreliani**, di  $E$ . Più in generale, uno **spazio misurabile** è un insieme  $X \neq \emptyset$  equipaggiato con un  $\sigma$ -anello  $\mathcal{S}$  di suoi sottoinsiemi *non* contenente  $X$ ,  $X \notin \mathcal{S}$ , ma tale che esista una sottofamiglia (non necessariamente contabile)  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$  per la quale  $X = \cup(\mathcal{B})$ . Gli elementi di  $\mathcal{S}$  si dicono allora **insiemi misurabili di  $X$** . Un B-spazio  $E$  equipaggiato con  $\mathcal{S}$  è uno spazio misurabile (equipaggiato con lo stesso  $\mathcal{S}$ ) per il quale  $\mathcal{B} = \{E\}$  (e quindi  $E \in \mathcal{S}$ , in forza della  $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}$ ); ma esistono spazi misurabili che *non* sono B-spazi. Un notevole esempio in questo senso è quello di un insieme  $X$  *più che numerabile* equipaggiato con il  $\sigma$ -anello  $\mathcal{S}$  di tutti e soli i sottoinsiemi contabili di  $X$ ; quindi  $X \notin \mathcal{S}$  (si dimostra che la famiglia  $\mathcal{S}$  di sottoinsiemi di tale  $X$  è effettivamente un  $\sigma$ -anello).

Tra le strutture di pre-misura fin qui introdotte (semianelli, anelli,  $\sigma$ -anelli,  $\delta$ -anelli e relative algebre), quelle di più diretto interesse applicativo sono (almeno) anelli. La ragione di ciò è giustificata dal seguente teorema:

T1. «Ogni famiglia di insiemi non vuota  $\mathcal{E}$  può essere ampliata in unico **anello minimale su  $\mathcal{E}$** , diciamo  $\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{E})$ , cioè in un anello includente  $\mathcal{E}$  ed incluso in ogni anello che include  $\mathcal{E}$ ; in simboli,  $\forall \mathcal{E} (\neq \emptyset) \exists! \mathcal{R}^\wedge \{ (\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^\wedge) \wedge \forall \mathcal{R} \{ (\mathcal{E} \subset \mathcal{R}) \Rightarrow (\mathcal{R}^\wedge \subset \mathcal{R}) \} \}$ ».

Dim: L'unicità di  $\mathcal{R}^\wedge = \mathcal{R}^\wedge(\mathcal{E})$  scende subito dalla sua definizione. Per dimostrarne l'esistenza, premettiamo il lemma: (°) «Per ogni insieme di indici  $I$  non vuoto, se  $\mathcal{R}_i$  è un anello  $\forall i \in I$ , allora

<sup>26</sup> Il "viceversa" di questo asserto è ovvio. Per quanto riguarda l'implicazione diretta, per arbitrari  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B \in \mathcal{E}$  vale la formula di De Morgan  $\mathbf{C}(A \cup B) = A \cap \mathbf{C}B = A \setminus B$ , il cui 1° membro appartiene per ipotesi a  $\mathcal{E}$ ; quindi  $A \setminus B$  appartiene a  $\mathcal{E}$ . Essendo poi  $\mathcal{E}$  non vuota per ipotesi,  $\emptyset \in \mathcal{E}$ ; e infine anche  $E = A \cup \mathbf{C}A \in \mathcal{E}$ . In conclusione  $\mathcal{E}$  è un'algebra su  $E$ , qed.

<sup>27</sup> Può essere utile riassumere qui le proprietà di una B-algebra  $\{\mathcal{S}, E\}$  (non facendo caso alle ridondanze della lista): 1)  $\emptyset \in \mathcal{S}$ ; 2)  $E \in \mathcal{S}$ ; 3)  $\mathcal{S}$  è chiuso rispetto alle differenze; 4)  $\mathcal{S}$  è chiuso rispetto alle unioni contabili e alle intersezioni contabili; 5)  $\mathcal{S}$  è chiuso rispetto alla  $E$ -complementazione.

$\mathcal{R} =: \bigcap_{I \in I} \mathcal{R}_I$  è un anello.»<sup>28</sup> Poniamo adesso  $\Sigma = \Sigma(\mathcal{E}) =: \{\mathcal{R} \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\cup(\mathcal{E}))\}$ , ove  $\Sigma \neq \emptyset$  perché contiene l'anello  $\mathcal{P}(\cup(\mathcal{E}))$ , e  $\underline{\mathcal{R}} = \underline{\mathcal{R}}(\mathcal{E}) =: \bigcap_{\mathcal{R} \in \Sigma} \mathcal{R}$ <sup>29</sup>. In forza del lemma (°),  $\underline{\mathcal{R}}$  è un anello per il quale, avendo scritto per brevità  $U$  in luogo di  $\cup(\mathcal{E})$ ,  $\mathcal{E} \subset \underline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{P}(U)$ , quindi  $\underline{\mathcal{R}} \in \Sigma$ . Proviamo ora che  $\underline{\mathcal{R}}$  è proprio l'anello minimale  $\hat{\mathcal{R}}$  che stiamo cercando. Sia  $\mathcal{R}$  un anello includente  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}$ ; poiché anche  $\mathcal{P}(U)$  include  $\mathcal{E}$ , risulta  $\mathcal{E} \subset (\mathcal{R} \cap \mathcal{P}(U))$ . Ma anche  $\mathcal{P}(U)$  è un anello (nonché un'algebra con unità  $U$ ), quindi  $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}(U)$  è un anello, ed anche un anello di  $\Sigma$ . Ora ogni anello di  $\Sigma$  include  $\underline{\mathcal{R}}$ , ( $\mathcal{R} \in \Sigma \Rightarrow (\underline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R})$ ), dunque  $\underline{\mathcal{R}} \subset (\mathcal{R} \cap \mathcal{P}(U)) \subset \mathcal{R}$ . Scrivendo in simboli questo risultato, abbiamo:  $(\mathcal{E} \subset \underline{\mathcal{R}}) \wedge \forall \mathcal{R} \{(\mathcal{E} \subset \mathcal{R}) \Rightarrow (\underline{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R})\}$ ; e confrontandolo con la definizione di  $\hat{\mathcal{R}}$ , si vede che  $\underline{\mathcal{R}} = \hat{\mathcal{R}}$ , qed.#

In modo completamente analogo si potrebbe dimostrare l'esistenza e l'unicità del  $\sigma$ -anello [dell'algebra, della  $\sigma$ -algebra] **minimale su  $\mathcal{E}$** , ancora da identificare con un'analogia intersezione di  $\sigma$ -anelli [di algebre, di  $\sigma$ -algebre], in quanto il lemma (°) (vedi Dim. di T1) è immediatamente estendibile alle sopraddette strutture, con dimostrazione analoga.

Pur sapendo che  $\hat{\mathcal{R}}(\mathcal{E})$  esiste unico, la sua costruzione esplicita è in generale piuttosto complicata. Le difficoltà si riducono drasticamente, tuttavia, se  $\mathcal{E}$  è supposta a priori essere un semianello. Non giustificheremo qui questa affermazione, limitandoci ad enunciare il teorema che la descrive con precisione:

T2. «Se  $\mathcal{H}$  è un semianello, l'anello minimale su  $\mathcal{H}$ ,  $\hat{\mathcal{R}}(\mathcal{H})$ , è la famiglia degli insiemi rappresentabili come (unioni di) loro decomposizioni finite formate da elementi di  $\mathcal{H}$ .»

Quanto precede perde parte della sua astrattezza se si considera che (come abbiamo anticipato, e come si può verificare) la famiglia dei rettangoli che più sopra abbiamo denotato con  $\mathcal{M}$  è un semianello, e che la famiglia dei corrispondenti insiemi elementari, che abbiamo denotato con  $\mathcal{M}'$ , è l'anello minimale su  $\mathcal{M}$ .

### C.3) L-MISURA E J-MISURA ASTRATTE

Veniamo ora all'altro aspetto fondativo della teoria assiomatica della misura, che è quello dell'assegnazione di una misura sulle famiglie di insiemi con struttura di pre-misura fin qui introdotte e discusse. Ricordiamo che se una famiglia di insiemi  $\mathcal{E}$  contiene  $\emptyset$  e qualche unione

<sup>28</sup> Se infatti  $A \in \mathcal{R}$  e  $B \in \mathcal{R}$ , allora  $A \in \mathcal{R}_I$  e  $B \in \mathcal{R}_I$ ,  $\forall I \in I$ , quindi  $A \cup B \in \mathcal{R}_I$  e  $A \setminus B \in \mathcal{R}_I$ ,  $\forall I \in I$ , cioè  $A \cup B \in \mathcal{R}$  e  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ , qed.

<sup>29</sup> Si noti che  $\mathcal{P}(\cup(\mathcal{E}))$  è la più grande algebra di insiemi che si può costruire a partire da elementi di insiemi di  $\mathcal{E}$ , e che  $\cup(\mathcal{E})$  è la sua unità. Ovviamente  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\cup(\mathcal{E}))$ .

finita ( $n \geq 2$ ) [contabile] di suoi elementi disgiunti, una possibile misura  $\mu$  su di essa è (i) una funzione a valori reali non-negativi possibilmente non-limitata, e (ii) additiva [ $\sigma$ -additiva] (quindi nulla in  $\emptyset$ ). È allora evidente che se  $\mu$  è definita su  $\mathcal{E}$  sotto le condizioni (i,ii), anche  $K\mu$ , con  $K =:$  costante reale  $> 0$ , è una possibile misura su  $\mathcal{E}$ . Se una misura su  $\mathcal{E}$  è finita e  $> 0$  in un suo specifico insieme, essa può dunque “normalizzarsi” in modo da diventare  $= 1$  in quell’insieme mediante una conveniente scelta del fattore  $K$ . In particolare, se  $\mathcal{E}$  (con misura  $\mu$ ) ha unità  $E$ , e se  $\mu(E)$  è finita e  $> 0$ , si può sempre richiedere che  $\mu(E) = 1$ . Una famiglia  $\mathcal{E}$  (contenente  $\emptyset$ ) equipaggiata con la misura  $\mu$  si denota  $\{\mathcal{E}, \mu\}$ . Ovviamente, la stessa famiglia  $\mathcal{E}$  può ricevere diverse misure  $\mu, \mu', \dots$ . Gli insiemi  $A$  della  $\mathcal{E}$  di  $\{\mathcal{E}, \mu\}$  per cui  $\mu(A) = 0$  si dicono **di misura nulla** o anche **trascurabili**. Se  $\mathcal{E}$  ha unità  $E$  ed è equipaggiata con la misura  $\mu$ , la terna  $\{\mathcal{E}, E, \mu\}$  si dice uno **spazio-misura** (e si potrà sempre supporre che se  $\mu(E)$  è finita sia anche  $= 1$ ). Se una relazione su elementi dell’unità  $E$  di uno spazio-misura  $\{\mathcal{E}, E, \mu\}$  vale per tutti gli elementi di  $E$  salvo che per quelli di un suo sottoinsieme di misura nulla, si usa dire che quella relazione vale **quasi ovunque su  $E$** .<sup>30</sup>

Con le sopravviste richieste, e supponendo che tutti gli insiemi a cui si fa riferimento (esplicito o no) in questo paragrafo appartengano alla famiglia  $\mathcal{E}$  sulla quale è definita la misura  $\mu$ , si dimostra che:

T<sub>a</sub>. « $\mu$  è monotona non-decrescente (cioè “ $A \subset B$ ” implica “ $\mu(A) \leq \mu(B)$ ”);»

T<sub>b</sub>. « $\mu$  è sottrattiva (cioè “ $A \subset B$  con  $\mu(A) < \infty$ ” implica “ $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ ”);»

T<sub>c</sub>. «se  $\{B_k\}$  è un ricoprimento contabile<sup>31</sup> di  $A$ , allora  $\mu(A) \leq \sum \mu(B_k)$  (questo risultato implica il carattere monotono non-decrescente di  $\mu$ , e inoltre, valendo in particolare se  $\{B_k\}$  è una decomposizione contabile di  $A$ , che  $\mu$  è sub- $\sigma$ -additiva);»

T<sub>d</sub>. «se  $\{B_k\}$  è una successione la cui unione è inclusa in  $A$ , allora  $\sum \mu(B_k) \leq \mu(A)$ ;»

T<sub>e</sub>. «se  $\{B_k\}$  è una successione non-decrescente [non-crescente] (cioè,  $B_i \subset B_{i+1}$  [ $B_i \supset B_{i+1}$ ] per ogni  $i$ ),  $\mu(\cup B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k)$  [ $\mu(\cap B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k)$ ];».

La misura  $\mu(A)$  si dice  $\sigma$ -finita se  $A$  ammette un ricoprimento contabile i cui elementi hanno misura  $\mu$  finita; una misura  $\mu$  si dice  $\sigma$ -finita [finita] se è  $\sigma$ -finita [finita] per ogni  $A$ . Ovviamente “ $\mu(A)$  è finita”  $\Rightarrow$  “ $\mu(A)$  è  $\sigma$ -finita” e “ $\mu$  è finita”  $\Rightarrow$  “ $\mu$  è  $\sigma$ -finita”. Usando le ultime definizioni, possiamo concludere questo paragrafo enunciando il seguente potente teorema sul problema del prolungamento della misura:

<sup>30</sup> Per lo più abbreviato in q.o.; a.e. (almost everywhere) nei testi inglesi, p.p. (presque partout) nei testi francesi, ecc.

<sup>31</sup> Per l’ipotesi iniziale, anche  $\cup B_k$  appartiene dunque a  $\mathcal{E}$ . Simili conseguenze della stessa ipotesi valgono nel seguito del paragrafo.

T<sub>f</sub>. «sia  $\mu$  una misura su un anello  $\mathcal{R}$ , e  $\mathcal{S}^\wedge = \mathcal{S}^\wedge(\mathcal{R}) (\supset \mathcal{R})$  il  $\sigma$ -anello generato da  $\mathcal{R}$ . Allora esiste una misura  $\mu^\wedge$  su  $\mathcal{S}^\wedge$  che prolunga  $\mu$ . Se inoltre  $\mu$  è  $\sigma$ -finita, il prolungamento  $\mu^\wedge$  su  $\mathcal{S}^\wedge$  è unico, e  $\mu^\wedge$  è a sua volta  $\sigma$ -finita.»

Nel seguito ci limiteremo a considerare misure su famiglie di insiemi che siano *almeno* un semianello. Sia dunque  $\mathcal{H}$  un semianello equipaggiato con la misura  $m$ . Poiché come sappiamo l'anello minimale su  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$ , è costituito dagli insiemi rappresentabili come decomposizioni finite formate da elementi di  $\mathcal{H}$ , se  $A (\in \mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})) = \cup_{k=1}^n A_k (\in \mathcal{H})$  è una tale decomposizione finita, è naturale prolungare  $m$  a  $\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$  secondo la prescrizione:

$$(1) \quad m'(A) =: \sum_{k=1}^n m(A_k).$$

Questa funzione d'insieme  $m'$ , definita su  $\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$ , è effettivamente non-negativa e additiva, e coincide con  $m(A)$  se  $A \in \mathcal{H}$ . Inoltre si dimostra facilmente che  $m'$  ha carattere intrinseco, cioè *non* dipende dalla particolare decomposizione adottata per la rappresentazione di  $A$ . Infine, se  $m$  (su  $\mathcal{H}$ ) è finita, anche  $m'$  (su  $\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$ ) è finita. Precisamente in questo caso rientra il prolungamento della misura (finita) sul semianello  $\mathcal{M}$  dei rettangoli di  $\mathbb{R}^2$  all'anello  $\mathcal{M}'$  dei corrispondenti insiemi elementari.

Si può a questo punto prevedere come si debba definire una misura di Lebesgue “in senso astratto” partendo dalla misura  $m$  su una data semialgebra  $\{\mathcal{H}, E\}$  con  $m(E)$  finito ( $= 1$ ). Per cominciare, per ogni  $A \in \mathcal{P}(E)$  consideriamo il reale non-negativo  $e \leq 1$

$$(2) \quad \mu^*(A) =: \inf_{A \subset \cup B_i} (\sum_i m(B_i)),$$

dove l'infimo è preso su tutti i ricoprimenti contabili di  $A$  formati con elementi (non necessariamente disgiunti) di  $\mathcal{H}$  (dove  $\cup B_i$  non è necessariamente un “insieme elementare” di  $\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$ , come sarebbe vero se si trattasse di un'unione finita).  $\mu^*(A)$  si dice **misura esterna di**  $A \in \mathcal{P}(E)$ , e ha molte delle proprietà di una misura (ma non tutte). Dimostriamo innanzitutto il teorema

T1. «se  $A_{1,2}$  (leggi *alternativamente* i pedici separati dalla virgola) sono elementi arbitrari di  $\mathcal{P}(E)$  e  $A =: A_1 \cup A_2$ , allora  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ .»

Dim. In virtù della definizione di  $\inf$ , per  $\varepsilon > 0$  arbitrario esistono ricoprimenti contabili di  $A_{1,2}$ , diciamo  $\cup B_{1i,2j} \supset A_{1,2}$  (ove tutti i  $B_{1i,2j}$  appartengono a  $\mathcal{H}$ ) per i quali  $\mu^*(A_{1,2}) + \varepsilon/2 \geq \sum m(B_{1i,2j})$ , e quindi  $\mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \varepsilon \geq \sum m(B_{1i}) + \sum m(B_{2j}) \geq \sum m(C_{ij})$ , avendo posto  $C_{ij} =: B_{1i} \cup B_{2j}$ . D'altra

parte è  $A \subset (\cup B_{1i}) \cup (\cup B_{2j}) = \cup C_{ij}$ <sup>32</sup>, e quindi  $\mu^*(A) \leq \sum m(C_{ij})$ ; per cui  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \varepsilon$ , cioè la tesi per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ . #

Essenzialmente con la stessa procedura, questo risultato può estendersi al caso in cui  $A \in \mathcal{P}(E)$  sia uguale a (o a maggior ragione incluso in) una unione finita, o anche numerabile, di elementi arbitrari di  $\mathcal{P}(E)$ . Vale a dire,

$$(3) \quad (A \subset \cup A_i) \Rightarrow (\mu^*(A) \leq \sum \mu^*(A_i)),$$

dove  $\{A_i\}$  è una arbitraria famiglia contabile di elementi di  $\mathcal{P}(E)$ . La (3) corrisponde al teorema (T<sub>c</sub>) della precedente lista di teoremi (T<sub>a</sub>) ÷ (T<sub>f</sub>) cui soddisfa una *misura*; quindi anche  $\mu^*$  è monotona non-decrescente e sub- $\sigma$ -additiva su  $\mathcal{P}(E)$ . Inoltre  $\mu^*(\emptyset) = 0$  e  $\mu^*(E) = 1$ ; e questo basta per stabilire che i valori di  $\mu^*$  sono tutti in  $[0,1]$ . Tuttavia questo *non* basta per considerare  $\mu^*$  come possibile misura su  $\mathcal{P}(E)$ ; né è possibile, sfruttando la sola definizione di  $\mu^*$ , migliorare ai nostri fini la stima (3), cioè trasformarla in una implicazione simile, valida per arbitrari  $A \in \mathcal{P}(E)$  e  $\{A_i\} \subset \mathcal{P}(E)$ , nel cui antecedente il segno  $\subset$  sia sostituito con  $=$  e gli  $A_i$  siano supposti disgiunti, e nel cui conseguente il segno  $\leq$  sia sostituito con il segno  $=$ . Occorre quindi, se possibile, identificare una sottofamiglia propria di  $\mathcal{P}(E)$ , diciamo  $\mathcal{P}'(E)$ , nella quale

$$(3bis) \quad (A = \cup A_i, \text{ con gli } A_i \text{ disgiunti tra loro}) \Rightarrow (\mu^*(A) = \sum \mu^*(A_i));$$

e quindi nella quale  $\mu^*$  sia a tutti gli effetti una misura. Come vedremo questa sottofamiglia esiste e può essere precisamente definita; inoltre essa risulta essere un anello, e addirittura un  $\sigma$ -anello.

Il reale non-negativo e  $\leq 1$

$$(4) \quad \mu_*(A) =: 1 - \mu^*(\mathbf{C}A),$$

ove al solito  $\mathbf{C}$  denota E-complementazione, si dice **misura interna** di  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Come  $\mu^*$ ,  $\mu_*$  è monotona non-decrescente (infatti  $A' \subset A$  equivale a  $\mathbf{C}A \subset \mathbf{C}A'$ ), e ha gli stessi valori di  $\mu^*$  in  $\emptyset$  e in  $E$ ; quindi i suoi valori sono anch'essi in  $[0,1]$ . Inoltre è subito provato che  $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$  per qualunque  $A$  di  $\mathcal{P}(E)$ : infatti  $A \cup \mathbf{C}A = E$ , e quindi per la (3)  $\mu^*(A) + \mu^*(\mathbf{C}A) \geq \mu^*(E) = 1$ . Infine nemmeno  $\mu_*$  può provarsi essere additiva su  $\mathcal{P}(E)$  sulla base della sua definizione. Insomma, benché molto simili,  $\mu_*$  e  $\mu^*$  sono funzioni d'insieme diverse, in quanto (si può dimostrare) in  $\mathcal{P}(E)$  esistono insiemi  $A$  per cui  $\mu_*(A) < \mu^*(A)$ .

$A \in \mathcal{P}(E)$  si dice **L-misurabile**, con riferimento alla semialgebra con misura  $\{\mathcal{H}, E, m\}$  (non si dimentichi che la definizione di  $\mu^*$  e  $\mu_*$  comporta questi dati), se  $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ ; e il valore comune delle due misure esterna ed interna è assunto come **L-misura** (sempre con riferimento alla

<sup>32</sup> L'ultima uguaglianza si giustifica ricordando che la proprietà associativa dell'unione vale per unioni qualsiasi, quindi anche contabili (vedi Bourbaki, Théorie des Ensembles, EII 24, 2.).

semialgebra con misura  $\{\mathcal{H}, E, m\}$  di  $A$ ,  $\mu(A)$ . Si noti che queste definizioni *ripercorrono* alla lettera quelle del caso in cui si partiva dalla semialgebra dei rettangoli inclusi nel quadrato unitario chiuso. È facile verificare che gli insiemi dell'algebra  $\{\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H}), E\}$ , con la misura  $m'$  estesa di  $m$  (vedi la (1)), sono  $L$ -misurabili, e che per essi  $\mu = m'$ . Dimostriamo ora che «la sottofamiglia di  $\mathcal{P}(E)$  degli insiemi  $L$ -misurabili (sempre con riferimento a  $\{\mathcal{H}, E, m\}$ ), diciamo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{\mathcal{H}, E, m\})$ , è un anello». A questo scopo utilizzeremo il teorema seguente:

T2. «“ $A \in \mathcal{P}(E)$  è  $L$ -misurabile”  $\Leftrightarrow$  “esiste  $B \in \{\mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H}), E\}$  per cui  $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  arbitrario”». (Qui  $L$ -misurabile sottintende sempre “con riferimento a  $\{\mathcal{H}, E, m\}$ ”).<sup>33</sup>

Dim. Se  $A_{1,2} \in \mathcal{L}$  (leggi alternativamente i due pedici), esistono  $B_{1,2} \in \mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$  per cui  $(^\circ)$   $\mu^*(A_{1,2} \Delta B_{1,2}) < \varepsilon/2$ . Basta allora provare che  $A =: A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{L}$ , perché in  $\mathcal{P}(E)$  una unione può sempre esprimersi in termini di sole differenze.<sup>34</sup> In effetti, posto  $B =: B_1 \setminus B_2$  (che  $\in \mathcal{R}^\wedge(\mathcal{H})$ ), risulta  $(^+)$   $A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ , e quindi, per la  $(^\circ)$ ,  $\mu^*(A \Delta B) \leq \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$ ; cioè  $A \in \mathcal{L}$ , e dunque  $\mathcal{L}$  è un anello, qed. #

Ovviamente  $E$  è l'unità dell'anello  $\mathcal{L}$ , e così  $\{\mathcal{L}, E\}$  è un'algebra, la  **$L$ -algebra generata da  $\{\mathcal{H}, E, m\}$** . Dimostriamo ora il teorema

T3. « $\mu$  è additiva su  $\mathcal{L}$ .»

Dim. Siano  $A_{1,2}$  e  $B_{1,2}$  definiti come nel paragrafo precedente, con l'ulteriore richiesta che  $A_1$  e  $A_2$  siano disgiunti. Converrà riscrivere le due disuguaglianze  $(^\circ)$  (del paragr. preced.) con  $\varepsilon/6$  al posto di  $\varepsilon/2$ . Per la disuguaglianza  $(^*)$  di nota (<sup>32</sup>) esse implicano che  $|\mu^*(A_{1,2}) - m'(B_{1,2})| < \varepsilon/6$ . Ad esempio usando il metodo delle tavole di appartenenza, si prova che per  $A_1$  e  $A_2$  disgiunti vale la  $B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ ; si trova così che  $m'(B_1 \cap B_2) \leq \varepsilon/3$ . Posto  $B =: B_1 \cup B_2$ , segue che  $m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 2\varepsilon/3$ . D'altra parte, posto  $A =: A_1 \cup A_2$ , abbiamo  $(^{++})$   $A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ ,<sup>35</sup> quindi  $\mu^*(A \Delta B) \leq \varepsilon/3$ . Ancora in forza della  $(^*)$  di nota (<sup>32</sup>), risulta  $m'(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A \Delta B)$ ; quindi  $\mu^*(A) \geq m'(B) - \mu^*(A \Delta B) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - \varepsilon$ , ossia  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$  per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ . Come sappiamo la disuguaglianza opposta scende dalla definizione di  $\mu^*$ , cioè  $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$ . La tesi del teorema si ottiene per induzione sul numero dei componenti disgiunti, partendo dal caso appena discusso in cui essi sono due. #

<sup>33</sup> La parte  $\Leftarrow$  di questa equivalenza si prova facilmente partendo dalla  $(^*)$   $|\mu^*(C) - \mu^*(D)| \leq \mu^*(C \Delta D)$ , valida per insiemi  $C, D$  arbitrari di  $\mathcal{P}(E)$ . Dall'ipotesi a destra dell'equivalenza scende infatti che  $|\mu^*(A) - m'(B)| < \varepsilon/2$ ; e similmente, che  $|\mu^*(\mathbf{C}A) - m'(\mathbf{C}B)| < \varepsilon/2$ . Ma  $m'(B) + m'(\mathbf{C}B) = 1$ , e si conclude che  $|\mu^*(A) + \mu^*(\mathbf{C}A) - 1| < \varepsilon$ , cioè  $\mu^*(A) = 1 - \mu^*(\mathbf{C}A) = \mu_*(A)$ , qed. La prova della  $(^*)$  è elementare, ed è lasciata al lettore. La dimostrazione della parte  $\Rightarrow$  della stessa equivalenza è invece più laboriosa, pur non essendo difficile, ed è qui tralasciata per brevità.

<sup>34</sup> Infatti  $A \cup B = \mathbf{C}(\mathbf{C}A \setminus (\mathbf{C}A \setminus \mathbf{C}B))$ , ove  $\mathbf{C}$  è la  $E$ -complementazione, che è a sua volta una differenza.

<sup>35</sup> La  $(^{++})$ , così come la  $(^+)$  del paragrafo precedente, valgono in generale (cioè per insiemi  $A_1 \div A_4$  arbitrari), e si può usare il metodo delle tavole di appartenenza per accertarlo.



Dimostriamo infine il teorema

T4. «equipaggiata con la misura  $\mu$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{\mathcal{H}, E, m\})$  è un  $\sigma$ -anello, e quindi  $\{\mathcal{L}, E\}$  è una B-algebra.»

Dim. Useremo allo scopo un semplice artificio. Sia  $A_1, A_2, \dots$  una arbitraria sequenza di insiemi di  $\mathcal{L}$ ; allora anche  $A'_1, A'_2, \dots$ , con  $A'_1 =: A_1, A'_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, A'_n =: A_n \setminus (\cup_{k=1}^{n-1} A_k), \dots$  lo è, ma i suoi insiemi sono disgiunti. Inoltre  $\cup_{k=1}^n A'_k = \cup_{k=1}^n A_k$  per ogni  $n \geq 1$ , quindi anche  $\cup_{k=1}^{\infty} A'_k = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ . Si ha così, avendo posto  $A =: \cup_{k=1}^{\infty} A_k (\supset \cup_{k=1}^n A_k)$ , e tenendo conto della additività di  $\mu$ ,  $\sum_{k=1}^n \mu(A'_k) = \mu(\cup_{k=1}^n A'_k) = \mu^*(\cup_{k=1}^n A_k) \leq \mu^*(A) \leq 1$ . Ne viene che la serie a termini non negativi  $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A'_k)$  converge (ad un limite  $\leq 1$ ), ossia che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $N$  per cui  $\sum_{k>N}^{\infty} \mu(A'_k) < \varepsilon/2$ . D'altra parte  $C_N =: \cup_{k=1}^N A'_k \in \mathcal{L}$ , e quindi (teorema (T2)) esiste un  $B_N \in \{\mathcal{R}^{\wedge}(\mathcal{H}), E\}$  per cui  $\mu^*(C_N \Delta B_N) < \varepsilon/2$ . Se si pone  $D_N =: \cup_{k>N} A'_k$ ,  $A = C_N \cup D_N$ . Inoltre  $(C_N \cup D_N) \Delta B_N \subset (C_N \Delta B_N) \cup D_N$ <sup>36</sup>, per cui  $\mu^*(A \Delta B_N) \leq \mu^*(C_N \Delta B_N) + \mu^*(D_N) \leq \mu^*(C_N \Delta B_N) + \sum_{k>N}^{\infty} \mu(A'_k) < \varepsilon$ , e si conclude che  $A \in \mathcal{L}$ . Il fatto che  $\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^n \mu^*(A_k)$ , dove  $\{A_k\}_{k=1, \dots, n}$  è una decomposizione finita di  $A$  (vedi alla fine del precedente paragrafo) si generalizza facilmente al caso di una decomposizione contabile; e poiché anche in questo caso vale, come sappiamo, la disuguaglianza inversa, si ha  $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$  anche per decomposizioni contabili di  $A$ . Vale a dire,  $\mu$  è  $\sigma$ -additiva, qed. #

In definitiva,  $\mathcal{L}$  è precisamente la sottofamiglia  $\mathcal{P}'(E)$  di  $\mathcal{P}(E)$  che ci eravamo proposti di identificare. Una B-algebra  $\{\mathcal{S}, E\}$  equipaggiata con una misura  $\sigma$ -additiva  $\mu$  si dice uno **spazio di Lebesgue**. Questo spazio è un caso particolare di spazio-misura e si denota  $\{\mathcal{S}, E, \mu\}$ . Si ricordi che abbiamo costruito tale spazio di Lebesgue partendo dalla semialgebra con misura  $\{\mathcal{H}, E, m\}$ , e che il suo  $\sigma$ -anello  $\mathcal{S}$  è risultato l'insieme  $\mathcal{L}$  delle funzioni L-misurabili. Vi è dunque un rapporto genetico *univoco* da  $\{\mathcal{H}, E, m\}$  a  $\{\mathcal{S} = \mathcal{L}, E, \mu\}$ , o come si usa scrivere in questi casi,  $\{\mathcal{H}, E, m\} \mapsto \{\mathcal{L}, E, \mu\}$ . A buona ragione,  $\{\mathcal{L}, E, \mu\}$  può dunque dirsi **spazio di Lebesgue generato da  $\{\mathcal{H}, E, m\}$** , o anche **L-prolungamento di  $\{\mathcal{H}, E, m\}$** .

Anche del prolungamento alla Jordan (**J-prolungamento**) di  $\{\mathcal{H}, E, m\}$  si può dare una versione astratta. Poiché ogni semianello di insiemi  $\mathcal{H}$ , con misura  $m$ , può ampliarsi nel relativo anello minimale  $\mathcal{R}^{\wedge}(\mathcal{H})$ , e la misura  $m$  prolungarsi ad esso mediante la (1), è naturale partire da un anello  $\mathcal{R}$  con misura  $m'$ , che scriveremo per semplicità ancora  $m$  perché la misura di  $\mathcal{H}$  non compare nei ragionamenti che seguono, e che supporremo *finita*. Un insieme  $A \in \mathcal{P}(E)$  sarà detto

<sup>36</sup> Questa inclusione vale per ogni terna arbitraria di insiemi, come si può dimostrare col solito metodo delle tavole di appartenenza.

**J-misurabile** (con riferimento a  $\mathcal{R}$ ) se esistono insiemi di  $\mathcal{R}$ ,  $A'$  e  $A''$ , per i quali  $A' \subset A \subset A''$ , e contemporaneamente  $m(A'' \setminus A') < \varepsilon$  con  $\varepsilon > 0$  arbitrario.<sup>37</sup> Vale allora il teorema

T5. «La famiglia degli insiemi J-misurabili, diciamo  $\mathcal{R}^*$ , è un anello (ovviamente è  $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^*$ , perché se  $A \in \mathcal{R}$  si può prendere  $A' = A'' = A$  e quindi  $A \in \mathcal{R}^*$ ).»

Dim. Siano  $A_{1,2}$  (leggi alternativamente i pedici) entrambi appartenenti a  $\mathcal{R}^*$  e siano  $A_{1,2}'$  e  $A_{1,2}''$  gli insiemi di  $\mathcal{R}$  di cui alla definizione di appartenenza a  $\mathcal{R}^*$ , per i quali dunque  $m(A_{1,2}'' \setminus A_{1,2}') < \varepsilon/2$ , con  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Dalla definizione di  $A_{1,2}'$  e  $A_{1,2}''$  segue che  $A_1' \cup A_2' \subset A_1 \cup A_2 \subset A_1'' \cup A_2''$ , e similmente che  $A_1' \setminus A_2'' \subset A_1 \setminus A_2 \subset A_1'' \setminus A_2'$ . Valgono poi le inclusioni:

$$(\circ) (A_1'' \cup A_2'') \setminus (A_1' \cup A_2') \subset (A_1'' \setminus A_1') \cup (A_2'' \setminus A_2'), \text{ e}$$

$$(\circ\circ) (A_1'' \setminus A_2') \setminus (A_1' \setminus A_2'') \subset (A_1'' \setminus A_1') \cup (A_2'' \setminus A_2'). \text{ }^{38}$$

Utilizzando la  $(\circ)$ , troviamo che  $m((A_1'' \cup A_2'') \setminus (A_1' \cup A_2')) \leq m(A_1'' \setminus A_1') + m(A_2'' \setminus A_2') < \varepsilon$ , per cui  $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{R}^*$ ; e utilizzando la  $(\circ\circ)$ , che  $m((A_1'' \setminus A_2') \setminus (A_1' \setminus A_2'')) \leq m(A_1'' \setminus A_1') + m(A_2'' \setminus A_2') < \varepsilon$ , per cui anche  $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{R}^*$ . La tesi è così dimostrata. #

Supponiamo ora  $A \in \mathcal{R}^*$ . Converremo che quando nel seguito si scriva  $A''$  [ $A'$ ] si sottintenda “ $A'' \in \mathcal{R}$ ” [“ $A' \in \mathcal{R}$ ”]. Allora esiste qualche  $A'' \supset A$ , e ha senso considerare il reale non-negativo

$$(5_1) \quad \mu^-(A) =: \inf_{A'' \supset A} (m(A'')),$$

che è finito perché  $m$  è finita per ipotesi. Similmente esiste qualche  $A' \subset A$ , ed ha senso considerare il reale non-negativo

$$(5_2) \quad \mu_-(A) =: \sup_{A' \subset A} (m(A')),$$

che è anch'esso finito, perché comunque si scelga  $A' \subset A$ , esiste un  $A'' \supset A \supset A'$  (quindi per il quale  $m(A') \leq m(A'')$ ): ossia, le  $m(A')$  del sup sono equilimitate verso l'alto da  $m(A'')$  finito. I due numeri  $\mu^-(A)$  e  $\mu_-(A)$ , che esistono comunque per  $A \in \mathcal{R}^*$ , si dicono **J-misura esterna**, e rispettivamente **J-misura interna** di  $A$ . Per  $\varepsilon > 0$  arbitrario, in forza della definizione di inf esiste  $A'' \supset A$  per cui  $\mu^-(A) + \varepsilon/2 > m(A'')$ ; e in forza di quella di sup esiste un  $A' \subset A$  per cui  $\varepsilon/2 - \mu_-(A) > -m(A')$ . Sommando queste due disuguaglianze troviamo  $\mu^-(A) - \mu_-(A) + \varepsilon > m(A'') - m(A') \geq 0$ ; quindi, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ ,  $\mu^-(A) - \mu_-(A) \geq 0$ . Per brevità, poniamo  $\alpha = \alpha(A) =: \mu^-(A) - \mu_-(A)$ . Per arbitrari  $A', A''$  per i quali  $A' \subset A \subset A''$ , abbiamo  $m(A') \leq \mu_-(A)$  e  $m(A'') \geq \mu^-(A)$ , da cui  $m(A'') - m(A') \geq \alpha$ ; ma qui il 1° membro è uguale a  $m(A'' \setminus A')$ , e dunque  $m(A'' \setminus A') \geq \alpha$ . Si conclude che  $\alpha > 0$  è in conflitto con l'ipotesi di partenza  $A \in \mathcal{R}^*$ ; ovvero, che

<sup>37</sup> Questa definizione rispecchia strettamente un risultato menzionato in S.sez. 1.4.1, e cioè che un insieme  $M$  è J-quadrabile sse esistono unioni “del tipo  $\cup_j \Delta_j$ ” ( $\supset M$ ) e unioni “del tipo  $\cup_i \delta_i$ ” ( $\subset M$ ) – che riconosciamo ora entrambe come insiemi elementari – la misura della cui differenza  $\cup_j \Delta_j \setminus \cup_i \delta_i$  è arbitrariamente piccola.

<sup>38</sup> Le  $(\circ)$  e  $(\circ\circ)$  valgono *comunque*, cioè anche prescindendo dalle  $A_{1,2}' \subset A_{1,2}''$  che sussistono nel caso in oggetto. Ciò si può accertare, seppure un po' laboriosamente, mediante il solito metodo delle tavole di appartenenza.

T6. « $(A \in \mathcal{R}^*) \Rightarrow (\alpha(A) = 0)$ ». Se  $A \in \mathcal{R}^*$ ,  $\mu(A) =: \mu^-(A) = \mu_-(A)$  è la J-misura di A. Lasciamo al lettore di verificare ad esempio che, per  $A \in \mathcal{R}^*$ ,  $B \in \mathcal{R}^*$ ,  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ , e se  $A \supset B$ ,  $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ .

Abbandoniamo invece l'ipotesi  $A \in \mathcal{R}^*$ . In questo caso le definizioni (5) di  $\mu^-(A)$  e di  $\mu_-(A)$  perdono significato, perché potrebbero *non* esistere gli  $A''$  e gli  $A'$  sui quali far correre l'inf e rispettivamente il sup. Introduciamo la famiglia di insiemi  $\mathcal{N} =: \{X \mid \exists A'' \{A'' \supset X\} \wedge \exists A' \{A' \subset X\}\}$ , che manifestamente include  $\mathcal{R}^*$ . Se  $A \in \mathcal{N}$ , le (5) ritrovano senso, quindi per  $\varepsilon > 0$  arbitrario esistono un  $A'$  e un  $A''$  con  $A' \subset A \subset A''$  per cui  $\alpha + \varepsilon > m(A'' \setminus A')$ . Facendo in questa  $\alpha = 0$ , si trova che per quegli  $A'$ ,  $A''$  è  $\varepsilon > m(A'' \setminus A')$ , e quindi che  $A \in \mathcal{R}^*$ . In simboli,

T7. « $(A \in \mathcal{N} \wedge (\alpha(A) = 0) \Rightarrow (A \in \mathcal{R}^*))$ ». Confrontando quest'ultima con la  $(A \in \mathcal{R}^*) \Rightarrow (\alpha(A) = 0)$  di (T6), e ricordando l'inclusione  $\mathcal{R}^* \subset \mathcal{N}$ , si conclude che

T8. «Sotto la condizione  $A \in \mathcal{N}$ ,  $(A \in \mathcal{R}^*) \Leftrightarrow (\alpha(A) = 0)$ ». Anche in questo caso, vi è evidentemente un rapporto genetico univoco del tipo  $\{\mathcal{R}, m\} \mapsto \{\mathcal{R}^*, \mu\}$ . Siano adesso  $\{\mathcal{R}_{1,2}, m_{1,2}\}$  (al solito, si leggano i pedici alternativamente) due distinti anelli con misura, e  $\{\mathcal{R}_{1,2}^*, \mu_{1,2}\}$  i loro corrispondenti J-prolungamenti. Segue che

$$(6_1) \quad \mathcal{R}_{1,2} \subset \mathcal{R}_{1,2}^*,$$

$$(6_2) \quad \forall A \{(A \in \mathcal{R}_{1,2}) \Rightarrow (m_{1,2}(A) = \mu_{1,2}(A))\}.$$

Supponiamo inoltre che  $\{\mathcal{R}_{1,\mu_1}^*\} = \{\mathcal{R}_{2,\mu_2}^*\}$ , cioè che  $\mathcal{R}_{1,\mu_1}^* = \mathcal{R}_{2,\mu_2}^* \equiv \mathcal{R}^*$  e che  $\forall A \{(A \in \mathcal{R}^*) \Rightarrow (\mu_1(A) = \mu_2(A))\}$ , e sostituiamo queste posizioni nelle relazioni (6). Otteniamo:

$$(7) \quad \mathcal{R}_{1,2} \subset \mathcal{R}_{2,1}^* \wedge \forall A \{(A \in \mathcal{R}_{1,2}) \Rightarrow (m_{1,2}(A) = \mu_{2,1}(A))\}.$$

Si può allora provare che le (7), conseguenze *necessarie* della  $\{\mathcal{R}_{1,\mu_1}^*\} = \{\mathcal{R}_{2,\mu_2}^*\}$ , sono anche *sufficienti* a stabilirla, cioè che

$$(8) \quad [\mathcal{R}_{1,2} \subset \mathcal{R}_{2,1}^* \wedge \forall A \{(A \in \mathcal{R}_{1,2}) \Rightarrow (m_{1,2}(A) = \mu_{2,1}(A))\}] \Leftrightarrow (\{\mathcal{R}_{1,\mu_1}^*\} = \{\mathcal{R}_{2,\mu_2}^*\})$$

(omettiamo la dimostrazione). L'equivalenza nella (8) è interessante perché il J-prolungamento  $\{\mathcal{R}, m\} \mapsto \{\mathcal{R}^*, \mu\}$  non è una applicazione iniettiva: se da un lato l'uguaglianza  $\{\mathcal{R}_1, m_1\} = \{\mathcal{R}_2, m_2\}$  implica quella dei corrispondenti J-prolungamenti (come è ovvio), dall'altro non è necessariamente vero il contrario.

Ancora una osservazione: è chiaro che se fossimo partiti dallo spazio-misura  $\{\mathcal{R}, E, m\}$  con  $m(E)$  *finita* (invece che dall'anello  $\mathcal{R}$  con misura finita  $m$ ), ci saremmo potuti risparmiare la richiesta che  $m$  fosse finita su  $\mathcal{R}$ . In questo caso si sarebbe anche trovato che  $\mu_-(A) = m(E) - \mu^-(\mathbf{C}A)$ . Questa è proprio la condizione sotto la quale la J-misura è stata introdotta nella S.sez. 1.4.1.

Resterebbe da descrivere una versione astratta della misura di Lebesgue non limitata ai sottoinsiemi di una unità  $E$ , che omettiamo per non sovraccaricare questa (già così) impegnativa App. Gen. C. Notiamo invece che, al contrario di  $\mathcal{L}$  (un  $\sigma$ -anello su  $E$ ), la famiglia  $\mathcal{J}$  dei sottoinsiemi  $J$ -misurabili di  $E$  è soltanto un anello su  $E$ . In ultima analisi, ciò scende direttamente dal confronto tra la (2) e la (5<sub>1</sub>): nella (2), l'inf è preso su ricoprimenti contabili, mentre nella (5<sub>1</sub>), su ricoprimenti finiti (di elementi del semianello di partenza). Questo fa sì che, partendo dallo stesso semianello,  $\mathcal{J}$  sia in generale inclusa in  $\mathcal{L}$ . La teoria della misura di Jordan è dunque *irrimediabilmente meno potente* di quella di Lebesgue, e di fatto inadeguata ad alcune richieste dell'analisi (e talvolta della stessa fisica) moderna.<sup>39, 40</sup>

---

<sup>39</sup> A causa di ciò, molti autori non chiamano nemmeno “misura”, ma “contenuto” la misura di Jordan. Questo può sembrare eccessivo, e anche, riferendoci alla presente esposizione della teoria, un po' disorientante.

<sup>40</sup> È legittimo chiedersi quali siano le situazioni di concreto interesse applicativo in cui la  $J$ -misura si rivela davvero inadeguata, e la  $L$ -misura necessaria. Un esempio eloquente, soprattutto agli occhi di un fisico, è il seguente. La moderna analisi funzionale, anche nella sua più semplice accezione *lineare* (ad esempio su uno spazio di Hilbert, come avviene nelle applicazioni alla meccanica quantistica), non sarebbe concepibile senza misura di Lebesgue: infatti il prodotto interno, e con esso la stessa norma (tra e rispettivamente di funzioni di quello spazio), deve esservi definito in termini di integrale di Lebesgue pena l'insorgenza, in generale, di difetti non riparabili agevolmente (vedi ad es. J. von Neumann: “Mathematical Foundations of Quantum mechanics”, Princeton Un. Press (1955), Chpt. II, Sect. 3). E l'integrale di Lebesgue (di una funzione reale definita in un dominio di  $\mathbb{R}^n$ ) non è altro che la  $L$ -misura di un conveniente insieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , proprio così come l'analogo integrale di Riemann non è altro che la  $J$ -misura di un conveniente insieme di  $\mathbb{R}^{n+1}$  (si torni alla S.sez. 5.1.1 per i dettagli).

## APPENDICE GEN. D

### INTRODUZIONE ALLA SCIENZA COMPUTAZIONALE <sup>1</sup>

Sin dall'inizio di questo libro (v. Sez. 0.1) siamo venuti delineando due fondamentali fisionomie dell'attività scientifica-esatta teorica: quella di chi ricerca strategie interpretative (di sezioni) del mondo fenomenico cercando di identificarne possibili modelli matematici, e quella di chi su tali modelli lavora studiando i problemi in essi aperti, con il fine di sviluppare capacità predittive intorno a quel mondo attraverso la loro soluzione. Un aspetto sempre più importante del secondo tipo di attività riguarda la cosiddetta "scienza computazionale (o calcolazionale)". Essa mira a dare risposta ai sopraddetti problemi matematici mediante "procedure sequenziali algoritmiche". Intuitivamente, una procedura algoritmica (o semplicemente un algoritmo) è tale che chi la (lo) effettua esegue passo dopo passo istruzioni sempre disponibili, non-ambigue e coerenti, possibilmente fermandosi se l'istruzione attuale è appunto quella di fermarsi. Se si vuole, la precedente definizione di algoritmo riflette la nozione intuitiva di "pura esecuzione di istruzioni". Un algoritmo che si ferma (ovviamente dopo un numero finito di passi) si dice un algoritmo finito. Spesso con "algoritmo" tacitamente si intende "algoritmo finito". <sup>2</sup>

#### D.1) RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI

Una porzione prevalente della scienza computazionale, che è andata specializzandosi ed acquistando crescente importanza all'incirca a partire dal secolo XVII, consiste nel "risolvere equazioni"; soprattutto, ma non soltanto, di matrice fenomenologica. Nella Sez A.3 dell'App. Gen. A abbiamo introdotto la definizione di "equazione" già entro una teoria logica-quantificata con uguaglianza ( $LPC_{=}$ ). Una definizione più flessibile, che rientra nel caso precedente ma presuppone la teoria degli insiemi, è la seguente. Si consideri l'applicazione  $f: D \rightarrow C$ , dove  $D$  e  $C$  sono insiemi arbitrari, e sia  $F$  il suo grafo. Per ogni sottoinsieme  $\gamma$  di  $C$ , l'immagine  $F^{-1}[\gamma]$  di  $\gamma$  attraverso  $F^{-1}$  è un sottoinsieme di  $D$  (possibilmente vuoto) che si dice "immagine reciproca di  $\gamma$  attraverso  $F$ ". Per un dato  $c \in C$ , "risolvere l'equazione

$$(1) \quad f(x) = c$$

---

<sup>1</sup> In qualche sua parte, questa App. Gen. D è ispirata ad un contributo congressuale dell'autore, si veda in "Simulation of Nonlinear Systems in Physics", Eds. G. Maino, L. Fronzoni, M. Pettini, World Scientific 1991, pp 1-18.

<sup>2</sup> "Algoritmo" viene dal nome del matematico arabo del IX secolo Al-Khuwarizmi.

significa allora identificare l'immagine reciproca del singoletto  $\{c\}$  attraverso  $F$ , o almeno una sua parte. Ovviamente le soluzioni della (1) sono tutti e soli gli elementi di  $F^{-1}[\{c\}] \subset D$ . Tuttavia soltanto in certi casi è possibile risolvere la (1) mediante un algoritmo finito. Supponendo che  $D$  e  $C$  siano *spazi lineari metrici completi*, e quindi che si possa introdurre il concetto di *soluzione approssimata* della (1), la via canonica verso la soluzione del problema consiste nell'ottenere soluzioni approssimate della (1) di accuratezza arbitrariamente grande, fino a quando l'errore stimato sia considerato accettabile o nullo.

Con la necessità di risolvere equazioni (almeno approssimativamente), ha preso avvio ed ha ormai assunto proporzioni amplissime un intero fondamentale capitolo della moderna matematica applicata. L'impressione che a nostro avviso si ricava da un esame di largo orizzonte di tale "scienza equazionale" (per così nominarla) è peraltro quella di una varietà non ancora abbastanza organica di procedure, interne ad una strategia di fondo. Una possibile linea conduttrice consiste nell'identificare particolari equazioni "prossime" (nella conveniente accezione) alla equazione data e di essa più facilmente risolvibili, nella speranza, o auspicabilmente nella certezza, che le loro soluzioni siano a loro volta "prossime" a quelle dell'equazione di partenza. Va da sé che si richiederanno parecchie e non banali precisazioni tecniche per conferire a questa idea informale uno status matematico.

Qualunque approccio didattico moderno alla risoluzione approssimata di equazioni deve partire dall'analisi funzionale (su spazi lineari metrici completi) cosiddetta "non lineare" – o piuttosto dall'analisi funzionale tout court.<sup>3</sup> Poiché siamo principalmente interessati alle equazioni che traggono origine da teorie fisiche, sarà innanzitutto opportuno fare un passo indietro per dare al problema un conveniente inquadramento generale. Veniamo dunque alla versione insiemistica (intuitiva) di una generica legge empirica. Riferendoci ad una struttura insiemistica empirica, questa legge sarà scritta come la relazione *assertiva* su  $x$

$$(2) \quad "x \text{ appartiene a } \mathcal{D}, \text{ e } \mathcal{P}(x)",$$

dove  $x$  è un individuo a priori appartenente a un universo  $\mathcal{D}$  di osservabili, e  $\mathcal{P}$  è un predicato definito su  $\mathcal{D}$ . Ovviamente " $x$  appartiene a  $\mathcal{D}$ , e  $\mathcal{P}(x)$ " è collettivizzante in  $x$  (cfr. App. Gen. A.1) cioè individua unicamente un insieme incluso in  $\mathcal{D}$ , l'estensione di  $\mathcal{P}$  in  $\mathcal{D}$ , che denotiamo con  $\text{Ext}(\mathcal{P}|_{\mathcal{D}})$ . La (2) *equivale* così all'asserto

$$(2\text{bis}) \quad "x \text{ appartiene a } \text{Ext}(\mathcal{P}|_{\mathcal{D}})".$$

---

<sup>3</sup> L'attributo "non lineare" (o "nonlineare") viene spesso accoppiato all'analisi funzionale (un uso tra l'altro recentemente santificato dal titolo del monumentale trattato di E. Zeidler (v. Bibl. Gen. (A))). Tuttavia la locuzione che ne deriva è impropria, perché l'analisi funzionale è *per definizione* in generale "non lineare" (anche se una sua porzione molto importante è lineare). In questo senso, l'"analisi funzionale non lineare" dovrebbe essere intesa come "complemento dell'analisi funzionale alla sua parte lineare".

Una volta identificato  $\text{Ext}(\mathcal{P}|_{\mathcal{D}})$  potremo quindi affermare che il generico oggetto osservabile  $x$  di  $\mathcal{D}$  soddisfa il predicato  $\mathcal{P}(x)$  sse esso appartiene a  $\text{Ext}(\mathcal{P}|_{\mathcal{D}})$ . In linea di principio, la possibilità di identificare  $\text{Ext}(\mathcal{P}|_{\mathcal{D}})$  passa per la traduzione della (2) in un conveniente sistema formale includente la teoria degli insiemi. Restando invece nell'ambito della teoria intuitiva, la struttura empirica  $\mathcal{E}$  (intuitiva) corrisponde *isomorficamente* (vedi S.sez. 0.1.3) ad una struttura matematica (intuitiva)  $M$ . Questo significa che esiste una biiezione  $I$  di  $\mathcal{E}$  su  $M$  (o almeno su  $I(\mathcal{E})$ ),  $I: \mathcal{E} \rightarrow M$ , sotto la quale la (2) si traduce nella relazione assertiva su  $x$ :

(3) “ $x$  appartiene a  $D$  e  $P(x)$ ”,

dove  $x$ ,  $P$  e  $D$  sono nell'ordine le immagini di  $x$ ,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{D}$  attraverso  $I$  in  $M$ . Similmente la (2bis) si traduce sotto  $I$  nella relazione assertiva

(3bis) “ $x$  appartiene a  $\text{Ext}(P|_D)$ ”,

dove  $\text{Ext}(P|_D)$  è l'estensione di  $P$  in  $D$  inclusa in  $D$ .

A questo punto il fisico teorico correttamente afferma di avere *matematizzato* in  $M$  la legge fisica (2): vale a dire, egli lavora ormai sulla immagine matematica di quella legge, della quale cercherà di determinare l'estensione  $\text{Ext}(P|_D)$ . Adottando la definizione (1) di equazione, il problema diventa dunque quello di identificare l'estensione (inclusa in  $D$ ) della relazione in  $x$  “ $x$  appartiene a  $D$  e  $f(x) = c$ ”, per  $c$  dato in  $C$ . È precisamente in connessione con tale problema che nasce quella particolare categoria di matematici applicati che potremmo qui nominare come “risolutori di equazioni” (e in particolare, di equazioni che traducono modelli fenomenologici).

Prima dell'invenzione del calcolo differenziale, tanto il dominio  $D$  delle possibili soluzioni della (1) quanto l'insieme di arrivo  $C$  di  $f$  erano insiemi *numerici*, cioè erano parti (di solito aperte) della retta reale o del piano complesso o di loro potenze cartesiane – anche se all'epoca non si aveva una precisa cognizione di questi oggetti. Inoltre molte delle equazioni che si consideravano erano di tipo algebrico; cioè la  $f$  della (1) era un polinomio (possibilmente a coefficienti complessi) in una indeterminata reale o complessa che veniva uguagliato a 0 (zero della retta reale o del piano complesso), o un sistema di tali polinomi in altrettante indeterminate. Lo sfortunato genio di Galois (Evariste, 1811-1831) riscoprì per suo conto (già Ruffini (Paolo, 1765-1822), <sup>4</sup> e Abel (Niels, 1802-1829) <sup>5</sup> erano giunti ad analoghe conclusioni) che le equazioni algebriche in una incognita

<sup>4</sup> P. Ruffini: “Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto”, Bologna (1799). Nel linguaggio della moderna teoria dei gruppi di sostituzioni, il risultato di Ruffini si esprime dicendo che il gruppo delle sostituzioni su 5 lettere non possiede sottogruppi di ordine 3, 4 e 8.

<sup>5</sup> N.H. Abel, in Journ. für Math., I 65-84 (1826). Abel dimostrò che le radici di una equazione risolvibile “per radicali” si possono porre in forma tale che ciascun radicale che vi compare sia esprimibile come funzione razionale delle radici dell'equazione. Usando questo fatto, egli riuscì a dimostrare l'impossibilità di risolvere per radicali l'equazione generale di grado superiore al 4°. La dimostrazione di Abel fu poi sostanzialmente semplificata da Kronecker oltre cinquanta anni più tardi.

passibili di soluzione generale “per radicali” (detta anche soluzione “esatta”) erano tutte e sole quelle di grado non superiore al quarto.<sup>6</sup> Per quanto qui ci interessa, va subito detto che se da una parte le equazioni algebriche di grado  $\geq 5$  non hanno mai avuto un ruolo particolarmente importante nella fisica matematica, dall’altra la possibilità di risolverle “approssimativamente” (in un senso da precisare) con metodi generali – specialmente dopo il grande teorema gaussiano che assicurava l’esistenza di esattamente  $n$  soluzioni della generica equazione algebrica di grado  $n$  (in campo complesso, e non necessariamente distinte) – ha stimolato la messa a punto di algoritmi per la soluzione approssimata di equazioni generiche. Va infatti tenuto presente che già all’inizio del XVIII secolo erano disponibili algoritmi per il calcolo, con precisione arbitraria, dei valori di numerose funzioni reali definite in un intervallo reale (o talvolta complesse e definite in un dominio del piano complesso), e anche di loro prodotti funzionali ( $\circ$ ), come ad esempio  $\sin \circ \log \equiv \sin(\log(\cdot))$ , non troppo complicati. Detta  $f = f(x)$  una generica funzione così ottenuta, diventava allora assai naturale proporsi di calcolare le soluzioni, a priori appartenenti al dominio  $D(f)$ , di una equazione del tipo (1) per  $c$  data, reale o complessa a seconda del caso. In effetti, procedure generali finalizzate a questo scopo cominciavano ad essere messe a punto proprio allora: basti ricordare il metodo iterativo di Newton detto “delle tangenti”, che si riferiva ad una  $f$  reale definita su un intervallo reale, quello di  $D$ . Bernoulli per la risoluzione iterativa di equazioni algebriche di grado arbitrario, .. e così via.

Ma in realtà è soltanto con l’invenzione di quelle particolari equazioni *funzionali* che sono le equazioni differenziali che la scienza equazionale entra nella sua età adulta. Il dominio  $D$  delle potenziali soluzioni diventa con ciò un *insieme di funzioni*: dapprima di funzioni tra spazi numerici (ad esempio delle funzioni reali definite su  $(0,1)$  e congruentemente regolari), e più tardi di funzioni di oggetti arbitrari ma comunque appartenenti ad uno *spazio lineare topologico* (SLT), e aventi valori anch’essi in uno SLT. Nel linguaggio matematico moderno, l’equazione stessa assume la forma tipica

$$(4) \quad f(x) = O_Y,$$

dove  $f$  è un’applicazione di  $D = D(f)$  (dominio di  $f$ ,  $\subset X$ ) in  $Y$ ,  $X$  e  $Y$  essendo spazi lineari su  $\mathbb{R}$  o su  $\mathbb{C}$ , di solito normati e completi ( $\equiv$  spazi di Banach, o B-spazi),  $x$  è l’incognita e  $O_Y$  è lo zero di  $Y$ ; quindi  $x \in D$  e  $f(x) \in Y$ . (La specializzazione del 2° membro della (4) in  $O_Y$  non ne limita la generalità, potendosi sempre supporre che  $f(x)$  stia per  $f(x) - c$  per una  $c$  data in  $Y$ .) Ad esempio, la

---

<sup>6</sup> E. Galois, morto a soli vent’anni in un duello, inquadrò le sue riflessioni in quella che oggi chiamiamo “Teoria dei Gruppi di Sostituzioni”, e che egli inventò quasi dal nulla. Il concetto di gruppo era già apparso a lato di problemi diversi, ma con Galois entrò con pieno diritto tra gli oggetti fondanti della matematica, aprendo la strada ad una concezione più astratta e unitaria dell’algebra. Questo è certamente il più grande contributo di Galois alla matematica.



(4) può essere un'equazione differenziale standard, ordinaria o alle derivate parziali, un'equazione integrale o integro-differenziale, un sistema di equazioni dell'uno o dell'altro tipo, ... e via dicendo.

All'inizio del secolo XVIII, la natura delle equazioni subisce dunque una silenziosa ma radicale evoluzione: accanto alle tradizionali equazioni con incognite numeriche ne compaiono altre, aventi per incognite *funzioni tra spazi numerici*. Alla radice del fenomeno ci sono naturalmente le equazioni differenziali ordinarie e i loro sistemi, appena affacciatisi alla ribalta matematica con l'invenzione del calcolo differenziale; e in primo luogo l'equazione fondamentale della dinamica applicata a sistemi finiti di punti materiali in mutua interazione. In particolare con la teoria della gravitazione universale (Newton, 1687, vedi S.sez. 6.4.3), per la prima volta nel suo percorso conoscitivo verso il mondo dei fenomeni il fisico matematico dispone di un modello matematico di una proprietà fondamentale di quel mondo (e della cui validità sembra irragionevole dubitare), ma deve al contempo constatare la sua *sostanziale incapacità* di estrarne quanto in effetti esso contiene in termini di capacità predittiva. Il riferimento al problema degli  $N > 2$  corpi in interazione gravitazionale è ovvio. Come sappiamo, il modello si identifica con un sistema di  $2N$  EDO del 1° ordine in forma normale, sotto le convenienti  $2N$  condizioni accessorie. Il problema consiste quindi nel costruire la soluzione "esatta" (cioè esprimibile in termini di funzioni note o al più di loro primitive) di questo sistema.

Tuttavia l'impresa si rivela praticamente irrealizzabile, per  $N > 2$ , con i mezzi dell'analisi del tempo; ed anche, come diverrà chiaro più tardi, con mezzi molto più sofisticati. Insomma, con la teoria della gravitazione l'astronomo del Settecento dispone di un modello matematico di estremo interesse, ma non è in grado di coglierne che una minima per quanto importante parte delle implicazioni "esatte" a causa della sua limitata *capacità di calcolo*: con pochissime eccezioni, egli deve quindi sistematicamente ricorrere a metodi approssimati per la determinazione delle soluzioni dei suoi problemi dinamico-celesti. Col tempo, questo tipo di difficoltà si ripresenterà in una sempre più ampia varietà di settori della fisica matematica, fino a manifestarsi come "regola (quasi) naturale del gioco". D'altra parte, la soluzione di equazioni è a questo punto un obiettivo irrinunciabile anche per lo stesso matematico applicato: perché un conto è sapere che certi individui  $x$  di  $D$  soddisfano un certo predicato equazionale  $P$ , ed un altro è conoscere l'insieme  $\text{Ext}(P|_D)$  al quale tutti e soli quegli individui appartengono, o almeno sue convenienti approssimazioni. Detto in termini brevi, un conto è *formulare* un'equazione, e un altro è *formularla e risolverla* (almeno approssimativamente).

Sotto la spinta dei problemi dinamico-celesti non altrimenti dominabili prende così avvio quel vastissimo corpo della moderna matematica applicata noto come "Teoria (analitica) dell'Approssimazione". Nelle analoghe istanze che si produrranno in seguito, il momento

modellizzante-fondativo della fisica matematica andrà sempre più distinguendosi, per non dire separandosi, da quello matematico-calcolatorio. Ad esempio, a partire dal terzo decennio dello scorso secolo un cospicuo stimolo in questa direzione venne dalla meccanica quantistica; e non pochi fisici teorici furono forzati dalle circostanze a trasformarsi in “risolutori” delle equazioni di quella meccanica, in particolare mediante i cosiddetti “metodi perturbativi” fondati su sviluppi in serie formali (o asintotiche) di potenze di uno o più piccoli parametri.<sup>7</sup>

In realtà esistono interi capitoli della fisica teorica, diversi dalla dinamica celeste e più anziani della meccanica quantistica, i cui problemi sono (o talvolta dovrebbero essere) vere e proprie “glorificazioni” del calcolo approssimato e dell’analisi asintotica. Basti l’esempio della dinamica dei fluidi barotropici classici (ideali o dissipativi), o quello della magnetofluidodinamica (dinamica dei fluidi elettricamente conduttori accoppiata alle equazioni di Maxwell di bassa frequenza); o per spingerci più avanti, quello della fisica teorica dei plasmi, sia astrofisici che di laboratorio. Teorie fisiche di questo tipo sono *intrinsecamente* non lineari; e per l’appunto, l’approccio alla soluzione approssimata delle corrispondenti equazioni è di norma inteso ad aggirarne la non-linearità, trasformandole in convenienti gerarchie (spesso troncate al più basso ordine significativo, l’“ordine uno”) di equazioni lineari salvo che all’ordine più basso, o “ordine zero”. Ad esempio, nel caso della fisica teorica dei plasmi il problema matematico consiste nel risolvere un sistema di equazioni integro-differenzial-parziali non lineari (sistema di equazioni bilineari di Boltzmann, tante quante sono le specie di particelle considerate), ancora accoppiato con il sistema di Maxwell di bassa frequenza. I progressi verso la soluzione del sistema di Boltzmann-Maxwell sono legati a drastiche ipotesi semplificatrici e ad un tipo di analisi asintotica più o meno euristica; o infine, in tempi recenti, *all’uso massiccio del calcolatore*. Il primo contributo matematico importante si deve a Hilbert, che all’inizio del Novecento propose un metodo perturbativo fondato sullo sviluppo delle funzioni di distribuzione delle varie specie in serie formali di potenze di piccolo parametro – nel cosiddetto “limite delle collisioni dominanti” – proprio allo scopo di sostituire il sistema bilineare originale con una gerarchia di sistemi lineari salvo che all’ordine zero (“metodo di Hilbert”, ulteriormente sviluppato da Enskog<sup>8</sup>).

Su questa strada, a partire dalla metà dello scorso secolo si cominciò inoltre a percepire l’esistenza di una nuova e inattesa difficoltà sul fronte delle teorie fenomenologiche non lineari: e cioè, che l’evoluzione dei sistemi fisici potesse essere in certi casi imprevedibile, conducendo ad una

---

<sup>7</sup> Per la precisione, i metodi perturbativi esistevano già nel tardo Settecento (Lagrange), ed erano addirittura applicati alla soluzione approssimata di problemi generalmente non lineari, quali *non* sono quelli della meccanica quantistica.

<sup>8</sup> D. Hilbert, Gött. Nachr. 355 (1910), Math. Annalen, 72, 562 (1912), “Grundzüge einer allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen”, Teubner 1912; D. Enskog, “The Kinetic Theory of Phenomena in Fairly Rare Gases”, Dissertation, Uppsala (1917). Si veda anche il classico trattato di S. Chapman e T. Cowling, “The Mathematical Theory of Non-uniform Gases”, Cambridge Un. Press 1953.

successione “essenzialmente caotica” ( $\equiv$  apparentemente non dominabile da una statistica) di stati.<sup>9</sup> Forniremo qualche dettaglio su questi problemi nella Sez. D.5 della presente appendice generale.

Per concludere: non è irragionevole sostenere che l’analisi applicata contemporanea si possa ormai suddividere in due grandi corpi, il primo coincidente con la scienza computazionale e la connessa teoria dell’approssimazione, e il secondo – non spropositatamente più vasto – che ne comprende tutto il resto. Lungi dall’essere una battuta ad effetto, questa affermazione descrive una realtà carica di significati e di assai concrete conseguenze.

## D.2) RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI: ESEMPI ED APPLICAZIONI

È opportuno partire con l’illustrazione di qualche esempio. Cominceremo con un tipo di calcolo approssimato la cui portata va talvolta al di là di quanto si potrebbe stimare a prima vista. Si supponga di voler risolvere un’equazione del tipo (D.1, 1), che numereremo come la (1) anche di questa sezione, dove  $f: D \rightarrow Y$  è una funzione di dominio  $D \subset X$  in  $Y$ ,  $X$  e  $Y$  essendo due spazi lineari (diciamo su  $R$ ),  $x \in D$  è l’incognita e  $c \in Y$  è dato. Si supponga che  $f$  possa scriversi nella forma  $f_0 + f_1$ , dove  $f_0$  e  $f_1$  sono anch’esse funzioni da  $D$  in  $Y$ , e che l’equazione

$$(2) \quad f_0(x) = c$$

sia risolvibile  $\forall c \in f_0(D) \subset Y$  (cioè che  $f_0$  abbia ivi un inverso  $f_0^{-1}$  noto). È allora assai naturale, detta

$$(2') \quad x_0 =: f_0^{-1}(c)$$

la soluzione della (2), e se  $f_0(x_0) \neq c - f_1(x_0)$ , scrivere l’equazione

$$(3_0) \quad f_0(x_1) + f_1(x_0) = c,$$

in una nuova incognita  $x_1$  determinabile come  $x_1 = f_0^{-1}(c - f_1(x_0))$  se  $c - f_1(x_0) \in f_0(D)$ . Se  $f_0(x_0) = c - f_1(x_0)$ ,  $x_0$  è evidentemente una soluzione della (1). In caso contrario, proseguendo in modo analogo si daranno tre possibilità, e cioè: o la gerarchia di equazioni (per  $n \geq 0$ )

$$(3_n) \quad f_0(x_{n+1}) + f_1(x_n) = c,$$

che se  $c - f_1(x_n) \in f_0(D)$  sono una ad una equivalenti alle

$$(3_n') \quad x_{n+1} = f_0^{-1}(c - f_1(x_n)),$$

---

<sup>9</sup> L’esempio obbligato è quello del sistema di tre equazioni differenziali ordinarie in tre incognite proposto dal meteorologo E. Lorenz nel 1963 (“Deterministic Nonperiodic Flow”, in *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 141 (1963)), nelle quali l’autore formalizzava un modello ragionevole di atmosfera. Data la sua estrema semplicità, possiamo qui riportare il sistema differenziale (normale/autonomo/non lineare) di Lorenz. Denotando con  $x, y, z$  tre incognite, esso si scrive:  $d_t x = 10(y-x)$ ;  $d_t y = xz + 28x - y$ ;  $d_t z = xy - (8/3)z$ . Questo sistema è stato molto studiato: vedi ad esempio la monografia di C. Sparrow, “The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors”, Springer (1982).

genera una successione  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  per la quale esiste un valore  $\underline{n}$  di  $n$  tale che  $x_{\underline{n}+1} = x_{\underline{n}}$ ; oppure un tale valore  $\underline{n}$  non esiste; oppure ancora la  $(3_n)$  non è risolvibile rispetto a  $x_{n+1}$  (perché  $c - f_1(x_n) \notin f_0(D)$ ). Nel primo caso la soluzione è  $x_{\underline{n}}$ ; nel secondo nasce il problema della possibile “convergenza” (per  $n \rightarrow \infty$  e per il dato  $c$ ) della successione generata dalle  $(3'_n)$ ; e infine nel terzo caso ci si deve fermare all'approssimazione  $x_n$  (che non è detto sia migliore di  $x_0$ ). In pratica, il problema che nasce nel secondo caso ha senso soltanto se  $X$  e  $Y$  sono B-spazi, o almeno spazi metrici completi. Se la successione  $x_0, x_1, \dots, ..$  converge<sup>10</sup> per il dato  $c$ , detto  $x$  il suo limite, e *supposte le  $f_0, f_1$  continue*, la  $(3_n)$  diventa

$$(3_\infty) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [f_0(x_{n+1}) + f_1(x_n)] = f_0(x) + f_1(x) \equiv f(x) = c;$$

cioè  $x$  è soluzione del problema.

Si noti ancora che non è necessario, ma soltanto ragionevole, partire con la  $x_0 = f_0^{-1}(c)$  nella costruzione della successione  $x_0, \dots, x_n, ..$ . Qualunque altra  $x_0' \in D$  (che possibilmente genererà una successione  $x_0', \dots, x_n', ..$ ) è a priori accettabile; anzi, può avvenire che la prima successione non converga e la seconda converga, o che valga una diversa combinazione dei due casi. Il successo finale della procedura iterativa – la convergenza, per il dato  $c$ , della successione generata – dipende in definitiva dalla scelta della decomposizione di  $f$  nella somma delle funzioni  $f_0$  e  $f_1$  (entrambe continue,  $f_0$  essendo invertibile e con codominio abbastanza ampio), e della  $x_0$  “di primo tentativo”.

Se pensiamo  $c$  come fisso, la precedente descrizione del problema è ridondante, perché –  $c$  può incorporarsi in  $f$ , passando così all'equazione  $f(x) = O_Y$ . Allora anche l'equazione  $f_0(x) + f_1(x) = 0$  (scriviamo ormai  $O_Y$  come  $0$ ) è ridondante se  $f_0$  è supposta invertibile e con codominio abbastanza ampio, perché essa può scriversi come  $x = -f_0^{-1}(f_1(x)) \equiv g(x)$ . Per ragioni ovvie, un'equazione di questo tipo, ove  $g: D(g) (\subset X) \rightarrow X$  (con  $D(g) \equiv$  dominio di  $g$ , e  $X \equiv$  un B-spazio), si dice (equazione) **di punto fisso**, ed è alla base di molti importanti algoritmi di calcolo approssimato. Un'equazione di punto fisso  $g(x) = x$  suggerisce immediatamente la legge ricorsiva indefinita

$$(4) \quad x_{n+1} = g(x_n),$$

con  $n = 0, 1, \dots$ . In generale, vi è più di un modo per trasformare un'equazione del tipo  $f(x) = 0$  in una equazione di punto fisso, e la convergenza della successione generata dalla (4) può essere influenzata dalla scelta operata.

Partendo da queste considerazioni, ci proponiamo ora di risolvere l'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine, di forma normale e generalmente non autonoma,

---

<sup>10</sup> Cioè se per dato  $\varepsilon > 0$  arbitrario, esiste un  $N = N_\varepsilon$  tale che per ogni  $n$  e  $m$  maggiori di  $N_\varepsilon$ ,  $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$  (criterio di Cauchy). In particolare la convergenza della successione implica che  $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

$$(5) \quad d_t x(t) = F(x(t), t),$$

sotto la condizione iniziale

$$(5') \quad x(0) = 0,$$

dove  $F$  è una funzione continua di  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$  (entrambi con le norme standard). Le (5, 5') si trasformano subito nella equivalente equazione integrale di punto fisso nell'incognita  $x(t)$

$$(6) \quad x(t) - \int_{t=0}^t F(x(t'), t') dt' = 0,$$

alla quale possiamo tentativamente applicare l'algoritmo (2', 3\_n'). Detto cioè  $f(x)$  il 1° membro della (6), possiamo identificare  $f_0(x)$  della precedente procedura con l'identità su  $\mathbb{R}$ , e  $f_1(x)$  con  $-\int_{t=0}^t F(x(t'), t') dt'$ , mentre la  $c$  è supposta nulla. La  $f_0(x_0) = 0$  dà allora  $x_0 = 0$ , la (3\_0') diventa  $x_1(t) = \int_{t=0}^t F(0, t') dt'$ , e la (3\_n')  $x_{n+1} = \int_{t=0}^t F(x_n(t'), t') dt'$ . Il calcolo della successione  $x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, \dots$  è così *ricondotto a quadrature*; se la successione converge, il suo limite è soluzione della (6), e quindi delle equivalenti (5, 5'). Questo metodo di soluzione di una equazione differenziale del tipo (5) sotto la (5') (o con una modifica banale sotto una generica  $x(0) = \text{costante}$  data), è comunemente detto (metodo di soluzione) **per approssimazioni successive**. La teoria generale è dovuta a Picard (Émile, 1856 – 1941),<sup>11</sup> per cui esso è anche noto come **metodo** (o **algoritmo**) di **Picard** (in concorrenza con quello alle differenze di Eulero-Cauchy-Lipschitz).

Tornando alla (1), l'algoritmo (2', 3\_n') può essere visto come procedura per la sua soluzione mediante **sviluppo in serie formale di potenze di piccolo parametro**, o **metodo perturbativo**, se  $f_0$  e  $f_1$  sono anche *lineari*,  $f_0$  restando comunque invertibile (la richiesta di linearità è in effetti sufficiente, ma non necessaria). In luogo della (1), consideriamo la

$$(7) \quad f_0(x) + \varepsilon f_1(x) = c,$$

dove  $\varepsilon \in [0, 1]$  (quindi per  $\varepsilon = 1$  la (7) coincide con la (1) con funzioni  $f_0, f_1$  lineari). Sia  $x(\varepsilon)$  una soluzione della (7) che rappresentiamo come serie di potenze di  $\varepsilon$ ,  $x(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i^*$ . Evidentemente,  $x_0^* = x(\varepsilon=0) = f_0^{-1}(c) = x_0$ . Sostituendo la serie nella (7), abbiamo  $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_0(x_i^*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} f_1(x_i^*) = c \quad \forall \varepsilon \in [0, 1]$ . In forza del principio di identità polinomiale, oltre alla  $x_0^* = x_0$  otteniamo così la successione di uguaglianze

$$(7_n) \quad f_0(x_{n+1}^*) + f_1(x_n^*) = 0,$$

per  $n \geq 0$ . Queste coincidono con le (3\_n) se identifichiamo  $x_n$  con  $\sum_{i=0}^n \varepsilon^i x_i^*$ , cioè con il valore della somma parziale  $\sum_{i=0}^n \varepsilon^i x_i^*$  per  $\varepsilon = 1$ . Per  $n = 0$ , abbiamo infatti  $0 = f_0(x_1^*) + f_1(x_0^*) = f_0(x_1 - x_0) + f_1(x_0) = f_0(x_1) + f_1(x_0) - c$ , che è la (3\_0) (con  $f_0$  e  $f_1$  lineari); e similmente,  $f_0(x_{n+1}^*) + f_1(x_n^*) =$

<sup>11</sup> É. Picard, Journ. Math. Pures et Appl., 6, 145-210 (1890). La teoria di Picard è riassunta nel cosiddetto **teorema di Picard-Lindelöf**. Più o meno la stessa procedura era stata tuttavia applicata molto tempo prima, su basi e con obiettivi meno generali, da J. Liouville.

$= f_0(x_n) + f_1(x_{n-1}) = \dots = f_0(x_1) + f_1(x_0) = c \quad \forall n > 0$ , che sono le (3<sub>n</sub>), qed. Ciò spiega perché l'algoritmo (2', 3<sub>n</sub>') – valido per  $f_0, f_1$  continue ma non necessariamente lineari, e  $f_0$  biiettiva su  $f_0(D)$  – è talvolta presentato come “metodo perturbativo”. Se per il dato  $c$  la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i^*$  converge per  $\varepsilon \rightarrow 1^-$ , il suo valore è soluzione della (1). Al di fuori del caso lineare, i metodi perturbativi richiedono in generale l'uso di strumenti matematici più avanzati (il calcolo differenziale astratto o generalizzato, cioè in spazi di Banach o B-spazi).

All'algoritmo di Picard si riconduce il cosiddetto **metodo di variazione delle costanti**, che è stato presto usato per la soluzione ricorsiva dell'equazione di Hamilton-Jacobi, vedi Sez. 6.4. Consideriamo una hamiltoniana  $n$ -dim  $H(t,q,p)$  (con  $q \equiv q_{1 \leq i \leq n}$ ,  $p \equiv p_{1 \leq i \leq n}$ ) e le associate equazioni canoniche

$$(8_1) \quad d_t q = \partial H / \partial p,$$

$$(8_2) \quad d_t p = -\partial H / \partial q,$$

e supponiamo  $H$  decomponibile nella somma di una hamiltoniana “principale”  $H_0(t,q,p)$ , in relazione alla quale possediamo un integrale completo  $W_0 = W_0(t,q,P)$  della associata equazione di H.J.  $H_0(t,q, \partial W_0 / \partial q) + \partial W_0 / \partial t = 0$  (ove le  $P$  sono le costanti “di tipo  $\beta$ ” da cui  $W_0$  dipende essenzialmente), e di una hamiltoniana “di perturbazione”  $H_1(t,q,p)$ . Denotiamo con  $(q_0, p_0)$  le soluzioni delle equazioni canoniche associate alla  $H_0$  e sotto le stesse condizioni iniziali imposte alle  $(q,p)$ . Per definizione, la  $W_0$  genera una trasformazione canonica  $(t, q_0, p_0) \leftrightarrow (t, Q, P)$  per la quale le  $(Q, P)$  sono delle costanti che scriveremo  $(Q_0, P_0)$  – perché la nuova hamiltoniana  $K_0 =: H_0 + \partial W_0 / \partial t = K_0(t, Q, P)$  (ove  $Q =: \partial W_0 / \partial P$ , cfr. le (6.3.3, 9<sub>2</sub>)) è nulla. Per la stessa trasformazione canonica generata dalla  $W_0$ ,  $(t, q, p) \leftrightarrow (t, Q, P)$ , la nuova hamiltoniana  $K = H + \partial W_0 / \partial t$  è invece uguale a  $H_1$ , e le nuove variabili  $(Q, P)$  non sono costanti ma evolvono con  $t$  secondo le

$$(9_1) \quad d_t Q = \partial K / \partial P = \partial H_1 / \partial P,$$

$$(9_2) \quad d_t P = -\partial K / \partial Q = -\partial H_1 / \partial Q,$$

nelle quali abbiamo continuato a denotare con  $H_1$  la funzione  $H_1(t, q(t, Q, P), p(t, Q, P))$  di  $(t, Q, P)$ . Le (9) equivalgono a tutti gli effetti alle equazioni canoniche originali (6), né è detto che siano più agevoli da risolvere di queste ultime, sebbene involgano la sola parte perturbativa  $H_1$  di  $H$ . In altre parole, è equivalente risolvere le (8) sotto certe condizioni iniziali, oppure risolvere le (9) sotto le condizioni iniziali corrispondenti secondo la stessa trasformazione generata dalla  $W_0$ , per poi passare alle  $(q,p)$  mediante la trasformazione canonica inversa. Le (9) presentano tuttavia un vantaggio sulle (8) nella prospettiva di fare uso del metodo di Picard, perché per esse si possono

assumere le *costanti*  $(Q_0, P_0)$  come approssimazione di ordine zero.<sup>12</sup> Indicando con  $|_0$  la sostituzione delle  $(Q, P)$  con le  $(Q_0, P_0)$ , l'approssimazione di ordine uno della soluzione si ha quindi dalle

$$(9_{1,1}) \quad d_t Q_1 = \partial H_1 / \partial P|_0 = \partial H_1 / \partial P(t, q(t, Q_0, P_0), p(t, Q_0, P_0)),$$

$$(9_{2,1}) \quad d_t P_1 = -\partial H_1 / \partial Q|_0 = -\partial H_1 / \partial Q(t, q(t, Q_0, P_0), p(t, Q_0, P_0)),$$

che si integrano con una quadratura sotto le condizioni iniziali  $(Q_1, P_1)(t=0) = (Q_0, P_0)$ . Similmente proseguendo per  $n > 1$ , e con analogo significato di  $|_n$ , abbiamo così la “successione di Picard” di equazioni differenziali integrabili mediante una quadratura

$$(9_{1,n}) \quad d_t Q_{n+1} = \partial H_1 / \partial P|_n,$$

$$(9_{2,n}) \quad d_t P_{n+1} = -\partial H_1 / \partial Q|_n,$$

sotto le condizioni iniziali  $(Q_n, P_n)(t=0) = (Q_0, P_0)$ . È anche evidente che se  $H_1$  non dipende esplicitamente da  $t$ , il risultato deve essere una serie di potenze di  $t$  con termine di grado zero pari a  $(Q_0, P_0)$ ; ad esempio, al più basso ordine significativo,

$$(10_1) \quad Q_1(t) = \partial H_1 / \partial P|_0 t + Q_0,$$

$$(10_2) \quad P_1(t) = -\partial H_1 / \partial Q|_0 t + P_0.$$

Se la successione  $(Q_n(t), P_n(t))$  determinata dalle  $(9_{1,n}, 9_{2,n}) \equiv (9_n)$  converge per  $n \rightarrow \infty$  ed il dato  $t$ , e se  $H_1$  non dipende da  $t$ , il corrispondente limite  $(Q(t), P(t))$  è una serie di potenze di  $t$  convergente per quel  $t$ , con termine di grado (0) pari a  $(Q_0, P_0)$ .

Un esempio di applicazione del metodo di variazione delle costanti, semplice ma didatticamente efficace, è ancora una volta quello dell'oscillatore armonico 1-dim lungo la retta  $x$ , vedi S.sez. 6.4.2. Supporremo unitaria la massa dell'oscillatore (e quindi  $k \equiv$  costante elastica)  $= \omega^2$  ( $\equiv$  quadrato della frequenza), e per semplicità,  $x(t=0) = 0$ ,  $p(t=0) = 1$ . Partendo dalla equazione di moto, sappiamo allora che  $x(t) = (1/\omega)\sin(\omega t)$  e  $p(t) = \cos(\omega t)$ . Considereremo l'addendo cinetico  $p^2/2$  della hamiltoniana  $H = (p^2 + \omega^2 x^2)/2$  come sua parte principale  $H_0$  e l'addendo potenziale  $\omega^2 x^2/2$  come sua parte di perturbazione  $H_1$ . Ciò è a prima vista un po' paradossale, ma funziona. La funzione principale di Hamilton associata a  $H_0$ ,  $W_0 = W_0(t, x, P)$ , ha le due determinazioni  $\pm Px - P^2 t/2$ , ma se ne può considerare una sola senza perdita di generalità, ad esempio quella con il segno + in fronte a  $Px$ . La trasformazione canonica  $(t, x, p) \leftrightarrow (t, X, P)$  è allora  $P = \partial W_0 / \partial x = p$ ,  $X = \partial W_0 / \partial P = x - Pt$ . Le equazioni di evoluzione per queste  $(X, P)$  sono le (9), quindi nel nostro caso le

$$(11_1) \quad d_t X = \partial H_1 / \partial P = \omega^2 (X + Pt)t,$$

<sup>12</sup> È precisamente da questa circostanza che il metodo prende il suo nome. Curiosamente, esso è anche nominato come “perturbativo”, sebbene non vi si preveda alcuno sviluppo in serie di potenze di piccolo parametro.

$$(11_2) \quad d_t P = -\partial H_1 / \partial X = -\omega^2(X + Pt),$$

per le quali è identicamente  $d_t X + t d_t P = 0$ . Le condizioni iniziali sulle variabili  $(X, P)$  sono poi

$$(12) \quad (X(t=0), P(t=0)) = (0, 1).$$

Sotto le (12), la soluzione delle (11) è

$$(13_1) \quad X(t) = (1/\omega)[\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)]$$

$$(13_2) \quad P(t) = \cos(\omega t),$$

e quindi:

$$(14_1) \quad x(t) = X(t) + tP(t) = (1/\omega)\sin(\omega t),$$

$$(14_2) \quad p(t) = P(t) = \cos(\omega t),$$

come deve appunto essere. Ciò conferma l'equivalenza del SDO canonico per le  $(x, p)$  e di quello per le  $(X, P)$ , sotto condizioni iniziali trasformate le une delle altre.

Useremo adesso l'algoritmo di Picard per (possibilmente) risolvere le (11), con le condizioni iniziali (12) come approssimazione di ordine zero,  $(X_0, P_0) = (0, 1)$ . Poiché  $H_1$  non contiene esplicitamente  $t$ , le risultanti  $(X, P)(t)$  devono essere serie di potenze di  $t$  aventi  $(0, 1)$  come termini di grado zero. Oltre alle  $(X_0, P_0) = (0, 1)$ , quindi  $x_0(t) = X_0 + P_0 t = t$ ,  $p_0(t) = 1$  (moto inerziale di momento unitario) all'ordine zero, al successivo ordine uno troviamo, eseguendo le quadrature,  $X_1(t) = (1/\omega)\omega^3 t^3/3$  e  $P_1(t) = 1 - \omega^2 t^2/2$ , ossia  $x_1(t) = (1/\omega)(\omega t - \omega^3 t^3/3!)$  e  $p_1(t) = P_1(t)$ . Proseguendo in modo analogo per gli ordini successivi, otteniamo esattamente lo sviluppo in serie di potenze di  $t$  delle funzioni a 2° membro delle (13). L'analogo sviluppo in serie della funzione a 2° membro della (14<sub>1</sub>) segue facilmente tenendo conto della identità, valida per ogni  $n \geq 1$ ,  $1/n! - 1/[(n+1)(n-1)!] = 1/(n+1)!$ .

Naturalmente il successo della procedura illustrata – nel presente caso dell'oscillatore armonico 1-dim – significa che vi sono soddisfatte le condizioni previste dal teorema di Picard-Lindelöf. Osserviamo infine che  $W_0 = \pm Px - P^2 t/2$  è realmente un integrale *completo* della equazione di H.J. associata alla  $H_0$ , perché risulta  $\partial^2 W_0 / \partial x \partial P$  ( $\equiv \partial^2 W_0 / \partial P \partial x$ ) =  $\pm 1$  a seconda del segno  $\pm$  in fronte a  $Px$  scelto in  $W_0$ .<sup>13</sup>

<sup>13</sup> È naturale chiedersi cosa succederebbe usando l'algoritmo di Picard *direttamente* sul SDO canonico per le  $(x, p)$  con l'hamiltoniana  $H$ , cioè sul SDO  $d_t x = p$ ,  $d_t p = -\omega^2 x$ , con le solite condizioni iniziali  $(x, p)(t=0) = (0, 1)$ . Risparmiandoci di scrivere l'argomento  $t$  nei primi membri delle relazioni che seguono, si trova  $x_0 = 0$ ;  $x_1 = x_2 = t$ ;  $x_3 = x_4 = (1/\omega)(\omega t - \omega^3 t^3/3!)$ ; ...;  $p_0 = p_1 = 1$ ;  $p_2 = p_3 = 1 - \omega^2 t^2/2!$ ;  $p_4 = p_5 = 1 - \omega^2 t^2/2! + \omega^4 t^4/4!$ ; ... Le serie sono pertanto quelle corrette, ma la loro costruzione procede "a velocità dimezzata". Dopotutto l'algoritmo di Picard si fa dunque onore, in questo caso, anche ignorando il SDO canonico (9), ovvero la trasformazione canonica generata da  $W_0$ , integrale completo dell'equazione di H.J. associata alla parte principale di  $H$ .



### D.3) GENERALITÀ SULL'ANALISI FUNZIONALE-NUMERICA

Gli esempi di procedure di soluzione per approssimazioni successive che abbiamo illustrato in D.2 sono relativamente potenti e di successo; ma come si diceva, è difficile collocarli in un quadro organico. Del resto l'organicità resta un notevole problema in una materia così vasta e tuttora in robusta crescita quale è quella della **analisi funzionale-numerica**, o **analisi numerica astratta**. Dedicheremo questa sottosezione ad una sintetica rassegna di alcuni dei suoi concetti, teoremi e tecniche generali, senza peraltro entrare nei molti capitoli in cui essa viene ormai usualmente suddivisa (applicazioni alle equazioni differenziali, o integrali, o integro-differenziali, equazioni alle differenze finite, metodo degli elementi finiti, metodi spettrali, teoria degli operatori monotoni, teoria delle perturbazioni, ecc.).

Nel nostro giudizio, per il momento nemmeno i più ambiziosi tentativi didattici riescono a dare un'idea accettabilmente unitaria dell'analisi funzionale-numerica e delle tecniche di approssimazione che le si associano. Coniugate con la fisica teorica, esse hanno comunque prodotto quel vasto campo di "attività di calcolo" che va oggi sotto il nome di **fisica computazionale**, e il cui ruolo centrale nelle scienze esatte contemporanee non ha certo bisogno di essere sottolineato.

La fusione di concetti e metodi propri dell'analisi funzionale con quelli della analisi numerica classica risale all'inizio dello scorso secolo; ma un efficace interfacciamento tra teoria ed applicazioni concrete si è reso possibile soltanto a partire dagli anni '50 circa, con l'avvento dei calcolatori numerici programmabili. Da allora, la scienza computazionale è stata sfidata a rimodellarsi da una parte sulla nuova disciplina matematica – appunto, l'analisi funzionale-numerica – e dall'altra sulla disponibilità di strumenti di calcolo automatico sempre più potenti. Si può discutere sui modi e sulla misura in cui questa sfida è stata realmente raccolta. Il ruolo fondamentale del calcolatore a supporto dell'analisi (e talvolta addirittura dell'euristica) dei modelli teorici della scienza esatta contemporanea è fuori questione; ma si deve tener presente che in molti casi, e specialmente in rapporto ai modelli equazionali più complessi, *gli algoritmi di calcolo usati nella pratica quotidiana non sono fondati*, o per lo meno non sono provati essere tali. Vale a dire, di norma mancano teoremi che attestino l'esistenza e/o l'unicità delle soluzioni ricercate; non è provato che le successioni di soluzioni approssimate da essi generate convergano in qualche modo alle effettive soluzioni (o semplicemente convergano a qualcosa) quando i parametri di accuratezza tendono ai loro limiti naturali; non sono disponibili stime a priori degli errori relativi o della velocità della possibile convergenza, o dimostrazioni della stabilità delle procedure di approssimazione, .. e così via. D'altra parte è ovvio che il calcolo automatico, per quanto grandi possano essere i suoi benefici pratici, ha ben poco da offrire ad una vera e propria "analisi" del

modello fenomenologico considerato se non è supportato da algoritmi fondati: perché tutto si riduce allora ad una mera “sperimentazione mediante calcolatore”, essenzialmente pilotata dall’intuizione e dalla esperienza pratica.

La distinzione tra calcolo mediante algoritmi *fondati* e calcolo mediante algoritmi possibilmente *non fondati* suggerisce poi una analoga distinzione, nei fatti largamente acquisita, tra una fisica computazionale “razionale” e una fisica computazionale “sperimentale” (per così dirle); quella razionale (sorella povera dell’altra) momento di genuina analisi del modello, e quella sperimentale per lo più orientata alle applicazioni più richieste ed immediatamente remunerative.<sup>14</sup> Nell’opinione di alcuni matematici applicati contemporanei, è addirittura possibile che nel giro di alcuni decenni il baricentro dell’attività matematica come la si è fin qui concepita si sposterà interamente sui problemi legati al progresso degli algoritmi, alla loro ottimizzazione in termini di rapporto costi/benefici, alla ricerca operativa, all’analisi combinatoria su grandi insiemi, al controllo ottimale, alla statistica, .. e così via. Questo fenomeno, in cui di norma la forza bruta prevale sull’alternativa di esercitare la propria destrezza nel modo tradizionale, è infatti pienamente in atto; ed il computer gli continua a fornire in sovrabbondanza l’energia necessaria.<sup>15</sup> Si conclude così che anche quel personaggio che abbiamo più sopra introdotto come “risolvitore di equazioni”, si scinde ormai in due figure professionali *ben distinte*: quella dello specialista di analisi numerica astratta, e quella, assai più largamente rappresentata, dello sperimentatore mediante computer, tra loro da sempre in precario e insufficiente contatto cooperativo.

La vastità della materia obbliga a limitarci ad una piccola scelta di problemi fondamentali e molto generali. Torniamo alla nozione di equazione (generalmente non lineare), nella forma

$$(1) \quad A(x) = 0,$$

ove  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ ,  $D(A)$  è al solito il dominio di definizione di  $A$ ,  $X$  e  $Y$  sono  $B$ -spazi (il secondo con zero  $O_Y \equiv 0$ ) e  $x \in D(A)$  è l’incognita. Se in particolare  $Y \equiv X$ ,  $A(x)$  può essere sempre scritta come  $B(x) - x$  ponendo  $B(x) =: A(x) + \text{Id}_X x$ ; la (1) diventa allora

$$(2) \quad B(x) = x,$$

---

<sup>14</sup> È il caso di ricordare qui, quale storico esempio di fisica computazionale *sperimentale*, la pionieristica indagine realizzata da E. Fermi, J. Pasta e S. Ulam (“Studies in Nonlinear Problems”, Los Alamos Report LA 1940, 1955) sul comportamento di un sistema di oscillatori debolmente accoppiati in modo anarmonico: modello noto da allora come “FPU model”, e pietra miliare nell’approccio numerico ai problemi della dinamica non lineare di sistemi a molti gradi di libertà (vedi ad es. in “E. Fermi Collected Papers”, ed. E. Segré, Un. of Chicago Press (1965), vol 2, p. 978). I risultati furono «francamente sorprendenti» (Ulam, in “Adventures of a Mathematician”, 1983), nel senso che l’attesa equipartizione dell’energia dei modi del sistema non appariva. Soltanto più tardi si capì che questa assenza era dovuta alla scelta di valori troppo bassi dell’energia, situati nel cosiddetto “slow mixing regime”.

<sup>15</sup> Non ci sembra molto sensato deplorare più di un tanto la situazione, che è nella forza dei fatti. Si legga ad esempio il saggio dal tono un po’ apocalittico di C. Truesdell: “Il calcolatore: rovina della scienza e minaccia per il genere umano” in “La nuova ragione. Scienza e cultura nella società contemporanea”, Bologna, Scientia - Il Mulino, (1980).

cioè una equazione di punto fisso (vedi D.2) con l'incognita  $x$  in  $D(B)$  ( $\equiv$  dominio di  $B$ )  $\equiv D(A)$ . È certamente motivo di sorpresa, per il non-specialista, constatare quanta parte della moderna analisi funzionale astratta verta su problemi di punto fisso.<sup>16</sup>

Riferendoci alla (2), sia  $B: Q(\subset X) \rightarrow X$  (essendo  $X \equiv$  uno SB) una applicazione tale che esista una costante  $q \in (0,1)$  per cui  $\|B(x')-B(x'')\|_X \leq q\|x' - x''\|_X$  per ogni coppia  $x', x''$  in  $Q$ . In questo caso  $B$  applica  $Q$  in  $Q$  e si dice una **contrazione su  $Q$  con rapporto** (di contrazione)  $q \in (0,1)$ . Sulla (2), abbiamo allora il fondamentale **teorema di Banach** (Stefan, 1892-1945; 1921):  $T_1$ . «Se  $Q \subset X$  è chiuso, e  $B$  è una contrazione su  $Q$  con rapporto  $q \in (0,1)$ , l'equazione (2) ha una e una sola soluzione  $\underline{x} \in Q$  che è il limite per  $n \rightarrow \infty$  della successione  $\{x_n\}_{n=0,1} \dots$  generata dalla formula ricorsiva  $x_{n+1} = B(x_n)$ , ogni elemento della quale è in  $Q$  se lo è  $x_0$ . La stima a priori dell'errore (alla  $n$ -ma iterazione) è data da

$$(3) \quad \|x_n - \underline{x}\|_X \leq \|B(x_0) - x_0\|_X q^n / (1-q) \gg.$$

Si apprezzi la potenza di  $(T_1)$ , che sotto le ipotesi di cui al suo enunciato fornisce simultaneamente una prova di esistenza/unicità della soluzione, una procedura effettiva per la sua costruzione e una stima a priori dell'errore. Di  $(T_1)$  esistono parecchie interessanti applicazioni e generalizzazioni. Ad esempio il metodo di Picard per la soluzione della equazione differenziale (D.2, 6), ormai interpretata in senso astratto con  $x(t)$  in un  $B$ -spazio e con  $t$ -derivata nel senso di Fréchet, è riconducibile (si può dimostrare) al teorema di Banach.

Passando alla più generale equazione (1), importante è il **teorema di Kantarovich**, (o di **Newton-Kantarovich**, 1948<sup>17</sup>), che generalizza in senso astratto il ben noto “metodo delle tangenti” proposto da Newton circa due secoli e mezzo prima:

$T_2$ . «Ipotesi: (a):  $A: D(A)(\subset X) \rightarrow Y$  è Fréchet-derivabile nella palla (aperta) di  $D(A)$  di centro  $x_0$  e raggio  $r$ ,  $\mathcal{B}_r(x_0)$ , e la sua  $F$ -derivata  $A'$  è ivi Lipschitz-continua con costante (di Lipschitz)  $c > 0$ ; (b): in  $\mathcal{B}_r(x_0)$ ,  $A'$  è continuamente invertibile e l'inversa  $(A')^{-1}$  ha norma<sup>18</sup> limitata, diciamo non maggiore di  $m > 0$ ; (c): esiste un  $\eta \geq \|A(x_0)\|_Y$  tale che  $q =: \eta m^2 c / 2 < 1$  e  $r' =: \eta m \sum_{h=0}^{\infty} q^{\alpha(h)} < r$ , ove  $\alpha(h) =: 2^h - 1$ ; Tesi: (d): l'equazione (1) ha una soluzione  $\underline{x} \in [\mathcal{B}_{r'}(x_0)]$  (dove  $[ ]$  denota la chiusura, qui in  $X$ ) che è il limite per  $n \rightarrow \infty$  della successione  $\{x_n\}_{n=0,1} \dots$  (anch'essa in  $[\mathcal{B}_{r'}(x_0)]$ ), generata dalla formula ricorsiva  $x_{n+1} = x_n - (A'(x_n))^{-1} A(x_n)$ ; (e): la stima a priori dell'errore è data da

$$(4) \quad \|x_n - \underline{x}\|_X \leq \eta m q^{\alpha(n)} / (1 - q^{\beta(n)}),$$

<sup>16</sup> Ad esempio il trattato di analisi funzionale di E. Zeidler (1985, vedi Bibl. Gen. (A)) dedica all'argomento il primo dei suoi cinque volumi, di circa 900 pagine.

<sup>17</sup> Vedi in particolare L.V. Kantarovich, G.P. Akilov, “Functional Analysis in Normed Spaces” (engl. transl.) Pergamon Press 1964, p. 658.

<sup>18</sup> Si ricorda che la norma  $(\| \cdot \|)$  di un operatore lineare è il sup della norma dei suoi valori sulla sfera unitaria (supposto esistere finito).

ove  $\beta(n) =: 2^n$ .»

Sotto le ipotesi (a+c), anche il teorema di Kantorovich offre dunque una prova costruttiva dell'esistenza di una soluzione, una procedura effettiva per il suo calcolo, ed una stima a priori dell'errore. Il problema dell'unicità non è invece considerato nella versione qui riportata (ne esistono altre).

In generale, l'analisi funzionale fornisce sia (i) teoremi di esistenza *costruttivi*, come (T<sub>1</sub>) e (T<sub>2</sub>), sia (ii) teoremi di esistenza *non costruttivi*, sia infine (iii) metodi di soluzione *costruttivi* eventualmente supportati da un'ipotesi o da un asserto di esistenza. In certi casi, combinando risultati dei tipi (ii,iii), nonché la necessaria dose di elaborazione matematica, si sono ottenuti algoritmi *fondati* per la soluzione dell'equazione di partenza, per lo più di tipo (1).

Cominceremo col presentare alcuni esempi della precedente classe (ii) di teoremi, che hanno tutti comune natura topologica. Un prototipo di immediata evidenza intuitiva, risalente a Bolzano (Bernhard, 1781 –1848; 1817) ne è il seguente:

T<sub>3</sub>. «Se  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, e  $f(0)f(1) < 0$ , allora l'equazione  $f(x) = 0$  ha (almeno) una soluzione in  $(0,1)$ .» (Secondo l'uso comune, l'avverbio “almeno” sarà sottinteso in asserti di questo tipo.) La dimostrazione di (T<sub>3</sub>) riposa sul fatto, a sua volta provato in qualunque trattato di Analisi istituzionale, che una successione di reali non decrescente [non crescente] e limitata verso l'alto [verso il basso] ha un limite finito.

Molto meno intuitiva è (la tesi de) il **teorema di Brouwer** (1912), il quale recita:

T<sub>4</sub>. «Una trasformazione *continua* di una palla chiusa di  $\mathbb{R}^{n \geq 1}$  in se stessa ha ivi un punto fisso». In un linguaggio più suggestivo, (T<sub>4</sub>) afferma che se un continuo materiale (ad esempio un liquido) che riempie una palla viene mescolato arbitrariamente sotto il vincolo di subire uno spostamento *continuo*, alla fine c'è una sua particella che non si è spostata. Di (T<sub>4</sub>) esistono versioni più generali ed astratte, ad esempio:

T<sub>5</sub>. «sia  $\Omega$  è un sottoinsieme chiuso e convesso di un B-spazio di dimensione finita e  $A: \Omega \rightarrow \Omega$  una applicazione continua; allora A ha un punto fisso in  $\Omega$ .»

Probabilmente nessuna delle dimostrazioni correnti del teorema di Brouwer è abbastanza semplice per essere riportata o accennata qui.

Proseguiamo con il **teorema di Schauder** (Julusz, 1899 - 1947; 1930):

T<sub>6</sub>. «sia  $\Omega$  un sottoinsieme limitato, chiuso e convesso di un B-spazio e  $A: \Omega \rightarrow \Omega$  un'applicazione compatta.<sup>19</sup> Allora A ha un punto fisso in  $\Omega$  ».

La dimostrazione standard fa uso del teorema di Brouwer.

---

<sup>19</sup> Ricordiamo che una applicazione  $f: X \rightarrow Y$ , ove X e Y sono B-spazi, si dice compatta (in X) se è ivi continua e  $[f(\sigma)]$  (chiusura di  $f(\sigma)$ , inclusa in Y) è compatta per ogni sottoinsieme limitato  $\sigma$  di X.

Tra le conseguenze più note del teorema di Schauder ricordiamo ancora:

T<sub>7</sub>. «sia  $[\mathcal{B}_r(O_X)]$  la palla chiusa di centro  $O_X$  e raggio  $r$  del B-spazio  $X$ , e sia  $A: [\mathcal{B}_r(O_X)] \rightarrow X$  compatta. Se “ $A(x) \neq \lambda x$  per ogni  $\lambda > 1$  e per ogni  $x \in X$  di norma  $r$ ”, allora  $A$  ha un punto fisso in  $[\mathcal{B}_r(O_X)]$ .» La stessa conclusione vale se l’ipotesi tra “ ” è sostituita dalla “se  $\|A(x)\|_X \leq r$  per ogni  $x \in X$  di norma  $r$ ”.

Concludiamo questa lista di teoremi di punto fisso con il **teorema di Leray** (Jean, 1906-1998) e **Schauder**, che recita (1934):

T<sub>8</sub>. «sia  $f: X \rightarrow X$  ( $X$  essendo un B-spazio) un’applicazione compatta, ed esista un  $C > 0$  tale che, per ogni  $x \in X$  soddisfacente alla  $tf(x) = x$  con  $t$  in  $[0,1]$ , risulti  $\|x\|_X \leq C$ . Allora  $f$  ha un punto fisso in  $X$ ».

#### D.4) ESEMPI DI METODI COSTRUTTIVI PER LA SOLUZIONE DI EQUAZIONI ASTRATTE

Venendo ai metodi costruttivi di soluzione approssimata di una equazione astratta (generalmente tra B-spazi), essi hanno più o meno la seguente comune natura: precisato il tipo di equazione che si intende risolvere, si comincia con l’“approssimarla” mediante una successione di convenienti equazioni risolvibili abbastanza facilmente. L’obiettivo consiste nel *provare* che la successione delle soluzioni così ottenute converge, sotto le ipotesi del caso e nel senso conveniente, alla soluzione della equazione di partenza. Talvolta si fornisce una stima a priori dell’errore e del tasso di convergenza. Se ha successo, la procedura dà al contempo un teorema costruttivo di esistenza.

Esiste una impressionante costellazione di variazioni su questo tema, spesso collegate “geneticamente” tra loro. Un naturale intento didattico, che ovviamente non può essere perseguito qui, dovrebbe essere quello di presentare tali tecniche “per filiere” di problemi analoghi e di generalità crescente (o decrescente, a seconda dei gusti), evidenziando i collegamenti tra caso e caso; ma è raro trovare ispirazioni del genere nella pur vasta letteratura specializzata. Ci limiteremo dunque a qualche esempio in tal senso, non proponendoci nulla di più che offrire al lettore un’idea generale della complessa materia.

§ 1. *Metodo delle proiezioni*. Il caso concettualmente più semplice è il seguente. Riferendoci ad una equazione del tipo

$$(1) \quad A(x) = 0$$

(cfr. D.3, 1), la soluzione approssimata di ordine  $(n)$  viene espressa come combinazione lineare di  $n$  elementi di una data base  $\{\phi_i\}$  di  $X$  (B-spazio includente il dominio di  $A$   $D(A)$ ) secondo la

$x_n = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i$ . Se  $\{\psi_j\}$  è una simile base del duale  $Y^*$  di  $Y$  ( $Y$  essendo un  $B$ -spazio includente il codominio di  $A, R(A)$ ), si ottiene così

$$(2_n) \quad (A(\sum_{i=1}^n c_i \phi_i), \psi_j) = 0,$$

per  $j = 1, \dots, n$ , dove con  $(f, g)$  si è denotata la forma bilineare uguale al valore del secondo argomento  $g$  (un funzionale lineare limitato sul  $B$ -spazio considerato, elemento del suo duale) nel primo argomento  $f$  (un elemento del primo  $B$ -spazio).<sup>20</sup> Le  $(2_n)$  sono  $n$  equazioni (generalmente non lineari) negli  $n$  coefficienti  $c_{1 \leq i \leq n}$ .  $x_n$  è determinato se esiste una soluzione unica delle  $(2_n)$ ; ma fino a quando la situazione rimane così generale, non è detto che la successione  $\{x_n\}$  converga in  $X$  per  $n \rightarrow \infty$ , e tanto meno che converga ad una soluzione della (1).

Supporremo allora che  $X$  e  $Y$  siano spazi di Hilbert ( $H$ -spazi), e che la (1) sia del tipo

$$(3) \quad Lx - c = 0$$

(denotando al solito con  $0$  lo zero di  $Y$ ), ove  $L: D(L) (\subset X) \rightarrow Y$  è un'applicazione *lineare* (non necessariamente limitata) e  $c$  è dato in  $Y$ . (Secondo l'uso comune, abbiamo qui trascurato le parentesi attorno agli argomenti di applicazioni lineari.) Diamo per noto che, essendo  $Y$  un  $H$ -spazio,  $Y$  e  $Y^*$  possono essere identificati, sussistendo tra essi una isometria lineare-duale che lascia invariate le norme ( $\| \cdot \|_{Y^*} = \| \cdot \|_Y$ ), e secondo la quale la precedente forma bilineare si identifica con il prodotto interno standard in  $Y$ . In questo caso la base  $\{\psi_j\}$  è in  $Y$  e le  $(2_n)$  diventano

$$(2_{nbis}) \quad \sum_{i=1}^n (L\phi_i, \psi_j) c_i = (c, \psi_j)$$

per  $j = 1, \dots, n$ , e dove  $(\cdot, \cdot)$  è il prodotto interno in  $Y$ . Le  $(2_{nbis})$  costituiscono un sistema di  $n$  equazioni lineari negli altrettanti coefficienti  $c_i$ , la cui risolubilità unica è espressa dalla usuale condizione  $\det\{(L\phi_i, \psi_j)\}_{i,j=1+n} \neq 0$ .

Sempre riferendoci alla (3), siano poi  $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$  e  $\{Y_n\}_{n=1,2,\dots}$  successioni di sottospazi di  $X$  e rispettivamente di  $Y$ , la prima tale che  $X_n \subset D(A) \forall n$ , e sia  $\{P_n\}$  una successione di proiezioni (quindi  $P_n^2 = P_n$ ) che applicano  $Y$  su  $Y_n$ ,  $P_n Y = Y_n$ . Si consideri la successione di equazioni lineari approssimanti

$$(4_n) \quad P_n(Lx_n - c) = 0,$$

con  $x_n \in X_n$ . Se le  $P_n$  sono ortoproiezioni, e si identificano  $X_n$  e  $Y_n$  con le varietà lineari abbracciate da  $\{\phi_i\}_{i=1+n}$  e rispettivamente da  $\{\psi_j\}_{j=1+n}$ , si verifica facilmente che le  $(2_{nbis})$  e le  $(4_n)$  si equivalgono. Tuttavia anche in assenza di questa equivalenza, e ferme restando le  $X_n \subset D(A)$ ,  $P_n^2 = P_n$ ,  $P_n Y = Y_n$ , le  $(4_n)$  conservano il significato di equazioni approssimanti la (3). Il metodo di

<sup>20</sup> La logica sottostante a questa idea sta nel fatto che sia  $X$  che  $Y$  sono spazi lineari, e la rappresentazione di  $x_n$  è a sua volta lineare.

soluzione della (3) facente capo alle  $(4_n)$  si dice **metodo delle proiezioni** (per equazioni lineari). La sua giustificazione è contenuta nel seguente teorema.

$T_9$ . «Ipotesi: (a): il dominio  $D(L)$  e il codominio  $R(L)$  sono densi in  $X$  e rispettivamente in  $Y$ ; (b):  $L: D(L) \rightarrow R(L)$  è biiettiva; (c):  $X_n$  e  $Y_n$  hanno dimensione finita ed uguale (tipicamente la loro dimensione è  $n$ ); (d): le proiezioni  $P_n$  sono uniformemente limitate, cioè esiste una costante  $C > 0$  per cui  $\|P_n\| \leq C \forall n \geq 1$ ; (e):  $\forall c \in Y$ , la distanza  $d(c, LX_n)$  di  $c$  da  $LX_n$  ( $\equiv \inf_{z \in LX_n} \|z - c\|_Y$ ) tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ ; (f): avendo posto  $\tau_n =: \inf_{z \in LX_n, \|z\|=1} \|P_n z\|_Y$ , risulta  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n > 0$ . Tesi: (g): (almeno) da un dato  $n$  in su, per ogni  $c \in Y$  la  $(4_n)$  ha un'unica soluzione  $x_n$ , e  $\|Lx_n - c\|_Y \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ ; (h): il tasso di convergenza di  $Lx_n$  a  $c$  è stimato dalla  $\|Lx_n - c\|_Y \leq (1 + C/\tau_n)d(c, LX_n)$ ».<sup>21</sup>

Sotto le ipotesi (a÷f), il metodo delle proiezioni per equazioni lineari fornisce quindi anche una prova di esistenza (per qualunque  $c$ ). Il suo limite principale sta nell'ipotesi (d) (che è spesso difficile soddisfare), e naturalmente nella linearità della equazione di partenza (3). §

§2. *Un esempio di "schema di approssimazione"*. Proseguiremo con l'illustrazione di uno dei cosiddetti **schemi di approssimazione** per la soluzione di una equazione astratta, generalmente non lineare, del tipo (1). La scelta è caduta su di esso sia per la sua generalità e potenza, sia perché il teorema ( $T_{10}$ ) sul quale si fonda si può dimostrare con mezzi relativamente elementari. La sua presente illustrazione è molto succinta, e per i necessari dettagli si rinvia lo studioso alla letteratura specializzata (vedi soprattutto in M. Krasnoselskii et al, Bibl. Gen. (A)).

L'idea di base è sempre quella di "approssimare" la (1) con una successione di equazioni (generalmente non lineari) del tipo

$$(5_n) \quad A_n(x_n) = O_{Y_n},$$

$n = 1, 2, \dots$ , ove  $A_n: D(A_n) (\subset X_n) \rightarrow Y_n$ ,  $X_n$  e  $Y_n$  sono B-spazi, e  $O_{Y_n}$  è lo zero di  $Y_n$ , in modo che la successione delle soluzioni delle  $(5_n)$  "approssimi", nel senso che preciseremo, una soluzione della (1).

Ci serviranno alcune nuove definizioni, che comunque hanno valore anche di per sé nell'ambito dell'analisi funzional-numerica. Sia  $K$  un B-spazio, e  $\{K_n \supset K\}_{n=1, \dots}$  una successione di B-spazi includenti  $K$ . Sia poi  $\{Z_n\}_{n=1, \dots} \equiv \{Z_n\}$  (qui e nel seguito in questi casi aboliremo per brevità il pedice  $_{n=1, \dots}$ ) una successione di B-spazi e  $\{W_n\}$  una successione di *suriezioni lineari continue*<sup>22</sup>  $W_n: K_n \rightarrow_{\text{sur}} Z_n$ , quindi  $Z_n = W_n K_n$ . La  $\{W_n\}$  come descritta si dice uno **schema di restrizione su  $K$**  (infatti le  $W_n$  non sono in generale iniettive, e quindi "restringono" i B-spazi  $K_n$  in corrispondenti  $Z_n$ , di cardinalità non maggiore). La disponibilità della successione  $\{W_n\}$  permette di

<sup>21</sup> Per la dimostrazione, si veda ad es. in M.A. Krasnoselskii et al., "Approximate Solutions of Operator Equations" (engl. transl.), vedi Bibl. Gen. (A).

<sup>22</sup> Ricordiamo che la continuità di una applicazione lineare è equivalente alla sua limitatezza. È ovvio che il trasformato di un B-spazio sotto una tale applicazione è ancora un B-spazio.

definire un particolare tipo di convergenza di una successione  $\{z_n \in Z_n\}$  ad un elemento  $z \in K$ . Precisamente, diremo che la successione  $\{z_n\}$  **W-converge a**  $z$  (o che  $z$  è un **W-limite di**  $\{z_n\}$ ) se, essendo  $\|\cdot\|_{Z_n}$  la norma in  $Z_n$ ,

$$(6) \quad \|z_n - W_n z\|_{Z_n} \rightarrow 0$$

per  $n \rightarrow \infty$ .<sup>23</sup> Non è detto che  $\{z_n\}$  abbia sempre un W-limite in  $K$ ; o che se ne ha, ne abbia uno solo. Se *ogni*  $z \in K$  è un W-limite di qualche successione  $\{z_n\}$ , diremo che la successione degli SB  $\{Z_n\}$  **W-converge a**  $K$ . D'altra parte  $\{z_n\}$  *ha al più* un W-limite in  $K$  sse,  $\forall z \in K$

$$(7) \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} \|W_n z\|_{Z_n} = 0) \Rightarrow (z = 0).^{24}$$

La (7) si dice **condizione di W-non-degenerazione delle norme**  $\|\cdot\|_{Z_n}$ .

Siano adesso  $\{T_n\}$  e  $\{V_n\}$  schemi di restrizione su  $G$  e rispettivamente su  $H$ , secondo le

$$(8_n) \quad T_n: G_n \rightarrow_{\text{sur}} X_n, X_n = T_n G_n, G \subset G_n, \text{ e}$$

$$(9_n) \quad V_n: H_n \rightarrow_{\text{sur}} Y_n, Y_n = V_n H_n, H \subset H_n,$$

ove  $G_n, X_n, G, H_n, Y_n$  e  $H$  sono tutti B-spazi. Tornando alla equazione di partenza (1), ove  $A: D(A) \subset X \rightarrow Y$ , con  $O_Y \in R(A) \equiv \text{codominio di } A$  (in caso contrario la (1) non avrebbe soluzioni), supporremo che  $\forall n, G_n \subset X$  e  $H_n \subset Y$ , e inoltre che  $D(A) \subset G$  e  $R(A) \subset H$ . Sia poi  $\{A_n\}$  una successione di applicazioni (generalmente non lineari) del tipo

$$(10_n) \quad A_n: D(A_n) \subset X_n \rightarrow Y_n.$$

Una successione di applicazioni  $\{A_n\}$  come quella descritta dalle (10<sub>n</sub>), ogni elemento della quale è definito in un dominio incluso in un B-spazio e prende i suoi valori in un B-spazio, si dice **stabile** se esiste una funzione  $\omega = \omega(t \in [0, \infty])$  con valori in  $[0, \infty]$  continua e strettamente crescente tra 0 (ove  $\omega(0) = 0$ ) e  $\infty$  (ove  $\omega(\infty) = \infty$ ) e tale che,  $\forall (x_n', x_n'') \in D(A_n)$  e per ogni  $n$  (o almeno da un certo  $n$  in su), risulti

$$(11_n) \quad \omega(\|x_n' - x_n''\|_{X_n}) \leq \|A_n(x_n') - A_n(x_n'')\|_{Y_n}.$$

Supponiamo ora che per la successione  $\{A_n\}$  sussistano i vincoli:

$$(12_n) \quad T_n D(A) \subset D(A_n)$$

$\forall n \geq 1$ . Allora  $\forall x \in D(A)$  sono definiti  $T_n x \in X_n$  e  $A_n(T_n x) \in Y_n$ ; e inoltre  $A(x) \in R(A) \subset H$  e  $V_n A(x) \in Y_n$ , nonché la differenza  $A_n(T_n x) - V_n A(x)$ . Si supponga a questo punto che, per un dato  $x \in D(A)$ , per  $n \rightarrow \infty$  si abbia

$$(13) \quad \|A_n(T_n x) - V_n A(x)\|_{Y_n} \rightarrow 0.$$

<sup>23</sup> La W-convergenza di  $\{z_n\}$  a  $z$  include come caso particolare l'usuale convergenza in norma in  $K$ : basta porre  $K_n = K$  e  $W_n = \text{Id}_K$ , quindi  $Z_n = K$ , perché la (6) diventi  $\|z_n - z\|_K \rightarrow 0$ .

<sup>24</sup> La (7) è *sufficiente* all'unicità: supposto infatti che  $\|z_n - W_n z\|_{Z_n} \rightarrow 0$  valga per  $z = z'$  e per  $z = z''$ , per la disuguaglianza triangolare si ha  $\|W_n(z' - z'')\|_{Z_n} \rightarrow 0$ , e quindi  $z' = z''$  in forza della (7). La (7) è *necessaria* all'unicità: infatti la successione  $\{W_n z\}$  W-converge a  $z$ , e inoltre W-converge anche a 0 in forza dell'antecedente della (7). Ma allora  $z = 0$  per l'ipotesi di unicità del W-limite, e quindi vale la (7).



Le (12<sub>n</sub>) e la (13) si dicono **condizioni di (T,V)-approssimazione** (la seconda **in x**) **per la successione**  $\{A_n\}$ ; se esse sono soddisfatte, la successione  $\{A_n\}$  si dice uno **schema di (T,V)-approssimazione di A in x**. Se  $\{A_n\}$  è un tale schema in una soluzione della (1), una soluzione  $x_n$  della (5<sub>n</sub>) (che per definizione  $\in D(A_n) \subset X_n$ ) si dice una **soluzione approssimata di ordine** (n) della (1) stessa (rispetto allo schema  $\{A_n\}$ ).

La (13) asserisce che la successione  $A_n(T_n x)$  V-converge a  $A(x) \in R(A) (\subset H)$ . Essa può rinforzarsi come appresso descritto. Si supponga che esistano una costante  $k > 0$  e una funzione  $\alpha(x) > 0$  tali che, per il dato  $x \in D(A)$ , e per ogni n (o almeno da un certo n in su)

$$(14) \quad \|A_n(T_n x) - V_n A(x)\|_{Y_n} \leq \alpha(x)n^{-k},$$

cioè che il 1° membro della (11<sub>n</sub>) sia  $O(n^{-k})$  per  $n \rightarrow \infty$ ; allora lo schema di (T,V)-approssimazione  $\{A_n\}$  (di A in x) si dice brevemente **di ordine k**. È chiaro che la (14) implica la (13).

Se  $\underline{x} \in D(A)$  è soluzione della (1), la (13) e la (14) diventano, per  $x = \underline{x}$ ,

$$(13bis) \quad \|A_n(T_n \underline{x})\|_{Y_n} \rightarrow 0,$$

e rispettivamente

$$(14bis) \quad \|A_n(T_n \underline{x})\|_{Y_n} \leq \alpha(\underline{x})n^{-k}$$

da un certo valore di n in su.

Possiamo finalmente enunciare il predetto teorema (T<sub>10</sub>).

T<sub>10</sub>. Per la data (1), dati schemi di restrizione  $\{T_n\}$  (su  $G \subset X$ ) e  $\{V_n\}$  (su  $H \subset Y$ ) e dato schema di (T,V)-approssimazione  $\{A_n\}$  descritti come sopra, abbiamo: «Ipotesi: (a): le norme  $\| \cdot \|_{X_n}$  sono (T)-non-degeneri; (b): l'eq. (1) ha una soluzione esatta e una soluzione approssimata di ogni ordine; (c): valgono le condizioni di approssimazione (12<sub>n</sub>) e (13bis), quest'ultima in ogni soluzione della (1); (d) la successione  $\{A_n\}$  è stabile. Tesi: (e): la soluzione  $\underline{x}$  della (1) è unica, e la soluzione  $\underline{x}_n$  della (5<sub>n</sub>) è unica almeno da un certo valore di n in su; (f) la successione  $\{\underline{x}_n\}$  T-converge a  $\underline{x}$ ; (g) se  $\{A_n\}$  è  $O(n^{-k})$  in  $\underline{x}$  (soluzione della (1)), e  $\omega(t) \sim \gamma t^\rho$  (con  $\gamma, \rho > 0$ ) per  $t \rightarrow 0+$ , allora  $\|\underline{x}_n - T_n \underline{x}\|_{X_n} = O(n^{-k/\rho})$ , cioè  $\underline{x}_n$  T-converge a  $\underline{x}$  come  $n^{-k/\rho}$  converge a zero.»

Dim. Tesi (e): siano  $x', x''$  due soluzioni esatte della (1) (ipotesi (b)). Poiché la successione  $\{A_n\}$  è stabile (ipotesi (d)), introducendo la funzione inversa  $\omega^{-1}$  della  $\omega$ , al pari di quest'ultima non decrescente e continua tra gli stessi estremi, è  $\|T_n(x' - x'')\|_{X_n} \leq \omega^{-1}(\|A_n(T_n x') - A_n(T_n x'')\|_{Y_n}) \leq \omega^{-1}(\|A_n(T_n x')\|_{Y_n}) + \omega^{-1}(\|A_n(T_n x'')\|_{Y_n})$  (disuguaglianza triangolare). L'ultimo membro di questa  $\leq \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$  in forza della (13bis) (ipotesi (c)), quindi  $\|T_n(x' - x'')\|_{X_n} \rightarrow 0$ , e in conclusione  $x' = x''$  in forza dell'ipotesi (a). Siano poi  $x'_n$  e  $x''_n$  due soluzioni della (5<sub>n</sub>) (ipotesi (b)); tornando a sfruttare la stabilità della  $\{A_n\}$ , è  $\omega(\|x'_n - x''_n\|_{X_n}) \leq 0$ , e quindi  $x'_n = x''_n$ , qed. Tesi (f): ancora partendo dalla stabilità di  $\{A_n\}$  e denotando con  $\underline{x}$  e con  $\underline{x}_n$  la soluzione della (1) e rispettivamente

della  $(S_n)$ , abbiamo  $\|x_n - T_n \underline{x}\|_{X_n} \leq \omega^{-1}(\|A_n(x_n) - A_n(T_n \underline{x})\|_{Y_n}) = \omega^{-1}(\|A_n(T_n \underline{x})\|_{Y_n})$ . Qui l'argomento di  $\omega^{-1}$  tende a 0 in forza della (13bis) (ipotesi (c)), e per la continuità di  $\omega^{-1}$  in 0,  $\|x_n - T_n \underline{x}\|_{X_n} \rightarrow 0$ , qed. La tesi (g) è un semplice corollario di questi risultati, e la sua verifica è lasciata al lettore. #

In effetti la tesi (f) afferma che  $\{\underline{x}_n\}$  T-converge a  $\underline{x}$ , e tale T-convergenza *non* implica in generale la convergenza standard. Una condizione sufficiente sotto la quale le due convergenze si equivalgono è quella cosiddetta **di regolarità di T in x**. Avendo presupposto  $G_n = X$  e  $X_n (= T_n X) \subset X$  per ogni n, si assume cioè che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x - x\|_X = 0$ . La dimostrazione è immediata, e si basa sull'uso della disuguaglianza triangolare.<sup>25</sup> Benché siano suggestive in tal senso, le ipotesi di  $(T_{10})$  non sono sufficienti a passare dalla T-convergenza alla convergenza standard (di  $\{\underline{x}_n\}$  a  $\underline{x}$ ); tuttavia sotto convenienti restrizioni addizionali (come appunto quella della regolarità di T nella soluzione  $\underline{x}$ , o in generale in  $D(A)$ ) si possono fondare su  $(T_{10})$  metodi costruttivi di soluzione della (1). §

§3. *Schemi alle differenze*. Alcuni **schemi alle differenze** per la soluzione di equazioni differenziali ordinarie o alle derivate parziali rientrano appunto, sotto convenienti restrizioni, nello schema di approssimazione testé descritto in §2. È il caso del ben noto schema alle differenze di Eulero (anche nella sua versione cosiddetta “accelerata”) per la soluzione della generica equazione differenziale del 1° ordine normale, generalmente non lineare,

$$(15) \quad dx/dt + f(t, x(t)) = 0,$$

con  $0 \leq t \leq T$  e  $f$  continua, sotto la condizione iniziale

$$(16) \quad x(0) = 0.$$

Lo schema di Eulero, ricordiamo, è dato da  $(x_k - x_{k-1})/\tau + f(t_{k-1}, x_{k-1}) = 0$ , ove  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tau = T/n$ ,  $x_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{1 \leq k \leq n} = k\tau$ . Nello schema accelerato si ha invece  $(x_k - x_{k-1})/\tau + [f(t_{k-1}, x_{k-1}) + f(t_k, x_k)]/2 = 0$ . Lo schema accelerato è evidentemente “implicito”, cioè non immediatamente risolvibile rispetto a  $x_k$  come il precedente. Nello schema di Eulero semplice,  $X$  è l'insieme dei grafi funzionali  $x = \langle t, x(t) \rangle$  su  $[0, T]$ ,  $G_n = X \forall n \geq 1$ , e  $X_n$  è l'insieme dei grafi funzionali  $x_{(n)} = \langle t_k, x_k \rangle_{k=1 \div n}$  sulla maglia  $\Delta_n =: \{t_0=0, t_{1 \leq k \leq n-1} = \tau k, t_n=T\}$ , quindi  $X_n \subset X$ , sempre  $\forall n \geq 1$ . Lo schema di restrizione  $T_n: X \rightarrow_{\text{sur}} X_n = T_n X$  è definito da  $T_n x = \langle t_k, x(t_k) \rangle_{k=1 \div n} \in X_n$ ,  $\forall x \in X$ . È immediato vedere che questa scelta garantisce la condizione di regolarità in  $x$  usando la norma  $\|\cdot\| = \max_{[0, T]} |\cdot|$ . Quanto allo schema di approssimazione, nello schema di Eulero semplice si prende  $[(x_k - x_{k-1})/\tau + f(t_{k-1}, x_{k-1})]_{k=1 \div n}$  (colonna a n termini) per  $A_n(x_{(n)})$ , e dunque

$$(17_n) \quad A_n(T_n x) = [(x(t_k) - x(t_{k-1}))/\tau + f(t_{k-1}, x(t_{k-1}))]_{k=1 \div n} = [(x(t_k) - x(t_{k-1}))/\tau - dx/dt(t_{k-1})]_{k=1 \div n};$$

<sup>25</sup> Da una parte si ha infatti  $\|x_n - x\| \leq \|x_n - T_n x\| + \|T_n x - x\|$ ; e dall'altra,  $\|x_n - T_n x\| \leq \|x_n - x\| + \|x - T_n x\|$ . (Tutte le norme sono su  $X$ ).

la condizione di approssimazione è così  $\max_{1 \leq k \leq n} |(x(t_k) - x(t_{k-1}))/\tau - dx/dt(t_{k-1})| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Si può anche dimostrare che la condizione di stabilità è soddisfatta, e si conclude che lo schema è convergente. Una banale modifica permette di trattare in modo analogo la stessa equazione con la condizione iniziale  $x(0) = \text{cost} \in \mathbb{R}$ . §

Possiamo con ciò concludere la nostra breve rassegna esemplificativa di procedure computazionali basate su algoritmi fondati per la soluzione approssimata di equazioni in B-spazi. Ci aspettiamo che esse siano apparse alquanto “formali” ( $\equiv$  insostanziali) o addirittura esotiche agli occhi del non-specialista. Almeno in parte, ciò è dovuto all’averne proposto versioni molto generali. Ma di fatto, le procedure *fondate* che abbiamo illustrato (e che di norma hanno almeno mezzo secolo di vita), e le molte altre con le quali avremmo potuto allargare la nostra rassegna, *sono tutte di assai concreta sostanza*. Più legittima sarebbe pertanto la perplessità di chi si chiedesse se tali procedure siano correntemente impiegate nella pratica quotidiana di calcolo, a partire dall’avvento del computer programmabile. La risposta è già stata ampiamente suggerita. Sorretto dallo spettacolare aumento della potenza dell’hardware, e spesso giustificato dalla obiettiva complessità dei problemi, l’approccio dominante, nell’analisi computazionale (in particolare di modelli fenomenologici), rimane marcatamente empirico e pragmatico: seppure il problema è preso in considerazione, nella grande maggioranza dei casi la necessità di lavorare con algoritmi fondati è vista come una sorta di “condizione di principio” alla quale si può ben rinunciare in favore della soluzione di altri e più remunerativi problemi. Che questo sia dovuto a difficoltà obbiettive, ad una sottostima dell’importanza di quella condizione (che non è affatto di principio), ad una reale ridondanza delle dimostrazioni, a confidenza nelle risorse dell’intuizione (o della buona fortuna), o infine a una banale combinazione di inerzia e superficialità, dipende dalle circostanze specifiche.

Una situazione particolarmente critica è quella che si verifica quando il modello equazionale in oggetto è malsano (vedi A.3), cioè quando l’equazione che esso genera *non ha soluzioni*, almeno dove le si ricerca. Il modello equazionale dovrà essere allora “indebolito minimalmente”. Questa operazione, se possibile, necessita di una forte dose di inventività, e può aprire prospettive di grande portata analitica. L’esempio di gran lunga più importante è quello della moderna **teoria debole** (o **distribuzionale**) dei SDP *lineari*, che nasce appunto da circostanze di questo genere. Va poi da sé che se una conveniente modifica non viene in qualche modo incorporata negli algoritmi che si disegnano per risolvere un problema equazionale malsano, quegli algoritmi sono *automaticamente infondati*, e che le risposte che se ne derivano possono essere (almeno parzialmente) illusorie.

## D.5) I SISTEMI DINAMICI E IL CAOS DETERMINISTICO (CENNI)

Un insieme di questioni di diretta e cospicua afferenza alla scienza computazionale che ha recentemente ricevuto grande interesse in campo scientifico-esatto (nonché matematico), è quello che va sotto il nome di “caos deterministico” (vedi la nota <sup>(21)</sup> della S.sez. 2.1.2). Secondo una fondata opinione, lo studio di tali questioni ha addirittura condotto ad una diversa e più matura filosofia di approccio *all’intera fisica matematica*; o almeno a quanto della fisica matematica si modella in una equazione differenziale ordinaria (EDO) generalmente astratta <sup>26</sup>.

Per cominciare, la stessa locuzione “caos deterministico” appare a prima vista paradossale, in quanto unisce due nozioni – il disordine/impredicibilità contro il carattere deterministico – che sono comunemente riguardate come incompatibili. Una opinione comune è che l’evoluzione di un fenomeno possa avere carattere impredicibile, in certi casi, soltanto in quanto sia governata da una EDO (generalmente astratta) *abbastanza complicata* dal punto di vista formale. Lo studio approfondito delle EDO, o anche soltanto delle loro versioni alle differenze finite – o comunque approssimate, vedi ad esempio il metodo di Picard – ha rimosso entrambi questi pregiudizi, dimostrando da una parte che una loro soluzione può esistere unica ed essere al contempo “virtualmente impredicibile” ( $\equiv$  caotica), e dall’altra che questa evenienza può occorrere anche se riferita a una EDO formalmente assai semplice, e addirittura uni-dimensionale, analitica e autonoma (vedi appresso).

Sia  $I$  un intervallo-base aperto di  $\mathbb{R}$ ,  $Y$  un B-spazio e  $f: I \times Y \rightarrow Y$  una applicazione abbastanza regolare. Essendo  $t \in I$  e  $y \in Y$ , possiamo scrivere la EDO di riferimento (supposta di forma normale) come

$$(1) \quad d_t y = f(t, y).$$

Ovviamente la (1) è uni-dimensionale se  $Y \equiv \mathbb{R}$ , e analitica se la funzione  $f$  è analitica; nonché, come sappiamo, autonoma se  $f$  non dipende da  $t$ . Limitandoci (per semplicità) al caso autonomo, e usando (ancora per semplicità) un passo  $\Delta t > 0$  costante, la soluzione alle differenze finite “in avanti” della (1) è governata dalla legge ricorsiva

$$(2_+) \quad y_{n+1} = (\mathbf{1} + \Delta t f)(y_n) \equiv F_+(y_n)$$

per ogni  $n$  per cui  $y_n \in Y$ . Qui  $\mathbf{1}$  è l’identità, e si è convenuto che il pedice (intero relativo) di  $y$  cresca con  $t$ . Nella stessa approssimazione, la soluzione alle differenze “all’indietro” della (1) è governata dalla simile legge

$$(2_-) \quad y_{n-1} = (\mathbf{1} - \Delta t f)(y_n) \equiv F_-(y_n),$$

---

<sup>26</sup> Cioè la cui incognita appartiene per definizione ad un B-spazio. Va da sé che ci si può limitare allora ad una EDO astratta del 1° ordine, che per semplicità supporremo qui di forma normale.

sempre per ogni  $n$  per cui  $y_n \in Y$ .

Si vede così che la soluzione alle differenze in avanti [all'indietro] della (1) si ottiene applicando ad una  $y$  iniziale, diciamola  $y_0 \in Y$ , un prodotto (funzionale,  $\circ$ ) iterato di  $F_+$  [di  $F_-$ ]. Se questa procedura converge per  $\Delta t \rightarrow 0$ , la soluzione esatta in avanti [all'indietro] della (1) si ottiene applicando alla  $y$  iniziale un prodotto per così dire “iterato infinite volte” della trasformazione (che nel presente contesto si dice più comunemente mappa) “quasi-identitaria”  $(\mathbf{1} + \Delta t f)$  [ $(\mathbf{1} - \Delta t f)$ ]. Nel limite in cui  $\Delta t \rightarrow 0$ , le due mappe quasi-identitarie in avanti e all'indietro sono evidentemente l'una inversa dell'altra al 1° ordine nel piccolo parametro  $\Delta t$ . Si ricorderà che abbiamo già visto qualcosa di simile a proposito di quei particolari sistemi di  $2N$  EDO normali (in questo caso, con  $Y = \mathbb{R}^{2N}$ ) che sono i sistemi simplettici della meccanica analitica.

Quanto sopra è del tutto elementare e ben noto. Con una locuzione ispirata alla meccanica, un oggetto i cui “stati”  $y \in Y$  evolvono in avanti [all'indietro] secondo una legge ricorsiva del 1° ordine del tipo  $y_{n+1} = F_+(y_n)$  [ $y_{n-1} = F_-(y_n)$ ] viene detto un **sistema dinamico** (SD). Nel caso limite in cui le mappe  $F_+$ ,  $F_-$  sono quasi-identitarie e l'una inversa dell'altra, le due leggi ricorsive si fondono in un'unica EDO astratta del 1° ordine autonoma/normale, e il corrispondente SD si dice “continuo”.<sup>27</sup>

Se  $F_+$  [ $F_-$ ] è una mappa lineare, anche i suoi prodotti iterati sono mappe lineari, e questa proprietà continua a valere nel limite di prodotti ( $\circ$ ) infiniti di mappe lineari quasi-identitarie. Quindi lo stato di un SD lineare, in un dato “momento” della sua evoluzione, è una trasformata lineare del suo stato iniziale, che esiste unica sotto blande restrizioni. Questa è nozione comune nell'ambito della teoria dei SDO lineari normali standard (con  $Y = \mathbb{R}^{m \geq 1}$ ); e in tal senso, i SD lineari normali sono banali dal presente punto di vista.

La situazione può invece cambiare radicalmente nel caso di SD non lineari. Vale a dire, da un lato la sperimentazione computazionale e dall'altro l'indagine matematica hanno dimostrato che esistono SD non lineari la cui evoluzione, sebbene unicamente determinata e retta da leggi formalmente semplici, è imprevedibile, o imprevedibile in certe condizioni. D'altra parte questa non è soltanto una realtà matematica: spesso, quei SD non lineari sono anche modelli ragionevolmente accurati di sezioni del mondo fenomenico, in molti e disparati campi di applicazione (fisico, chimico, biologico, economico, sociale, ecc.). Tutto ciò sollecita ad una revisione profonda della confidenza nella presunta “regolarità” del mondo reale preso nella sua globalità; per quanto fondamentale sia la loro importanza, *soltanto sue speciali sezioni* sono realmente regolari.

---

<sup>27</sup> In effetti, nella teoria generale dei SD prevale la tendenza a vedere nei SD continui un caso-limite di quelli “discreti” che abbiamo più sopra definito come SD tout court, piuttosto che nei SD discreti un'approssimazione dei SD continui, secondo la linea adottata nella nostra presentazione.

Ancora una riflessione merita la possibile semplicità formale delle leggi evolutive. Tradotta in termini di informazione, tale semplicità significa che quelle leggi contengono poca informazione. È allora naturale l'idea che la possibile "complessità" della evoluzione (calcolata o osservata) di un SD governato da leggi formalmente semplici sia in effetti dovuto al nostro modo di rappresentarla, celando al suo interno una sottostante regolarità; ed è superfluo aggiungere che tra gli obiettivi della teoria dei SD (formalmente) semplici vi è anche quello di portare alla luce questa regolarità nascosta, e di rivelare gli specifici meccanismi che la generano.

Diamo ora alcuni esempi di quanto abbiamo accennato nel precedente paragrafo. Sia

$$(3) \quad y_{n+1} = F(y_n)$$

la legge ricorsiva (per fissare le idee, in avanti) di riferimento, dove  $F: Y \rightarrow Y$  è un automorfismo non lineare abbastanza regolare, e

$$(3bis) \quad y_n = F^n(y_0)$$

la sua iterata funzionale n-ma a partire da una data  $y_0 \in Y$  (cioè  $F^n$  sta per il prodotto ( $\circ$ ) di  $F$  per se stesso iterato n volte). Il SD corrispondente alla (3) si dice **regolare in**  $y_0$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(y_0)$  esiste (finito o possibilmente infinito) in  $Y$ . Ad esempio per  $Y \equiv \mathbb{R}$  ( $m = 1$ ) e  $F \equiv \cos$ , oppure  $F \equiv \sin$ , con la precedente notazione troviamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(y_0) = 0,73908 \dots$  (misurando l'argomento di  $\cos$  in radianti) e rispettivamente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n(y_0) = 0$ , per *qualsivoglia*  $y_0$ . Evidentemente, i valori indicati sono i punti fissi (unici) delle equazioni  $y = \cos y$ , e risp.  $y = \sin y$ , i quali si comportano quindi come "attrattori universali" delle ED non lineari governate dalla  $y_{n+1} = \cos y_n$ , e risp.  $y_{n+1} = \sin y_n$ . Ma la situazione può essere molto diversa per automorfismi non lineari  $F$  altrettanto semplici, per i quali il  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(y_0)$  esiste soltanto per certi valori iniziali, e per altri no; oppure per i quali, pur esistendo in un dominio  $Y_0$  incluso in  $Y$ , il detto limite risulta una funzione  $G(y_0)$  discontinua per certi valori  $y_0$  di  $Y_0$ , subendo variazioni che non tendono a zero quando le variazioni del suo argomento attorno a  $y_0$  tendono a zero, cioè *non* soddisfacendo alla  $\lim_{y_0 \rightarrow y_0} [G(y_0) - G(y_0)] = 0$  (questo è il caso che soprattutto attrasse l'attenzione di Poincaré, vedi ancora la nota <sup>(21)</sup> della S.sez. 2.1.2). Se il SD non è regolare in  $y_0$ , ciò può avvenire perché  $F^n(y_0)$  tende a stabilizzarsi su un ciclo (finito) di valori distinti che si ripete indefinitamente, oppure a vagare caoticamente in  $Y$  o in una sua regione limitata senza che alcun disegno sia apparentemente discernibile nella sequenza dei suoi valori (**caos deterministico**). Nel secondo caso, la regione di attrazione asintotica si dice un **attrattore strano**. Tipicamente, si passa da un ciclo di  $h$  valori ad un ciclo di  $h' = kh$  ( $k$  intero  $> 1$ ) valori, e così via finché si ha la transizione al caos. Se ogni valore del ciclo si "sdoppia" ( $k = 2$ ) nel ciclo successivo, si parla di **biforcazione** della sequenza. In certi casi la funzione  $F$  dipende da un parametro continuo (o anche da più parametri continui), e il comportamento non regolare si manifesta per certi valori del parametro e non per altri. Si parla allora di **instabilità strutturale** (cfr.

S.sez.0.1.2) del SD in oggetto, in quanto le piccole variazioni del parametro si possono ben pensare come piccole variazioni della stessa  $F$ , cioè del SD.

Le non-regolarità descritte possono occorrere anche per funzioni  $F$  molto regolari o addirittura analitiche. Un esempio canonico di SD uni-dim potenzialmente non regolare è quello della mappa quadratica (banalmente analitica)  $F(y) = \alpha y(1-y)$ ,  $\alpha > 0$ , che abbiamo introdotto con il nome gergale di “mappa logistica” nella S.sez. 2.1.2. Questa presenta comportamenti asintotici ( $n \rightarrow \infty$ ) non regolari, sia di tipo ciclico che caotico, per valori positivi abbastanza grandi del parametro  $\alpha$  e per  $y_0 > 0$  (lo zero essendo manifestamente un suo punto fisso, cioè una soluzione della equazione  $y = \alpha y(1-y)$ ). La situazione resta più o meno la stessa passando a SD continui, retti da EDO astratte; vale a dire, non solo l’assenza di regolarità non è necessariamente legata al carattere continuo della evoluzione descritta da equazioni differenziali, ma tanto meno è da esso rimossa. Si intuisce infine che la natura di questi fenomeni permetta a volte di lumeggiarli in modo efficace anche mediante metodi puramente topologici, una idea di cui fu ancora pioniere Poincaré.

La teoria dei SD di cui abbiamo detto fin qui si generalizza in modo naturale passando a sistemi (discreti o continui) il cui “spazio di stato” sia una *varietà non elementare* ( $\equiv$  il cui atlante minimale abbia più di una carta) reale e di dimensione finita  $m$ , piuttosto che un B-spazio (il caso di una B-varietà<sup>28</sup> può essere qui ignorato). In questa accezione, un “SD su varietà” può tipicamente pensarsi come un sistema di  $m$  EDO standard del 1° ordine (autonome/normali) le cui  $m$  indeterminate si identificano con un “punto” di una varietà (reale)  $m$ -dim  $M^m$ , da supporre di classe di continuità  $\geq 1$ . È necessario considerare varietà  $m$ -dim piuttosto che spazi euclidei di uguale dimensione se lo spazio di stato ha tale natura, come avviene in molte applicazioni anche elementari. Ad esempio nel caso di un pendolo lo spazio di stato è (diffeomorfo a) il prodotto cartesiano di un cerchio  $C$  (al quale appartiene la sua posizione) per  $R$  (cui appartiene la sua velocità angolare), il cilindro 2-dim  $C \times R$ . L’evoluzione (continua o discreta) dei SD su varietà può essere soggetta a comportamenti non regolari come quella dei SD su B-spazi o su semplici spazi euclidei a dimensione finita, ma la sua analisi risulta in generale più ardua. La teoria dei SD su varietà, tipicamente reali e finito-dim, è al presente importante materia di ricerca.

Ovviamente ancora banali dal punto di vista del caos sono le EDO lineari normali astratte. In questo caso rientra in particolare l’equazione quantistica di Schrödinger (ad es. per una singola particella): equazione evolutiva complessa, equivalente a due EDP reali accoppiate. Non solo, ma non si saprebbe come modificare la meccanica quantistica rendendola leggermente non lineare

---

<sup>28</sup> Vale a dire, di una varietà “modellata localmente” su uno spazio di Banach (come una varietà comune è modellata localmente su  $R$ ).

senza incontrare difficoltà logiche. È precisamente per questa ragione che si usa affermare che il caos deterministico è estraneo alla meccanica quantistica.

Rinviamo alla letteratura specializzata il lettore curioso di approfondimenti sui temi considerati in questa appendice generale. Alcuni noti trattati sono segnalati nella Bibl. Gen. (A) (vedi Balakrishan, Berger, Collatz, Dautray & Lions, Kantarovitch & Akilov, Kantarovitch & Krylov, Krasnoselskii & al., Krylov, Marchuk, Trénoquine, Varga, Zeidler per D.1÷D.4; e Arnold (2), CIME, Nitecki, Palis & de Melo, Devaney per D.5), e contengono a loro volta gran copia di referenze più specifiche. Ancora con riferimento a D.5, un recente saggio divulgativo di buon successo editoriale è “Chaos” di J. Gleick, Penguin 1987 (trad. it. “Caos”, Rizzoli 1989). Ricordiamo infine il classico “The Fractal Geometry of Nature”, Freeman 1982, di B. Mandelbrot.



## APPENDICE GEN. E

### SUI FONDAMENTI DELLA TERMODINAMICA CLASSICA <sup>1</sup>

Praticamente, la termodinamica classica non è stata mai menzionata nell'intero testo che precede. I contenuti della presente Appendice Generale sono intesi a rendere conto delle molteplici ragioni che sono alla base di questa omissione (vedi soprattutto in E.4), e per quanto possibile, a compensarla. Come si vedrà, in quanto segue molte “definizioni” non hanno un vero e proprio status formale, e sono semplicemente virgolettate piuttosto che scritte in grassetto.

#### E.1) IL 1° PRINCIPIO

Presupposti ed impulsi decisivi per lo sviluppo della moderna termodinamica vennero fin dal primo Settecento dalla nascente tecnologia dei motori termici (pompa di Newcomen, 1712; motore a vapore di Watt, <sup>2</sup> a partire dal 1765, .. ecc.). L'evoluzione dei motori termici continuò vigorosamente per tutto il secolo XIX, e ai primi del Novecento il loro rendimento (cioè la frazione di calore ottenuto da una fonte primaria che il motore trasformava in lavoro meccanico utile), partito da uno scarso 1%, toccava il 16% ÷ 17%.

Il giovane Carnot (Sadi, 1796–1832) – figlio d'arte come altre importanti figure della scienza esatta <sup>3</sup> – cominciò presto ad interessarsi ai motori termici; ma diversamente da Watt, più che sui dettagli tecnici della loro ottimizzazione egli si concentrò sui *fondamenti concettuali* che erano alla base del loro funzionamento. Forte di una non comune capacità di astrazione, alla età di soli 28 anni (ma a tre quarti di una breve esistenza) Carnot giunse a definire il famoso ciclo ideale reversibile in cui un gas perfetto è sottoposto a due trasformazioni isoterme alternate a due adiabatiche, e a valutarne il rendimento in termini delle due temperature assolute in gioco.

---

<sup>1</sup> Cioè macroscopica (o fenomenologica), non locale (o globale), non relativistica (o galileiana) e non probabilistica.

<sup>2</sup> Watt (James, 1736–1819) dedicò buona parte della sua vita di ingegnere-inventore al perfezionamento della “steam engine” ereditata dal predecessore Savery (Thomas, 1650–1715). A lui si devono innovazioni fondamentali, quali quella del condensatore separato, del sistema biella-manovella, del volano e del noto regolatore di velocità che porta il suo nome. Alla conclusione di questi sviluppi (ca. 1790) il rendimento della macchina di Watt superava (seppur di poco) il 2%.

<sup>3</sup> Il padre di Sadi, Lazare-Nicolas, fu un matematico di fama che si occupò soprattutto di geometria sintetica.

Nella grande ma disordinata <sup>4</sup> stagione della scienza termodinamica avviata da Carnot, si avvicendarono i contributi di una moltitudine di ingegneri, fisici, chimici, naturalisti, e perfino medici, dei quali ricordiamo qui i più importanti citandoli nell'ordine della loro data di nascita: Clapeyron (Benoit, 1799-1864), Reech (Ferdinand, 1805-1884), Mayer (Julius, 1814-1878), Joule (James, 1818-1889), Rankine (William, 1820-1872), Helmholtz (Hermann, 1821-1894), Clausius (Rudolf, 1822-1888), Thomson (William, 1824-1907, lord Kelvin dal 1892), Ostwald (Wilhelm, 1853-1932), Nernst (Walther, 1864-1941), e altri ancora. Seguì la svolta verso la termodinamica statistica dovuta principalmente a Boltzmann (Ludwig, 1844-1906, ca. 1870-1880), a Gibbs (Willard, 1839-1903) e a Maxwell. <sup>5</sup> Va aggiunto che il laborioso affermarsi della nuova scienza sullo scenario fisico-matematico dell'inizio del secolo XIX, dominato dal dettato newtoniano, fu un evento a suo modo "scandaloso": nel senso che, essendosi ormai affiancato allo spirito pragmatico che aveva indotto i suoi primi passi una sia pur modesta matematizzazione, per la prima volta da circa un secolo (Newton era morto nel 1727) si dovette riconoscere che poteva esistere una teoria fisico-matematica non newtoniana. Come tuttavia vedremo, la componente strettamente matematica della teoria termodinamica era destinata a rimanere relativamente poco interessante fino ai nostri tempi.

Nel seguito, supporremo di rivolgerci ad un lettore immaginario, un lettore-chimera del tutto ignaro di termodinamica ma munito delle nozioni di base della meccanica newtoniana, nonché convenientemente maturo dal punto di vista logico. Nell'ordine di idee della meccanica classica, consideriamo un sistema di  $N$  punti materiali  $P_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) di masse  $m_i$ , posizioni  $x_i$  e velocità  $v_i = d_t x_i$ . Il punto  $P_i$  sia soggetto ad una forza *interna* (cioè esercitata su di esso dagli altri punti  $P_{j \neq i}$ )  $f_i$  e ad una forza *esterna*  $F_i$ , entrambe funzioni date abbastanza regolari di  $x \equiv \{x_i\}_{i=1 \div N}$ , e possibilmente di  $v \equiv \{v_i\}_{i=1 \div N}$  e del tempo  $t$ , per  $t$  in un intervallo-base  $I$  semiaperto a destra, diciamo  $I = [0,1)$ . Valendo ivi le equazioni dinamiche di Newton

$$(1_i) \quad m_i d_t^2 x_i = f_i + F_i,$$

come ben sappiamo il moto del sistema è univocamente determinato nell'intervallo-base sotto le condizioni iniziali  $x_i(t=0) = x_i^0$ ,  $v_i(t=0) = v_i^0$ . Siano poi  $\pi_i =: f_i \cdot v_i$  e  $\Pi_i =: F_i \cdot v_i$  la potenza della forza interna, e rispettivamente esterna, agenti su  $P_i$ . Un teorema meccanico elementare afferma che l'energia cinetica  $K_i = m_i v_i^2 / 2$  di  $P_i$  varia con  $t$  secondo la legge differenziale  $d_t K_i = \pi_i + \Pi_i$ ; e quindi quella dell'intero sistema,  $K =: \sum_i K_i$  (con  $\sum_i \equiv \sum_{i=1}^N$ ) secondo la

<sup>4</sup> Sulla prima parte di questa stagione, si legga la precisa quanto impietosa analisi di C. Truesdell in "The tragicomical History of Thermodynamics 1822-1854", Springer (1980).

<sup>5</sup> Maxwell fu il primo a proporre l'uso di metodi statistici e probabilistici nello studio delle proprietà di una folla di molecole, riuscendo a dimostrare che la distribuzione delle velocità di queste, in condizioni di quasi-equilibrio, deve approssimare quella che oggi diciamo "distribuzione di Maxwell-Boltzmann". Per i contributi di Maxwell alla termodinamica, si veda la sua "Theory of Heat", 3rd ed. 1872, repr. 1970, che si può ancora leggere con interesse.

$$(2) \quad d_t K = \pi + \Pi,$$

dove  $\pi =: \sum_i \pi_i$ , (potenza delle forze interne, o **potenza interna**) e  $\Pi =: \sum_i \Pi_i$  (potenza delle forze esterne, o **potenza esterna**).

Supporremo poi che esista una **energia potenziale interna** del sistema funzione di  $x$ , diciamo  $\Psi = \Psi(x)$ , per la quale  $\pi = -d_t \Psi$  (ovvero, che il gradiente di  $-\Psi$  rispetto alle coordinate di  $P_i$  sia uguale a  $f_i$ ). La (2) si modifica allora nella

$$(3) \quad d_t(K + \Psi) = \Pi.$$

Con  $M =: \sum_i m_i$ , sia  $\langle v \rangle =: \sum_i m_i v_i / M$  la velocità baricentrica del sistema, e  $u_i$  lo scostamento da essa di  $v_i$ ,  $u_i =: v_i - \langle v \rangle$ . In forza del teorema di König (v. S.sez. 6.4.3) l'energia cinetica  $K$  è uguale alla somma dell'energia cinetica macroscopica  $\langle K \rangle =: M \langle v \rangle^2 / 2$  del sistema considerato come un tutto e della sua energia cinetica microscopica  $K =: \sum_i m_i u_i^2 / 2$ . Avendo posto  $\mathcal{E} =: K + \Psi$ , somma della energia cinetica microscopica e della energia potenziale interna, il bilancio di potenze (3) si può trascrivere come

$$(4) \quad d_t(\langle K \rangle + \mathcal{E}) = \Pi,$$

Questa  $\mathcal{E}$ , l'**energia interna** del sistema, è funzione del suo "stato"  $(x, v)$ ; di  $x$  attraverso  $\Psi$  e di  $v$  attraverso  $K$ .

La (4) è un bilancio di potenze meccaniche al quale siamo pervenuti facendo uso del teorema dell'energia cinetica applicato ad ogni punto  $P_i$ , a sua volta conseguente dalla relativa equazione dinamica  $(1_i)$ , dell'ipotesi che esista una energia potenziale interna del sistema, e del teorema di König. Le equazioni dinamiche di per loro, come pure l'equazione cardinale

$$(5) \quad M d_t \langle v \rangle = R =: \sum_i F_i$$

(che da quelle segue combinandole con il principio di azione e reazione applicato alle forze interne,  $\sum_i f_i = 0$ ) *non* sono state usate. D'altra parte, poiché la  $\Pi = R \cdot \langle v \rangle + \sum_i F_i \cdot u_i$  (somma della potenza esterna "coordinata"  $R \cdot \langle v \rangle$  e della potenza esterna "incoordinata"  $\sum_i F_i \cdot u_i$ ) vale comunque in forza della definizione di  $\langle v \rangle$  e di  $u$ , basta derivare dalla (5) la sua conseguenza scalare  $d_t \langle K \rangle = R \cdot \langle v \rangle$  per ridurre la (4) alla più semplice

$$(4bis) \quad d_t \mathcal{E} = \sum_i F_i \cdot u_i.$$

Torniamo dunque per un momento alla (4) nella forma

$$(6) \quad d_t(\langle K \rangle + \mathcal{E}) = R \cdot \langle v \rangle + \sum_i F_i \cdot u_i$$

ignorandone la ridondanza alla luce della (5). Sarebbe storicamente inappropriato suggerire che un bilancio di potenze del tipo (6) possa avere avuto un ruolo significativo nella congerie di riflessioni e dibattiti che a partire dai primi decenni del XIX secolo andarono sviluppandosi intorno al

comportamento di sistemi fisici più generali, e ben più ardui da modellare matematicamente, del semplice sistema meccanico appena descritto. In ogni caso, si trattava di mettere a punto un bilancio di potenze, ma nel quale i concetti di energia interna e di potenze coordinata e incoordinata andavano sostanzialmente generalizzati; e inoltre, nel quale comparivano quelli ancora vaghi di “temperatura”, e di “calore” scambiato tra il sistema e l’esterno. Cionondimeno, una volta sottoposto alle convenienti re-interpretazioni e generalizzazioni, il bilancio (6) può essere adottato come punto di partenza “simbolico” per l’introduzione alla termodinamica classica ( $\equiv$  fenomenologica, globale, galileiana, non-probabilistica) che sarà proposta in questa appendice.

Il primo atto re-interpretativo sulla (6) concerne lo “stato” del sistema fisico considerato, che non sarà più l’insieme (dei valori) delle  $6N$  variabili  $(x,v)$  del precedente modello di  $N$  punti materiali. I sistemi fisici di interesse termodinamico, continuando a riguardarli come insiemi di punti materiali o comunque governati da SDO di evoluzione canonici, comprendono un numero  $N$  dell’ordine di  $10^{26}$  <sup>6</sup> variabili, mentre l’energia totale resta quella della comune esperienza (e quindi le masse, nel caso di un sistema di punti, si devono ridurre nella proporzione inversa). È superfluo aggiungere che gli stati di tali sistemi non sono matematicamente descrivibili che in linea di principio, né sono in alcun modo accessibili alla nostra osservazione. D’altra parte non tutti i sistemi fisici con un gran numero di gradi di libertà, né tutti i loro stati, sono di interesse termodinamico. Considerati da un punto di vista macroscopico, gli stati cosiddetti “**di equilibrio termodinamico**” di certi importanti sistemi a  $N$  variabili sono in pratica descritti da pochissimi (un numero di norma a una sola cifra) parametri *uniformi e costanti*, cioè indipendenti dalla coordinata spaziale  $x$  e rispettivamente dal tempo  $t$ . Si possono inoltre considerare sistemi costituiti da molte piccole celle spaziali adiacenti, in ciascuna delle quali i parametri sono uniformi e in evoluzione abbastanza lenta. L’analisi di questi ultimi sistemi ha dato origine ad una termodinamica “locale”, detta anche “termodinamica dei mezzi materiali continui”, che generalizza quella “globale” ( $\equiv$  a parametri uniformi e in evoluzione lenta) e ad essa si riduce ignorandovi la dipendenza dalla coordinata spaziale.

Qui ci interesseremo di sistemi il cui stato è descritto da un piccolo numero di parametri che soddisfano alle condizioni: (i) di essere uniformi; (ii) di variare abbastanza lentamente col tempo; (iii) di ammettere tra essi una **temperatura empirica**  $\tau$  definita a meno di una scala, tenuta ad essere la stessa per sistemi “in equilibrio termico” <sup>7</sup> e strettamente crescente nella direzione del “più

---

<sup>6</sup> Secondo la **legge di Avogadro**,  $6,022 \cdot 10^{26}$  (**numero di Avogadro**) è il numero delle molecole contenute in una kg-molecola di un gas perfetto in condizioni normali.

<sup>7</sup> Questo presuppone che la relazione binaria “il sistema A è in equilibrio termico con il sistema B” sia una relazione di equivalenza, un fatto talvolta proposto come “0-mo principio della termodinamica classica”. In pratica, una temperatura empirica si misura mediante un **termometro**, un sistema A capace di portarsi in equilibrio termico con il sistema B

caldo”; (iv) di essere in totale in numero enormemente inferiore a  $N$ , diciamo  $1 + k$  tenendo conto del fatto che tra essi c’è la temperatura empirica. Denotando con  $Y_{1 \leq k \leq k}$  gli altri  $k$  parametri (ad esempio il volume occupato dal sistema), l’insieme (dei valori) dei parametri al tempo  $t$ ,  $\{\tau, Y \equiv \{Y_k\}_{k=1+k}\}(t)$ , viene detto “stato al tempo  $t$ ” del sistema considerato, e l’insieme delle funzioni  $\tau = \tau(t)$ ,  $Y = Y(t)$  definite, abbastanza regolari e abbastanza lente nell’intervallo base  $I = [0, 1)$ , viene detto un **processo** (termodinamico) da esso percorso o subito. Uno stato di equilibrio è ovviamente un processo in cui  $\tau$  e  $Y$  non dipendono dal tempo (cioè un processo stazionario).

Di una funzione  $z = z(t)$  definita su  $R$  (oppure su  $(-a, a)$ ,  $a > 0$ ), diremo  $z^-(t) =: z(-t)$  la sua **reversa**.<sup>8</sup> Se  $z$  è munita di derivate di tutti gli ordini anche la sua reversa lo è, e viceversa; le derivate di ordine pari delle due funzioni sono uguali, e quelle di ordine dispari sono opposte. Un processo subito da un certo sistema si dice **reversibile** se il suo reverso è un processo altrettanto possibile (per quel sistema) come il processo diretto.

Il secondo atto re-interpretativo sulla (6) consiste in una radicale generalizzazione (della natura) dei tre termini  $d_t \mathcal{E}$ ,  $R \cdot \langle v \rangle$  e  $\sum_i F_i \cdot u_i$  che vi figurano. Precisamente,  $\mathcal{E}$  deve essere pensata come una energia interna in senso lato (ad es. includente una energia chimica);  $R \cdot \langle v \rangle$  come una generica potenza “coordinata”, diciamo  $\Pi_C$ ; e infine  $\sum_i F_i \cdot u_i$  come una potenza “incoordinata” o “termica”, diciamo  $\Pi_Q$ . Con queste interpretazioni più generali, avremo pertanto

$$(7) \quad d_t(\langle K \rangle + \mathcal{E}) = \Pi_C + \Pi_Q.$$

Alla luce della (7) (come già della (6)), sia  $\langle K \rangle$  che  $\mathcal{E}$  possono incorporare delle costanti additive arbitrarie (rispetto a  $t$ ) senza che nulla cambi. Nella termodinamica in senso stretto, la potenza cinetica coordinata  $d_t \langle K \rangle$  è usualmente trascurabile rispetto agli altri tre termini; e con questo la (7) si semplifica nella

$$(8) \quad d_t \mathcal{E} = \Pi_C + \Pi_Q.$$

All’equilibrio ( $d_t \equiv 0$ ) la (8) (o anche la (7)) implica che  $\Pi_C + \Pi_Q = 0$ .

Naturalmente per definire una grandezza fisica non basta assegnarle un nome o denotarla con un simbolo; e infatti invitiamo il lettore a considerare le  $\mathcal{E}$ ,  $\Pi_C$  e  $\Pi_Q$  come oggetti primitivi, con il solo vincolo della loro dimensione ( $ML^2T^{-2}$  per  $\mathcal{E}$  e  $ML^2T^{-3}$  per  $\Pi_C$  e  $\Pi_Q$ ) e dell’essere funzioni di  $t$  in quanto *funzionali della storia* (fino all’istante attuale incluso) del sistema: tipicamente

---

oggetto della misura, modificando il suo stato *in modo osservabile e abbastanza rapido* mentre  $B$  non lo modifica sensibilmente, e sempre nello stesso senso andando verso “lo stato più caldo”.

<sup>8</sup> Usiamo questo malsuonante neologismo soltanto per evitare l’attributo “inversa”, che applicato ad una funzione vuol dire tutt’altra cosa.

funzioni degli  $1 + k$  parametri di stato  $(\tau, Y)$  e delle loro  $t$ -derivate <sup>9</sup> fino ad un certo ordine, all'istante attuale. In pratica, ci limiteremo al caso in cui  $\mathcal{E}$  è una funzione abbastanza regolare dei parametri,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\tau, Y)$ , e dunque  $d_t \mathcal{E} = \partial \mathcal{E} / \partial \tau d_t \tau + \sum_{\kappa=1}^k \partial \mathcal{E} / \partial Y_{\kappa} d_t Y_{\kappa}$ . Quanto a  $\Pi_C$  e  $\Pi_Q$ , esse non sono invece, in generale, funzioni di stato, ma supporremo che cambino entrambe segno passando da un processo al suo reverso, se il primo è reversibile, come avviene per  $d_t \mathcal{E}$ .

La (8), assunta valida per ogni processo termodinamico  $\sigma = \sigma(\tau, Y) = \sigma(\tau(t), Y(t)) \equiv \sigma(t)$  ed ogni  $t$  nell'intervallo-base di interesse, esprime il cosiddetto **1° principio della termodinamica**: una legge secondo la quale a quel processo si associano una energia interna e due in-flussi (con segno) di energia di *diversa* natura (coordinata, incoordinata) tali che la  $t$ -derivata della prima eguagli la somma dei secondi. <sup>10</sup> Un processo lungo il quale è  $\Pi_Q \equiv 0$  si dice **adiabatico** <sup>11</sup> (Rankine). La (8) implica allora che «se un sistema subisce un processo adiabatico tra un tempo iniziale e un tempo finale, il lavoro coordinato (o “lavoro” tout court) fatto su di esso dipende soltanto dai suoi stati iniziale e finale.» Un processo alla fine del quale il sistema che lo ha subito ritrova il suo stato iniziale si dice (un processo) **ciclico** (o un ciclo); quindi, sempre in base alla (8),  $\oint (\Pi_C + \Pi_Q)(t) dt = 0$  per un processo ciclico (dove il simbolo  $\oint$  significa che il processo  $\sigma = \sigma(t)$  è ciclico nello spazio dei parametri.)

## E.2) LA TESI DI CARNOT E LA TEMPERATURA ASSOLUTA

Descritto in un linguaggio un po' ammodernato, questo era più o meno lo stato delle conoscenze in materia di *teoria* termodinamica al principio dell'Ottocento, quando la disciplina in oggetto non era ancora chiamata in quel modo, <sup>12</sup> e si credeva che il calore fosse una sostanza immateriale (il “calorico”) che fluiva naturalmente dai corpi caldi a quelli freddi; e più o meno questo era il quadro teoretico che si propose al pensiero critico di Carnot. Nella ricerca di concettualizzazioni più precise, Carnot considerò una data massa di gas perfetto di volume  $V$  e

<sup>9</sup> A rigore tali derivate devono essere unilaterale sinistre, cioè del tipo  $d_t f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} [(f(t) - f(t-h))/h]$  con  $h > 0$ , e dove il limite è quindi per  $h \rightarrow 0^+$ , in modo da essere comunque definite “all'indietro”; e ciò, per l'ovvia ragione che la storia è per definizione “passata”.

<sup>10</sup> In senso lato, il 1° principio afferma che la somma di tutti gli in-flussi di energia di qualunque specie nel sistema uguaglia la  $t$ -derivata della somma delle sue energie interne di qualunque specie; e come tale costituisce la più fondamentale legge di conservazione. In pratica, il punto forte del 1° principio è nell'aver identificato nel saldo a zero della differenza  $d_t \mathcal{E} - \Pi_C$  l'in-flusso termico  $\Pi_Q$  (trascurando l'energia cinetica coordinata).

<sup>11</sup> Dal greco  $\alpha$ - (privativo)  $\delta\iota\alpha\beta\alpha'\iota\nu\omega \equiv$  “passo attraverso”.

<sup>12</sup> “Termodinamica” è parola ormai entrata irreversibilmente nell'uso, ma a nostro avviso non rende bene il significato con il quale viene intesa oggi. “Termofisica” potrebbe validamente sostituirla.

temperatura  $\tau$ , soggetta ad un ciclo di trasformazioni abbastanza lente  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  descritto come segue.

- 1):  $A \rightarrow B$  è un'adiabatica di raffreddamento/espansione da  $\tau_A \equiv \tau_+$  a  $\tau_B \equiv \tau_- < \tau_+$  (con  $V_B > V_A$ );
- 2):  $B \rightarrow C$  è un'isoterma di compressione (con  $V_C < V_B$ ) a temperatura  $\tau_-$ ;
- 3):  $C \rightarrow D$  è un'altra adiabatica di riscaldamento/compressione fino a tornare alla temperatura  $\tau_+$  (con  $V_D < V_C$ );
- 4):  $D \rightarrow A$  è un'altra isoterma di espansione (con  $V_A > V_D$ ) a temperatura  $\tau_+$  (vedi <sup>13</sup>).

Ricordiamo poi che, per una data massa di gas perfetto a pressione  $P$  e di volume  $V$ ,  $PV = \text{cost}$  lungo una isoterma, e  $PV^\gamma = \text{cost}$  lungo un'adiabatica, dove  $\gamma$  è una costante adimensionale  $> 1$  dipendente dalla natura del gas. Quindi nel piano  $(V, P)$  le adiabatiche sono curve concave verso l'alto *più ripide* delle iperboli isoterme. Per definizione, il gas scambia calore con l'esterno soltanto lungo le isoterme: diciamo  $Q_+ (> 0)$  il calore *ricevuto* da un **termostato** <sup>14</sup> a temperatura  $\tau_+$  (secondo la nostra presente convenzione di segno), e  $Q_- (< 0)$  il calore ricevuto da un termostato a temperatura  $\tau_-$ , con  $|Q_-| < Q_+$  (di fatto  $|Q_-|$  è quindi un calore *fornito* al termostato a temperatura  $\tau_-$ ). Il descritto **ciclo di Carnot** è del tipo **motore**: riceve cioè dai termostati il calore  $Q_+ + Q_- > 0$  e fornisce all'esterno altrettanto lavoro. Secondo Carnot, se le quattro trasformazioni  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow D$ ,  $D \rightarrow A$  sono abbastanza lente, il ciclo può essere percorso anche nel senso inverso  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ , diventando in tal caso del tipo **utilizzatore** o **frigorifero**. In tale ciclo inverso le  $Q$  ricevute dai termostati e il lavoro fornito all'esterno cambiano contemporaneamente segno.

Il **rendimento**  $\eta$  di un ciclo di Carnot motore è definito come il rapporto tra il lavoro prodotto e il calore fornito al gas dal termostato caldo; o equivalentemente, come 1 + il rapporto tra il calore (negativo) fornito al gas dal termostato freddo e quello (positivo) fornito al gas dal termostato caldo,  $\eta =: 1 + Q_-/Q_+$ . Il rendimento del ciclo frigorifero di Carnot è usualmente definito in altro modo; ma se si usa la stessa formula, il rendimento del ciclo frigorifero ha lo stesso valore di quello motore, perché  $Q_-$  e  $Q_+$  cambiano segno insieme. Il rendimento del ciclo motore è un numero molto importante per una società che ha bisogno di lavoro coordinato e si propone di ricavarlo da quelle particolari reazioni chimiche esotermiche che sono le combustioni.

<sup>13</sup> S. Carnot, "Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance", 1824, pubblicato in Ann. Scient. de l'École Norm. Sup. soltanto nel 1872.

<sup>14</sup> Un termostato è un sistema per il quale  $\Pi_C = 0$  (quindi la (E.1, 8) si riduce a  $d_t \mathcal{E} = \Pi_Q$ ), e inoltre il trasferimento di calore avviene a temperatura costante ("temperatura del termostato"). Una grande massa a temperatura uniforme è un termostato naturale. Oggi si possono concepire e realizzare termostati artificiali, nei quali un sensore (termometro) e un attuatore (riscaldatore-refrigeratore) provvedono a mantenere costante la temperatura.

Rimarchiamo che un ciclo (motore o frigorifero) come quello di Carnot è applicabile a qualunque sistema fisico  $S$ , e non necessariamente ad una massa di gas perfetto. Infatti processo “adiabatico” significa “senza scambi di calore con l’esterno”, e processo “isotermo” significa “a temperatura costante”; e queste nozioni/procedure sono applicabili a qualunque sistema  $S$ . Supponiamo dunque che  $S$  percorra un ciclo  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  simile al precedente, dove ora  $A, B, C, D$  sono stati di  $S$ . In forza del 2° principio di cui alla prossima S.sez. E.3, è da escludere che gli stati estremi di una trasformazione adiabatica siano alla stessa temperatura; e ciò è come dire che nel corso di una trasformazione adiabatica la temperatura varia (strettamente) sempre nello stesso senso. Quindi è sempre possibile passare dalla temperatura  $\tau_+$  alla temperatura  $\tau_-$ , o viceversa, nel corso di una stessa trasformazione adiabatica.

Naturalmente non è detto che  $S$  possa in generale percorrere il ciclo inverso  $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ , o anche sue parti qualsiasi, ad esempio un tratto dell’isoterma  $B \rightarrow C$  all’incontrario. Supponiamo tuttavia che l’intero ciclo  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  percorso da  $S$  sia reversibile, e che possa addirittura essere *indefinitamente* ripetuto nei due sensi: diremo allora che  $S$  è una **macchina di Carnot** tra i due termostati a temperature  $\tau_+$  e  $\tau_-$ . Siano ancora  $(Q_+, Q_-)$  le quantità di calore (con segno) assorbite da una macchina di Carnot. Sebbene il 2° principio non fosse ancora stato compiutamente formulato all’epoca del suo lavoro (ci sarebbe voluto un ulteriore quarto di secolo), Carnot intuì che il rapporto  $-Q_-/Q_+ \geq 0$  doveva dipendere soltanto dalle temperature dei termostati tra i quali la macchina percorre il ciclo, essendo quindi una funzione *universale*, diciamo  $\varphi(\tau_-, \tau_+)$ , di queste. Inoltre, capì che questa funzione  $\varphi(\tau_-, \tau_+)$  poteva sempre porsi nella forma  $\psi(\tau_-)/\psi(\tau_+)$ , dove  $\psi$  è un’altra funzione universale  $\geq 0$  e strettamente crescente del suo unico argomento, definita a meno di un fattore costante arbitrario  $> 0$ . Quindi il rendimento della macchina doveva essere  $\eta = 1 + Q_-/Q_+ \equiv 1 - \psi(\tau_-)/\psi(\tau_+)$ . La funzione  $\psi(\tau)$  così definita a meno di un fattore costante  $> 0$  si poteva allora assumere come misura di una **temperatura termodinamica** (detta anche **temperatura assoluta**)  $\vartheta$ .<sup>15</sup> In conclusione, secondo Carnot doveva essere

$$(1) \quad -Q_-/Q_+ = \vartheta_-/\vartheta_+;$$

e quindi,

$$(1') \quad \eta = (\vartheta_+ - \vartheta_-)/\vartheta_+$$

---

<sup>15</sup> La modalità standard che si usa per fissare il fattore di normalizzazione in  $\vartheta$  consiste nell’imporre che la differenza tra la temperatura dell’acqua bollente e quella del ghiaccio fondente, a pressione normale, sia uguale a 100. La temperatura del ghiaccio fondente risulta allora di circa 273. La temperatura assoluta è così completamente determinata, e si dice misurata in unità “gradi Kelvin” (K, ma anche °K). I “gradi Celsius” (°C) di uso più consueto equivalgono ai gradi Kelvin diminuiti di 273 unità.



per qualunque macchina operante tra due termostati alle temperature assolute  $\vartheta_+$  e  $\vartheta_- < \vartheta_+$ . Secondo la (1'), il valore di  $\eta$  è nullo sse  $\vartheta_+ = \vartheta_-$  (ciò che è escluso per ipotesi), e uguale a 1 sse  $\vartheta_-/\vartheta_+ = 0$ , ovvero se  $\vartheta_- = 0$  e/o  $\vartheta_+ = \infty$ . Come vedremo, la prima di queste possibilità va considerata avvicinabile soltanto come limite (che lo sia anche la seconda è fisicamente ovvio). Infine la temperatura assoluta si può pensare come quella misurata da un **termometro termodinamico a gas perfetto**.

Disponendo di una temperatura assoluta  $\vartheta$ , è possibile verificare direttamente la correttezza della (1) per un gas perfetto. Infatti si sa che la pressione  $P$  e il volume  $V$  di una data massa di gas perfetto sono legati dalla **legge di Boyle**  $PV \propto \vartheta$  (il fattore di normalizzazione arbitrario incorporato in  $\vartheta$  evidentemente non influenza questa relazione di proporzionalità). Quindi il lavoro fatto dal gas lungo una isoterma a temperatura assoluta  $\vartheta$  è  $\int PdV \propto \vartheta \ln(V_1/V_2)$ , dove  $V_1$  e  $V_2$  sono i volumi del gas agli estremi dell'isoterma (ad esempio  $V_1 =$  volume iniziale e  $V_2 =$  volume finale). Poiché l'energia interna di un gas perfetto dipende soltanto dalla sua temperatura, per il 1° principio anche il calore ceduto al gas lungo l'isoterma a temperatura  $\vartheta$  è  $\propto \vartheta \ln(V_1/V_2)$ . Ciò implica che nel ciclo motore  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  subito dal gas si abbia

$$(2_+) \quad Q_+ \propto \vartheta_+ \ln(V_A/V_D) > 0$$

lungo l'isoterma calda  $D \rightarrow A$ , e

$$(2_-) \quad Q_- \propto \vartheta_- \ln(V_C/V_B) < 0$$

lungo l'isoterma fredda  $B \rightarrow C$ , dove la costante di proporzionalità non esplicitata è la stessa nei due casi.

D'altra parte, in forza delle due leggi ricordate, valide per una massa qualsiasi di gas perfetto (cioè  $PV = \text{cost}_{\text{isot}}$  lungo un'isoterma e  $PV^\gamma = \text{cost}_{\text{adiab}}$  lungo un'adiabatica), risulta  $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ ,  $P_B V_B = P_C V_C$ ,  $P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma$  e  $P_D V_D = P_A V_A$ . Da queste quattro uguaglianze si trae subito <sup>16</sup>

$$(3) \quad V_A/V_D = V_B/V_C.$$

Vale a dire, lungo le isoterme  $A \rightarrow D$  e  $B \rightarrow C$  si hanno gli stessi rapporti di compressione. Combinando infine la (3) con le (2) si ritrova immediatamente la (1), ora applicata ad un gas perfetto e non ad una generica macchina di Carnot operante tra gli stessi termostati. Questo fu l'iter logico seguito da Carnot, che avendo ottenuto la (1) per un gas perfetto come abbiamo appena descritto, la generalizzò ad una generica macchina di Carnot (**tesi di Carnot**), presumibilmente

<sup>16</sup> Basta moltiplicarle membro a membro e fare le semplificazioni del caso.

senza giustificare la sua intuizione rapportandola a qualcosa di simile al 2° principio formulato da Clausius (alquanto più tardi, nel 1850, vedi E.3).<sup>17</sup>

### E.3) IL 2° PRINCIPIO, L'ENTROPIA E I POTENZIALI TERMODINAMICI

La tesi di Carnot era effettivamente corretta alla luce del posteriore **2° principio della termodinamica**, e precisamente nel senso che questo (si dimostra) la *implica*. È dunque del 2° principio che dobbiamo ormai parlare.

Come abbiamo visto, ciò che massimamente interessava gli ingegneri termomeccanici a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo era il rendimento con il quale una macchina termica motrice era in grado di convertire il calore in lavoro. Connaturale a questo fatto era l'idea che *non tutto* il calore disponibile potesse essere convertito in lavoro da una macchina ciclica ( $\equiv$  operante per cicli indefinitamente ripetuti, al termine di ciascuno dei quali la macchina ritorna al suo stato iniziale). La *negazione* di una possibilità compatibile con il 1° principio è un contrassegno tipico di parecchie versioni storiche del 2° principio. Nella forma datagli da Clausius (**postulato di Clausius**, 1850), esso recita: «è impossibile che *l'unico* risultato dell'interazione tra due sistemi fisici di temperature diverse sia quello del passaggio di calore dal sistema più freddo a quello più caldo»; cioè, brevemente, «è impossibile che del calore passi “da sé” da un corpo più freddo ad un corpo più caldo» (Clausius dice proprio “von selbst”, una locuzione che ha fatto discutere<sup>18</sup>). Nella forma datagli da Kelvin, che si dimostra equivalente al postulato di Clausius, il 2° principio recita: «è impossibile che l'unico risultato di una trasformazione sia la conversione in lavoro del calore sottratto ad un termostato».<sup>19</sup> Ancora un'altra forma equivalente del 2° principio è quella di Kelvin-Planck (talvolta detta anche di Ostwald): «è impossibile che una macchina ciclica trasformi in lavoro il calore sottratto ad un termostato» (impossibilità del cosiddetto **moto perpetuo di 2ª specie**).<sup>20</sup> Per brevità diremo queste negazioni (“È impossibile che ...”), di cui esistono parecchie variazioni, forme classiche del 2° principio. Il 2° principio classico mette dunque in luce una

<sup>17</sup> Esiste una certa disparità di opinioni, nella trattatistica corrente, circa la natura dell'asserto che abbiamo qui introdotto come “tesi di Carnot”: una parte degli autori lo nomina come “teorema di Carnot”, come se fosse stato (formalmente) *dedotto* da Carnot a partire da convenienti premesse. Evidentemente, chi scrive non è dello stesso avviso. Vi è addirittura chi attribuisce a Carnot la formulazione del 2° principio, ciò che sembra francamente esagerato.

<sup>18</sup> Nel citare le parole di Clausius riportate in corsivo, M. Planck (“Wissenschaftliche Selbstbiographie”, 1945) aggiunge: «Questa ipotesi deve essere completata da spiegazioni chiarificatrici. Infatti essa non significa soltanto che il calore non passa da un corpo più freddo ad uno più caldo, ma anche che è impossibile, qualsiasi mezzo si usi, trasmettere calore dal primo al secondo corpo *senza che rimanga in natura un qualche cambiamento a titolo di compensazione* (corsivo nostro).»

<sup>19</sup> Oppure più in generale ad un numero arbitrario di termostati di temperature diverse, alla condizione che le quantità di calore sottratte ai vari termostati abbiano tutte lo stesso segno, cioè siano realmente tutte “sottratte”.

<sup>20</sup> L'impossibilità del “moto perpetuo di 1ª specie” si identifica banalmente con il 1° principio, e recita: «è impossibile che una macchina ciclica produca energia (in particolare lavoro coordinato) ricavandola dal nulla.»

dissimetria fondamentale tra le due forme di energia, termica e non-termica (ovvero incoordinata e coordinata), che manca nel 1° principio: è possibile, *come unico effetto*, la trasformazione completa di una quantità di lavoro in calore, ma non il contrario. La trasformazione inversa, di una quantità di calore in lavoro, è necessariamente incompleta; come avviene appunto in un ciclo motore di Carnot, in cui una parte del calore sottratto al termostato caldo non è trasformato in lavoro, ma è trasmesso al termostato freddo.<sup>21</sup>

Siano  $C$  e  $C'$  due macchine di Carnot operanti tra gli stessi termostati,  $(Q_-, Q_+)$  e  $(Q'_-, Q'_+)$  le quantità di calore con segno fornite a  $C$  e rispettivamente a  $C'$ , ed  $\eta = 1 + Q_-/Q_+$ ,  $\eta' = 1 + Q'_-/Q'_+$  i relativi rendimenti. Che dal 2° principio derivi la tesi di Carnot

$$(1) \quad Q_-/Q_+ = Q'_-/Q'_+,$$

si dimostra per assurdo. Ad esempio, si supponga (\*)  $\eta > \eta'$ . Si può allora facilmente provare che se le due macchine sono fatte lavorare insieme in modo opportuno<sup>22</sup>, ma sempre realizzabile con precisione arbitraria, allora l'ipotesi (\*) viola il postulato di Clausius. L'ipotesi  $\eta' > \eta$  si deve escludere per la stessa ragione scambiando tra loro le due macchine, e si conclude che vale la (1). La condizione che le due macchine siano reversibili, soddisfatta per definizione da una macchina di Carnot, è essenziale per la dimostrazione. Se quindi il rapporto  $Q_-/Q_+$  non dipende dalla particolare macchina operante tra i due termostati, è ovvio che esso debba essere una funzione delle temperature di questi. Usando temperature assolute e macchine a gas perfetto, si vede così che deve valere la (E.2, 1).

Agli occhi di un fisico-matematico, il 2° principio espresso in una delle sopravviste (o simili) forme classiche suggerisce l'idea di una legge fisica che non ha ancora raggiunto una formulazione matematica matura.<sup>23</sup> D'altra parte ci si aspetta che il rigore logico possa essere generalmente stabilito, con la necessaria dose di abilità, al prezzo di introdurre un numero sufficiente di oggetti e di proposizioni come primitivi/e (nella fiducia che dalla operazione non nascano contraddizioni!); così rischiando tuttavia di perdere un sufficiente contatto con la realtà osservabile e di rendere difficili le relative regole di interpretazione. Questa è una legge generale, valida per tutte le assiomatizzazioni della nostra rappresentazione del mondo; ma nel caso del 2°

<sup>21</sup> Accanto al 2° principio termodinamico, esiste un 2° principio "in senso lato" che generalizza il primo dal punto di vista della teoria dell'informazione. In questa accezione generalizzata, il 2° principio riflette una esperienza quotidiana così comune che stentiamo a credere di trovarci di fronte ad un vero e proprio "principio fenomenologico". Vale a dire: «l'ordine tende a trasformarsi "da sé" (vedi ancora Clausius) in disordine, e mai succede il contrario». (Oggi sappiamo che una versione del tutto corretta del principio vorrebbe che a «mai succede il contrario» si sostituisca «è estremamente improbabile che succeda il contrario».) Ad esempio, sappiamo benissimo che una volta "macchiato" il nostro caffè con un po' di latte, se volessimo tornare all'originale caffè nero non ci sarebbe altro da fare, *in pratica*, che prepararci un altro caffè.

<sup>22</sup> Precisamente, in modo che il lavoro fornito dal sistema delle due macchine sia nullo, e che il calore trasferito dal termostato freddo a quello caldo abbia lo stesso segno della differenza  $\eta - \eta'$ .

<sup>23</sup> È tuttavia ovvio che si può dare al 2° principio la forma di una disuguaglianza numerica; ad esempio dicendo che il lavoro prodotto dalla macchina motrice ciclica di Kelvin-Planck non può essere  $> 0$  (ovvero che deve essere  $\leq 0$ ).

principio la fisica che si vuole descrivere è davvero molto sfuggente se il modello entro cui ci si costringe è quello della termodinamica classica nel senso della nota (<sup>1</sup>). Arduo è dunque il progetto di rappresentare quella fisica entro uno schema logico accettabilmente semplice e tuttavia capace di (una qualche forma di) predizione.

A partire dagli ultimi decenni del secolo XIX, la termodinamica classica – presto in unione con la termodinamica dei continui materiali ad essa largamente ispirata – ha conosciuto uno spettacolare e quasi miracoloso successo sul versante delle *applicazioni*; ed è chiaro agli occhi di tutti che le sue conquiste (basti pensare all'ingegneria dei motori termici, o a quella dei processi chimici, ecc.), costate duro lavoro sperimentale e inventivo, sono state alla base della prima rivoluzione industriale.<sup>24</sup> Altrettanto non si può invece dire degli aspetti *fondazionali* della disciplina: al di là dei successi applicativi, sul piano logico restavano e restano problemi non banali. Come meglio vedremo, questo fatto ha prodotto più di un tentativo, anche sorprendentemente recente, inteso a conferire alla termodinamica classica la struttura di un genuino sistema assiomatico-deduttivo. La termodinamica statistica offre ben note e soddisfacenti risposte ad alcuni di questi problemi, ma certe importanti questioni di fondo sono ancora aperte al suo interno. Inoltre essa non può considerarsi del tutto pertinente al programma del nostro libro – anche se vi potrebbe rientrare sulla base della scala energetica implicata, vedi la Presentazione 0.0 –, a causa della presenza della probabilità come suo ingrediente sostanziale.

Come abbiamo visto, la tesi di Carnot segue dal 2° principio classico; ma quest'ultimo può dare qualche frutto in più. Per  $v = 1, 2$ , sia  $S$  un sistema che percorre un ciclo arbitrario *ricevendo* nel suo corso il calore  $Q_v$  (con segno) da un termostato  $\mathcal{T}_v$  a temperatura  $\vartheta_v$ ; e sia  $C_v$  una macchina di Carnot operante tra  $\mathcal{T}_v$  e un termostato ausiliario  $\mathcal{T}_\alpha$  a temperatura  $\vartheta_\alpha$ , la quale *versa* lo stesso calore  $Q_v$  a  $\mathcal{T}_v$  (che è così “risarcito” del calore fornito a  $S$ ).<sup>25</sup> Per il 1° principio,  $S$  *produce* il lavoro (con segno)  $L_S = \sum Q_v$  (dove  $\sum \equiv \sum_{v=1}^2$ ), e  $C_v$  *sottrae* a  $\mathcal{T}_\alpha$  il calore  $Q'_v$  uguale a  $Q_v \vartheta_\alpha / \vartheta_v$ . Sempre per il 1° principio, il lavoro *prodotto* da  $C_v$  è  $L_v = Q'_v - Q_v$ . Alla fine del ciclo, il sistema  $\Xi$  costituito da  $S, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, C_1$  e  $C_2$  è tornato nelle condizioni iniziali, ha *prodotto* il lavoro  $L_\Xi =: L_S + \sum L_v = \sum Q_v + \sum (Q'_v - Q_v) = \sum Q'_v = \vartheta_\alpha \sum Q_v / \vartheta_v$  e ha sottratto a  $\mathcal{T}_\alpha$  il calore  $Q' =: \sum Q'_v$ . È chiaro che se  $L_\Xi (= Q')$  fosse  $> 0$ , avremmo una contraddizione con il postulato di Kelvin-Planck

<sup>24</sup> È certamente impressionante la lucidità con cui Carnot prevede questo fenomeno e le sue ricadute socio-economiche, perfino sul piano internazionale, nella sua memoria del 1824. L'unico aspetto della situazione che il giovanissimo fisico-ingegnere non mette in conto è la finitezza (e quindi, l'esauribilità) delle risorse di combustibile!

<sup>25</sup> Quest'ultima condizione, che la quantità di calore fornita a  $S$  dal termostato  $\mathcal{T}_v$  sia la stessa (in valore e segno) di quella versata da  $C_v$  a  $\mathcal{T}_v$  avendola prelevata da  $\mathcal{T}_\alpha$ , si dimostra essere sostanzialmente non limitativa, nel senso che può essere sempre soddisfatta con approssimazione arbitraria. La situazione è analoga a quella che si incontra nella dimostrazione della tesi di Carnot facendo uso del 2° principio.

(impossibilità del moto perpetuo di 2<sup>a</sup> specie) da parte di  $\Xi$ , che preleverebbe calore soltanto da  $\mathcal{T}_\alpha$ .

Si conclude che

$$(2) \quad L_{\Xi}/\vartheta_\alpha = \sum Q_v/\vartheta_v \leq 0.$$

Se poi il ciclo di S è reversibile, la (2) deve continuare a valere con le Q cambiate di segno, per cui

$$(2') \quad \sum Q_v/\vartheta_v = 0.$$

Questa (2') coincide con la (E.2, 1), ricavata nell'ipotesi che S sia a sua volta una macchina di Carnot, e quindi reversibile. Qualcuno nomina la procedura che abbiamo illustrato per giungere alle (2,2') come "metodo del termostato ausiliario". Se la (2') vale, allora essa vale anche con le Q cambiate di segno, ciò che è *compatibile* con la reversibilità del ciclo di S. Ma questa osservazione *non risponde* alla domanda seguente: «può la somma  $\sum Q_v/\vartheta_v$  essere nulla se il ciclo percorso da S *non* è reversibile ( $\equiv$  è **irreversibile**)?» Sono state proposte argomentazioni <sup>26</sup> mediante le quali sarebbe possibile provare che la risposta è negativa; vale a dire, provare che «se il ciclo di S è irreversibile, allora  $\sum Q_v/\vartheta_v < 0$ ». Purtroppo nessuna di esse è logicamente convincente, sebbene la correttezza di fatto dell'ultima implicazione tra « $\Rightarrow$ » diventi ovvia se si ragiona in termini di fenomeni dissipativi. Insomma, e almeno a conoscenza di chi scrive, nella pratica totalità della trattatistica istituzionale l'implicazione stessa è enunciata e largamente illustrata con esempi concreti, ma non realmente giustificata se ci si muove lungo la linea logica che abbiamo illustrato. <sup>27</sup> Sembra pertanto necessario adottarla come un (blando) assioma addizionale, al quale può darsi la forma seguente: «se di un sistema A *termicamente isolato* fa parte un sottosistema B che subisce un ciclo irreversibile, allora il processo subito da A non può essere ciclico (cioè A non può ritornare nelle condizioni iniziali).» Basta allora identificare A con  $\Xi \cup \mathcal{T}_\alpha$  e S con B, e supporre (per assurdo) che  $\sum Q_v/\vartheta_v = 0$ , per contraddire l'asserto. Ma a sua volta, quest'ultimo non è dimostrabile sulla sola base del 1° e del 2° principio. In definitiva, daremo della (2) la seguente versione leggermente rinforzata: «per un sistema S che nel corso di un processo ciclico riceve il calore (con segno)  $Q_v$  dal termostato  $\mathcal{T}_v$  ( $v=1,2$ ) vale la (2), con il segno = se e solo se il ciclo di S è reversibile.» <sup>28</sup>

<sup>26</sup> Ci riferiamo alla cosiddetta "teoria delle tracce", tanto macchinosa quanto matematicamente debole (vedi ad es. G. Polvani: "Termodinamica", Cap. III, Marzorati, (1949)).

<sup>27</sup> In compenso essa è talvolta "dimostrata" con l'uso di una logica sui generis. Ci limitiamo a citare uno degli esempi più incontrovertibili tra quelli a nostra conoscenza. In "A Course of Thermodynamics", di J. Kestin, vol. I, Blaisdell (1966), a p. 428, nona riga dal basso, dopo aver dimostrato che la reversibilità implica l'uguaglianza, l'autore si pone il problema della implicazione inversa. Suppone dunque che valga l'uguaglianza; ma allora la situazione – egli continua – sarebbe la stessa "as for a reversible cycle, contrary to the original assumption" (che il ciclo fosse irreversibile). Insomma Kestin riesce così a trarre l'implicazione  $B \Rightarrow A$  dalla sua inversa  $A \Rightarrow B$ !

<sup>28</sup> Nella sua "Rational Thermodynamics" (1969), Truesdell evade (legittimamente dal punto di vista logico) il problema *definendo* come "reversibile" il ciclo per cui vale la  $\sum Q_v/\vartheta_v = 0$  e come "irreversibile" quello per cui vale la  $\sum Q_v/\vartheta_v < 0$ . Ovviamente in questo modo gli attributi "reversibile" e "irreversibile" perdono il loro significato letterale

L'aver limitato a due, nel precedente ragionamento, il numero dei termostati e delle macchine di Carnot è chiaramente irrilevante: esso può sostituirsi con qualsiasi numero maggiore di due. Ammetteremo ora che questo numero possa diventare infinito con la potenza del continuo, ovvero che la somma  $\sum Q_v/\vartheta_v$  possa sostituirsi con l'integrale  $\oint \Pi_Q(t)/\vartheta(t)dt$ . Supposto inoltre che la validità della disuguaglianza marginale (2) permanga attraverso questo passaggio al continuo, si conclude che

$$(3) \quad \oint \Pi_Q(t)/\vartheta(t)dt \leq 0,$$

in cui ancora il segno = vale se e solo se il ciclo è reversibile.<sup>29</sup> (La prima implicazione segue anche direttamente dalla (3) se si ricorda che  $\Pi_Q$  per ipotesi cambia segno quando si passa al ciclo reverso.) Per un ciclo reversibile, e soltanto allora, la (3) si riduce quindi alla

$$(3') \quad \oint \Pi_Q(t)/\vartheta(t)dt = 0.$$

Di fatto, i processi reversibili nel senso più sopra introdotto sono processi ideali durante i quali il sistema considerato *si trova istante per istante in stati prossimi quanto si vuole a stati di equilibrio*. Questo significa che, per un dato processo *reale* di andata da A a B, non esiste un processo reale di ritorno da B a A inverso del primo, quali che siano i mezzi che si adottano per ottenerlo. Tuttavia il sistema può percorrere processi di andata e ritorno che si avvicinano con precisione arbitraria a processi inversi l'uno dell'altro (**processi di quasi-equilibrio**). Questi processi possono essere solo quelli per i quali  $d_t(\vartheta, Y) \rightarrow 0$  mentre la loro durata  $\Delta t \rightarrow \infty$ , in modo che la variazione  $\Delta(\vartheta, Y) = \int_{\Delta t} d_t(\vartheta, Y)dt$  tenda a un valore finito e diverso da zero. In altre parole, possono essere reversibili soltanto i processi infinitamente lenti; o in pratica, i processi "abbastanza" lenti, costituiti da una successione continua di stati di quasi-equilibrio. (Quanto poi tali processi debbano essere lenti la teoria non è in grado di dire, e va stabilito caso per caso con altri mezzi.) Come sappiamo, inoltre, un sistema reale termicamente isolato non può tornare nel suo stato iniziale. Queste sono evidenze empiriche che non possono dedursi dai due principi classici.

Si può supporre che i processi reversibili ricoprano quasi-ovunque una varietà differenziabile "limite" Y dello spazio dei parametri di stato, in generale di dimensione  $1+h \leq 1+k$  (dove il primo "1" si riferisce a  $\vartheta$ ), abbastanza regolare e semplicemente connessa.<sup>30</sup> Diremo "stati termodinamici" gli elementi di Y. Ragionevolmente, supporremo inoltre che  $\mathcal{E}$  continui ad essere una funzione su Y, e che  $\Pi_Q$  (quindi anche  $\Pi_C$  in forza del 1° principio) sia una combinazione

per acquisirne uno formale. Questo è legittimo in logica, ma non altrettanto in fisica, dove si richiede una interpretazione operativamente ben definita di ogni parola formale.

<sup>29</sup> La temperatura  $\vartheta$  di S che figura nella (3) potrebbe non essere definita se S percorre un ciclo irreversibile. Ma  $\vartheta$  deve essere interpretata come la temperatura di uno dei "continuamente infiniti" termostati con cui S scambia calore.

<sup>30</sup> Per quanto consta all'autore, nella trattatistica corrente si cercherebbe invano qualche addizionale informazione su questa varietà differenziabile; ad esempio sulla sua metrica. Riferendoci alle necessità presenti, Y potrebbe essere un qualsiasi aperto semplicemente connesso di  $R^{1+h}$ .

*lineare* con coefficienti funzioni abbastanza regolari dei parametri  $y \equiv \{y_i\}_{i=0:h} \in Y$  (con  $y_0 = \vartheta$ ) delle loro  $t$ -derivate  $d_t y$ . Allora  $\Pi_Q dt$  è una 1-forma differenziale su  $Y$ , diciamo  $\sum_{i=0}^h q_i(y) dy_i$ , o come anche si dice, una pfaffiana. Questa ipotesi è compatibile con l'esigenza che  $\Pi_Q$  e  $\Pi_C$  cambino segno al passare da un processo al processo inverso. In questo caso la (3') implica l'esistenza di una applicazione  $\mathcal{S}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  per la quale, se  $A$  e  $B$  sono gli estremi di un processo reversibile, risulta

$$(4) \quad \int \Pi_Q(t)/\vartheta(t) dt \equiv \int \sum_{i=0}^h q_i(y) dy_i / y_0 = \mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A).$$

Qui i limiti del primo integrale sono  $t_A$  e  $t_B$  (tempi di inizio e fine del processo) e quelli del secondo sono  $A$  e  $B$ , essendo evidente che l'integrale stesso *non* dipende dal percorso tra  $A$  e  $B$ .<sup>31</sup> Tornando alla (3), applichiamo ad un ciclo reversibile ACBDA. Riferendoci ai processi in successione ACB e BDA, avremo  $\int_{ACB} + \int_{BDA} = 0$ , ovvero  $\int_{ACB} = \int_{ADB}$ , che conferma l'indipendenza dell'integrale dal percorso da  $A$  a  $B$  in  $Y$ . Supponiamo invece che la parte ACB del processo sia reversibile, e quindi lungo di essa valga la (4), mentre la parte BDA sia irreversibile. L'intero ciclo è irreversibile, e quindi la (3) vale con la disuguaglianza stretta. L'integrale su ACB è uguale a  $\mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A)$ , e quindi lungo il generico processo irreversibile da  $A$  a  $B$  risulta

$$(5) \quad \int \Pi_Q(t)/\vartheta(t) dt < \mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A)$$

dove l'integrale va da  $t_A$  a  $t_B$ . Con l'integrale tra gli stessi limiti  $t_A$  e  $t_B$ , i due risultati si compendiano infine nella

$$(6) \quad \int \Pi_Q(t)/\vartheta(t) dt \leq \mathcal{S}(B) - \mathcal{S}(A),$$

dove l'uguaglianza vale sse l'intero processo è reversibile. La (6) può scriversi equivalentemente

$$(6') \quad \Pi_Q/\vartheta \leq d_t \mathcal{S} \equiv \sum_{i=0}^h \partial \mathcal{S} / \partial y_i(y) d_t y_i,$$

valida per ogni  $t$  al quale il processo è in atto.

Convengono due osservazioni, elementari ma importanti, sulla uguaglianza (4). Ricordando che la temperatura assoluta  $\vartheta$  è definita a meno di un fattore costante strettamente positivo fissato convenzionalmente, altrettanto deve valere per le variazioni  $\Delta \mathcal{S}$ . Quindi la funzione  $\mathcal{S}$  è in realtà definita a meno di una trasformazione affine con fattore positivo che è fissato soltanto se lo è quello relativo a  $\vartheta$ . La seconda osservazione riguarda l'integrale  $\int \Pi_Q(t)/\vartheta(t) dt$ : a prima vista sembrerebbe che cambiando la scala dell'orologio, diciamo passando dai minuti ai secondi, l'integrale sarebbe moltiplicato per 60. Occorre tuttavia ricordare che la dimensione di  $\Pi_Q$  è quella di una potenza, per

<sup>31</sup> Clausius impiegò quattordici anni per rendersi conto della esistenza e unicità (a meno della costante additiva) della funzione  $\mathcal{S}$  sulla base della (3') (cfr. Truesdell, loc. cit., 1980, p. 333). Evidentemente, egli ignorava l'elementare "teorema di Stokes", peraltro già noto a Kelvin fin dal 1850 (v. S.sez 8.4.3), e che di lì a qualche decennio si sarebbe evoluto nel più generale teorema di Poincaré (v. S.sez. 4.5.1).

cui il prodotto  $\Pi_Q dt$  è per definizione invariante rispetto a cambiamenti di scala del tempo. Un'ultima precisazione riguarda la presunta proprietà additiva della funzione  $\Delta S$  (variazione di  $S$  durante un processo reversibile), intesa nel senso che se un sistema è composto da sottosistemi  $S_n$ , allora  $\Delta S = \sum \Delta S_n$ . Questa proprietà è spesso affermata, ma non discende dai principi; discende invece da una analoga proprietà, ragionevole, attribuita alle quantità di calore scambiate con i termostati durante il processo del sistema composto. La funzione  $S$  si dice con Clausius **entropia**<sup>32</sup> di  $S$ , ed è definita in  $Y$  a meno di una trasformazione affine con fattore costante positivo.

Si noti che se il sistema  $S$  è termicamente isolato, quindi  $\Pi_Q \equiv 0$  lungo qualunque processo tra  $A \in Y$  e  $B \in Y$  da esso subito, allora dalla (6) segue che  $S(B) \geq S(A)$ : *l'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire rispetto al valore che aveva all'inizio del processo*. Questa è una conclusione di grande rilievo dal punto di vista fisico, perché fissa una “freccia del tempo” (vedi S.sez. 2.1.1) in relazione a  $S$ , l'unicità della freccia essendo garantita dall'universalità della (6), valida per ogni  $S$  e per ogni processo: se  $\Delta S > 0$  è la variazione dell'entropia di  $S$  nel passare da  $A$  a  $B$ , allora l'asse del tempo deve essere orientato in modo che il tempo  $t_B$  alla fine del processo sia *maggiore* del tempo  $t_A$  al suo inizio. Poiché tutti i processi *reali* che  $S$  può percorrere sono irreversibili, se  $S$  è termicamente isolato la sua entropia deve aumentare nel tempo fino a quando il processo si arresta asintoticamente perché  $S$  ha raggiunto uno stato di equilibrio, in cui l'entropia ha raggiunto il suo massimo valore. Questo fatto suggerisce che uno stato di equilibrio si possa determinare mediante gli usuali strumenti del calcolo minimax (vedi più avanti per un esame più approfondito di queste possibilità).

Ricordiamo qui tre fondamentali classi di processi reversibili. Per cominciare, (i) il moto retto dalle equazioni hamiltoniane  $d_t q = \partial H / \partial p$ ,  $d_t p = -\partial H / \partial q$ ,  $q = \{q_i\}_{i=1 \rightarrow N}$ ,  $p = \{p_i\}_{i=1 \rightarrow N}$ , con  $H = H(q, p)$  indipendente da  $t$ , si inverte rispetto al tempo ponendo  $t' = -t$ ,  $q'(t') = q(t)$ ,  $p'(t') = -p(t)$ ,  $H(q', p') = H(q, p)$ , e quindi soddisfa le stesse equazioni con apice su  $t$ ,  $q$ ,  $p$ ,  $H$ ; cioè, formalmente, le stesse equazioni. Similmente (sappiamo che) (ii) le equazioni di Maxwell (2.5.1, 11) restano formalmente immutate a fronte dell'inversione di  $t$ , di  $h$  e di  $u$  (e della replica invariata di  $e$  e di  $\rho$ ), vedi S.sez. 2.5.1, nota (7). Infine (iii) l'equazione di Schrödinger  $i\hbar \partial_t \psi = H\psi$ , dove  $\psi$  è la funzione d'onda e  $H$  è l'operatore hamiltoniano (supposto indipendente da  $t$ ), resta formalmente immutata sotto l'inversione  $t' = -t$ ,  $H' = H$  e  $\psi' = \psi^*$ , \* essendo l'operatore di coniugazione complessa. Si

---

<sup>32</sup> Il significato fondamentale di “τροπη” è quello di “svolta” o “rivolgimento”; ma secondo il testo di Clausius (“Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie”, Ann. d. Physik, CXXV, 315, 1865), per “τροπη” si deve intendere “trasformazione”. Insomma il significato del neologismo “En-tropie” (cui non fu estranea l'affinità con “En-ergie”) è probabilmente quello di “trasformazione, o conversione, interna”.



ricordi che l'oggetto fisicamente significativo è il modulo quadrato di  $\psi$ , non affetto dalla coniugazione.<sup>33</sup>

In conclusione alcune importantissime leggi fisiche di evoluzione sono reversibili; e ciò dà una misura della profonda valenza filosofica di una legge *macroscopica* universale qual'è il 2° principio termodinamico classico nella forma (6).<sup>34</sup> Nel mondo macroscopico, ove i fenomeni dissipativi sono sempre presenti, i processi reversibili costituiscono una classe eccezionale, e non a caso sono stati introdotti come processi ideali, possibili soltanto se infinitamente lenti. Del resto, e ancora non a caso, un significato letterale di “dissipazione” è quello di “perdita irreversibile”, che nel nostro contesto diventa “trasformazione di energia coordinata in una forma mai più recuperabile per intero come tale” (salvo il caso ideale di disporre di una macchina di Carnot con termostato freddo a temperatura assoluta nulla).

Come dicevamo, in virtù del 1° principio  $\Pi_C dt$  deve avere la stessa struttura pfaffiana di  $\Pi_Q dt$ , diciamo  $\Pi_C dt = \sum_{i=0}^h w_i dy_i$ , con coefficienti  $w_i$  funzioni regolari delle  $y_{0 \leq i \leq h}$ . Tuttavia qui il modello termodinamico comporta due altre mancanze di simmetria tra la potenza incoordinata  $\Pi_Q = \sum_{i=0}^h q_i dy_i/dt$  e quella coordinata  $\Pi_C = \sum_{i=0}^h w_i dy_i/dt$  e cioè: (i) mentre in generale  $q_0 \neq 0$  (per la precisione, di norma  $q_0 > 0$ ),  $w_0 \equiv 0$ ; (ii) mentre della pfaffiana  $\Pi_Q dt$  sappiamo che esiste un fattore integrante  $1/\mathfrak{S}$  per qualsiasi  $h$ , della pfaffiana  $\Pi_C dt$  non sappiamo altrettanto (anzi ci aspettiamo che non esista alcun fattore integrante, salvo che per  $h = 2$ ). Sarà conveniente, qui di seguito, denotare con  $y$  l'insieme delle coordinate  $y_{1 \leq j \leq h}$ , con  $w$  l'insieme dei coefficienti  $w_{1 \leq j \leq h}$ , con  $q$  l'insieme dei coefficienti  $q_{1 \leq j \leq h}$ , e naturalmente, con  $\mathfrak{S}$  la coordinata  $y_0$  e con  $q_\mathfrak{S}$  il coefficiente  $q_0$ . Infine, denoteremo con un  $(\cdot)$  la somma su  $j$  da 1 a  $h$ . Scriveremo quindi  $\Pi_Q dt = q_\mathfrak{S} d\mathfrak{S} + q \cdot dy$  e  $\Pi_C dt = w \cdot dy$ , in cui  $q_\mathfrak{S}$ ,  $q$  e  $w$  sono funzioni abbastanza regolari di  $(\mathfrak{S}, y)$ . Con queste notazioni, il 1° principio (in  $Y$ , per processi reversibili) si scrive come  $d\mathcal{E} = (\Pi_Q + \Pi_C) dt = q_\mathfrak{S} d\mathfrak{S} + q \cdot dy + w \cdot dy \equiv \mathfrak{S} d\mathcal{S} + w \cdot dy$ . Identificazioni comuni di  $y$  sono 1):  $y \equiv$  volume di una fase fluida, con il che  $-w \equiv$  pressione parziale della fase (il caso standard è quello di un'unica fase gasosa); 2):  $y \equiv$  concentrazione di una specie chimica, con il che  $w \equiv$  **potenziale chimico** (Gibbs, 1875) della

<sup>33</sup> Vale qui la pena di osservare che l'equazione parabolica “del calore” è *debolmente* reversibile, nel senso che le sue soluzioni “all'indietro” sono instabili; e che l'equazione di Schrödinger è parabolica soltanto formalmente, perché va riferita al campo complesso. Della reversibilità della equazione di Schrödinger abbiamo anche accennato nella S.sez. 5.3.3.

<sup>34</sup> «Se la vostra teoria (macroscopica, ndr) è in disaccordo con il secondo principio, non vi posso dare alcuna speranza: ad essa non resta che sprofondare nella più profonda umiliazione.» (A. Eddington, “The nature of the Physical World”, 1929). Che l'irreversibilità fosse una proprietà connaturata alla realtà fisica *macroscopica* era largamente acquisito nel mondo scientifico intorno al 1870; e questo rende poco comprensibile, a prima vista, la diffidenza che a lungo assediò la nuova meccanica statistica boltzmanniana proprio in quanto confermava l'irreversibilità. Il punto è che Boltzmann ricavava l'irreversibilità partendo da un modello *apparentemente* reversibile, ma che in realtà conteneva un ingrediente estraneo alla reversibilità (nonché al determinismo), la probabilità.

specie. Poiché in approssimazione galileiana vi è conservazione della massa, le concentrazioni indipendenti sono in realtà tante quante sono le specie meno una.

Siamo ora interessati a possibili scambi di ruoli, in qualità di coordinate di  $Y$ , tra  $y$  e  $w$ , tra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{G}$  e tra  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{H}$ ; e a questo scopo, anche se non strettamente necessario, supporremo sussistano le seguenti relative proprietà di *invertibilità globale*. Vale a dire, la  $w = w(\mathcal{G}, y) \leftrightarrow y = y(\mathcal{G}, w)$ , la  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{G}, y) \leftrightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{E}, y)$ , la  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{G}, y) \leftrightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{S}, y)$  e le loro conseguenze, ad esempio la  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{G}, w) \leftrightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{S}, w)$ . Avremo dunque le sei scelte, come coordinate di  $Y$ , di  $(\mathcal{G}, y)$ ,  $(\mathcal{G}, w)$ ,  $(\mathcal{E}, y)$ ,  $(\mathcal{E}, w)$ ,  $(\mathcal{S}, y)$  e  $(\mathcal{S}, w)$ . Ad esempio, con le coordinate  $(\mathcal{S}, y)$  il 1° principio si scrive come appena visto nel precedente paragrafo, dove  $\mathcal{G}$ ,  $w$ , e  $\mathcal{E}$  vanno pensate come funzioni abbastanza regolari di  $(\mathcal{S}, y)$  per le quali  $\partial\mathcal{E}/\partial\mathcal{S} = \mathcal{G}$  e  $\partial\mathcal{E}/\partial y = w$  (quest'ultima ovviamente da leggere come  $\partial\mathcal{E}/\partial y_j = w_j$  per ogni  $j$ ). Una conseguenza delle precedenti, supponendo la  $\mathcal{E}$  CdC 2, è che  $\partial\mathcal{G}/\partial y = \partial w/\partial\mathcal{S}$ .

Esamineremo ora altre combinazioni dello stesso tipo, nelle quali il 1° principio è espresso uguagliando il differenziale di una funzione su  $Y$  a una pfaffiana. Oltre a quella delle coordinate  $(\mathcal{S}, y)$ , avremo da esplorare altre cinque di queste possibilità, e cioè:

1) coordinate  $(\mathcal{G}, y)$ :

$$(7_1) \quad d\mathcal{F} = -\mathcal{S}d\mathcal{G} + w \cdot dy,$$

dove  $\mathcal{F} =: \mathcal{E} - \mathcal{G}\mathcal{S}$  è l'**energia libera** (o “potenziale di Helmholtz”) del sistema. Si noti che  $-\mathcal{F}$  non è altro che la duale di Legendre (v. S.sez. 6.3.2) di  $\mathcal{E}$  rispetto alle variabili  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{S}$ . Seguono le  $\partial\mathcal{F}/\partial\mathcal{G} = -\mathcal{S}$ ,  $\partial\mathcal{F}/\partial y = w$ ;

2) coordinate  $(\mathcal{S}, w)$ :

$$(7_2) \quad d\mathcal{H} = \mathcal{G}d\mathcal{S} - y \cdot dw,$$

dove  $\mathcal{H} =: \mathcal{E} - w \cdot y$  è l'**entalpia** (dal greco “ενθαλπω” = “riscaldamento”) del sistema, opposta alla duale di Legendre di  $\mathcal{E}$  rispetto alle  $w$ ,  $y$ . Seguono le  $\partial\mathcal{H}/\partial\mathcal{S} = \mathcal{G}$ ,  $\partial\mathcal{H}/\partial w = -y$ ;

3) coordinate  $(\mathcal{G}, w)$ :

$$(7_3) \quad d\mathcal{G} = -\mathcal{S}d\mathcal{G} + y \cdot dw,$$

dove  $\mathcal{G} =: \mathcal{H} - \mathcal{G}\mathcal{S} \equiv \mathcal{F} - w \cdot y$  è l'**entalpia libera** (o “potenziale di Gibbs”), opposta alla duale di Legendre di  $\mathcal{H}$  rispetto alle  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{S}$ . Seguono le  $\partial\mathcal{G}/\partial\mathcal{G} = -\mathcal{S}$ ,  $\partial\mathcal{G}/\partial w = y$ ;

4) coordinate  $(\mathcal{E}, y)$ :

$$(7_4) \quad d\mathcal{S} = (d\mathcal{E} - w \cdot dy)/\mathcal{G},$$

da cui  $\partial\mathcal{S}/\partial\mathcal{E} = 1/\mathcal{G}$ ,  $\partial\mathcal{S}/\partial y = -w/\mathcal{G}$ ;

5) coordinate  $(\mathcal{E}, w)$ : in questo caso il 1° principio si scrive ad es.  $d\mathcal{H} + w \cdot dy = d\mathcal{E} - y \cdot dw$ , ma il 1° membro di questa uguaglianza non può in generale esprimersi come differenziale di una funzione su  $Y$ .<sup>35</sup>

In conclusione restiamo con le cinque possibilità  $(\mathcal{Q}, y)$ ,  $(\mathcal{Q}, w)$ ,  $(\mathcal{S}, y)$ ,  $(\mathcal{S}, w)$ ,  $(\mathcal{E}, y)$  come coordinate di  $Y$ , perché la scelta delle  $(\mathcal{E}, w)$  è esclusa dalla lista. Notiamo ancora che disponiamo in tutto di altrettante funzioni su  $Y$ : l'energia interna  $\mathcal{E}$ , l'entropia  $\mathcal{S}$ , l'energia libera  $\mathcal{F}$ , l'entalpia  $\mathcal{H}$  e l'entalpia libera  $\mathcal{G}$ . A parte il suo valore applicativo, sul piano concettuale a questo si riduce quella che qualcuno chiama un po' enfaticamente "teoria dei potenziali termodinamici": in realtà, una semplice applicazione della trasformazione di Legendre.

Se il sistema è isolato ( $\Pi_Q = \Pi_C = 0$ ), il 1° principio impone che sia  $d\mathcal{E} = 0$ : l'energia interna è stazionaria (minima se l'equilibrio è stabile). Lo stesso deve aversi, più in generale, per processi adiabatici ( $d\mathcal{S} = 0$ ) e **isocori**<sup>36</sup> ( $dy = 0$ ). Se il processo è isoterma ( $d\mathcal{Q} = 0$ ) e isocoro, ancora il 1° principio richiede che  $d\mathcal{F} = 0$ : l'energia libera è stazionaria (minima se l'equilibrio è stabile). Se il processo è adiabatico e **isobaro**<sup>37</sup> ( $dw = 0$ ) il 1° principio richiede che  $d\mathcal{H} = 0$ : l'entalpia è stazionaria (minima se l'equilibrio è stabile). Se il processo è isocoro e isoenergetico ( $d\mathcal{E} = 0$ ), il 1° principio richiede che  $d\mathcal{S} = 0$ : l'entropia è stazionaria (massima se l'equilibrio è stabile). Infine se il processo è isoterma e isobaro, il 1° principio richiede che  $d\mathcal{G} = 0$ : l'entalpia libera deve essere stazionaria (minima se l'equilibrio è stabile). Questo riassume i problemi minimax nella ricerca di equilibri stabili vincolati.

Evidentemente, quanto precede è strettamente legato al modello termodinamico adottato, riguardante la natura a priori di  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\Pi_Q dt$  e  $\Pi_C dt$  sulla varietà differenziabile  $Y$  dei processi reversibili:  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{S}$  funzioni di  $(\mathcal{Q}, y) \in Y$ ,  $\Pi_Q dt$  e  $\Pi_C dt$  1-forme pfaffiane nelle stesse variabili, la seconda con  $w_y = 0$ . La prescrizione di questi oggetti può a ragione denominarsi come **modello** (termodinamico) **costitutivo** del sistema considerato;<sup>38</sup> e in particolare quello testé specificato, come modello "classico". In questo modello classico, il 1° e 2° principio, fusi ad esempio nella  $d_t \mathcal{E} = \mathcal{Q} d_t \mathcal{S} + w \cdot d_t y$  (in cui le coordinate sono  $(\mathcal{S}, y)$ ), devono valere identicamente per  $d_t \mathcal{S}$  e

<sup>35</sup> Poiché non sempre si curano di mettere in chiaro preventivamente quali sono le variabili indipendenti alle quali si deve fare riferimento, i termodinamisti usano una particolare notazione per le derivate parziali, in cui a pedice delle stesse sono riportate le grandezze da considerare costanti nel processo di differenziazione. Ma le notazioni inusuali non finiscono qui. Nelle parole (come al solito dure) di Truesdell: «As if to emphasize the difference between mechanics and thermodynamics, even the notations of calculus change from one to the other. Not only differentials replace derivatives, but even derivatives look different, e.g.  $\delta^{\text{rev}} Q/dV = \mathcal{Q}(\partial \mathcal{S}/\partial V)_p$ . The difference is not merely formal (note the three different  $d$ 's). It represents a difference of logic.» ("Rational Thermodynamics", p. 4 (1969)).

<sup>36</sup> Questo attributo si ispira al caso standard in cui  $y$  è un volume (dal greco  $\chi\omega\acute{\alpha}\rho\omicron\varsigma$ , spazio, volume).

<sup>37</sup> Anche questo attributo si ispira al caso standard in cui  $-w$  è una pressione (dal greco  $\beta\alpha\rho\omicron'\varsigma$ , peso).

<sup>38</sup> Una accezione più generale di modello costitutivo può definirsi per processi qualsiasi, cioè per transizioni continue attraverso stati (non necessariamente termodinamici). L'idea dei "funzionali di storia", alla quale abbiamo accennato in E.1, definisce un modello costitutivo molto generale dei processi subiti da un sistema fisico.

$d_t y$  arbitrarie, e quindi equivalgono alle menzionate  $h + 1$  equazioni differenziali parziali  $\partial \mathcal{E} / \partial S = \vartheta$ ,  $\partial \mathcal{E} / \partial y = w$ . Qui  $\vartheta$  e  $w$  sono da pensare come funzioni note di  $(S, y)$  in virtù delle ipotesi di invertibilità globale, e devono soddisfare le  $h$  condizioni di integrabilità  $\partial \vartheta / \partial y = \partial w / \partial S$ .

Al quadro di cui abbiamo offerto una breve sintesi va aggiunta la menzione di un **3° principio della termodinamica** enunciato da Nernst nel 1906 (“principio di Nernst”), e che afferma: «la variazione di entropia  $\Delta S$  che avviene lungo un processo isoterma reversibile a temperatura  $\vartheta$  (in un sistema cristallino) tende uniformemente a zero allorché  $\vartheta$  tende a zero.» Poiché tale variazione è espressa da  $(1/\vartheta) \int \Pi_Q dt$ , se ne desume che  $\int \Pi_Q dt$ , durante il processo isoterma considerato, è infinitesimo di ordine superiore a  $\vartheta$  per  $\vartheta \rightarrow 0$ . Un altro aspetto del 3° principio, si dimostra, è quello che stabilisce la *irraggiungibilità*, da parte del sistema, e con ogni mezzo anche ideale, della temperatura assoluta nulla ( $\vartheta = 0$ ) in un tempo finito.

#### E.4) ALCUNE CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

Come abbiamo accennato nella precedente sottosezione, a partire dal primo ‘900 alcuni matematici e fisici-matematici hanno cominciato a cimentarsi con l’obiettivo di finalmente tradurre la termodinamica classica in un genuino sistema assiomatico-deduttivo; primo tra tutti in ordine di tempo C. Caratheodory (1909), vedi alla nota <sup>(40)</sup>. (Sulla necessità *logica* di conseguire un tale risultato ci sembra superfluo fare commenti.) Il limite di questi tentativi non è tanto quello della loro corretta impostazione teoretica, ma piuttosto quello della loro interpretabilità: in generale, più essi sono logicamente “robusti” e maggiore è la difficoltà di avvicinarli alla realtà fisica osservabile. Abbiamo più volte rimarcato che per essere di interesse, l’assiomatizzazione di un modello (di una sezione del mondo dei fenomeni) deve soddisfare alcuni requisiti fondamentali: i termini primitivi e gli enunciati primitivi sui termini devono essere operativamente ben definiti, la loro interpretazione fisica deve essere abbastanza chiara, e infine la teoria assiomatica deve essere accettabilmente completa, cioè deve coprire la maggior parte dei fenomeni noti. Le varie proposte di assiomatizzazione della termodinamica classica sono ovviamente da ritenere corrette sotto il profilo logico, ma di fatto esse *sono quasi ignorate dalla comunità dei fisici*. Da una parte, e con qualche ragione, a causa della loro astrattezza (ove per astrattezza non si intenda indeterminazione o vaghezza, ma difficoltà di interpretazione fisica); dall’altra, a causa di una loro presunta inutilità applicativa; e da ultimo, infine, a causa del definitivo affermarsi – più di un secolo fa – della

termodinamica locale (o teoria dei campi termodinamici <sup>39</sup>) e della termodinamica statistica, che hanno immediate e concrete applicazioni senza richiedere il superamento di addizionali difficoltà interpretative dei loro modelli matematici.

Naturalmente non possiamo qui entrare nel merito di ricerche ancora aperte, e al cui interno si ravvisano indirizzi alquanto diversi. Ci limitiamo pertanto a riportare <sup>40</sup> una bibliografia indicativa ordinata cronologicamente (altri riferimenti si troveranno nelle referenze citate). Può essere istruttivo, inoltre, offrire al lettore un breve scorcio dello “stile”, per così dirlo, dell’approccio assiomatico alla termodinamica classica traendolo dalla assiomatizzazione di Giles (1964, vedi (<sup>40</sup>)), una delle più radicali e complesse tra quelle note a chi scrive (ma che comunque non copre i fenomeni di isteresi). Riportiamo dunque, non letteralmente e con le notazioni introdotte nell’App. Gen. A, Sez. A.1, alcune definizioni che vi compaiono (vedi Giles 1964, Cap. 2°, “Formal Processes”, pp. 30-36). Premesso che uno “stato” di un dato sistema va ivi interpretato come “metodo di preparazione” del sistema stesso (un’idea che risale a P. Bridgman, il più noto esponente dell’operazionalismo nelle scienze esatte), il generico stato si denota con una lettera minuscola come a, b, c, .. Allora: «Un processo è una coppia ordinata di stati, come  $\langle a, b \rangle$ . Due stati a, b, presi in quest’ordine, possono essere in una relazione binaria che si denota  $a \rightarrow b$ , e che è per definizione riflessiva (cioè  $a \rightarrow a$ ) e transitiva (cioè  $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \Rightarrow a \rightarrow c$ ). Questa relazione binaria soddisfa (tra gli altri) i due assiomi  $(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \Rightarrow (b \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b)$  e  $(b \rightarrow a) \wedge (c \rightarrow a) \Rightarrow (b \rightarrow c) \vee (c \rightarrow b)$ . Il processo  $\langle a, b \rangle$  si dice “naturale” se  $a \rightarrow b$ , e “antinaturale” se  $b \rightarrow a$  (ma  $b \rightarrow a$  non è la negazione di  $a \rightarrow b$ , ndr). Il processo  $\langle a, b \rangle$  si dice “reversibile” se  $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ ; “impossibile” se  $\neg(a \rightarrow b) \wedge \neg(b \rightarrow a)$ ; “possibile” se non è impossibile; e “irreversibile” se è possibile ma non reversibile.» <sup>41</sup> Questa è soltanto una piccola parte dei termini

<sup>39</sup> In questa teoria il 2° principio è tutto riassunto nel *segno* dei coefficienti delle relazioni costitutive linearizzate (coefficienti di conducibilità termica, elettrica, ecc.), che assicura la *produzione* di entropia specifica (entropia per unità di massa).

<sup>40</sup> C. Caratheodory: “Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik”, Math. Ann. **67**, 355-386 (1909); P. Bridgman: “The nature of Thermodynamics”, Harv. Un. Press (1941); G. Falk: “Axiomatik der Thermodynamik” in Flügge’s Encyclopedia of Physics, III/2, 119-161 (1959); R. Arens: “An Axiomatic Basis for classical Thermodynamics”, J. Math. Anal. Appl. **6**, 207 (1963); R. Giles: “Mathematical Foundations of Thermodynamics”, Pergamon Pr. (1964); C. Truesdell: “Rational Thermodynamics”, McGraw-Hill (1969); J. Boyling: “An axiomatic Approach to classical Thermodynamics”, Proc Roy. Soc. A **329**, 35 (1972); B. Coleman, D. Owen: “A mathematical foundation for thermodynamics”, Arch. Rat. Mech. An. **54**, 1 (1974); C. Truesdell, S. Bharatha: “The Concepts and Logic of Classical Thermodynamics, etc.”, Springer (1977); M. Silhavy: “On measures, convex cones, and Foundations of Thermodynamics”, Czech. Journ. Phys. B **30**, 881, 961, (1980); J. Serrin: “An Outline of Thermodynamical Structure”, in “New Perspectives in Thermodynamics”, ed. J. Serrin, Springer (1986); M. Ricou: “The Laws of Thermodynamics for non-cyclic Processes”, in “New Perspectives in Thermodynamics”, ed. J. Serrin, Springer (1986). Del lavoro di Caratheodory (1909), che a nostra conoscenza non ha avuto sviluppi significativi nella sua stessa direzione (il citato articolo di Falk (1959) ne è in parte una rielaborazione), esiste una traduzione inglese in “The Second Law of Thermodynamics”, ed. J. Kestin, Stroudsburg, Dowden (1976).

<sup>41</sup> Quindi (ndr) il processo  $\langle a, b \rangle$  è irreversibile se  $(a \rightarrow b) \wedge \neg(b \rightarrow a)$ . Si noti che le proprietà di essere reversibile, irreversibile, possibile o impossibile, per un processo  $\langle a, b \rangle$ , sono tutte simmetriche rispetto allo scambio di a con b, cioè rispetto al suo senso di percorrenza.

e degli enunciati *primitivi* che sono usati nella termodinamica assiomatica di Giles; e considerando l'esiguo campione che ne abbiamo riportato, ben si comprende quanto accurata debba (o dovrebbe) essere la didattica delle relative regole di interpretazione affinché un tale sistema assiomatico possa risultare abbastanza suggestivo e comprensibile agli occhi di un fisico di formazione standard che ne intraprenda lo studio.

Tutto considerato, crediamo di poter affermare che la posizione della termodinamica classica sia oggi, tra quelle delle grandi teorie fisiche, alquanto anomala. Infatti da una parte i suoi fondamenti primi non hanno ancora trovato un assetto assiomatico definitivo (esistono varie proposte diverse in concorrenza tra loro); e dall'altra essi fondamenti soffrono di una didattica interpretativa spesso carente agli occhi del fisico "medio". Su un altro versante, è poi difficile pensare a questa disciplina come ad un capitolo particolarmente vivo della fisica matematica, salvo forse che sotto l'aspetto della formulazione induttiva di nuovi modelli costitutivi specifici: per il resto, l'impresa più eccitante che ci si possa aspettare, matematicamente parlando, è (più o meno) il calcolo di derivate e/o di integrali.

Per concludere, vale la pena di esaminare gli obbiettivi *teoretici* "naturali" della termodinamica classica. Tra di essi non può evidentemente esserci quello di una ricostruzione predittiva dei processi subiti da un sistema fisico dato, a partire dalle convenienti condizioni accessorie (quando siano prescritte le azioni del mondo esterno su di esso o quando tali azioni siano già contenute nel modello complessivo della sua evoluzione), come avviene ad esempio nella meccanica analitica o nell'elettromagnetismo classico; la termodinamica *non è e non può essere una teoria deterministica in questo senso*. Essa può invece studiare alcune proprietà generali dei processi termodinamici partendo dal modello costitutivo adottato; e soprattutto può proporsi di *formulare* (induttivamente) nuovi modelli costitutivi in casi specifici, consistentemente con gli assiomi che governano il trasferimento e la dissipazione di energia (il 1° e il 2° principio), e di studiarne le implicazioni. In secondo luogo, la termodinamica classica può sviluppare una teoria dell'equilibrio e della sua stabilità ricavando le risposte ai relativi problemi di tipo minimax mediante gli usuali strumenti del calcolo. Non fa dunque meraviglia che questo sia proprio quanto si è fin qui verificato e continua a verificarsi. In terzo luogo, e più importante nell'ottica di questo libro: è auspicabile che lo sforzo cooperativo di un crescente numero di fisici, logici e matematici riesca ad attingere il difficile traguardo di una assiomatizzazione della termodinamica classica definitivamente soddisfacente – per rigore, accessibilità interpretativa e completezza –, capace di conferirle quello status di genuina teoria fisico-matematica che essa da molto tempo attende.

## APPENDICE GEN. F

### ELEMENTI DI TEORIA COSMOLOGICA MACROSCOPICA

#### F.1) CENNI STORICI

Lo studio della struttura dell'universo come un tutto, o cosmologia,<sup>1</sup> cominciò a diventare una scienza in senso proprio soltanto verso la fine del secolo XVI. Uscendo da una preistoria che risaliva almeno al terzo millennio a.C., e che fu in buona parte dominata dall'ingannevole testimonianza dei sensi e da suggestioni mitologiche/filosofiche,<sup>2</sup> la grande avventura, si può dire, iniziò con le sistematiche osservazioni di Brahe (1546-1601) e del suo allievo Keplero (1571-1630); e a partire dal 1610 circa, con le scoperte di Galileo<sup>3</sup> (1564-1642). Come abbiamo diffusamente illustrato (v. Cap. 6), per cominciare Keplero si applicò allo studio approfondito dei rilievi osservativi del suo maestro (e più tardi dei propri), desumendo così le famose tre leggi (v. S.sez. 6.4.3) che nelle mani di Newton (1642-1727) avrebbero dato origine alla teoria della gravitazionale universale.<sup>4</sup>

Se con Keplero cadde il dogma delle orbite planetarie circolari/uniformi, con Galileo nacque addirittura l'indagine fisica in senso moderno, fondata sull'osservazione/esperimento e libera da giudizi di altra origine. Il quadro di queste innovazioni di metodo si completa ricordando che le

---

<sup>1</sup> Il significato primitivo della parola greca “κοσμος” è quello di “ordine”: vale a dire, fin dai suoi albori la cultura classica occidentale tese ad identificare l'universo con una “totalità ordinata”.

<sup>2</sup> A quanto risulta, nella lontana antichità si pensava che i cicli climatici stagionali fossero *l'effetto* di corrispondenti configurazioni del cielo. Questa idea, e più tardi, la convinzione che quelle configurazioni potessero addirittura influenzare gli umani destini, conferirono anche un valore *pratico* alla previsione delle posizioni degli astri.

<sup>3</sup> Galileo esordì come osservatore del cielo servendosi di un telescopio autocostruito (potere di ingrandimento  $\approx 32\times$ ), e con esso scoprì i satelliti di Giove: un fatto decisivo, tra gli altri, nei confronti di quella opposizione tra aristotelici-tolemaici e copernicani che si era molto irrobustita a partire dalla pubblicazione dell'opera di Copernico (1543). (Il copernicano “De revolutionibus orbium coelestium” fu poi posto all'indice nel 1616.) La penosa vicenda che seguì, con il processo cui il Sant'Uffizio sottopose Galileo (1633) e che culminò con l'abiura e riduzione agli arresti domiciliari del vecchio scienziato ormai quasi cieco, è episodio chiave nella storia del rapporto tra la chiesa cattolica e la scienza. La “riabilitazione” ufficiale del condannato agli occhi del mondo cattolico (in realtà assai più di forma che di sostanza) doveva attendere oltre tre secoli e mezzo, fino al pontificato di Giovanni Paolo II. Mutatis mutandis, la storia di Galileo si ripeterà fatalmente trecento anni dopo, in Unione Sovietica: allorché J. Stalin avviò una feroce epurazione nei confronti di scienziati le cui scoperte e conclusioni non erano allineate all'ideologia del regime (1936). L'idea più blasfema, e apparentemente più perseguitata, fu quella di un universo non stazionario, e addirittura con un inizio.

<sup>4</sup> Per la precisione, ricordiamo (vedi S.sez. 6.4.2 e 6.4.3) che Newton affrontò e risolse il “problema dei 2 corpi” in mutua attrazione gravitazionale (o anche il problema di un solo corpo attratto da un centro fisso), non esitando tuttavia ad estendere le sue conclusioni di principio all'analogo problema degli  $N > 2$  corpi, applicato ad oggetti massivi qualsiasi; ove per “conclusioni di principio” si deve intendere l'esistenza di una soluzione unica (sotto le usuali condizioni iniziali) del problema stesso, prescindendo dalla possibilità di effettivamente determinarla per  $N > 2$ . È questo il significato concreto che dobbiamo dare al nucleo concettuale della teoria newtoniana della gravitazione universale.

procedure ragionative (induttive e deduttive) di Galileo erano genuinamente scientifiche, cioè pronte, all'occorrenza, ad andare *oltre* il senso comune; e questo, nonostante egli non abbia mai sviluppato un orientamento specifico verso l'astrazione filosofica/matematica.

Quello di Newton fu poi un autentico passo da gigante, che non è esagerato considerare unico nella storia delle scienze esatte (secondo alcuni storici della scienza, in esso si potrebbe vedere il vero e proprio atto di nascita della fisica matematica). Se volessimo illustrare con un minimo di parole questo passo, diremmo che mentre il modello geocentrico di Tolomeo<sup>5</sup> – che dominava da circa quindici secoli – si limitava a descrivere (in modo francamente macchinoso) il moto dei pianeti e della luna, il modello di Newton finalmente riconduceva quel moto ad una “dinamica” unificante, concettualmente sofisticata ma formalmente semplice, ed estendibile tale e quale a tutti i corpi noti del sistema solare, satelliti di altri pianeti e comete compresi; o addirittura – audacemente – agli astri ad esso esterni. La capacità predittiva dei due modelli, in ordine alla precisione relativa, fu poi presto a favore del secondo. In breve, il modello newtoniano era mirabilmente organico ed esplicativo, laddove quello tolemaico non lo era affatto. Esso si impose quindi, subito e fino all'avvento della Relatività Generale (RG), come vera e propria pietra angolare della teoria astronomica; mentre gli artificiosi deferenti ed epicicli tolemaici decaddeero senza ritorno al rango di dato storico-culturale.<sup>6</sup> Va anche ricordato che l'attributo “universale”, usato più sopra a proposito della gravitazione, ovviamente non si riferiva, ai tempi di Newton, al cosmo nella sua estensione oggi presunta, ma al solo sistema solare (al di fuori del quale la teoria newtoniana non era praticamente verificabile); e fino alla fine dell'Ottocento, alla “Via Lattea” (oggi “Galassia”) e ad alcuni oggetti dei quali non si aveva ancora certezza se le appartenessero o no (le allora cosiddette *nebulæ*).

Come c'era ben da aspettarsi, la cosmologia proseguì il suo cammino anche dopo Newton, fino a quando la Relatività Generale (RG), che doveva cambiarne radicalmente alcuni aspetti fondativi, si affacciò sulla scena fisico-matematica (1916); e dopo di essa, fino ai giorni nostri. Vale a dire, essa incorporò puntualmente tutti gli sviluppi conoscitivi, che man mano maturavano e potevano esserle utili, sia in campo fisico che tecnologico. Ricordiamo per sommi capi i primi passi qui di maggior interesse di quel formidabile avanzamento: in campo fisico, l'avvento della termodinamica (Carnot 1824, Clausius 1850), della chimica fenomenologica “regolata” (Dalton 1801, Avogadro 1811, Cannizzaro 1858), dell'elettromagnetismo (Maxwell 1873), della meccanica

---

<sup>5</sup> Claudius Ptolemaeus, uno dei grandi astronomi-geografi dell'antichità (Alessandria, II sec. d.C.), fondatore della teoria che identificava la Terra con il centro dell'universo. Sappiamo poco o niente della sua vita.

<sup>6</sup> Naturalmente non vi è ombra di supponenza in questo giudizio. E infatti nell'ordine naturale delle cose che, nello sviluppo della scienza, a modelli/interpretazioni “negativi” (≡ logicamente infondati e più o meno manifestamente falsi) possano succedere *improvvisamente* modelli/interpretazioni “positivi” (≡ logicamente fondati e presumibilmente veri): contrariamente ad un vecchio adagio sulla natura, *historia facit saltus*.



statistica <sup>7</sup> (Maxwell 1871, Boltzmann 1896) – quindi della teoria cinetica dei gas e dei plasmi –, della spettroscopia sperimentale (Kirchhoff e Bunsen 1859), dei metodi avanzati della dinamica lagrangiana-hamiltoniana, .. ecc.; e in campo tecnologico, soprattutto dell'ingegneria ottica e della tecnica fotografica.

In particolare, i secoli XVIII e XIX avevano prodotto una spettacolare crescita delle conoscenze astronomiche, fondata sullo sviluppo di telescopi sempre più potenti e innovativi e sul lavoro di una schiera di infaticabili ed appassionati scrutatori dei cieli; <sup>8</sup> ma nonostante la grande messe di nuove informazioni osservative e il progresso della scienza fisica in generale, la riflessione interpretativa sulla natura ultima del cosmo restava ancorata alla teoria newtoniana della gravità, e doveva accettare alcune difficoltà che da quella teoria derivavano. Insomma, la cosmologia teorica non sembrava pronta a svolte memorabili all'epoca della pubblicazione della RG; e questo spiega il grande interesse che subito si manifestò sulle prospettive di fondazione che la RG stessa poteva offrirle.

Occorre anche tenere presenti le straordinarie, epocali novità che investirono la fisica del microcosmo, o microfisica, <sup>9</sup> nel terzo decennio del secolo XX (e per certi fatti precursori fondamentali <sup>10</sup>, anche prima, all'esatto inizio del secolo stesso), e che avrebbero inciso sempre più

<sup>7</sup> A questa espressione potrebbe ormai sostituirsi quella, più appropriata, di “meccanica probabilistica”. Con la meccanica probabilistica fa il suo ingresso nella scienza fisica la teoria della probabilità, fornendole gli strumenti matematici con cui prevedere i comportamenti medi, e quindi *osservabili*, di “folle” di moltissimi oggetti identici non osservabili singolarmente.

<sup>8</sup> Non vogliamo qui passare sotto silenzio, a questo proposito e tra i tanti, il caso esemplare degli Herschel: William (o piuttosto Wilhelm, Hannover 1738, Slough Ingh. 1822), Carolina (sorella di Wilhelm, 1750-1848), e soprattutto John (figlio di Wilhelm, 1792-1871). Wilhelm, lo scopritore del pianeta Urano, emigra in Inghilterra nel 1857, dove svolge intensa attività di costruttore di telescopi di alta qualità – soprattutto a riflessione, dei quali impara a fabbricare in proprio gli specchi in lega metallica – e di astronomo (cataloga centinaia di oggetti celesti, abbozza una teoria dell'evoluzione stellare e studia la struttura degli “universi-isola” che oggi chiamiamo galassie). Carolina, anch'essa valente astronoma e collaboratrice del fratello, durante una lunga vita scopre e cataloga stelle, comete e nebulæ, delle quali ultime redige infine, all'età di oltre settanta anni, un elenco di circa 2500 oggetti. Infine John inaugura lo studio sistematico delle stelle doppie mediante un telescopio diottrico di sua costruzione; successivamente procede, usando un suo nuovo telescopio a riflessione, alla redazione di un grande catalogo dell'ancora sconosciuto emisfero australe, trasferendosi con le sue apparecchiature presso il Capo di Buona Speranza per oltre quattro anni (1833-1837). Ancora a John si devono grandi miglioramenti della tecnica fotografica e le fondamentali applicazioni di questa all'astronomia. Gli Herschel ricevettero ampi riconoscimenti ufficiali (e non soltanto in Inghilterra): ad esempio, John fu nominato primo baronetto nel 1831.

<sup>9</sup> Qui e nel seguito con “microfisica” riassumiamo l'insieme dell'interazione elettromagnetica nel modello atomico (meccanica quantistica in senso stretto, che riduce la chimica ad una nuova fisica), dell'interazione debole e dell'interazione forte, ben distinte nell'universo attuale. I rapporti tipici tra la forza di gravità e queste tre forze sono usualmente indicati, nell'ordine, in  $\approx 10^{-2}$  (costante di struttura fine), in  $\approx 10^{-5}$  e in  $\approx 10^{-39}$  (costante di struttura gravitazionale). Ricordiamo che con le dimensioni fondamentali L, T, M, Q (lunghezza, tempo, massa e carica) e con le costanti di permeabilità elettrica nel vuoto  $\epsilon_0 =_{\text{dim}} L^{-3}T^2M^{-1}Q^2$ , di Newton-Cavendish  $\kappa =_{\text{dim}} L^3T^{-2}M^{-1}$  e di Planck  $\hbar =_{\text{dim}} L^2T^{-1}M$ , si possono formare esattamente due combinazioni adimensionali. Esse sono 1)  $L^{-1}TQ^2(\epsilon_0\hbar)^{-1}$ , e 2)  $L^{-1}TM^2(\kappa/\hbar)$ , nelle quali compare il fattore comune  $L^{-1}T$ , reciproco di una velocità. La costante di struttura fine  $\alpha$  si definisce allora facendo in 1)  $Q =$  carica elettrica dell'elettrone, e  $L^{-1}T = 1/c$ ; quella di struttura gravitazionale  $\alpha_G$ , facendo in 2)  $M =$  massa del protone, e ancora  $L^{-1}T = 1/c$ . A conti fatti, si trova:  $\alpha = 0,7297 \cdot 10^{-2}$  e  $\alpha_G = 5,869 \cdot 10^{-39}$ . Il valore di  $\alpha$  è più noto come  $\approx 1/137$ .

<sup>10</sup> Il 14 dicembre del 1900, M. Planck presentò la sua legge di radiazione di corpo nero (“Zur Theorie der Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum”) ad una riunione della Deutsche Physikalische Gesellschaft di Berlino. Essa

profondamente sulla nostra rappresentazione dell'universo. In conseguenza di questi sviluppi, già a cavallo tra gli scorsi anni '30 e '40 ben pochi cosmologi avrebbero preso in seria considerazione modelli dell'universo in cui *macrofisica e microfisica non giocassero ruoli di confrontabile importanza*. In altre parole, lo spazio d'indagine e/o didattico che resta oggi ad una cosmologia teorica *strettamente macroscopica*, dopo l'immissione della RG nel suo quadro generale, è decisamente modesto rispetto a quello che spetta alla cosmologia nel suo insieme; al punto che una sintesi essenziale dei suoi contenuti può essere illustrata in qualche decina di pagine ad un lettore accettabilmente esperto di RG.<sup>11</sup>

Questo non significa affatto, tuttavia, che la RG – in quanto teoria completamente macroscopica – non debba continuare ad essere una cornice di riferimento obbligata entro cui collocare l'intera scienza del cosmo, a prescindere dalla difficoltà di coniugarla con la microfisica in un comune quadro teoretico. Del resto, quest'ultimo obiettivo è anche legato all'aspirazione, in parte di matrice filosofica, verso una ancora utopistica “teoria fisica del tutto” (cfr. S.sez. 9.3.1); ma salvo che in prossimità di eventi “catastrofici”, quali sono ad esempio i collassi stellari o le esplosioni nei centri galattici, e qualche tempo ( $10^{-4} \div 10^{-3}$  s<sup>12</sup>) dopo il big-bang previsto dalla maggior parte dei modelli cosmologici (vedi F.4), l'unificazione di gravità e microfisica in un'unica teoria fisico-matematica sembrerebbe abbastanza irrilevante a causa della grande separazione (da  $\approx 10^2$  fino a  $\approx 10^{39}$  volte, cfr. nota (9)) tra le relative scale. D'altra parte, e come abbiamo già accennato (vedi S.sez. 9.3.1), per il momento vi sono soltanto stimolanti prospettive, ma non vere e proprie teorie, sulla possibilità di realizzare quella unificazione.

---

conteneva due costanti di natura, quella di Boltzmann e quella che si sarebbe appunto chiamata “di Planck”, che non esistevano nella fisica newtoniana. Per quanto ne sappiamo, e non fa meraviglia, l'introduzione del quanto di energia non venne affatto percepita dall'audience nelle sue reali implicazioni epistemologiche: per lo più, essa apparve come un artefatto tecnico da eliminare nel seguito. Sei anni dopo, il numero di giugno 1906 degli “Annalen der Physik” pubblicò l'articolo di Einstein sulla esistenza dei quanti di luce e l'effetto fotoelettrico (“Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”); ed è in sostanza sotto l'influenza di *questo* scritto che la comunità dei fisici cominciò a rendersi conto del vero significato della scoperta di Planck. Per la verità – si dovrebbe aggiungere – Planck fu un “rivoluzionario suo malgrado”: per molto tempo avvenire, e soprattutto in privato, egli cercherà infatti di *invalidare* le conseguenze della quantificazione dell'energia. Nelle sue parole, il ricorso al quanto fu «un atto di disperazione».

<sup>11</sup> Agli imponenti sviluppi della fisica e della tecnologia otto-novecentesche che abbiamo appena ricordato, si deve aggiungere l'altrettanto imponente crescita delle tecniche disponibili all'osservazione astrofisica a partire dalla invenzione dei tubi elettronici e dei semiconduttori, e dal connesso decollo della radio/radartecnica ( $\approx$  dagli anni '20 in poi). All'astronomia tradizionale nel visibile, venne così ad affiancarsi la radio- e la radar-astrofisica, l'astrofisica nell'ultravioletto e nell'infrarosso, e infine l'astrofisica x e  $\gamma$  (queste ultime, mediante antenne in quota). In modo simile, ma molto più recentemente, sono anche avanzate le tecniche di archiviazione dei dati: per quanto riguarda le immagini, la fotografia chimica è infatti oggi quasi del tutto abbandonata (e non soltanto nelle applicazioni astronomiche), sostituita dai sensori CCD (Coupled Charge Device).

<sup>12</sup> Quindi enormemente di più del tempo di Planck ( $10^{-43}$  s), ma anche molto meno ( $\approx 10^{21}$  volte meno) dell'età dell'universo. Intorno ai  $10^{-4}$  s dopo il big-bang (tempo 0), la temperatura media del cosmo era dell'ordine di  $10^{12}$  K (Weinberg), corrispondenti a circa 90 Mev. Considerando l'epoca in cui la fisica fino ai 90 Mev fu ragionevolmente conosciuta (ad esempio il sincrotrone di Frascati da 1,1 Gev entrò in funzione nel 1959), si può affermare che la storia dell'universo dai  $10^{-4}$  s in poi era accettabilmente definita già negli anni '60 (modello standard del big-bang).

## F.2) I MODELLI COSMOLOGICI DI EINSTEIN E DI DE SITTER

§1. *Il modello cosmologico di Einstein.* Subito dopo le prime e ancora un po' precarie convalide della sua nuova teoria gravitazionale (quindi già a cavallo tra il 1916 e il 1917), lo stesso Einstein prese ad esaminare la possibilità di applicarla allo studio dell'universo, inteso ormai come varietà 4-dim lorentziana popolata di materia e/o radiazione elettromagnetica. Per cominciare, il modello cosmologico einsteiniano<sup>13</sup> partiva da un fatto all'epoca già abbastanza accettato, sia su basi osservative che (per così dirle) "filosofiche". Vale a dire, su una scala spaziale abbastanza grande,<sup>14</sup> e quindi agli occhi di un osservatore capace di una risoluzione spaziale abbastanza grossolana, lo spazio cosmico appariva (come del resto appare tuttoggi) privo di luoghi o direzioni privilegiati/e. Questa idea di uno spazio cosmico sostanzialmente *omogeneo* e *isotropo* nella grande scala era quindi considerata come un vero e proprio principio, che si disse (Milne) **principio cosmologico**. Nella corrispondente grande scala temporale, non esistevano inoltre evidenze di una evoluzione cosmica, per cui era naturale assumere un universo *stazionario*: un secondo "principio" destinato ad essere progressivamente messo in discussione nel giro di pochi anni<sup>15</sup>, e poi definitivamente abbandonato con la scoperta della radiazione cosmica di fondo (R. Wilson e A. Penzias, 1965) e il progressivo affermarsi della teoria del big-bang.<sup>16</sup> Per ovvie ragioni di semplicità, infine, il modello einsteiniano assumeva uno spazio cosmico riempito da un fluido perfetto immobile con densità di massa  $\mu^0$  e pressione  $p^0$  (per il significato di queste notazioni, vedi S.sez. 9.5.1), entrambe uniformi e costanti in forza delle ipotesi di omogeneità/stazionarietà.

Sotto tutte queste condizioni, detta  $r$  la distanza da un'origine sostanzialmente arbitraria nella scala spaziale sopraddetta, secondo la RG la metrica dello spazio-tempo è data dalla (9.5.1, 2), con i parametri adimensionali  $a$  e  $b$  funzioni di  $r$  al più. Le equazioni del campo sono allora le (9.5.1, 11), che riscriviamo qui per comodità del lettore:

$$(1_1) \quad b'/(abr) - (1-1/a)/r^2 = Kp^0,$$

$$(1_{2=3}) \quad [(b'/b)' - (1/2)(a'/a)(b'/b) + (1/2)(b'/b)^2 + (b'/b - a'/a)/r]/(2a) = Kp^0$$

<sup>13</sup> A. Einstein, Berlin Berich., 142 (1917); Ann. d. Phys., **55**, 241 (1918).

<sup>14</sup> Scala spaziale "abbastanza grande" significa qui "di centinaia di milioni di anni-luce" (e quindi, poco più sotto, scala temporale abbastanza grande significa di centinaia di milioni di anni).

<sup>15</sup> Secondo le osservazioni di Hubble (Erwin, 1889–1953, a partire dai primi anni venti) le galassie lontane appaiono allontanarsi dalla Terra con velocità (radiale) all'incirca proporzionale alla loro distanza valutata in vario modo (tipicamente ricorrendo alle variabili cefeidi come campioni di distanza). Tale velocità di allontanamento si misura come spostamento verso il rosso (redshift) dovuto ad effetto Doppler. È questa la **legge di Hubble**. Sulla sua base, si afferma spesso che supponendo costante il fattore di proporzionalità (**costante di Hubble**  $H > 0$ ), in un certo istante *finitamente* remoto del passato "tutto doveva essere concentrato in un punto". Benché la conclusione sia corretta, il ragionamento lo è di meno; come si constata immediatamente integrando la corrispondente equazione differenziale  $d\delta/dt$  ( $\equiv$  velocità di allontanamento, con  $\delta \equiv$  distanza)  $= H\delta$ . Di fatto, la valutazione della distanza di oggetti celesti dall'osservatore terrestre è un tema *assolutamente dominante* nella storia dell'astronomia.

<sup>16</sup> La transizione dai modelli stazionari dell'universo a quelli evolutivi è stata paragonata ad una specie di "seconda rivoluzione copernicana", a distanza di quasi quattro secoli dalla prima.

$$(1_4) \quad a'/(a^2 r) + (1-1/a)/r^2 = K\mu^0_0 c^2,$$

dove  $(\quad)' \equiv d_r$  e  $K$  è la solita abbreviazione per  $8\pi\kappa/c^4$ . Conseguenza delle (1) è la condizione di solenoidalità (9.5.1, 13), che sotto  $p^{0'} = 0$  si riduce alla

$$(2) \quad (p^0 + \mu^0_0 c^2)b' = 0.$$

Poiché  $p^0$  e  $\mu^0_0$  sono legate da una legge di stato, (l'equazione complementare (9.4.4, 31)), il bilancio tra equazioni (le (1) e la (9.4.4, 31)) ed incognite (le  $a$ ,  $b$  funzioni di  $r$ , e le  $p^0$  e  $\mu^0_0$  uniformi e costanti) risulta quindi corretto.

Ragionevolmente, Einstein soddisfa la (2) ponendo  $b' = 0$ , con il che la (1<sub>1</sub>) si semplifica nella

$$(3) \quad a^{-1} = 1 + Kp^0 r^2.$$

Da questa si ha  $a'/(a^2 r) = -2Kp^0$ , che sostituita nella (1<sub>4</sub>) dà, con la (3) stessa (ed essendo  $K > 0$ ),

$$(4) \quad 3p^0 + \mu^0_0 c^2 = 0.$$

Sotto la  $b' = 0$ , le tre equazioni (1) non possono essere indipendenti: la (1<sub>1</sub>) implica infatti la (1<sub>2=3</sub>).

Precisamente, la (1<sub>1</sub>) si riduce alla (3), e la (1<sub>2=3</sub>) alla

$$(5) \quad (b'/b)' - a'/(ar) = 2aKp^0.$$

Derivando la (1<sub>1</sub>), si ottiene

$$(6) \quad (b'/b)' = Kp^0(a'r + a) + a'/r + (1-a)/r^2;$$

e sostituendo questa nella (5),

$$(7) \quad (a'/r)(Kp^0 r^2 + 1 - a^{-1}) + (1-a)/r^2 = aKp^0.$$

Qui la parentesi a fattore di  $a'/r$  è nulla per la (3), per cui si resta con  $(1-a)/r^2 = aKp^0$ , che è la (3) stessa; ovvero, per  $b' = 0$  la (1<sub>1</sub>) implica che la (1<sub>2=3</sub>) sia un'identità, *qed*. Questo, si noti, è stato ottenuto ignorando che se  $b'$  è *identicamente* nullo, anche  $(b'/b)'$  lo è.

Vi è tuttavia una difficoltà. Poiché  $\mu^0_0 > 0$ , la (4) implica  $p^0 < 0$ , e questo appare in conflitto con ogni ragionevole legge di stato del fluido in oggetto (a meno di non pensare ad un universo sostanzialmente vuoto, con  $\mu^0_0$  e  $p^0$  entrambe nulle). Per questa ragione, Einstein modifica le equazioni del campo introducendovi la costante cosmologica  $C$  (di dimensione lunghezza<sup>-2</sup>) secondo la (9.3.3, 3). Ciò comporta che a 2° membro della (1<sub>1</sub>) e della (1<sub>2=3</sub>) compaia un addendo  $-C$ , e a 2° membro della (1<sub>4</sub>) un addendo  $+C$ . Nel seguito, diremo (1'<sub>1</sub>, 1'<sub>2=3</sub>, 1'<sub>4</sub>) le (1<sub>1</sub>, 1<sub>2=3</sub>, 1<sub>4</sub>) così modificate. Allora la (3) si modifica nella

$$(3') \quad a^{-1} = 1 + r^2(Kp^0 - C),$$

e la (4) nella

$$(4') \quad C = (K/2)(3p^0 + \mu^0_0 c^2).$$

Il problema della pressione negativa è così rimosso, perché  $C$  può avere segno positivo nella (4').

Secondo una prima stima dovuta a Hubble,<sup>17</sup> il valore di  $\mu^0$  è dell'ordine di  $10^{-27}\text{kg/m}^3$ ; e poiché  $Kc^2 = 1,87 \cdot 10^{-26}\text{m/kg}$ , ne viene che  $K\mu^0 c^2$  è dell'ordine di  $10^{-53}\text{m}^{-2}$ . Per brevità, qui appresso converrà scrivere questa piccolissima area<sup>-1</sup> costante  $K\mu^0 c^2$  come A. Nel caso di fluido incoerente è  $p^0 = 0$ , e quindi, per la (4'),  $C = A/2$ . Una situazione alternativa, che tuttavia non porta ad un risultato molto diverso, è quella in cui il fluido perfetto si immagini sostituito da un bagno omogeneo di radiazione elettromagnetica con densità di energia pari a  $\mu^0 c^2$ ; allora la pressione di radiazione è semplicemente  $p^0 = \mu^0 c^2/3$ , e quindi, sempre per la (4'),  $C = (K/2)(\mu^0 c^2 + \mu^0 c^2) \equiv A$ , doppia della precedente.

La condizione di solenoidalità (2) non varia con l'introduzione della costante cosmologica, ed Einstein vi soddisfa ponendo ancora, come naturale,  $b' = 0$ . Il problema della ridondanza della  $(1_{2=3})$  sotto questa condizione è identico a quello del precedente caso  $C = 0$ , bastando allo scopo sostituire nelle  $(1_1, 1_{2=3})$   $Kp^0$  con  $Kp^0 - C$ : quindi la  $(1_1)$  implica ancora la  $(1_{2=3})$  per  $b' = 0$ , come nel caso senza costante cosmologica.

In base alla (3'), il coefficiente  $g_{rr}$  di  $dr^2$  nella metrica può scriversi  $1/(1-r^2/R^2)$ , come nella metrica di Schwarzschild interna (9.5.1, 19), ponendo  $R =: (C - Kp^0)^{-1/2}$  (e avendo assunto  $C - Kp^0 > 0$ ); ovvero, eliminando C mediante la (4'), ponendo

$$(8) \quad R = [(K/2)(p^0 + \mu^0 c^2)]^{-1/2}.$$

Qui una delle costanti  $p^0$ ,  $\mu^0$  può sempre pensarsi eliminata in favore dell'altra mediante la legge di stato. Per il suo significato (cfr. ancora la S.sez. 9.5.1), la lunghezza costante R può interpretarsi come "raggio dell'universo", nel senso che  $g_{rr}$  tende a  $+\infty$  per  $r \rightarrow R^-$  (e a  $-\infty$  per  $r \rightarrow R^+$ , ma questa seconda possibilità non interessa). Nel modello a fluido incoerente, la (8) diventa

$$(8') \quad R = (A/2)^{-1/2};$$

e in quello a pressione di radiazione,

$$(8'') \quad R = (2A/3)^{-1/2},$$

0,866 volte il precedente. Inserendo, ad esempio nella (8''), il valore approssimato di Hubble di A,  $\approx 10^{-53}\text{m}^{-2}$ , si trova  $R \approx 3 \cdot 10^{26}\text{m}$ , o  $R \approx 3 \cdot 10^{10}\text{a-l}$  (anni-luce; 1 anno-luce =  $9.45 \cdot 10^{15}\text{m}$ ). Questo valore è abbastanza vicino a quello che si stima (su basi diverse) essere oggi, e che come sappiamo è  $\approx 1,4 \cdot 10^{10}\text{a-l}$ . Per r dell'ordine del raggio del sistema solare, diciamo  $r \approx 10^{12}\text{m}$ , il rapporto  $r^2/R^2$  risulta  $\approx 10^{-28}$ , e questo significa che la metrica coincide largamente con quella della relatività speciale prendendo l'origine nel sole e restando all'interno del sistema solare (e se il valore (costante e  $< 0$ ) di  $g_{tt}$  è scelto uguale a  $-c^2$ , come è sempre possibile mediante un conveniente rescaling di t.)

<sup>17</sup> E. Hubble, *Astrophys. Journ.* **79**, 8 (1934).

Riferita a coordinate spaziali geografiche  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ , la metrica dell'universo einsteiniano è dunque

$$(9) \quad ds^2 = dr^2(1-r^2/R^2)^{-1} + r^2 d\Omega^2 - c^2 dt^2,$$

(dove  $d\Omega^2$  sta al solito per  $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ), con coefficienti diagonali  $g_{rr} = (1-r^2/R^2)^{-1}$ ,  $g_{\theta\theta} = r^2$ ,  $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta$ ,  $g_{tt} = -c^2$ , e coefficienti non-diagonali tutti nulli. La radice quadrata del determinante  $\Delta$  della sua parte spaziale è  $r^2 \sin\theta (1-r^2/R^2)^{-1/2}$ ; e questo permette di calcolare il volume  $V$  del “cosmo di raggio  $R$ ” secondo la

$$(10) \quad V = V(R) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 (1-r^2/R^2)^{-1/2} dr = 4\pi \int_0^R r^2 (1-r^2/R^2)^{-1/2} dr = \pi^2 R^3,$$

dove si è fatto uso della  $\int_0^1 \xi^2 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi = \pi/4$ . Similmente si può calcolare la lunghezza  $L$  del più lungo percorso geodetico in quel cosmo (lungo un diametro), che vale

$$(11) \quad L = L(R) = 2 \int_0^R \sqrt{g_{rr}} dr = \pi R,$$

perché  $\int_0^1 (1-\xi^2)^{-1/2} d\xi = \pi/2$ . Si noti infine che la (10) dà un valore di  $V(R)$  in eccesso di un fattore  $3\pi/4 = 2,356$  sul corrispondente valore euclideo  $4\pi R^3/3$ ; e similmente, che la (11) dà un valore di  $L(R)$  in eccesso di un fattore  $\pi/2 = 1,571$  sul valore euclideo  $2R$ .

Una interpretazione alternativa, ma equivalente, del modello cosmologico omogeneo-isotropo-statico di Einstein che abbiamo appena descritto è la seguente. Si introducano quattro nuove coordinate  $y^{1 \leq i \leq 4}$  legate alle tre precedenti coordinate spaziali geografiche  $(r, \theta, \phi)$  dalle

$$(12) \quad y^1 =: r \sin\theta \cos\phi, \quad y^2 =: r \sin\theta \sin\phi, \quad y^3 =: r \cos\theta, \quad y^4 =: R(1-r^2/R^2)^{1/2}.$$

Evidentemente, la somma  $\sum_{i=1}^4 (y^i)^2 = R^2$ . Le  $y^{1 \leq i \leq 4}$  possono dunque interpretarsi come coordinate cartesiane ortogonali dei punti di una 3-sfera<sup>18</sup> incastonata (embedded) nello spazio euclideo 4-dim ( $y^{1 \leq i \leq 4}$ ), con centro nell'origine  $y^{1 \leq i \leq 4} = 0$  e raggio  $R$ . Un calcolo senza difficoltà mostra che la somma  $\sum_{i=1}^4 (dy^i)^2$  è uguale a  $dr^2(1-r^2/R^2)^{-1} + r^2 d\Omega^2$ , cioè alla parte spaziale ( $dt = 0$ ) della metrica (9).<sup>19</sup> Riferiamo ora la 3-sfera  $\sum_{i=1}^4 (y^i)^2 = R^2$  a coordinate ipersferiche (due colatitudini  $\psi$  e  $\theta$  ed una longitudine  $\phi$  sotto le  $0 \leq \psi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ). Questo equivale a porre  $r = R \sin\psi$  nelle (12) e nei differenziali  $dy^{1 \leq i \leq 4}$ . La parte spaziale  $d\sigma^2$  della metrica (9) si esprime allora, usando le coordinate ipersferiche, come

$$(13) \quad d\sigma^2 = R^2 (d\psi^2 + \sin^2\psi d\theta^2 + \sin^2\psi \sin^2\theta d\phi^2).$$

I coefficienti non nulli di questa metrica spaziale, che denoteremo con  $g^*_{\iota\kappa}$  ( $\iota, \kappa = \psi, \theta, \phi$ ), sono  $g^*_{\psi\psi} = R^2$ ,  $g^*_{\theta\theta} = R^2 \sin^2\psi$ ,  $g^*_{\phi\phi} = R^2 \sin^2\psi \sin^2\theta$ ; e la radice del loro determinante, che denoteremo

<sup>18</sup> Questa 3-sfera non è una palla 3-dim, ma una ipersuperficie 3-dim di equazione  $\sum_{i=1}^4 (y^i)^2 = R^2$  incastonata nello spazio euclideo 4-dim.

<sup>19</sup> Risulta:  $dy^1 = \cos\theta dr - r \sin\theta d\theta$ ,  $dy^2 = \sin\theta \cos\phi dr + r(\cos\theta \cos\phi d\theta - \sin\theta \sin\phi d\phi)$ ,  $dy^3 = \sin\theta \sin\phi dr + r(\cos\theta \sin\phi d\theta + \sin\theta \cos\phi d\phi)$ ,  $dy^4 = (-r/R)(1-r^2/R^2)^{-1/2} dr$ . L'asserto del testo si verifica subito quadrando e sommando queste relazioni.

$\sqrt{\Delta^*}$ , è  $R^3 \sin^2 \psi \sin \theta$ . Si può così ancora valutare il volume  $V^*(R)$  di questo modello di cosmo di raggio  $R$ , che risulta

$$(14) \quad V^* = V^*(R) = R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \psi d\psi = 2\pi^2 R^3,$$

doppio di quello dato dalla (10). Similmente, il più lungo percorso geodetico sulla 3-sfera è un cerchio massimo; usando ad esempio l'equatore  $\psi = \theta = \pi/2$  per valutarne la lunghezza  $L^*$ , abbiamo

$$(15) \quad L^* = L^*(R) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g^*_{\phi\phi}} d\phi = 2\pi R$$

(perché  $g^*_{\phi\phi} = R^2$  lungo l'equatore), ancora doppio di quello dato dalla (11). Questi risultati non sorprendono, perché il secondo modello di cosmo (di metrica spaziale (13), o **modello einsteiniano sferico**), corrisponde al primo (di metrica spaziale  $dr^2(1-r^2/R^2)^{-1} + r^2 d\Omega^2$ , o **modello einsteiniano ellittico**), se nel secondo si identificano i punti antipodali. Infatti nel modello ellittico  $r$  varia da 0 a  $R$ , mentre in quello sferico  $r = R \sin \psi$  varia da 0 a  $R$  mentre  $\psi$  passa da 0 a  $\pi/2$ , e di nuovo da  $R$  a 0 mentre  $\psi$  passa da  $\pi/2$  a  $\pi$ . In questo senso, il modello ellittico può anche pensarsi come modello “emisferico” §.

§2. *Il modello cosmologico di de Sitter.* Nonostante i parziali successi, il modello cosmologico di Einstein non poteva affermarsi, e infatti esso ha ormai (soltanto, seppur grande) importanza storica. La ragione è nel fatto che il modello non spiega, come a priori non poteva spiegare, l'apparente espansione dell'universo che era stata frattanto scoperta (Hubble<sup>20</sup>). Il modello einsteiniano nega la possibilità di osservare un redshift nella radiazione proveniente da corpi celesti lontani perché (vedi la (9)) la lunghezza d'onda di un fotone proveniente da un punto con coordinata radiale  $r = \underline{r}$  indipendente da  $t$  è la stessa alla sua emissione e all'arrivo nell'origine. Infine è stato anche possibile dimostrare che la soluzione di Einstein, benché statica, è instabile: basta cioè variare di poco la quantità di materia o radiazione per dare origine ad una sua evoluzione.

Molto presto dopo Einstein, l'astronomo olandese de Sitter (Vilhelm, 1872-1934) riprese le equazioni di campo (1') con costante cosmologica nei secondi membri, ma soddisfacendo la condizione (2) col porre

$$(16) \quad p^0 + \mu^0_0 c^2 = 0,$$

in modo da lasciare  $b$  libera di variare con  $r$ .<sup>21</sup> In pratica, ogni ragionevole legge di stato del fluido presuppone che la (16) equivalga a  $p^0 = 0$  e  $\mu^0_0 = 0$ ; e quindi il modello di de Sitter presuppone un cosmo senza né pressione né (densità di) materia/radiazione. Questo è un inconveniente grave; ma de Sitter approfondisce ugualmente le conseguenze della sua scelta, pervenendo a risultati interessanti, in certo senso complementari a quelli di Einstein.

<sup>20</sup> E. Hubble, Proc. Nat. Acad. **15**, 168 (1929); E. Hubble & M. Humason, Astrophys. Journ. **74**, 43 (1931)

<sup>21</sup> W. De Sitter, Amst. Proc. **19**, 1217 (1917); **20**, 229 (1917).

Innanzitutto, sommando le (1'1,1'4) e tenendo conto della (16) si trova  $(ab)' = 0$ ; quindi si può sempre supporre  $ab = 1$  con il solito conveniente rescaling di  $t$ . Lasciamo questa volta al lettore di verificare la ridondanza della (1'2=3) sotto la  $(ab)' = 0$ . Assumendo poi  $b$  come incognita indipendente, dalla (1'4) segue

$$(17) \quad b = b(r) = 1 - r^2 C/3$$

se si richiede che  $b$  non diverga per  $r \rightarrow 0$ . Sotto la condizione (°)  $C > 0$ , si può allora scrivere la metrica nella forma

$$(18) \quad ds^2 = (1-r^2/Q^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - (1-r^2/Q^2) c^2 dt^2,$$

avendo posto  $Q^2 =: 3/C$ . Confrontata con la metrica einsteiniana (9), la (18) ne differisce per la sostituzione di  $Q$  a  $R$  in  $g_{rr}$ , e di  $-c^2(1-r^2/Q^2)$  a  $-c^2$  in  $g_{tt}$ . Quindi sotto la (°) le parti spaziali delle due metriche si equivalgono con lo scambio  $R \leftrightarrow Q$ ; ma adesso è  $b = 1 - r^2/Q^2$ , contro la  $b = \text{cost} = 1$  del caso einsteiniano, e questo equivale alla comparsa di un potenziale gravitazionale scalare  $\chi = -r^2 c^2 / (2Q^2)$ . (Il potenziale vettore è invece nullo nei due casi, attesa l'ortogonalità di entrambe le metriche). Come la metrica (9) per  $r^2/R^2 \ll 1$ , la (18) si riduce infine a quella della relatività speciale per  $r^2/Q^2 \ll 1$ .

Il potenziale scalare  $\chi$  può essere eliminato (cfr. S.sez. 9.4.1, §2) mediante una conveniente trasformazione di coordinate (fermo restando l'annullarsi del potenziale vettore). In effetti, ponendo

$$(19_1) \quad r^* =: r(1-r^2/Q^2)^{-1/2} \exp(-ct/Q),$$

$$(19_4) \quad t^* =: t + (1/2c)Q \ln(1-r^2/Q^2),$$

e conservando inalterate la  $\theta$  e la  $\phi$ , otteniamo

$$(20) \quad ds^2 = \exp(2ct^*/Q) dr^{*2} + r^{*2} d\Omega^2 - c^2 dt^{*2};$$

o anche, equivalentemente,

$$(20\text{bis}) \quad ds^2 = \exp(2ct^*/Q) (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) - c^2 dt^{*2},$$

ove  $\xi, \eta, \zeta$  sono definite nel modo usuale in termini di  $r^*, \theta, \phi$ , cioè dalle  $\xi =: r^* \sin\theta \cos\phi$ ,  $\eta =: r^* \sin\theta \sin\phi$ ,  $\zeta =: r^* \cos\theta$ . Con queste coordinate cartesiane ortogonali  $(\xi, \eta, \zeta)$ , i tre coefficienti non nulli della parte spaziale della (20bis) sono uguali a  $\exp(2ct^*/Q)$ . Si noti anche che  $r = 0$  equivale a  $r^* = 0$ , perché

$$(21) \quad r^2 = r^{*2} [\exp(-2ct/Q) + r^2/Q^2]^{-1},$$

e quindi  $r^* = 0$  implica  $r = 0$  (come è vero il contrario secondo la (19<sub>1</sub>)). Inoltre  $t = t^*$  nell'origine  $r = r^* = 0$ . L'inversione delle (19), cioè l'espressione di  $(r^2, t)$  in termini di  $(r^{*2}, t^*)$ , pone qualche problema; tuttavia, lo jacobiano  $\det\{\partial(r^{*2}, t^*)/\partial(r^2, t)\}$  vale  $(1-r^2/Q^2)^{-1} \exp(-2ct/Q)$ , e quindi è finito e  $\neq 0$  per  $r^2/Q^2 \neq 1$  (e  $|t|$  finito). Le (19) sono dunque invertibili sotto queste condizioni.



Poiché il potenziale scalare è sparito, riferendoci alla metrica (20) ci si aspetta che un fotone viaggi secondo una legge d'inerzia "formale", cioè con traiettoria rettilinea e celerità costante  $c$  nel riferimento  $(r^*, t^*)$ . Il secondo punto è banale, e segue subito facendo  $ds^2 = 0$  nella (20): in effetti, si ottiene

$$(22) \quad d\sigma^2/dt^{*2} = c^2,$$

ove  $d\sigma^2$  è la parte spaziale della metrica (20). Quanto al primo punto, se  $\lambda$  è il solito generico parametro lungo la geodetica luminale, devono essere soddisfatte le equazioni di EL

$$(23) \quad d_\lambda(g_{\iota\kappa}d_\lambda\xi^\kappa) = (1/2)\partial g_{\mu\nu}/\partial\xi^1 d_\lambda\xi^\mu d_\lambda\xi^\nu,$$

dove  $\iota, \kappa, \mu, \nu = 1 \div 3$ ,  $\xi^1 = \xi$ , ecc., e  $g_{\iota\kappa} = \exp(2ct^*/Q)\delta_{\iota\kappa}$ . In forza di quest'ultima, i secondi membri delle (23) sono nulli  $\forall \iota$ , e quindi le  $g_{\iota\kappa}d_\lambda\xi^\kappa$  sono uguali a certe costanti (rispetto a  $\lambda$ )  $\alpha_\iota$  non tutte nulle. Se ad esempio  $\alpha_1 \neq 0$ , si ha così  $d_\lambda\xi^1/d_\lambda\xi^1 = d\xi^1/d\xi^1 = \alpha_\iota/\alpha_1 \forall \iota$ . Questa è precisamente la tesi che volevamo dimostrare.

Se in particolare il fotone si muove lungo l'asse  $\xi$ , la (22) diventa

$$(22') \quad d\xi/dt^* = \pm c \exp(-ct^*/Q),$$

con il segno  $+$  o il  $-$  a seconda del verso del moto. Si vede così che se il fotone parte da  $\xi = \xi_0 > 0$  a  $t^* = 0$  e viaggia verso l'origine, a  $t^* > 0$  è in  $\xi = \xi_0 + Q[\exp(-ct^*/Q) - 1]$ . Quindi esso può raggiungere l'origine soltanto se  $\xi_0 < Q$ . Lo stesso vale rovesciando il segno di  $\xi_0$ , e si conclude che un osservatore fermo nell'origine non può percepire nulla di quanto avviene esternamente al segmento  $[-Q, Q]$ . Più in generale, l'osservatore non può percepire nulla di quanto avviene al di là della sfera-orizzonte  $r^* = Q$ . Questo fatto può vedersi come segno di una "sindrome da buco nero". Le stesse argomentazioni che portano a dimostrare la rettilinearità della traiettoria del fotone valgono poi per la traiettoria di un qualunque punto test massivo libero, sebbene la sua celerità non possa essere, in generale, costante e uguale a  $c$ . (Se tuttavia  $d_\lambda\xi^1 = 0 \forall \iota$  per un certo valore di  $\lambda$ , lo stesso vale per ogni  $\lambda$  perché le  $\alpha_\iota$  sono tutte nulle e tali restano non dipendendo da  $\lambda$ ; vale a dire, il punto in oggetto è in questo caso fermo.)

Sempre riferendoci alla metrica (20), consideriamo adesso il punto spaziale  $P$  con coordinate  $(r^* = \underline{r}^*, \theta = \underline{\theta}, \phi = \underline{\phi})$ , e calcoliamone la distanza  $\delta$  dall'origine, misurata con le usuali barrette rigide poste una dietro l'altra lungo il raggio  $\theta = \underline{\theta}, \phi = \underline{\phi}$ , al generico  $t^*$ . Si ha evidentemente

$$(24) \quad \delta = \delta(\underline{r}^*) = \int_{r=0}^{r^*} \sqrt{(g_{rr})} dr = \underline{r}^* \exp(ct^*/Q).$$

Per la (22), un fotone che si sposta lungo un raggio  $\theta = \text{cost}, \phi = \text{cost}$  viaggia soddisfacendo la legge di moto

$$(22'') \quad dr^*/dt^* = \pm c \exp(-ct^*/Q),$$

con il + o il – a seconda che si allontanano dall'origine o vi si avvicinano. Quindi la sua “velocità” assoluta  $|dr^*/dt^*|$  diminuisce al crescere di  $t^*$ .

Siano ora  $t_1^*$  e  $t_2^*$  il tempo di emissione di un fotone dal punto P verso l'origine e rispettivamente del suo arrivo nell'origine stessa. Si vede allora facilmente che, in forza della (22''), deve essere

$$(25) \quad \underline{r}^* = Q[\exp(-ct_1^*/Q) - \exp(-ct_2^*/Q)].$$

Differenziando questa ad  $\underline{r}^* = \text{costante}$ , abbiamo

$$(26) \quad dt_2^* \exp(-ct_2^*/Q) = dt_1^* \exp(-ct_1^*/Q).$$

D'altra parte, il rapporto  $dt_2^*/dt_1^*$  è anche il rapporto tra la lunghezza d'onda  $\lambda_2$  del fotone in arrivo nell'origine e la lunghezza d'onda  $\lambda_1$  che aveva alla sua partenza da P, supposte entrambe abbastanza piccole; e questo significa che l'osservatore nell'origine misura un redshift (positivo)  $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1 = \exp(c(t_2^* - t_1^*)/Q) - 1$ . Ma al tempo di ricezione  $t_2^*$  la distanza di P dall'origine è, giuste le (24) e (25),

$$(27) \quad \delta = \underline{r}^* \exp(ct_2^*/Q) = Q[\exp(c(t_2^* - t_1^*)/Q) - 1] = Q(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1,$$

per cui il redshift risulta

$$(28) \quad (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1 = \delta/Q.$$

Questa è proprio una legge di Hubble con costante  $H = 1/Q > 0$ . Naturalmente il fatto che una galassia lontana abbia  $r^*$  costante rispetto a  $t^*$ , cioè sia “ferma” (o meglio “radialmente ferma”) nel riferimento  $(r^*, \theta, \phi, t^*)$ , è un'ipotesi fisica importante sulla quale riposa il risultato ottenuto, e che è stata criticamente esaminata da Weyl parecchi anni più tardi<sup>22</sup>. Essa è tuttavia ragionevole. Dalle misure del redshift a distanza  $\delta$  (valutata indipendentemente) si trae una stima di Q dell'ordine di  $\approx 10^9$  a-l. Poiché Q è anche il raggio del cosmo di de Sitter (è il raggio r al quale  $g_{rr}$  diverge, vedi la (18)), esso risulta di circa un ordine di grandezza più piccolo del raggio einsteiniano R. (Partendo invece dalle definizioni  $R^{-2} = C - Kp^0$  e  $Q^{-2} = C/3$ , si trae  $Q^2/R^2 = 3(1 - Kp^0/C)$ .)

Ricordiamo che lo spazio cosmico di Einstein si poteva interpretare come la 3-sfera di equazione  $\sum_{i=1}^4 (y^i)^2 = R^2$  embedded nello spazio euclideo 4-dim di coordinate  $(y^{1 \leq i \leq 4})$  date dalle (12). Qualcosa di simile è possibile anche per lo spazio-tempo di de Sitter. Precisamente, si verifica senza difficoltà che la metrica (20bis) si può scrivere  $ds^2 = \sum_{k=0}^4 (dz^k)^2$  se si definiscono le  $z^{0 \leq k \leq 4}$  secondo le

$$(29_0) \quad z^0 =: Q[\text{Ch}(ct^*/Q) - r^{*2} \exp(ct^*/Q)/(2Q^2)],$$

$$(29_{1,2,3}) \quad (z^1, z^2, z^3) =: (\xi, \eta, \zeta) \exp(ct^*/Q),$$

<sup>22</sup> H. Weyl, Phys. ZS. **24**, 230 (1923); Phil. Magaz. **9**, 936 (1930). La costanza di  $r'$  si nomina talvolta come “ipotesi di Weyl”.

$$(29_4) \quad z^4 =: iQ[\text{Sh}(ct^*/Q) + r^{*2}\exp(ct^*/Q)/(2Q^2)].$$

Un'altra semplice verifica mostra che  $\sum_{k=0}^4 (z^k)^2 = Q^2$ . Dunque lo spazio-tempo di de Sitter può interpretarsi come una 4-(pseudo)sfera di raggio  $Q$  e centro nell'origine, embedded nello spazio (pseudo)euclideo 5-dim di coordinate ortogonali ( $z^{0 \leq k \leq 4}$ ), intendendosi che la coordinata immaginaria sia la  $z^4$  (giusta la (29<sub>4</sub>)). §

Concludendo, le risposte al problema cosmologico date da Einstein e da de Sitter hanno meriti e demeriti speculari: la prima permette l'esistenza di (densità di) materia/radiazione e pressione legate da una legge di stato, ma *non giustifica il redshift*; la seconda implica un cosmo praticamente vuoto, *ma giustifica il redshift*.

### F.3) IL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD

Gli aspetti insoddisfacenti dei modelli cosmologici di Einstein e di de Sitter, fondati entrambi sulle metriche di Schwarzschild, hanno indotto un importante ripensamento sulla scelta della metrica da adottare per la varietà spazio-tempo alla luce del principio cosmologico ( $\equiv$  "ad ogni tempo, lo spazio cosmico appare lo stesso da qualunque posizione lo si osservi, e tutte le direzioni uscenti da un suo punto qualsiasi appaiono equivalenti"<sup>23</sup>). Innanzitutto, si pone il problema di definire in modo fisicamente consistente una coordinata temporale  $t$ , cioè un continuo (monotono) di ipersuperfici spaziali 3-dim non intersecantisi, su ciascuna delle quali gli orologi del generico continuo 3-dim di orologi (identici, normali ed ortocroni) segna lo stesso tempo  $t$  ( $\equiv$  tempo proprio degli orologi). Quest'ultimo continuo, fin qui arbitrario, si supporrà ora *in quiete* rispetto al fluido materiale (o di radiazione) di cui lo spazio cosmico è riempito. Diremo un **riferimento fondamentale** un riferimento ( $x^{1 \leq i \leq 4}$ ,  $x^4 \equiv ct$ ) soddisfacente a questa condizione di "co-movimento" con il detto fluido, e **tempo cosmico** l'associato tempo  $t$ . Potremo sempre, inoltre, pensare le linee di universo ( $x^1 = \text{cost}^1$ ) degli orologi di un tale riferimento fondamentale, assimilati a punti materiali, come ortogonali alla ipersuperfici 3-dim  $x^4 = \text{cost}$ , cioè presupporre una metrica tempo-ortogonale ( $\equiv$  con  $g_{i4} = 0$ ).

È allora facile capire che, secondo il principio cosmologico, i coefficienti  $g_{ik}$  della parte spaziale della metrica,  $d\sigma^2 = g_{ik}dx^i dx^k$ , possano dipendere da  $x^4$  al più attraverso un comune fattore  $> 0$   $f^2(x^4)$ , diciamo nella forma  $g_{ik}(x^{1 \leq i \leq 4}) = f^2(x^4)\zeta_{ik}(x^{1 \leq i \leq 3})$ . In questo modo un triangolo infinitesimo avente per vertici tre distinti orologi sulla stessa  $x^4 = \text{cost}$  resta simile a se stesso al

<sup>23</sup> Un semplice ragionamento prova che se l'universo appare isotropo ad un osservatore posto in un qualunque suo punto, allora deve essere omogeneo. Con ogni evidenza, l'implicazione inversa non vale in generale.

variare di  $x^4$ .<sup>24</sup> Con la solita corrispondenza di indici ( $r \equiv (1)$ ,  $(\theta) \equiv (2)$ ,  $(\phi) \equiv (3)$ ) rispetto al riferimento geografico  $(r, \theta, \phi)$  con origine  $r = 0$  (arbitraria per la supposta omogeneità), la metrica in un riferimento fondamentale è allora

$$(1) \quad ds^2 = d\sigma^2 - (dx^4)^2 \equiv f^2 \zeta_{1k} dx^1 dx^k - (dx^4)^2,$$

dove gli  $\zeta_{i=k}$  sono i  $2^i$  membri delle prime tre (9.5.1, 3), cioè

$$(2) \quad \zeta_{11} = a = a(r), \quad \zeta_{22} = r^2, \quad \zeta_{33} = r^2 \sin^2 \theta,$$

mentre  $\zeta_{i \neq k} \equiv 0$ .

Al solito supponendo  $r > 0$  e  $\sin \theta \neq 0$ , al tensore metrico spaziale  $\zeta_{1k}$  corrispondono i sette Chr2 non nulli dati dai  $2^i$  membri delle (9.5.1, 4) – non contando i due con indici (4), il quarto e l'ultimo. Possiamo così determinare le componenti covarianti del corrispondente tensore di Ricci spaziale (che denoteremo ancora con  $\rho_{(2)}$  per evitare di introdurre nuovi simboli):

$$(3) \quad \rho_{11} = -d_r a / (ar), \quad \rho_{22} = 1/a - 1 - (rd_r a) / (2a^2), \quad \rho_{33} = \rho_{22} \sin^2 \theta,$$

oltre alle tre  $\rho_{i \neq k} \equiv 0$ . Ricordiamo che qui  $a$  è adimensionale e  $r$  ha dimensione lunghezza, per cui il fattore  $f^2$  nella (1) è adimensionale.

Richiederemo adesso che il 4-tensore di Riemann 3-dim corrispondente alla metrica (2) (che denoteremo ancora con  $\rho_{(4)}$ ) sia massimamente sfero- (o pseudosfero-) simmetrico, cioè che

$$(4) \quad \rho_{1k\mu\nu} = K(\zeta_{1k}\zeta_{\mu\nu} - \zeta_{1\nu}\zeta_{k\mu}),$$

dove  $K$  ( $K$  come Krümmung) è una costante universale. È immediato verificare che  $K$  deve avere dimensione  $L^{-2}$ . Allora il corrispondente tensore di Ricci è

$$(5) \quad \rho_{1\nu} = \zeta^{k\mu} \rho_{1k\mu\nu} = K(\delta_{1\nu}^{\mu} \zeta_{\mu\nu} - 3\zeta_{1\nu}) = -2K\zeta_{1\nu},$$

in accordo con la diagonalità dei due 2-tensori  $\rho_{1\nu}$  e  $\zeta_{1\nu}$ . Ma  $\rho_{1\nu}$  è già dato dalle (3), e quindi si ricavano due equazioni indipendenti eguagliandone le versioni (3) e (5), le equazioni di indici (11) e (22) (la terza, di indici (33), è banalmente equivalente a quella di indici (22) in forza della condizione  $\sin \theta \neq 0$ ). Queste due equazioni sono la

$$(6_{11}) \quad d_r a / (ar) = 2Ka,$$

e la

$$(6_{22}) \quad 1 + rd_r a / (2a^2) - 1/a = 2Kr^2.$$

La (6<sub>11</sub>) si integra a vista, e dà

$$(7) \quad a = a(r) = (A - Kr^2)^{-1},$$

<sup>24</sup> Secondo una addizionale ipotesi topologica (Weyl), le linee di universo (degli orologi) di un riferimento fondamentale si assumono formare una congruenza di curve divergenti da un punto con  $t < 0$  (finito o infinito) e convergenti verso un punto con  $t > 0$  (finito o infinito). Poiché le ipersuperficie  $t = \text{cost}$  sono state assunte non intersecantisi, del pari non intersecantisi devono essere le curve della detta congruenza, salvo possibilmente in un punto singolare nel passato e/o nel futuro. A queste condizioni, per ogni punto non singolare dello spazio-tempo passa una e una sola linea d'universo.

dove A è una costante di integrazione. Sostituita nella (6<sub>22</sub>), la (7) dà poi  $A = 1$ , e quindi

$$(7') \quad a(r) = (1 - Kr^2)^{-1}.$$

In definitiva, sotto l'addizionale richiesta (4), i coefficienti diagonali  $\zeta_{\kappa\kappa}$  sono

$$(8) \quad \zeta_{rr} = (1 - Kr^2)^{-1}; \quad \zeta_{\theta\theta} = r^2; \quad \zeta_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta;$$

quindi la metrica  $ds^2$  associata è

$$(9) \quad ds^2 = f^2(t)[(1 - Kr^2)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2] - c^2dt^2,$$

dove al solito  $d\Omega^2$  sta per  $d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$  e il fattore adimensionale  $f^2(t)$  resta per il momento indeterminato. La (9) si dice **metrica di Friedmann-Robertson-Walker** (FRW),<sup>25</sup> ed è punto di partenza per lo sviluppo del cosiddetto **modello cosmologico standard**.<sup>26</sup>

Attesa la costanza di  $K$ , mediante una semplice sostituzione si può dare alla metrica (8) una particolare forma "normalizzata". Questa si ottiene in modo naturale soltanto se  $K \neq 0$ ; se d'altra parte  $K = 0$ , le (8) danno la metrica euclidea in coordinate geografiche, e la forma normalizzata si ricava in modo diretto. Avendo dunque assunto  $K \neq 0$ , si ponga  $k =: K/|K| = \pm 1$  e  $r^* =: r|K|^{1/2} =_{\text{dim}} L$ . Allora, secondo le (8),

$$(10) \quad \zeta_{\kappa\kappa} dx^\kappa dx^\kappa = [(1 - kr^{*2})^{-1} dr^{*2} + r^{*2} d\Omega^2] / |K|,$$

dove il contenuto delle [ ] è evidentemente adimensionale. La metrica di FRW (9) diventa così

$$(11) \quad ds^2 = \alpha^2 [(1 - kr^{*2})^{-1} dr^{*2} + r^{*2} d\Omega^2] - c^2 dt^2,$$

avendo posto  $\alpha^2 =: f^2/|K| =_{\text{dim}} L^2$ . D'altra parte, la (11) si conserva valida anche nel caso  $K = 0$  pur di porre direttamente  $k = 0$ ,  $r^* = r$ , e  $\alpha^2 = f^2$  (tenendo presente che con queste diverse definizioni di  $k$ ,  $r^*$  e  $\alpha^2$  il contenuto delle [ ] nella (11) acquista dimensione  $L^2$  e  $\alpha^2$  diventa adimensionale). In ogni caso, cioè per ogni valore di  $K$  (costante), la (11) si dice **metrica di FRW normalizzata** e  $\alpha$  suo **fattore di scala**. Evidentemente, questo fattore di scala può sempre considerarsi  $> 0$ . Usualmente, gli asterischi nella (11) si sottintendono, come si è già fatto in casi analoghi.

Sulla base della (11) (con asterischi sottintesi), si calcola immediatamente la distanza dall'origine, al tempo  $t$ , del punto di coordinate  $(r, \theta, \phi)$ . Poiché dipende al più da  $(r, t)$  per l'assunta isotropia, questa distanza sarà denotata con  $d(r, t)$ . Risulta allora:

$$(12) \quad d(r, t) = \int_0^r \sqrt{(g_{11}(r', t))} dr' = \alpha(t) \int_0^r (1 - kr'^2)^{-1/2} dr'.$$

L'integrale a 3° membro della (12) vale  $\sin^{-1}r$  se  $k = 1$ ,  $\text{Sh}^{-1}r$  se  $k = -1$  e  $r$  se  $k = 0$  (caso euclideo). Quindi  $r$  è un seno (precisamente, il  $\sin[d(r, t)/\alpha(t)]$  nel primo caso, un seno iperbolico (il  $\text{Sh}[d(r, t)/\alpha(t)]$ ) nel secondo caso, e semplicemente  $d(r, t)/\alpha(t)$  nel terzo caso. È allora naturale

<sup>25</sup> A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922), Z. Phys. **21**, 326 (1924); H. Robertson, Astrophys. Journ. **82**, 284 (1935), Astrophys. Journ. **83**, 187, 257 (1936); A. Walker, Pro. London Math. Soc. (2) **42**, 90 (1936).

<sup>26</sup> Si dimostra anche che la (9) è l'unica metrica (possibili trasformazioni di coordinate a parte) per la quale il cosmo appare omogeneo e isotropo ad osservatori in caduta libera, ad esempio residenti in una generica galassia.

porre  $r =: \sin\psi =_{\text{dim}1}$ , con  $0 \leq \psi \leq \pi$ , se  $k = 1$ ,  $r = \text{Sh}\psi =_{\text{dim}1}$ , con  $0 \leq \psi \leq \infty$ , se  $k = -1$ , e  $r = \psi =_{\text{dim}L}$ , con  $0 \leq \psi \leq \infty$ , se  $k = 0$ . Con queste posizioni, la parte spaziale  $d\sigma^2$  della metrica è data da

$$(13_1) \quad d\sigma^2 = \alpha^2(d\psi^2 + \sin^2\psi d\Omega^2)$$

per  $k = 1$ ,

$$(13_{-1}) \quad d\sigma^2 = \alpha^2(d\psi^2 + \text{Sh}^2\psi d\Omega^2)$$

per  $k = -1$ , e

$$(13_0) \quad d\sigma^2 = \alpha^2(d\psi^2 + \psi^2 d\Omega^2)$$

per  $k = 0$ . Ricordiamo ancora che  $\alpha^2 =_{\text{dim}L^2}$  e  $\psi =_{\text{dim}1}$  nelle (13<sub>1</sub>, 13<sub>-1</sub>), mentre  $\alpha^2 =_{\text{dim}1}$  e  $\psi =_{\text{dim}L}$  nella (13<sub>0</sub>).<sup>27</sup>

Nel caso della (13<sub>1</sub>), lo spazio 3-dim ( $0 \leq \psi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ) può pensarsi embedded nello spazio euclideo 4-dim ( $y^1 =: \alpha \sin\psi \sin\theta \cos\phi$ ,  $y^2 =: \alpha \sin\psi \sin\theta \sin\phi$ ,  $y^3 =: \alpha \sin\psi \cos\theta$ ,  $y^4 =: \alpha \cos\psi$ ) come 3-sfera di equazione  $\sum_{i=1}^4 (y^i)^2 = \alpha^2$ ; allora  $\sum_{i=1}^4 (dy^i)^2$  è uguale al  $d\sigma^2$  della (13<sub>1</sub>). Abbiamo sostanzialmente già incontrato questo embedding in F.2 (modello cosmologico einsteiniano), e quindi sappiamo che il volume della 3-sfera in oggetto è  $2\pi^2\alpha^3$  (v. (F.2, 14)), in eccesso rispetto a quello della 3-sfera classica. Nel caso invece della (13<sub>-1</sub>), le  $y^i$  devono essere prese sostituendo  $(\sin\psi, \cos\psi)$  con  $(\text{Sh}\psi, \text{Ch}\psi)$  nelle precedenti espressioni, e le somme di quadrati vanno intese nel senso di Minkowski, con il quarto termine sottratto anziché sommato. Risulta allora, con  $\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = \varepsilon(3) = 1$ ,  $\varepsilon(4) = -1$ , ( $^\circ$ )  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon(i)(y^i)^2 = -\alpha^2 < 0$ , mentre  $\sum_{i=1}^4 \varepsilon(i)(dy^i)^2$  è uguale al  $d\sigma^2$  della (13<sub>-1</sub>). Lo spazio 3-dim ( $0 \leq \psi \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ) può pensarsi embedded nello spazio minkowskiano ( $y^{1 \leq i \leq 4}$ ) come 3-pseudosfera di equazione ( $^\circ$ ); ovvero, interpretando le  $y^i$  come coordinate euclidee, come 3-iperboloide a due falde di asse  $y^4$ , completamente simmetrico (quindi, in particolare, di rotazione) e di raggio  $\alpha$ . Si intuisce e si prova facilmente che il volume del 3-iperboloide è infinito. Infine il caso della (13<sub>0</sub>) è banale (dà la metrica euclidea in coordinate geografiche  $(r, \theta, \phi)$ ), e il volume dello spazio corrispondente è (ovviamente) ancora infinito.<sup>28</sup>

Tornando alla metrica di FRW normalizzata (11) (con asterischi sottintesi), si possono calcolare i corrispondenti Chr2 non nulli, che sono i già ricordati sette (9.5.1, 4), più altri sei con un indice (4). Li trascriviamo tutti per maggior comodità del lettore:

<sup>27</sup> Volendo, le tre metriche spaziali (13) possono unificarsi nell'unica ( $^\circ$ )  $d\sigma^2 = \alpha^2[d\psi^2 + S^2(\psi)d\Omega^2]$ , avendo posto  $S^2(\psi) =: \sin^2\psi$  per  $\kappa = 1$ ,  $S^2(\psi) =: \text{Sh}^2\psi$  per  $k = -1$ ,  $S^2(\psi) =: \psi^2$  per  $k = 0$ ; e quindi, ( $^*$ )  $ds^2 = \alpha^2[d\psi^2 + S^2(\psi)d\Omega^2] - c^2 dt^2$ . Le notazioni ( $^\circ, ^*$ ) della metrica di FRW possono essere comode per trattare i vari casi in modo unificato.

<sup>28</sup> La radice del determinante della metrica (13<sub>-1</sub>) vale  $\alpha^3 \text{Sh}^2\psi \sin\theta$ , e quindi il volume del 3-iperboloide è uguale a  $\alpha^3 \int \int \int (\text{Sh}^2\psi \sin\theta) d\psi d\theta d\phi$  (dove i limiti sono quelli indicati nel testo principale), e quindi a  $\alpha^3 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\infty \text{Sh}^2\psi d\psi = \infty$ . Similmente, la radice del determinante della metrica (13<sub>0</sub>) è  $\alpha^3 \psi^2 \sin\theta$ , e il suo integrale (su  $\psi, \theta, \phi$ , e tra i limiti indicati nel testo) è  $4\pi\alpha^3 \int_0^\infty \psi^2 d\psi = (4/3)\pi\alpha^3 [\psi^3]_0^\infty = \infty$ .

$$(14) \quad \Gamma_1^1 = (1 - kr^2)^{-1}kr; \quad \Gamma_2^1 = -(1 - kr^2)r; \quad \Gamma_3^1 = \Gamma_2^1 \sin^2\theta; \quad \Gamma_3^2 = -\sin\theta \cos\theta; \quad \Gamma_1^2 = 1/r;$$

$$\Gamma_1^3 = 1/r; \quad \Gamma_2^3 = \text{ctg}\theta; \quad \Gamma_1^4 = \alpha d_4 \alpha (1 - kr^2)^{-1}; \quad \Gamma_2^4 = \alpha d_4 \alpha r^2; \quad \Gamma_3^4 = \Gamma_2^4 \sin^2\theta;$$

$$\Gamma_1^4 = \Gamma_2^4 = \Gamma_3^4 = d_4 \alpha / \alpha.$$

Con la disponibilità di questi Chr2 si potrebbero scrivere subito le equazioni geodetiche, sia materiali che luminali. Tuttavia è più comodo utilizzare le metriche (13) (con  $(\psi) \equiv (1)$ ,  $(\theta) \equiv (2)$ ,  $(\phi) \equiv (3)$  e  $(ct) \equiv (4)$ ) e le (9.5.3, 6<sub>j</sub>) con  $j = 1,2,3$ . Gli stessi argomenti usati nella S.sez. 9.5.3, quando la metrica era la (9.5.3, 9), ci conducono a riaffermare che  $\theta$  e  $\phi$  sono costanti: il moto avviene dunque lungo il raggio di coordinate  $\theta$  e  $\phi$  corrispondenti a queste costanti. Per quanto riguarda la (9.5.3, 6<sub>1</sub>), cioè la  $d_s(g_{1k}d_s x^k) = \partial_1 g_{1k} d_s x^i d_s x^k / 2$ , tenuto conto della costanza di  $\theta$  e  $\phi$  e della  $g_{44} = -1$ , il suo 2° membro si riduce a  $\partial_\psi g_{\psi\psi} (d_s \psi)^2 / 2$ ; ma  $g_{\psi\psi}$  non dipende da  $\psi$ , per cui  $d_s(g_{1k}d_s x^k) = 0$ , o  $g_{\psi\psi} d_s \psi = \alpha^2 d_s \psi = \text{cost}$ . Conoscendo  $\alpha^2$ , la costante si ricava da una condizione iniziale  $d_s \psi(0)$ , cioè  $\text{cost} = \alpha^2(0) d_s \psi(0)$ . Piuttosto che dalla (9.5.3, 6<sub>4</sub>), conviene infine ricavare  $d_s x^4$  dall'integrale primo  $g_{ik} d_s x^i d_s x^k = -1$  (per punti materiali test) o  $g_{ik} d_s x^i d_s x^k = 0$  (per fotoni test), ottenendo  $c^2(d_s t)^2 = 1 + \alpha^2(d_s \psi)^2$ , e rispettivamente  $c^2(d_s t)^2 = \alpha^2(d_s \psi)^2$ . Sempre conoscendo  $\alpha^2(t)$ , il moto è dunque completamente determinato per il dato  $\psi(0)$ .

Si prosegue con il calcolo delle componenti (ad esempio covarianti) del tensore di Ricci. Come si verifica con un po' di pazienza, esse sono:

$$(15) \quad \rho_{11} = -[\alpha d_4^2 \alpha + 2(d_4 \alpha)^2 + 2k](1 - kr^2)^{-1},$$

$$\rho_{22} = \rho_{11} r^2 (1 - kr^2),$$

$$\rho_{33} = \rho_{22} \sin^2 \theta,$$

$$\rho_{44} = 3d_4^2 \alpha / \alpha.$$

(Può convenire, per controllare la correttezza delle (15), far uso della nota formula generale  $\rho_{ik} = \partial_k \Gamma_{ij}^j - \partial_j \Gamma_{ik}^j + \Gamma_{ij}^h \Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hj}^j$ .)

A questo punto possiamo finalmente scrivere le equazioni geometrodinamiche per la metrica di FRW (per maggior generalità, con costante cosmologica), ad esempio in componenti covarianti. Denotando ormai semplicemente con  $\mu$  la densità di massa/radiazione e con  $p$  la pressione, le componenti covarianti del 2-tensore energetico, per il fluido cosmico (immobile in un riferimento fondamentale) sono (cfr. le (9.5.1, 9)):

$$(16) \quad T_{ik} = -(\mu c^2 + p)\delta_{i4}\delta_{k4} + p g_{ik}.$$

Conviene calcolare l'invariante lineare  $T$  di questo tensore piuttosto che quello del tensore di Ricci, utilizzando la (9.3.3, 3'') (con costante cosmologica  $C$ ) piuttosto che la (9.3.3, 3), cioè partendo dalla

$$(17) \quad \rho_{(2)} = -K(T_{(2)} - T g_{(2)}/2) - C g_{(2)};$$

ove  $T = 3p - \mu c^2$ .<sup>29</sup>

Scriviamo quattro equazioni di campo, perché sia  $\rho_{(2)}$  che  $T_{(2)}$  che  $g_{(2)}$  sono diagonali; ma come vedremo tra un momento, soltanto due di queste sono algebricamente indipendenti. Le incognite sono invece tre (le  $\alpha$ ,  $\mu$ ,  $p$ ), e infatti non abbiamo menzionato la legge di stato che lega  $\mu$  e  $p$ . Si constata subito che le tre equazioni di campo spaziali (cioè quelle di indici (11), (22), (33)) sono equivalenti; usando allora quella di indici (22) (ad esempio) e quella di indici (44), abbiamo:

$$(18_{22}) \quad \alpha d_4^2 \alpha + 2(d_4 \alpha)^2 + 2k = [K(\mu c^2 - p)/2 - C]\alpha^2,$$

$$(18_{44} \equiv 19) \quad d_4^2 \alpha = -[K(\mu c^2 + 3p)/2 + C]\alpha/3.$$

La (19) è già risolta rispetto a  $d_4^2 \alpha$ ; quanto alla (18<sub>22</sub>), essa può a sua volta essere risolta rispetto a  $(d_4 \alpha)^2$  sostituendovi il valore (19) di  $d_4^2 \alpha$ . Risulta così:

$$(20) \quad (d_4 \alpha)^2 = (K\mu c^2 - C)\alpha^2/3 - k.$$

Le (19, 20), più la legge di stato, sono le tre equazioni del modello cosmologico standard. Per il momento, assumeremo una legge di stato del semplice tipo  $p = w\mu c^2$ , con  $w = \text{costante}$  nell'intervallo chiuso  $[-1, 1]$ . Eliminando  $p$  con questa legge di stato, la (19) diventa

$$(19') \quad d_4^2 \alpha = -[K\mu c^2(1+3w) - C]\alpha/3,$$

e si è ridotti alle due equazioni (19', 20) nelle due incognite  $\alpha = \alpha(x^4)$  e  $\mu = \mu(x^4)$ .

Le quattro condizioni di solenoidalità su  $T_{(2)}$  possono essere scritte utilizzando ancora le (9.5.1, 12') con la metrica di FRW. Si ottiene così, per le componenti  $i = 1, 2, 3$ ,

$$(21_i) \quad T_i^k{}_{/k} = 0 \Leftrightarrow \partial_i p = 0.$$

Queste sono automaticamente soddisfatte  $\forall i$ , perché  $p$  è ora al più funzione di  $x^4$ . Quanto alla componente  $i = 4$ , risulta

$$(21_4 \equiv 22) \quad T_4^k{}_{/k} = 0 \Leftrightarrow c^2 d_4 \mu + 3(d_4 \alpha / \alpha)(\mu c^2 + p) = 0,$$

che esprime la conservazione dell'energia. Come ci si aspetta (dato che  $E_4^k{}_{/k} = 0$ ), la (22) deve anche ottenersi come conseguenza diretta delle (19, 20). In effetti, basta derivare rispetto a  $x^4$  la (20) ed eliminare  $d_4^2 \alpha$  mediante la (19) per ricavarla. La (22) può pertanto essere sostituita ad una delle (19, 20); in particolare sostituendola alla (19), si ha un SDO (di due equazioni nelle due incognite  $(\alpha, \mu)$ ) in cui non compaiono  $x^4$ -derivate di ordine superiore al primo. Sostituendo infine la legge di stato nella (22) e trattando  $\alpha$  come variabile indipendente, si trova la semplice EDO lineare del 1° ordine in  $\mu$ :

$$(23) \quad \alpha d_\alpha \mu + 3\mu(w+1) = 0,$$

---

<sup>29</sup> Riscrivendo la (16) in componenti miste, risulta  $T_i^k = -(\mu c^2 + p)\delta_{i4}\delta^{k4} + p\delta_i^k$ , da cui  $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = p$  e  $T_4^4 = -\mu c^2$ ; e quindi, sommando,  $T = T_i^i = 3p - \mu c^2$ .



singolare in  $\alpha = 0$ . Tenuto tuttavia conto che  $\alpha > 0$ , la (23) si integra elementarmente, e implica che, se  $w > -1$ ,  $\mu$  risulti proporzionale alla potenza di esponente  $-3(1+w)$  (strettamente negativo) di  $\alpha$ :

$$(24) \quad \mu \propto \alpha^{-3(1+w)};$$

e che se  $w = -1$ ,  $\mu$  sia semplicemente una costante. Una volta soddisfatta la (22) mediante la (24), una delle (19, 20) può essere dimenticata.

#### F.4) APPLICAZIONI DEL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD: FRIEDMANN E LEMAITRE

Nella precedente sez. F.3 abbiamo indicato in  $p = w\mu c^2$ , con  $w = \text{cost} \in [-1, 1]$ , una possibile semplicissima legge di stato del fluido cosmico con cui eliminare la pressione  $p$  dalla (F.3, (19)), e così pervenire ad un sistema equilibrato di due equazioni (F.3, (19', 20)) nelle due incognite  $(\alpha, \mu)$ . In realtà si tratta di un modello sovrasemplificato, che abbiamo introdotto per meglio spiegarci. Più realistico è un **modello multi-fluido** a  $N \geq 2$  componenti soggiacenti ciascuna ad una legge di stato dello stesso tipo, secondo lo schema  $\mu = \sum_j \mu_j$ ,  $p = \sum_j p_j$ ,  $p_j = w_j \mu_j c^2$ , con  $w_j = \text{cost}_j \in [-1, 1]$ , dove le somme sono estese alle  $N$  componenti. In luogo della (F.3, (22)) avremo così

$$(1) \quad d_4 \sum_j \mu_j + 3(d_4 \alpha / \alpha) \sum_j \mu_j (1 + w_j) = 0.$$

Supponendo che le componenti del mult fluido non interagiscano, la (1) deve valere separatamente per ogni componente ( $j$ ) secondo le

$$(1_j) \quad d_4 \mu_j + 3(d_4 \alpha / \alpha) \mu_j (1 + w_j) = 0,$$

da ciascuna delle quali scende una corrispondente

$$(2_j) \quad \mu_j \propto \alpha^{-3(1+w_j)}.$$

Nella (2<sub>j</sub>), il fattore di proporzionalità, affetto da indice ( $j$ ) e per definizione indipendente da  $x^4$ , può essere identificato se si conoscono  $\mu_j$  e  $\alpha$  al tempo cosmico presente  $t_0$ , diciamo  $\mu_{j,0}$  e  $\alpha_0$ . Si può pertanto scrivere:

$$(3_j) \quad \mu_j(x^4) = \mu_{j,0} [\alpha_0 / \alpha(x^4)]^{3(1+w_j)}.$$

Sostituendo queste  $\mu_j$  nella (F.3, (20)), otteniamo:

$$(4) \quad c^2 (d_4 \alpha / \alpha)^2 = (d_t \alpha / \alpha)^2 = [Kc^4 \sum_j \mu_{j,0} (\alpha_0 / \alpha)^{3(1+w_j)} - Cc^2] / 3 - kc^2 \alpha^{-2},$$

in cui per brevità abbiamo ommesso di indicare la dipendenza da  $x^4$  dove ci vorrebbe. La (4) è stata moltiplicata per  $c^2$  per mettere in evidenza la quantità  $d_t \alpha / \alpha$ , universalmente detta **parametro di Hubble** e denotata con  $H = H(t)$  (cioè, con lo stesso simbolo  $H$  usato per la *costante* di Hubble, alla quale peraltro si riduce nel caso sia per l'appunto costante). In generale, cioè non soltanto al tempo

presente  $t_0$ , le densità di massa  $\mu_j$  vengono preferibilmente espresse come proporzionali ai corrispondenti **parametri di densità** adimensionali  $\Omega_j$  definiti dalle

$$(5_j) \quad \Omega_j =: Kc^4 \mu_j / (3H^2).^{30}$$

Le (3<sub>j</sub>) si possono allora trascrivere come

$$(5'_j) \quad H^2 \Omega_j = H_0^2 \Omega_{j,0} (\alpha/\alpha_0)^{-3(1+w_j)},$$

e la (4) diventa

$$(6) \quad (d_t \alpha / \alpha)^2 = H_0^2 [\sum_j \Omega_{j,0} (\alpha_0/\alpha)^{3(1+w_j)}] - Cc^2/3 - kc^2 \alpha^{-2}.$$

In questa, anche la costante  $-Cc^2/3$  può considerarsi un addendo come quelli della somma  $\sum_j$ : basta infatti definire  $\Omega_{v(uoto)} =: -Cc^2/(3H^2)$  e ricordarsi di porre  $w_v = -1$ , per avere:

$$(6') \quad (d_t \alpha / \alpha)^2 = H_0^2 [\sum_j \Omega_{j,0} (\alpha_0/\alpha)^{3(1+w_j)} + \Omega_{v,0}] - kc^2 \alpha^{-2}.$$

Ovviamente, per dati  $k$  e  $\alpha$  gli  $N+1$  parametri di densità  $\Omega_{1 \leq j \leq N}$  e  $\Omega_v$  non sono indipendenti, dovendosi avere

$$(7) \quad 1 = \sum_j \Omega_j + \Omega_v - kc^2 \alpha^{-2};$$

e in particolare, a  $t = t_0$ ,

$$(7_0) \quad 1 = \sum_j \Omega_{j,0} + \Omega_{v,0} - kc^2 \alpha_0^{-2}.$$

Queste relazioni si possono usare per eliminare il termine in  $k$  (se  $k = \pm 1$ ). Volendo, si può anche introdurre un parametro di densità “di curvatura”  $\Omega_k =: -kc^2 \alpha^{-2}$ , dopodichè la (7) diventa semplicemente  $1 = \sum_j \Omega_j + \Omega_v + \Omega_k$ .

Avendo posto  $\Omega =: \sum_j \Omega_j + \Omega_v$ , la condizione di piattezza ( $k=0$ ) è  $\Omega(k=0) = 1$ . Usualmente, il caso “ $k=0$ ” si dice “critico”, per cui la precedente condizione si scrive anche  $\Omega_{cr(itico)} = 1$ . La densità di massa “critica” equivalente, diciamo  $\mu_{cr}$ , è pertanto  $\mu_{cr} = 3H^2/(Kc^4)$ ; e al tempo  $t = t_0$ ,  $\mu_{cr,0} = 3H_0^2/(Kc^4)$ . Questa densità critica equivalente si ha dunque misurando (via red-shift)  $H_0$ . Un valore oggi abbastanza accreditato di  $H_0$  è  $\approx 2.27 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ , per cui  $\mu_{cr,0} \approx 9,19 \cdot 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ , in accettabile accordo con i primi risultati di Hubble.

Quanto all'altra equazione geometrodinamica nella metrica di FRW, corrispondente alla (F.3, (19')), nel presente modello a  $N$  fluidi (oltre il vuoto) essa diventa:

$$(8) \quad d_t^2 \alpha / \alpha = -(Kc^4/3) \sum_j \mu_j (1+3w_j) / 2 - Cc^2/3;$$

o se si preferisce,

$$(8') \quad d_t^2 \alpha / \alpha = -(Kc^4/3) \sum^{N+1} \mu_j (1+3w_j) / 2,$$

<sup>30</sup> Che i parametri di densità siano effettivamente adimensionali si verifica immediatamente. Infatti,  $Kc^4 =_{\text{dim}} L^3 T^{-2} M^{-1}$ ,  $\mu_j =_{\text{dim}} M L^{-3}$ ,  $H^2 =_{\text{dim}} T^{-2}$ , da cui  $\Omega_j =_{\text{dim}} 1$ .

con  $\mu_{N+1} \equiv \mu_v = -C/(Kc^2)$ ,  $w_{N+1} \equiv w_v = -1$ . Secondo la (8) (ad esempio) possiamo affermare che la curva  $\alpha(t)$  è convessa se il suo 2° membro è negativo, ed ha un flesso ove esso si annulla. Le  $\mu_j$  nella (8) si intendono espresse mediante le (3<sub>j</sub>) in termini di  $\alpha$ .

Conviene adesso introdurre un **fattore di scala normalizzato**  $\mathbf{a} =: \alpha/\alpha_0$  da usare al posto di  $\alpha$ . Tenendo conto della (7<sub>o</sub>), la (6') si trascrive allora nella forma

$$(6'') \quad (d_t \mathbf{a})^2 = H_0^2 [\sum_j \Omega_{j,o} (\mathbf{a}^{2-3(1+w_j)} - 1) + \Omega_{v,o} (\mathbf{a}^2 - 1) + 1].$$

Un'ultima semplificazione formale si ottiene introducendo un tempo cosmico adimensionale (ortocrono, e con origine nel presente)  $\tau =: H_0(t-t_0)$ , con il quale  $(d_t \mathbf{a})^2/H_0^2$  si riduce a  $(d_\tau \mathbf{a})^2$ . Usando tale  $(d_\tau \mathbf{a})^2$  in luogo di  $(d_t \mathbf{a})^2$  a 1° membro della (6''), si elimina il fattore  $H_0^2$  a 2° membro, e si ha:

$$(9) \quad (d_\tau \mathbf{a})^2 = \sum_j \Omega_{j,o} (\mathbf{a}^{2-3(1+w_j)} - 1) + \Omega_{v,o} (\mathbf{a}^2 - 1) + 1.$$

Si sottolinea che tutte le trasformazioni che hanno portato dalla (4) alla (9) consistono in sostituzioni di variabili con altre variabili, e pertanto non mutano in nulla la sostanza del problema differenziale originale (4). Si può anche osservare che nella EDO (9), o nella equivalente (4), è in ultima analisi condensata la grande dose di invenzione e di ingegno che è stata spesa nella messa a punto del “momento modellizzante” (cfr. S.sez. 0.1.1) della moderna cosmologia teorica relativistica, almeno nelle sue linee essenziali. Come vedremo, le applicazioni illustrate nei prossimi §1 ÷ §4 sono relativamente semplici.

La EDO (9) è tutt'altro che un oggetto esotico dal punto di vista dell'Analisi. Denotandone con  $F = F(\mathbf{a})$  il 2° membro supposto  $\geq 0$  per  $\mathbf{a} \geq 0$ , essa è del tipo (°)  $d_\tau \mathbf{a} = \pm \sqrt{F(\mathbf{a})}$ , e pertanto si integra per separazione di variabili. Poiché la condizione iniziale è manifestamente  $\mathbf{a}(\tau=0) = 1$ , denotando con  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{a})$  una primitiva della funzione  $\pm (F(\mathbf{a}))^{-1/2}$  (quindi  $\mathcal{F}(\mathbf{a}) =: \pm \int^{\mathbf{a}} (F(y))^{-1/2} dy$ ), si ottiene (\*)  $\mathcal{F}(\mathbf{a}) - \mathcal{F}(1) = \tau$ , e dunque  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$  per inversione di quest'ultima rispetto a  $\tau$ .<sup>31</sup> È chiaro che se  $\mathbf{a}(\tau^*) = 0$  per un certo  $\tau^*$  negativo [positivo], secondo il presente modello si deve avere una esplosione o big-bang [una implosione o big crunch] per  $t = t^* =: t_0 + \tau^* H_0^{-1} < t_0$  [ $> t_0$ ]. Nulla impedirebbe poi, in generale, che  $\mathbf{a}$  evolva tra una esplosione prima di  $t_0$  e una implosione dopo  $t_0$ .

Sempre con mezzi elementari, la (9) ci fornisce una significativa informazione per  $\tau \rightarrow \tau^*_{\text{esp(losione)}}+$  (caso dell'esplosione) o  $\tau \rightarrow \tau^*_{\text{imp(losione)}}-$  (caso dell'implosione). In entrambi i casi

<sup>31</sup> Si verifica facilmente che la (\*) è unicamente invertibile in un intorno della soluzione  $\mathbf{a}(0) = 1$ . Salvo che in casi particolari, il valore dell'integrale  $\int^{\mathbf{a}} (F(y))^{-1/2} dy$  deve essere calcolato per via numerica. Si tenga presente, a questo proposito, che la funzione  $F(y)$  è una somma di termini del tipo  $a_j y^j$ , dove le  $a_j$  sono delle costanti e l'esponente  $j = 2-3(1+w_j)$  va da  $j = -4$  (per  $w_j = 1$ ) a  $j = 2$  (per  $w_j = -1$ ). Il valore  $w = 1/3$  corrisponde al caso della radiazione,  $w = 0$  a quello della materia disgregata,  $w = -1/3$  a quello della curvatura, e  $w = -1$  a quello del vuoto.

$\mathbf{a} \rightarrow 0+$ , e quindi il 2° membro della (°) è dominato asintoticamente dall'addendo in cui  $\mathbf{a}$  compare con l'esponente negativo più grande in valore assoluto, diventando del tipo

$$(10) \quad d_\tau \mathbf{a} \rightarrow \pm \sqrt{\Omega_0} \cdot \mathbf{a}^{-3(1+w)/2}.$$

Come si verifica senza difficoltà, la soluzione (asintotica) della (10) è:

$$(11) \quad \mathbf{a}(\tau) \approx [\pm \sqrt{\Omega_0} \cdot \beta(\tau - \tau^*)]^{1/\beta},$$

ove  $\tau^*$  sta per  $\tau_{\text{esp}}^*$  (segno +,  $\tau - \tau_{\text{esp}}^* > 0$ ) o per  $\tau_{\text{imp}}^*$  (segno -,  $\tau - \tau_{\text{esp}}^* < 0$ ), e  $\beta =: 1 + (3/2)(1 + w)$ .

In ogni caso, la curva  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau)$  interseca l'asse  $\tau$  sotto un angolo retto, perché secondo la (10)  $d\mathbf{a}/d\tau \rightarrow \pm \infty$  per  $\mathbf{a} \rightarrow 0+$ .

Fino a questo punto, abbiamo considerato il modello a N fluidi non interagenti (oltre il vuoto) senza limitazioni su N. Il modello che è stato prevalentemente studiato è piuttosto del tipo a due soli fluidi (oltre il vuoto): precisamente, un fluido di radiazione ( $w_{\text{r(adiazione)}} = 1/3$ ), e un fluido di materia ( $_m$ ) disgregata ( $w_{\text{m(ateria)}} = 0$ ). Allora la somma  $\sum_j \Omega_{j,0} \mathbf{a}^{2-3(1+w_j)}$  consta di due addendi, e vale  $\Omega_{\text{r},0} \mathbf{a}^{-2} + \Omega_{\text{m},0} \mathbf{a}^{-1}$ . Vale a dire, per questo specifico modello a due fluidi (oltre il vuoto), la EDO che governa l'evoluzione del fattore di scala normalizzato è del tipo generale (usando le abituali lettere x per la variabile indipendente e y per quella dipendente):

$$(12) \quad (d_x y)^2 = A y^{-2} + B y^{-1} + C + D y^2 \equiv F(y),$$

in cui l'identificazione delle costanti (A,B,C,D) è immediata (ad esempio,  $C = 1 - \Omega_{\text{r},0} - \Omega_{\text{m},0} - \Omega_{\text{v},0}$ ).

Da tutte le precedenti considerazioni risulta evidente l'interesse, per la teoria cosmologica macroscopica, a valutare con la migliore attendibilità i valori del parametro di Hubble e dei vari parametri di densità al tempo presente  $t_0$ . Nel modello appena descritto a due fluidi (oltre il vuoto), sono usualmente accettati, con un grado di confidenza di qualche %, i valori  $H_0 \approx 2,27 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$  (corrispondente a  $H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ <sup>32</sup>),  $\Omega_{\text{r},0} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\Omega_{\text{m},0} \approx 0,3$  e  $\Omega_{\text{v},0} \approx 0,7$ . Con questi valori dei parametri di densità,  $\Omega_{\text{r},0} + \Omega_{\text{m},0} + \Omega_{\text{v},0} \approx 1$ ; e questo, alla luce della (6), suggerisce che l'universo sia piatto ( $k = 0$ ) (a meno di non supporre  $\alpha_0$  estremamente grande:  $c^2/H_0^2$  vale infatti  $\approx 10^{52} \text{ m}^2$ ). Essi valori non possono non destare meraviglia e perplessità: nell'epoca presente, oltre i due terzi della energia-equivalente dell'universo sarebbero concentrati nel vuoto. Questo è uno dei grandi misteri della moderna cosmologia.

Le equazioni geometrodinamiche (8, 9) a due fluidi (come dianzi descritti) e *senza* costante cosmologica ( $\Omega_{\text{v}} = 0$ ) danno luogo ai cosiddetti **modelli cosmologici di Friedmann**<sup>33</sup>, che in certi casi possono essere risolti analiticamente. Sulla base della (8), si vede subito che essi danno luogo a soluzioni ovunque convesse (perché  $\mu_{\text{r}} > 0$ ,  $w_{\text{r}} = 1/3$  e  $\mu_{\text{m}} > 0$ ,  $w_{\text{m}} = 0$ ), e quindi implicano un

<sup>32</sup> (Megaparsecondo)<sup>-1</sup>. Il parsecondo è la distanza alla quale il raggio dell'orbita terrestre è visto sotto un angolo di un secondo di grado.

<sup>33</sup> A. Friedmann: "Über die Krümmung des Raumes", Z. Phys., **10**, 377-386 (1922).

big-bang ad un tempo compreso tra  $t_0 - H_0^{-1}$  e  $t_0$ : infatti, per la (6'')  $(d_t \mathbf{a})_0 = H_0$ , e quindi, al tempo presente  $t = t_0$ , la tangente alla curva  $\mathbf{a}(t)$  (che ha ivi ordinata 1) interseca l'asse  $t$  nel punto  $t = t_0 - H_0^{-1}$ , a sinistra di  $t_0$ . Ovviamente questi risultati si possono riformulare in modo più simmetrico, ma meno tradizionale, sostituendo  $\tau = H_0(t-t_0)$  a  $t$  (quindi  $\tau = 0$  a  $t = t_0$ ), e 1 a  $H_0$  (quindi  $\tau = -1$  a  $t = t_0 - H_0^{-1} = t_0 - 1$ ).

Per conoscere l'evoluzione di  $\mathbf{a}(t)$  al di là di  $t = t_0$  nei modelli di Friedmann, si deve tornare alla (12) con le corrette identificazioni, cioè con  $x = H_0 t$ ,  $y = \mathbf{a}$ ,  $A = \Omega_{r,0}$ ,  $B = \Omega_{m,0}$ ,  $C = 1 - \Omega_{r,0} - \Omega_{m,0}$ ,  $D = 0$ . L'origine del tempo cosmico,  $t = 0$ , si pone di regola nel big-bang nei modelli che, come quelli di Friedmann, lo prevedono. In questo caso conviene porre  $\tau = H_0 t$ , cioè misurare il tempo cosmico in unità di **tempo di Hubble**  $H_0^{-1}$ .<sup>34</sup> I casi trattabili analiticamente senza difficoltà sono i seguenti.

§1. Modello "dominato dalla materia disgregata",  $\Omega_{r,0} = 0$ . Allora  $A = 0$ ,  $C = 1 - \Omega_{m,0}$ , per cui

$$(13) \quad \tau = H_0 t = \int_{y=0}^{\mathbf{a}} \{y / [\Omega_{m,0} + (1 - \Omega_{m,0})y]\}^{1/2} dy$$

L'integrale si calcola facilmente, ma bisogna distinguere tre sottocasi.

1a):  $\Omega_{m,0} = 1$  (cioè,  $k = 0$ ). Si ha subito  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau) = (3\tau/2)^{2/3}$ , e quindi l'espansione continua indefinitamente, ma  $d_\tau \mathbf{a} \rightarrow 0$  per  $\tau \rightarrow \infty$ ;

1b):  $\Omega_{m,0} > 1$  ( $k = 1$ ). Conviene introdurre le abbreviazioni  $2E =: \Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0}-1)$ ,  $2F =: \Omega_{m,0}/(\Omega_{m,0}-1)^{3/2}$ , e operare la sostituzione  $y =: 2E \sin^2(\psi/2)$ , con  $\psi \in [0, 2\pi]$ . Si trova così:

$$(14_1) \quad \mathbf{a} = E(1 - \cos\psi),$$

$$(14_2) \quad \tau = F(\psi - \sin\psi).$$

Le (14) confermano il big-bang in  $\tau = 0$  (cioè a  $\psi = 0$ ), ma rivelano un successivo big-crunch in  $\tau = 2\pi F$  (cioè in  $\psi = 2\pi$ ), in conformità con il fatto che le precedenti espressioni di  $\mathbf{a}$  e di  $\tau$  sono le equazioni parametriche di un arco di cicloide (convesso) completo. Si ha poi  $d_\tau \mathbf{a} = (E/F) \sin\psi / (1 - \cos\psi)$ . Valutando il limite di questa espressione per  $\psi \rightarrow 0+$  [per  $\psi \rightarrow 2\pi-$ ] si trova, come deve essere,  $d_\tau \mathbf{a} = +\infty$  [ $d_\tau \mathbf{a} = -\infty$ ]. Per  $\psi = \pi$  si ha invece  $d_\tau \mathbf{a} = 0$ , allorché si verifica la massima espansione.

1c):  $\Omega_{m,0} < 1$  ( $k = -1$ ). Le precedenti definizioni di  $E$  e di  $F$  si devono modificare nelle  $2E =: \Omega_{m,0}/(1 - \Omega_{m,0})$  e rispettivamente  $2F =: \Omega_{m,0}/(1 - \Omega_{m,0})^{3/2}$ ; mentre la sostituzione da usare è la  $y =: 2E \text{Sh}^2(\psi/2)$ , con  $\psi \in [0, \infty]$ . Si trova così

$$(15_1) \quad \mathbf{a} = E(\text{Ch}\psi - 1),$$

$$(15_2) \quad \tau = F(\text{Sh}\psi - \psi).$$

<sup>34</sup> Con la stima data più sopra di  $H_0$  risulta  $H_0^{-1} \approx 14$  miliardi di anni. Questo valore coincide più o meno con quello oggi stimato dell'età dell'universo, ma presumibilmente si tratta di una coincidenza casuale.

Naturalmente si ha ancora il big-bang in  $\tau = 0$  (cioè in  $\psi = 0$ ), ma ad esso segue una espansione indefinita. Inoltre, si trova  $d_\tau \mathbf{a} = (E/F) \text{Sh}\psi / (\text{Ch}\psi - 1)$ ; e il limite di questa per  $\psi \rightarrow 0^+$  è  $+\infty$  (come deve essere), mentre quello per  $\psi \rightarrow \infty$  è  $E/F$ , cioè la convessità tende a scomparire per  $\tau \rightarrow \infty$ . §

§ 2. Esistono anche, trattabili analiticamente ma meno importanti di quelli appena illustrati sotto §1, (di fatto,  $\Omega_{r,0} \approx 10^{-4} \Omega_{m,0}$ ), modelli di Friedmann “dominati dalla radiazione” ( $\Omega_{m,0} = 0$ ), In questo caso,  $B = 0$  e  $C = 1 - \Omega_{r,0}$ , per cui vale la

$$(16) \quad \tau = H_0 t = \int_{y=0}^{\mathbf{a}} \{y / [\Omega_{r,0} + (1 - \Omega_{r,0})y^2]\}^{1/2} dy,$$

che differisce dalla (13), dal punto di vista del calcolo, per la presenza di  $y^2$  invece che di  $y$  nelle [ ]. L'integrale si valuta ancora subito per  $\Omega_{r,0} = 1$ , e dà  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau) = \sqrt{2\tau}$  (espansione indefinita, con  $d_\tau \mathbf{a} \rightarrow 0$  per  $\tau \rightarrow \infty$ ). I due casi  $\Omega_{r,0} < 1$  e  $\Omega_{r,0} > 1$  devono anch'essi essere esaminati separatamente.

Considerando il primo, osserviamo che l'integrale  $z(x) = \int_0^x (ax'^{-2} + b)^{-1/2} dx'$ , dove  $x > 0$  e  $a, b$  sono due costanti anch'esse  $> 0$ , vale  $[-\sqrt{a} + \sqrt{(a + bx^2)}] / b$ .  $\tau$  si calcola allora utilizzando questo risultato con  $\mathbf{a}$  al posto di  $x$ ,  $\Omega_{r,0}$  al posto di  $a$ , e  $1 - \Omega_{r,0}$  al posto di  $b$ . Si ottiene così

$$(17) \quad \tau = \{ -\sqrt{\Omega_{r,0}} + \sqrt{[\Omega_{r,0} + (1 - \Omega_{r,0})\mathbf{a}^2]} \} / (1 - \Omega_{r,0}),$$

che si inverte nella

$$(17') \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau) = [2\tau\sqrt{\Omega_{r,0}} + \tau^2(1 - \Omega_{r,0})]^{1/2}.$$

Abbiamo dunque un'espansione continua con  $d_\tau \mathbf{a}$  che tende al valore costante  $\sqrt{1 - \Omega_{r,0}}$ . Lasciamo al lettore il (piccolo) lavoro di ricavare l'analoga formula valida per  $\Omega_{r,0} > 1$ . §

§3. Accenniamo ancora ai “modelli di Friedmann piatti”, per i quali per definizione è  $\Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} = 1$ . In questo caso  $A + B = 1$  e  $C = 0$ , per cui vale la

$$(18) \quad \tau = H_0 t = \int_{y=0}^{\mathbf{a}} y / [\Omega_{m,0}y + (1 - \Omega_{m,0})]^{1/2} dy.$$

Anche questo integrale si calcola senza difficoltà, e dà:

$$(19) \quad \tau = 2 / (3\Omega_{m,0}^2) [(\Omega_{m,0}\mathbf{a} + \Omega_{r,0})^{1/2}(\Omega_{m,0}\mathbf{a} - 2\Omega_{r,0}) + 2\Omega_{r,0}^{3/2}],$$

dove per brevità abbiamo preferito non scrivere  $\Omega_{r,0}$  come  $1 - \Omega_{m,0}$ . Non è immediato risolvere la (19) rispetto a  $\mathbf{a}$ ; ma si prova facilmente che  $d_\mathbf{a} \tau$  è  $> 0$  e finito per  $\mathbf{a} > 0$ , per cui la (19) è unicamente invertibile rispetto ad  $\mathbf{a}$  salvo che nel big-bang (dove peraltro è  $\mathbf{a} = 0$ ). Si noti che la (19) dà effettivamente  $\tau = 0$  per  $\mathbf{a} = 0$ . §

§4. Ci occuperemo ora dei **modelli cosmologici di Lemaitre**,<sup>35</sup> che generalizzano quelli di Friedmann in quanto non assumono necessariamente nulla la costante cosmologica. In pratica, converrà snellire l'esposizione trascurando  $\Omega_{r,0}$ , giusta la sua effettiva piccolezza relativa. Possiamo dunque scrivere

<sup>35</sup> G. Lemaitre, “Un univers homogène de masse constant et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques”, Ann. Soc. Sci. Brux., **A47**, 49-59 (1927).

$$(20) \quad (d_\tau \mathbf{a})^2 = \Omega_{v,o}(\mathbf{a}^2 - 1) + \Omega_{m,o}(\mathbf{a}^{-1} - 1) + 1 = \Omega_{v,o} \mathbf{a}^2 + \Omega_{m,o} \mathbf{a}^{-1} + \Omega_{k,o},$$

ove la seconda uguaglianza segue dalla definizione che abbiamo dato più sopra di  $\Omega_k$ .

L'analisi della EDO che si ottiene prendendo la radice quadrata dei due membri della (19) (presupponendo la positività del 2° membro), e che ha soluzione unica sotto la condizione iniziale  $\mathbf{a}_0 = 1$ , implica il ricorso, in generale, alle funzioni ellittiche. Questo non sarebbe proibitivamente difficile, ma ci si può qui limitare a considerare la classe delle soluzioni che hanno origine con una esplosione iniziale e finiscono con una espansione indefinita, classe da supporre non vuota. In questo caso la curva  $\mathbf{a}(\tau)$  deve avere (almeno) un flesso. Derivando la (20) rispetto a  $\tau$  si trae, ove  $d_\tau \mathbf{a}$  sia  $\neq 0$ ,

$$(21) \quad d_\tau^2 \mathbf{a} = \Omega_{v,o} \mathbf{a} - \Omega_{m,o} \mathbf{a}^{-2}/2.$$

Questa mostra che il grafico di  $\mathbf{a}(\tau)$  nel piano  $(\tau, \mathbf{a})$  ha un flesso – passando da concava a convessa o viceversa – quando e solo quando *attraversa* ( $d_\tau \mathbf{a} \neq 0$  per ipotesi) la retta  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$ , dove

$$(22) \quad \mathbf{a}^* =: [\Omega_{m,o}/(2\Omega_{v,o})]^{1/3}$$

(il valore di  $\mathbf{a}$  che rende nullo il 2° membro della (21)). Precisamente,  $\mathbf{a}(\tau)$  è convessa [concava] se  $\mathbf{a} < \mathbf{a}^*$  [se  $\mathbf{a} > \mathbf{a}^*$ ]. Con i valori di  $\Omega_{m,o}$  e di  $\Omega_{v,o}$  dianzi riportati, risulta  $\mathbf{a}^* \approx 0,6$ , quindi non molto al disotto del valore iniziale  $\mathbf{a}_0 = 1$ . (Ovviamente il fatto che  $\mathbf{a}^*$  sia unico non significa che vi sia un unico punto di flesso.)

In mancanza di una analisi generale del problema (alla quale abbiamo qui rinunciato), presenta notevole interesse lo studio della soluzione in un (piccolo) intorno di un punto di flesso. Come vedremo in un momento, il più basso ordine di approssimazione significativo rispetto ad  $\mathbf{a}$  è il secondo, e non il primo. In effetti, al 2° ordine risulta (dove  $\approx$  significa “uguale a meno di termini di ordine superiore al 2°”)

$$(23) \quad \mathbf{a}^3 \mathbf{a}^{-1} \approx \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^*(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*) + (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)^2$$

e

$$(23') \quad \mathbf{a}^2 \approx \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^*(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*) + (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)^2,$$

per cui

$$(24) \quad \Omega_{m,o} \mathbf{a}^{-1} = 2\Omega_{v,o} \mathbf{a}^3 \mathbf{a}^{-1} \approx 2\Omega_{v,o} [\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^*(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*) + (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)^2],$$

e

$$(24') \quad \Omega_{v,o} \mathbf{a}^2 \approx \Omega_{v,o} [\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^*(\mathbf{a} - \mathbf{a}^*) + (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)^2].$$

Sommando le (24) e (24'), abbiamo

$$(25) \quad \Omega_{m,o} \mathbf{a}^{-1} + \Omega_{v,o} \mathbf{a}^2 \approx 3\Omega_{v,o} \mathbf{a}^2 + 3\Omega_{v,o} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)^2,$$

nella quale manca appunto il termine del 1° ordine. La (20) si riduce così alla

$$(26) \quad d_\tau \mathbf{a} \approx [3\Omega_{v,o} \mathbf{a}^2 + \Omega_{k,o} + 3\Omega_{v,o} (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*)^2]^{1/2}.$$

Posto  $T =: \mathbf{a}^*[1 + \Omega_{k,0}/(3\Omega_{v,0}\mathbf{a}^{*2})]^{1/2}$ , e abolendo ormai il segno  $\approx$  in favore di  $=$ , concludiamo che

$$(27) \quad X =: (\tau - \tau^*)\sqrt{(3\Omega_{v,0})} = \int_{y=0}^{\mathbf{a}-\mathbf{a}^*} dy/(T^2+y^2)^{1/2},$$

dove  $\tau^*$  è il tempo normalizzato ( $\tau = H_0 t$ ) nel punto di flesso. L'integrale nella (27) è elementare, e porge

$$(28) \quad \mathbf{a} - \mathbf{a}^* = T \cdot \text{Sh} X.$$

(Si noti che secondo la (28) è  $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*$  per  $\tau = \tau^*$ , come deve essere.) Una proprietà interessante di questa soluzione asintotica nelle vicinanze di  $\tau = \tau^*$  è quella di essere costante *oltre* il più basso ordine significativo se  $T = 0$ , cioè se

$$(29) \quad 1 + \Omega_{k,0}/(3\Omega_{v,0}\mathbf{a}^{*2}) = 0. \quad ^{36}$$

Questa presuppone che  $\Omega_{k,0} < 0$ , e quindi che la curvatura sia positiva. Tenuto conto della uguaglianza  $\Omega_{v,0}\mathbf{a}^{*2} = (\Omega_{v,0}\Omega_{m,0}/4)^{1/3}$ , eliminando  $\Omega_{k,0}$  come  $1 - \Omega_{v,0} - \Omega_{m,0}$ , e ponendo  $\varpi =: (\Omega_{v,0}/4\Omega_{m,0})^{1/3}$ , la (29) equivale alla seguente equazione di 3° grado in  $\varpi$  del tipo di Del Ferro-Tartaglia (cioè, con coefficiente di  $\varpi^3$  unitario e senza termine di 2° grado):

$$(30) \quad \varpi^3 - 3\varpi/4 + (\Omega_{m,0}-1)/(4\Omega_{m,0}) = 0,$$

della quale interessano le radici positive. La discussione di una equazione del tipo (30) risale all'Algebra del XIV secolo. Qui, ci limitiamo a rilevare che il suo discriminante vale  $1/64$  di  $[(\Omega_{m,0}-1)/\Omega_{m,0}]^2 - 1$ .

Un caso particolare di universo di Lemaitre è quello che si ottiene facendo  $\Omega_{k,0} = 0$  (assenza di curvatura spaziale). Si ha allora:

$$(31) \quad \tau = 2/(3\sqrt{|\Omega_{v,0}|}) \int_{y=0}^{\beta} dy/(1+\text{sign}(\Omega_{v,0})y^2)^{1/2},$$

dove  $\beta$  sta ora per  $(\mathbf{a}^3|\Omega_{v,0}|/\Omega_{m,0})^{1/2}$ . L'integrale è elementare, e si ottiene così la soluzione

$$(32) \quad \tau = 2/(3\sqrt{|\Omega_{v,0}|}) \text{Sh}^{-1} \beta$$

se  $\Omega_{v,0} > 0$ ; o la stessa con  $\sin^{-1}$  al posto di  $\text{Sh}^{-1}$  (come ci si aspetta) se  $\Omega_{v,0} < 0$ . §

Dalle soluzioni ottenute in §1 ÷ §4 si ricavano agevolmente le evoluzioni dei parametri di densità, delle associate densità, del parametro di Hubble, e così via. Si può così valutare l'età dell'universo nei modelli a big-bang, cioè il valore del tempo cosmico normalizzato all'epoca presente, o  $\tau_0$ .

A commento di quanto abbiamo esposto nei precedenti §§ 1 ÷ 4, è forse il caso di aggiungere che di rado, nella storia della fisica-matematica, è stato possibile affrontare e risolvere (nei limiti della correttezza del *modello primario*) problemi di così vasta e suggestiva portata

---

<sup>36</sup> Si intuisce e si dimostra che se il 1° membro della (29) è abbastanza piccolo,  $\mathbf{a}$  può essere costante per un tempo arbitrariamente lungo.



facendo uso di una matematica così ordinaria (beninteso, ordinaria nel terzo decennio del Novecento). In altre parole, ci sembra che raramente come in questa occasione la dose di invenzione e di ingegno che fu necessaria per elaborare quello che abbiamo chiamato il “momento modellizzante” di una TFM (cfr. la S.sez. 0.1.1) – in questo caso della RG, e in subordine della giustificazione della metrica di FRW – abbia prevalso sulla modestia, in senso tecnico, degli strumenti matematici sufficienti a rivelare alcune importanti implicazioni dei vari *modelli secondari*.

## BIBLIOGRAFIA GENERALE

La seguente Bibliografia Generale presenta una selezione di monografie o trattati pertinenti alle materie del libro e familiari all'autore, solo in qualche caso citate/i nel testo. Con la possibile eccezione della sezione A), la selezione ha più il carattere di "letture/consultazioni consigliate" che di una vera bibliografia. In parecchi casi la classificazione delle opere elencate è grossolana, e talvolta questionabile, ma sufficiente allo scopo ripromessoci. Se disponibili, sono riportati il titolo originale e/o quello della traduzione, la casa editrice e la data di pubblicazione della edizione effettivamente esaminata. Altre monografie, di norma più specialistiche, e tutte le memorie su periodici, sono citate in note a piè pagina.

## A) MATEMATICA E FISICA MATEMATICA

- ABRAHAM, R., MARSDEN, J.E.: "Foundations of Mechanics"; 1<sup>st</sup> ed. Benjamin, 1967; 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley (6<sup>th</sup> pr.) 1987
- AKHIEZER, N.I.: "Lectures on the calculus of variations", Blaisdell 1962 (ed. russa Gostekhizdat 1955)
- ALEXANDROFF, P., HOPF, H.: "Topologie", Springer 1935
- ALEXANDROV, A.D., KOLMOGOROV, A.N., LAVRENT'EV, M.A.: "Mathematics, its Contents, Methods and Meaning", engl. transl., 3 vols., The M.I.T. Press 1963
- AMALDI, U., LEVI-CIVITA, T.: "Lezioni di Meccanica Razionale", 3 voll., Zanichelli 1923-1926-1927
- ARNOLD, V.(1): "Geometrical Methods in the theory of Ordinary Differential Equations", Springer 1977
- ARNOLD, V. (2): "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer 2nd ed. 1989, trad. ital. "Metodi matematici della meccanica classica", Editori Riuniti 1988
- AUSLANDER, L., MACKENZIE, R.E. : "Introduction to Differentiable Manifolds", Mc Graw-Hill 1963
- AUSLANDER, L.: "Differential geometry", Harper 1967
- BALAKRISHAN, A.V.: "Applied Functional Analysis", Springer 1976
- BERGER, M.S.: "Non linearity and functional Analysis", Acad. Press 1977
- BIRKHOFF, G., MAC LANE, S.: "A Survey of Modern Algebra", Macmillan 4<sup>th</sup> ed. 1977
- BISHOP, R.L., CRITTENDEN, R.J.: "Geometry of Manifolds", Acad. Press 1964
- BISHOP, R.L., GOLDBERG, S.: "Tensor Analysis on manifolds", Macmillan 1968
- BITSADZE, A.V.: "Boundary-value Problems for second-order Elliptic Equations", North-Holland 1968
- BLANCHARD, P., BRÜNING, E.: "Variational Methods in Mathematical Physics", Springer 1982
- BLISS, G.A.: "Lectures on the calculus of variations", Un. of Chicago Press 1946
- BOLZA, O.: "Lectures on the calculus of Variations", Un. of Chicago Press 1904; trad. ted., "Vorlesungen über Variationsrechnung", Teubner 1909, rist. 1933, 1949;
- BORISOVICH, YU., BLIZNYAKOV, N., IZRAILEVICH, YA., FOMENKO, T.: "Topology" (engl. transl.), MIR 1985
- BORSUK, K., SZMIELEV, W. : "Foundations of Geometry" (engl. transl.), North-Holland 1960
- BOURBAKI, N. (1): "Topologie générale", Hermann 1951

- BOURBAKI, N.(2): “Variétés différentielles et analytiques”, Hermann 1971
- CARATHÉODORY, C.: “Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung”, Teubner 1935; 2<sup>a</sup> ed. ted. in 2 voll., Teubner 1956; engl. transl. “Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the first Order”, Holden-Day 1965, Chelsea 1982
- CARTAN, É. (1): “Leçons sur les invariants intégraux”, Hermann 1921
- CARTAN, É. (2): “Les systèmes différentielles extérieurs et leurs applications géométriques”, Hermann 1945
- CHECCUCCI, V., TOGNOLI, A., VESENTINI, E.: “Lezioni di topologia generale”, Feltrinelli 5<sup>a</sup> ed. 1972
- CHEVALLEY, C.: “Theory of Lie Groups”, Princeton Un. Press 1946
- CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C., DILLARD-BLEICK, M.(1) : “Analysis, Manifolds and Physics”, North-Holland 1977
- CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C., DILLARD-BLEICK, M. (2): “Analysis, Manifolds and Physics: 92 Applications” North-Holland 1989
- CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C.: “Analysis, Manifolds and Physics”, part II” North-Holland 2000
- CIME: “Lectures on Dynamical Systems”, Birkhäuser 1980
- COHN, P.: “Universal Algebra”, Harper & Row 1965, trad. ital. “Algebra Universale” Feltrinelli 1971
- COLLATZ, L.: “Functional Analysis and Numerical Mathematics”, Acad. Press 1966
- COURANT, R., HILBERT, D.: “Methods of Mathematical Physics”, vol. 1 (engl. transl.) Interscience 1953; vol 2 (engl. transl.) Interscience 1962 (ed. orig. tedesca 1924, 1930 (I) e 1938 (II))
- COXETER, H.S.: “Non-euclidean Geometry”, Un. of Toronto Press 1957
- DAUTRAY, R., LIONS, J-L : “Mathematical Analysis and Numerical Methods” (engl. transl.) 6 vols, Springer 1988-1990 (édit. franç. 1984-85)
- DE RHAM, G : “Variétés différentiables. Formes courants, formes harmoniques” Hermann 1955; engl. transl. “Differentiable Manifolds”, Springer 1984
- DIEUDONNÉ, J. (1): “Treatise on Analysis, vol. I” (“Foundations of modern analysis”) Acad. Press 1970
- DIEUDONNÉ, J. (2): “Treatise on Analysis, vol. II”, Acad. Press 1970
- DIEUDONNÉ, J. (3): “Treatise on Analysis, vol. III”, Acad. Press 1972
- DIEUDONNÉ, J. (4): “Treatise on Analysis, vol. IV”, Acad. Press 1974
- DUBROVINE, B., NOVIKOV, S., FOMENKO, A. (1): “Géométrie contemporaine, 1<sup>ère</sup> partie: géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs” (trad fr.), MIR 1982

- DUBROVINE, B., NOVIKOV, S., FOMENKO, A. (2): “Géométrie contemporaine, 2<sup>ème</sup> partie: géométrie et topologie des variétés” (trad. fr.), MIR 1982
- EISENHART, L.P. (1): “Continuous Groups of Transformations”, Dover 1961 (1<sup>st</sup> ed. 1933)
- EISENHART, L.P. (2): “An Introduction to Differential geometry”, Princeton Un. Press 1947
- ELSGOLTS, L.(1): “Calculus of variations”, Addison-Wesley 1962
- ELSGOLTS, L.(2): “Differential Equations and the Calculus of Variations”, MIR 1970
- FINZI, B. (1): “Meccanica razionale” (2 voll.), Zanichelli 1948
- FINZI, B. (2): “Principi variazionali”, Ed. Politecn. Tamburini 1949
- FINZI, B., PASTORI, M.: “Calcolo tensoriale e applicazioni”, Zanichelli 1949
- FLANDERS, H.: “Differential Forms, with Applications to the Physical Sciences”, Acad. Press 1963
- GANS, D.: “An Introduction to non-euclidean Geometry”, Acad. Press 1973
- GELFAND, I.M., FOMIN, S.V.: “Calculus of Variations” (engl. transl.), Prentice Hall 1963 (ed. orig. russa, Fizmatgiz 1961)
- GEROCH, R.(1): “General Relativity from A to B”, Un. of Chicago Press 1978
- GEROCH, R.(2): “Mathematical Physics”, Un. Chicago Press 1985
- GERRETSEN, J.: “Tensor Calculus and Differential Geometry”, Nordhoff 1962
- GIAQUINTA, M., HILDEBRANDT, S.: “Calculus of Variations”, 2 vols., Springer 1996
- GLAZMAN, I., LIUBITCH, Y.: “Analyse linéaire dans les espaces de dimensions finies” (trad. fr.), MIR 1974
- GOLDBERG, S.: “Curvature and Homology”, Dover 3<sup>rd</sup> ed. 1998
- GOLDSTEIN, H.: “Classical Mechanics”, Addison-Wesley 2<sup>nd</sup> ed. 1981
- GREUB, W. (1): “Linear Algebra”, Springer 1963
- GREUB, W. (2): “Multilinear Algebra”, Springer 1967
- HADAMARD, J. (1): “Leçons sur le calcul des variations”, Hermann 1910
- HADAMARD, J. (2): “Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Differential Equations”, Dover 1952
- HALL, G.S.: “Symmetries and Curvature Structure in General Relativity”, World Scient. 2004
- HALMOS, P.: “Finite-Dimensional Vector Spaces”, Van Nostrand 2<sup>nd</sup> ed. 1958
- HAMEL, G.: “Theoretische Mechanik, eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik”, Springer 1949 (ristampa, 1967)
- HEATS, T. (ed.): “The thirteen books of the Elements”, 3 vols., engl. transl., Dover 1956
- HESTENES, D.: “Space-Time Algebra”, Gordon & Beach 1966
- HILBERT, D.: “Grundlagen der Geometrie”, 1899; 7. Ausg. Teubner 1930; trad. it., “Fondamenti della geometria”, Feltrinelli 1970
- HOBSON, E.: “The Theory of Functions of a real Variable”, 2 vols, Dover 1957

- HOCKING, J.G., YOUNG, G. S.: "Topology", Addison-Wesley 1961
- INCE, E.L.: "Ordinary Differential Equations", Dover 1956
- JACOBSON, N.: "Lectures in Abstract Algebra (3 vols.): vol. I Basic Concepts, vol II Linear Algebra", Van Nostrand 1951, 1953
- KANTAROVICH, L.V., AKILOV, G.P.: "Functional Analysis in Normed Spaces", Pergamon Press 1964
- KANTAROVICH, L.V., KRYLOV, N.: "Approximate Methods of higher Analysis" (engl. transl.), Interscience 1958
- KELLEY, J.L.: "General Topology", Van Nostrand 1955
- KESTELMAN, H.: "Modern Theories of Integration", Dover 1960
- KOBAYASHI, S., NOMIZU, K.: "Foundations of Differential Geometry", (2 vols.) Interscience 1963
- KOLMOGOROV, A.N., FOMIN, S.V (1): "Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space" (engl. transl.), Acad. Press 1961 (2<sup>nd</sup> volume of "Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis")
- KOLMOGOROV, A.N., FOMINE, S.V.(2): "Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle" (trad. fr.), MIR 1974
- KRASNOSELSKII, M.A. et al.: "Approximate Solutions of Operator Equations" (engl. transl.), Noordhoff 1972
- KRYLOV, N.: "Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique", Mém. Sci. Math. Fasc. **49**, Gauthier-Villars 1931
- LADYZHENSKAIA, O.A., URAL'TSEVA, N.N.: "Linear and Quasilinear Equations of Elliptic type", (engl. transl.), Acad. Press 1969
- LANG, S. (1): "Introduction to Differentiable Manifolds", Interscience 1962
- LANG, S. (2): "Fundamentals of Differential Geometry", Springer 1999
- LELONG-FERRAUD J., ARMANDIÈS, J.M.: "Algèbre, tome1", Dunod 3<sup>ème</sup> éd. 1978
- LEVI-CIVITA, T.(1) : "Fondamenti di Meccanica Relativistica", Zanichelli 1928
- LEVI-CIVITA, T.(2): "Lezioni di calcolo differenziale assoluto", Stock 1925
- LICHNEROWICZ, A.: "Éléments de calcul tensoriel", Colin 1950 ; engl. transl. "Elements of Tensor Calculus", Methuen 1962
- LOGAN, J.D.: "Invariant Variational Principles", Academic Press 1977
- LOMBARDO-RADICE, L.: "Istituzioni di algebra astratta", Feltrinelli 10<sup>ma</sup> ed. 1973
- LOVELOCK, D., RUND, H.: "Tensors, Differential Forms and Variational Principles", Dover 1975
- LYUSTERNIK, L.A., SOBOLEV, V.I.: "Précis d'analyse fonctionnelle" (trad. fr.) Dover 1989
- MARCHUK, G.I.: "Methods of Numerical Mathematics" (engl. transl.), Springer 1982

- MIKHLIN, S.G. (1): “Linear Equations of Mathematical Physics” (engl. transl.), Holt, Rineheart & Winston 1967
- MIKHLIN, S.G. (2): “Mathematical Physics, an advanced Course” (engl. transl.), North-Holland 1970
- MILLMAN, R., PARKER, G.: “Geometry, a Metric Approach with Models”, Springer 1981
- MIRANDA, C.: “Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico” Springer 1955; engl. transl. Springer 1970
- MORREY, C.B.: “Multiple integrals in the calculus of variations”, Springer 1966
- O’ NEILL, B.: “Semiriemann Geometry”, Acad. Press 1983
- NEWTON, I.: (1) “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”, 1<sup>a</sup> ed. 1687, 2<sup>a</sup> ed. 1713, 3<sup>a</sup> ed. 1726; engl. transl. “Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World”, 1729, anche Un. of California Press, 1946; trad. ital. “Principi matematici della filosofia naturale”, UTET 1989
- NEWTON, I.: (2) “De analysi per æquationes numero terminorum infinitas”, 1711 (contiene il teorema fondamentale del calcolo infinitesimale)
- NEWTON, I.: (3) “Methodus fluxionum et serierum infinitarum”, 1736
- NITECKI, Z.: “Differential Dynamical Systems”, MIT Pr. 1971
- NIVEN, W (ed.): “The Scientific Papers of J.C. Maxwell” (2 vols.) Dover 1966
- PALIS, J., DE MELO, W.: “Geometric Theory of Dynamical Systems”, Springer 1982
- PETROVSKII, I.G.: “Partial Differential Equations” (engl. transl.), Iliffe Books 1967
- POSTNIKOV, M. (1): “Géométrie Analytique (Leçons de Géométrie I)” (trad. fr.), MIR 1981
- POSTNIKOV, M. (2): “Algèbre linéaire et Géométrie différentielle (Leçons de Géométrie II)” (trad. fr.), MIR 1981
- POSTNIKOV, M. (3): “Smooth Manifolds (Lectures on Geometry, Semester III)” (engl. transl.), MIR 1989
- POSTNIKOV, M. (4): “Lie Groups and Lie Algebras (Lectures on Geometry, Semester V)” (engl. transl.), MIR 1986
- ROGOSINKI, W.: “Volume and Integral”, Oliver & Boyd 1952
- ROMAN, P.: “Some Modern Mathematics for Physicists and other Outsiders”, 2 vols., Pergamon Press 1975
- RUND, H.: “The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations”, Van Nostrand 1966
- SAKAI, T.: “Riemannian Geometry”, Amer. Math. Soc. 1992
- SCHOUTEN, J.A.: “Ricci-Calculus”, Springer 1954

- SHILOV, G.E. (1): “Analisi matematica – funzioni di più variabili reali”, parti 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>, (trad. ital.) MIR 1979
- SHILOV, G.E. (2): “Linear Algebra” (engl. transl.), Dover 1977
- SMIRNOV, V.I.: “A Course of Higher Mathematics” (engl. transl.), 5 vols. Pergamon Press 1964
- SOBOLEV, S.L. (1): “Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics”, Amer. Math. Soc. 1963
- SOBOLEV, S.L. (2): “Partial Differential Equations of Mathematical Physics” (engl. transl.), Pergamon Press 1965
- SOURIAU, J.-M.: “Structures des systèmes dynamiques”, Dunod 1970
- SPIVAK, M.: “Differential Geometry” (5 vols.), Publish or Perish 1970
- SYNGE, J.L., SCHILD, A.: “Tensor Calculus”, Un. of Toronto Press 1949
- THIRRING, W.: “Classical Dynamical Systems (a Course in Mathematical Physics, I)”, Springer 1978
- THRON, W.J.: “Topological Structures”, Holt, Rinehart & Winston 1966
- TONELLI, L.: “Fondamenti del calcolo delle variazioni”, 2 voll., Zanichelli 1921-1922
- TRENOGUINE, V.: “Analyse fonctionnelle” (trad. fr.), MIR 1985
- VARGA, R.: “Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis”, The Soc. for Ind. and Appl. Maths. 1971
- VLADIMIROV, V.S.: “Equations of Mathematical Physics” (engl. transl.), MIR 1984
- VON WESTENHOLZ, C.: “Differential Forms in Mathematical Physics”, North Holland 1978
- WEINSTOCK, R.: “Calculus of Variations”, McGraw-Hill 1952, repr. Dover 1974
- WASSERMANN, R.H.: “Tensors and Manifolds, with Applications to Mechanics and Relativity” Oxford Un. Press 1992
- WEYL, H.: “Raum Zeit Materie”, 1918; engl. transl., “Space Time Matter”, Dover 1922
- YANO, K., KON, M.: “Structures on Manifolds”, World Scientific 1984
- YOSIDA, K.: “Functional Analysis”, 3<sup>rd</sup> ed., Springer 1971
- ZEIDLER, E.: “Nonlinear Functional Analysis”, 5 vols, Springer 1986



## B) FISICA TEORICA MACROSCOPICA

- BECKER, R.: "Theorie der Elektrizität" (2 Bänd.), 1930, 1932; trad. it. "Teoria della Eletticità" (2 voll.), Sansoni, 1949
- CHAPMAN, S., COWLING, T.G.: "The mathematical theory of non-uniform gases", Cambridge Un. Press, 2nd ed. 1960
- CIUFOLINI, I., WHEELER, J.A.: "Gravitation and Inertia", Princeton Un. Press, 1995
- DIRAC, P.A.M.: "General Theory of Relativity", Wiley-Interscience, 1975
- DIXON, W.G.: "Special Relativity, the Foundation of Macroscopic Physics", Cambridge Un. Press, 1978
- EDDINGTON, A.S.: "The mathematical Theory of Relativity", Cambridge Un. Press, 1923
- EINSTEIN, A. et al.: "The Principle of Relativity" (engl. transl.), Dover, 1923
- EINSTEIN, A.: "Relativity: the Special and General Theory", Crown, 1961
- FLÜGGE, S. (ed.): "Principles of Electrodynamics and Relativity (vol. IV of Handbuch der Physik)", Springer, 1962
- FOCK, V.: "The Theory of Space Time and Gravitation" (engl. transl.), Pergamon Press, 1964
- GÖCKLER, M., SCHÜCKER, T.: "Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity", Cambridge Un. Press, 1987
- HAWKING, S.W., ELLIS, G.F.R.: "The Large-Scale Structure of Space-Time", Cambridge Un. Press, 1973
- JACKSON, J.D.: "Classical Electrodynamics", Wiley 1962 (enlarged edit. 1998)
- JONES, D.S.: "The Theory of Electromagnetism", Pergamon Press, 1964
- LANDAU, L., LIFCHITZ, E.: "Théorie du champ (Physique Théorique, tome II)" (trad. fr.), MIR, sans date; trad. ital., Editori Riuniti 1976
- MAGGI, G.A.: "Teoria fenomenologica del Campo Elettromagnetico" Hoepli 1931
- MC WITTIE, G.C.: "General Relativity and Cosmology", Wiley, 1956
- MISNER, C.W., THORNE, K.S., WHEELER, J.A.: "Gravitation", Freeman, 1973
- MØLLER, C.: "The Theory of Relativity", Clarendon Press, 1952
- PANOFSKY, W., PHILLIPS, M.: "Classical electricity and magnetism", 2<sup>nd</sup> ed. Addison-Wesley, 1962
- PAULI, W.: "Relativitätstheorie", Teubner, 1921; trad. it. "Teoria della relatività", Boringhieri, 1958
- PENFIELD, P., HAUS, H.A.: "Electrodynamics of Moving Media", MIT Press 1966
- O'RAHILY, A.: "Electromagnetic Theory: a Critical Examination of Fundamentals" (2 vols.), Dover, 1965 (1<sup>st</sup> ed., Longmans; Cork Un. Press, 1938)

- ROSSER, W.G.: "The Theory of Relativity", Butterworths, 1964
- STEPHANI, H., KRAMER, D., MACCALLUM, M., HOENSELAERS, C., HERLT, E.: "Exact Solutions of Einstein's Field Equations", Cambridge Un. Press, 2003
- STEPHENSON, G., KILMINSTER, C.W.: "Special Relativity for Physicists", Longmans 1958
- STRATTON, J.: "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill 1942, trad. ital. "Teoria dell'elettromagn.", Einaudi 1952
- STRAUMANN, N.: "General Relativity and Relativistic Astrophysics", Springer, 1991
- SYNGE, J.L., GRIFFITH, B.A.: "Principles of Mechanics", McGraw-Hill, 3<sup>rd</sup> ed. 1959
- SYNGE, J.L. (1): "Relativity: the Special Theory", North-Holland, 2<sup>nd</sup> ed. 1964
- SYNGE, J.L. (2): "Relativity: the General Theory", North-Holland, 4<sup>th</sup> pr. 1972
- TOLMAN, R.C.: "Relativity, Thermodynamics, Cosmology", Clarendon Press, 1934
- WALD, R.M.: "General Relativity", Un. of Chicago Press, 1984
- WEINBERG, S.: "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", Wiley, 1972

## C) SAGGISTICA FISICA

- BERGMANN, P.G.: “Il mistero della gravitazione” (trad. ital.), Mondadori, 1969
- BONDI, H.: “Cosmology”, Cambridge Un. Press, 1960; trad. ital. “Sguardi sull’Universo”, Zanichelli, 1964
- BONNOR, W.: “The Mystery of the Expanding Universe”, Macmillan, 1964
- BRIDGMAN, P.: “The Logic of Modern Physics”, Macmillan 1927, trad. ital. “La logica nella fisica moderna”, Boringhieri 1984
- EINSTEIN, A. (2): “The Meaning of Relativity”, Princeton Un. Press, 1<sup>st</sup> ed. 1921, 4<sup>th</sup> ed. 1953; trad. ital. “Il significato della relatività”, Newton & Compton, 2<sup>a</sup> ed. 2005
- FEYNMAN, R.: “The Character of Physical Law”, MIT Press 1965, trad. ital. “La legge fisica”, Boringhieri 1971
- GALILEI, G.: “Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo”, Fabbri 2006
- GRATTON, L.: “Relatività, cosmologia, astrofisica”, Boringhieri, 1968
- GRAY, J.: “Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic”, Clarendon Press, 1979
- KUHN, T.: “La rivoluzione copernicana” (trad. ital.), Einaudi 1981
- MARGENAU, H.: “The Nature of Physical Reality”, Mcgraw-Hill 1950
- PENROSE, R.: “The Road to Reality”, Jonatan Cape, 2004, trad. it. “La strada che porta alla realtà”, Rizzoli, 2005
- REES, M.: “Our Cosmical Habitat”, Princeton Un. Press, 2001, trad. it. “Il nostro ambiente cosmico”, Adelphi, 2004
- SCHILPP, P.A. (ed.): “Albert Einstein: Philosopher-Scientist”, The Library of Living Philosophers, 1949; trad. it. “Albert Einstein, scienziato e filosofo”, Einaudi 1958
- SCIAMA, D.W.: “Cosmologia moderna” (trad. ital.), EST Mondadori, 1973

## D) SAGGISTICA MATEMATICA

CASARI, E.: "Questioni di filosofia della matematica" Feltrinelli 1964

COURANT, R., ROBBINS, H.: "What is Mathematics?" Oxford Un. Press, 1941, trad. it. "Che cos'è la matematica?", Boringhieri, 1961

KLINE, M.: "Mathematics: the Loss of Certainty", Oxford Un. Press 1980

LOLLI, G.: "Filosofia della Matematica", Il Mulino 2002

NAGEL, E., NEWMAN, J.: "Gödel's Proof", New York Un. Press 1958, trad. ital. "La prova di Gödel", Boringhieri 1961

WANG, H.: "From Mathematics to Philosophy" Routledge 1974, trad. ital. "Dalla matematica alla filosofia", Boringhieri 1984

## E) FILOSOFIA DELLA SCIENZA

BARONE, F.: "Il neopositivismo logico" (2 voll.), Laterza, 1977

CARNAP, R.: "Philosophical Foundations of Physics", Basic Books, 1966; trad. it. "I fondamenti filosofici della fisica", Il Saggiatore, 1971

DALLA CHIARA, M.L., TORALDO DI FRANCA, G.: "Introduzione alla filosofia della scienza", Laterza 1999

DUHEM, P.: "La théorie physique: son object et sa structure", 1906 ; engl. transl. "The Aim and Structure of Physical Theory", 1954

FRANK, P.: "Philosophy of Science: The Link between Philosophy and Science" Prentice Hall, 1957

HEISENBERG, W.: "Physics and Philosophy", Gifford Lectures 1955/56, trad. ital. "Fisica e filosofia", Il Nuovo Saggiatore, 1961

HOLTON G.: a) "Thematic Origins of Scientific Thought: Kepler to Einstein" Harvard Un. Press 1973; b) "The Scientific Imagination: case Studies" Cambridge Un. Press, 1978; c) "Constructing a Theory: Einstein's Model", The American Scholar, 1979; trad. it. in "L'immaginazione scientifica", (specialmente i saggi n° 4, 5, 7), Einaudi 1983

KANT, I.: "Kritik der reinen Vernunft", 1781 e 1789; trad. it. "Critica della ragione pura", Adelphi, 2ª ed. 2001

KUHN, T.: "La struttura delle rivoluzioni scientifiche" (trad. ital.), Einaudi 1978

MACH, E.: "Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch Dargestellt", 9. Ausg. 1933, engl. transl., "The Science of Mechanics" 1960

NAGEL, E.: "The structure of Science", Harcourt Brace 1961, trad. ital. "La struttura della scienza", Feltrinelli 1984

POINCARÉ, H. (1): "Science et Méthode", Flammarion, 1908, trad. ital. in "Opere epistemologiche", Piovani, 1989

POINCARÉ, H. (2): "La Science et l'Hypothèse", Flammarion, 1920; trad. ital. in "Opere epistemologiche", Piovani, 1989

POPPER, K.: "Logik der Forschung", 1934; trad. ital. "Logica della scoperta scientifica", Einaudi 1970

QUINE, W.V.: "Theories and Things" 1981

REICHENBACH, H.: "Experience and Prediction", Un. Chicago Press 1938

ROTA, G.C.: "Discrete Thoughts", Birkhäuser, 1986; trad. ital. "Pensieri discreti", Garzanti, 1993

WARTOWSKY, M.W.: "Conceptual Foundations of scientific Thought" 1968

WHITTAKER, E: "From Euclide to Eddington" Cambridge Un. Press 1949

## F) LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

- BETH, E.W.: “Les fondements logiques des mathématiques”, Gauthier-Villars, 1955 ; trad. it. in Feltrinelli, 1963
- BOCHENSNSKI, J.M.: “La Logica Formale: p. I, dai Presocratici a Leibniz, p II, La Logica Matematica” (trad. ital.), Einaudi 1972
- BOURBAKI, N.: “Theorie des Ensembles”, Hermann, 1970
- CASARI, E.: “Introduzione alla Logica”, UTET, 1997
- FRAENKEL, A., BAR-HILLEL Y., LEVY, A., VAN DALEN, D.: “Foundations of Set Theory”, North-Holland, 1973
- HALMOS, P.R.: “Naive Set Theory”, Van Nostrand, 1960
- HATCHER, W.: “Foundations of Mathematics”, W.B. Saunders 1968, trad. ital. “Fondamenti della matematica”, Boringhieri 1973
- Heijenoort, J. van (ed.): “Frege to Gödel. A Source-book in Mathematical Logic 1871-1931”, Harvard Un. Press 1967
- KLEENE, S.C.: “Mathematical Logic”, Wiley, 1967
- KURATOWSKI, K., MOSTOWSKI, A.: “Set Theory (with an introduction to descriptive set theory)”, North Holland, 1976
- LOLLI, G.: “Teoria assiomatica degli insiemi”: Boringhieri 1974
- MENDELSON, E.: “Introduction to Mathematical Logic”, Van Nostrand, 1964
- NOVIKOV, P.S.: “Elementi di logica matematica” (trad. ital.), Editori Riuniti, 1975
- SHOENFIELD, J.R.: “Mathematical Logic”, Addison-Wesley, 1967
- SMULLYAN, R.M.: “Theory of Formal Systems”, Princeton Un. Press, 1961
- TAKEUTI, G., ZARING, W.M.: “Introduction to Axiomatic Set Theory”, Springer 1982

## G) STORIA DELLA SCIENZA, BIOGRAFIE SCIENTIFICHE

BELL, E.T.: "Men of Mathematics: The Life and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré", rist. Touchstone, 1986; trad. ital. "I grandi matematici", Sansoni, 1966

BERNSTEIN, J.: "Albert Einstein and the Frontiers of Physics", Oxford Un. Press, 1996; trad. it., "L'uomo senza frontiere: vita e scoperte di Albert Einstein", Il Saggiatore, 2000

BOTTAZZINI, U.: "Storia della matematica moderna e contemporanea", UTET, 1990

BOURBAKI, N.: "Éléments d'histoire des mathématiques", Hermann, 1980

BOYER, C.B.: "A History of Mathematics", Wiley, 1968; trad. it. "Storia della matematica", Mondadori 1980

KLINE, M.: "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times" (2 vols.), Clarendon Press 1972; trad. ital. "Storia del pensiero matematico (I) dall'antichità al Settecento, (II) dal Settecento a oggi", Einaudi 1991

KNEALE, W.C., KNEALE, M.: "The development of Logic", Clarendon Press 1972

OVERBYE, D.: "Einstein in Love. A Scientific Romance", Penguin, 2000

PAIS, A.: "«Subtle is the Lord...»: The Science and Life of Albert Einstein", Oxford Un. Press 1982; trad. ital. "«Sottile è il Signore ...»: la scienza e la vita di Albert Einstein", Einaudi 1991

STRIJK, D.J.: "A concise History of Mathematics", Dover, 1954



## H) ENCICLOPEDI E DIZIONARI FISICO-MATEMATICI

BEHUKE, H., TIETZE, H.: "Mathematik, I, II", Fischer, 1964, 1966; trad. ital. "Enciclopedia Feltrinelli-Fischer, Matematica I e II" 1967, 1968

BERZOLARI, L., VIVANTI, G., GIGLI, D.: "Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi (vol. II, parte I)", Hoepli, rist. anast., 1958

CHAMBADAL, L.: "Dictionaire des Mathématiques Modernes", Larousse, 1969

NAAS, J., SCHMID, H.L.: "Mathematische Wörterbuch" (2 Bänd.), Akademie, 1961

VINOGRADOV, I.M. (ed. in chief): "The Encyclopædia of Mathematics", 10 vols. (engl. transl.), «Soviet Encyclopædia» Publishing House, Kluwer Academic Publishers, 1997 (anche in versione digitale)

WEISSTEIN, E.W.: "CRC Concise Encyclopædia of Mathematics, CRC Press, 1999

## LISTA DEGLI ACRONIMI USATI IN QUESTO LIBRO

- (B)  $\equiv$  Bourbaki (sistema assiomatico di  $-$ )  
(ZFC)  $\equiv$  Zermelo-Fraenkel-Choice (sistema assiomatico di  $-$ , piÙ l'assioma di scelta)  
AS  $\equiv$  Assioma di Scelta, anche AC (in inglese, con C per Choice)  
CdC  $\equiv$  Classe di Continuità  
CdV (o CDV)  $\equiv$  Calcolo delle Variazioni  
CE  $\equiv$  Calcolo Enunciativo  
Chr1, Chr2  $\equiv$  simbolo di Christoffel di 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> specie  
CL  $\equiv$  Coppia Libera  
CMB  $\equiv$  Cosmic Microwave Background  
CO  $\equiv$  Coppia Ordinata  
CP  $\equiv$  Calcolo Proposizionale  
CPP  $\equiv$  Coppia  
CPT  $\equiv$  Carica Parità Tempo  
DC  $\equiv$  Dato di Cauchy  
DTD  $\equiv$  Definizione Teorema Dimostrazione  
EDO  $\equiv$  Equazione Differenziale Ordinaria  
EDP  $\equiv$  Equazione Differenziale alle derivate Parziali  
EDP1  $\equiv$  Equazione Differenziale alle derivate Parziali del 1° ordine a due variabili indipendenti  
EDP1<sub>n</sub>  $\equiv$  Equazione Differenziale alle derivate Parziali del 1° ordine a n variabili indipendenti  
EH  $\equiv$  Einstein-Hilbert  
EL  $\equiv$  Eulero-Lagrange  
EM  $\equiv$  ElettroMagnetismo, ElettroMagnetico  
EST  $\equiv$  Estensione (assioma di  $-$ )  
FB  $\equiv$  Forma Bilineare  
FDD  $\equiv$  Fronte di Discontinuità  
FQ  $\equiv$  Forma Quadratica  
FRW  $\equiv$  Friedmann-Robertson-Walker  
FW  $\equiv$  Fermi-Walker  
GBI  $\equiv$  Germe di Base di Intorni  
GO  $\equiv$  Gauss-Ostrogradskij  
IC  $\equiv$  Ipotesi del Continuo  
IG  $\equiv$  Invertibile Globalmente  
IGC  $\equiv$  Ipotesi Generalizzata del Continuo  
I,IQ  $\equiv$  Infinitesimo Inerziale di Quietè  
I,IQP  $\equiv$  Infinitesimo Inerziale di Quietè Parallelo  
J-  $\equiv$  Jordan-  
L-  $\equiv$  Lebesgue-  
L  $\equiv$  Linguaggio  
LF  $\equiv$  Lemma Fondamentale (del CDV)  
LPC  $\equiv$  Lower Predicate Calculus (calcolo dei predicati del 1° ordine)  
MP  $\equiv$  Modus Ponens  
ON  $\equiv$  OrtoNormale  
PCG  $\equiv$  Problema di Cauchy Generalizzato  
PCN  $\equiv$  Problema di Cauchy Normale

PED  $\equiv$  Problema Esterno di Dirichlet  
PEN  $\equiv$  Problema Esterno di Neumann  
PID  $\equiv$  Problema Interno di Dirichlet  
PIN  $\equiv$  Problema Interno di Neumann  
PM  $\equiv$  Punto Materiale  
pON  $\equiv$  pseudoOrtoNormale  
R-  $\equiv$  Riemann-  
RG  $\equiv$  Relatività Generale  
RS  $\equiv$  Relatività Speciale  
SB  $\equiv$  Spazio di Banach  
SD  $\equiv$  Sistema Dinamico  
SDO  $\equiv$  Sistema di equazioni Differenziali Ordinarie  
SDP  $\equiv$  Sistema di equazioni Differenziali alle derivate Parziali  
SF  $\equiv$  Sistema Formale  
SI  $\equiv$  Sotto-Insieme  
SIST  $\equiv$  Sotto-Insieme (del supporto) di uno Spazio Topologico  
SL  $\equiv$  Spazio Lineare  
SM  $\equiv$  Spazio Metrico  
SST  $\equiv$  Sotto-Spazio Topologico  
ST  $\equiv$  Spazio Topologico  
SU  $\equiv$  Selezione e Unione (assioma di –)  
TC  $\equiv$  Trasformazione Canonica  
TCE  $\equiv$  Trasformazione Canonica Elementare  
TCR  $\equiv$  Trasformazione Canonica Ristretta  
TFM  $\equiv$  Teoria Fisica Matematica  
VAN  $\equiv$  Velocità di Avanzamento Normale

## GLOSSARIO DELLA PARTE 1<sup>a</sup> (CAPP. 0÷2)

Nota Bene: questo glossario elenca definizioni/locuzioni di sufficiente importanza, seguite dalla sigla della sottosezione (numero.numero.numero) o della appendice speciale (numero.lettera maiusc.) ove esse compaiono per la prima volta (scritte in **grassetto** oppure (soltanto in 0.1) tra due ").

- accelerazione (relativa, di trascinamento, complementare) di un punto: 2.1.1, anche 2.A
- addizione [sottrazione] (formule di –, per Cos e Sin): 1.B
- adeguata (TFM–): 0.1.2
- affidabile (TFM –): 0.1.2
- affine (geometria –): 1.4.3
- affine (gruppo –): 1.4.3
- affine (retta –, piano –, ... di uno SL): 2.3.1
- affine (spazio –, associato a  $\mathbb{R}^n$ , associato a uno SL): 1.3.1
- affine (varietà –): 1.4.3
- affine (varietà – associata ad una varietà lineare): 2.3.1
- affine ortogonale (gruppo –): 1.4.3
- alfabeto: 0.1.3
- analitico-algebrica (assiomatizzazione – della geometria euclidea): 1.1.1
- analogia (principio di –): 0.1.4
- angolare (velocità –): 2.1.1
- angolo (tra due raggi di un fascio): 1.2.3
- angolo libero: 1.2.3
- angolo con segno: 1.4.2
- antisimmetrica (relazione binaria –): 1.A
- antisimmetrico (simbolo completamente – di ordine n): 1.4.2
- antiverse (semirette – di una retta): 1.2.2
- applicazione (retta di –): 2.1.2
- asimmetrica (relazione binaria –): 1.A
- assiomatica-deduttiva (attività –): 0.1.1
- assiomatico-deduttivo (ragionamento –): 0.1.1
- assioma: 0.1.3
- associate (FB simmetriche e FQ, su E): 2.3.1
- associatività (del prodotto, in uno SL): 1.3.1
- associatività (della somma, in uno SL): 1.3.1
- assoluta (accelerazione –, velocità –): 2.1.2
- assoluta (coordinata –, di un punto di una retta): 1.2.4
- assolute (coordinate –, di un punto di un piano): 1.2.4
- assoluta (geometria –): 1.2.4
- assoluto (orologio –, tempo –): 2.1.1
- assoluto (riferimento –, in una retta, in un piano, ...): 1.2.4
- automa sequenziale: 0.1.3
- automorfismo: 1.3.1
- autonomo (SDO normale –): 2.1.2
- azione e reazione (principio di –): 2.1.2

- backward (cono solido –, di  $E_{4,3}$ ): 2.3.2
- base (di uno SL finito-dim): 1.3.1
- base ortogonale (teorema della –): 2.3.1
- bicondizionalità (relazione binaria di –): 0.1.3
- base (canonica ordinata di  $\mathbb{R}^n$ ): 1.4.2
- bilineare (forma – su E): 1.3.1
- bilineare simmetrica (forma –): 2.3.1
- bilinearità: 1.3.1
- bisettore (di un angolo): 1.2.3
- bordo (poligonale, poliedrale): 1.4.1
- Born (cronometrizzazione alla –): 2.3.2
  
- campo (elettrico, magnetico): 2.5.1
- canonica (base –): 1.3.1
- canonica (base – ordinata): 1.4.2
- caos deterministico: 2.1.2
- carica elettrica: 2.5.1
- carica elettrica (densità di –): 2.5.1
- cariche (di campo (field charges), di prova (test charges)): 2.5.1
- cartesiana ortogonale (decomposizione –, di un rettangolo): 1.4.1
- cartesiana ortogonale ordinata (n-pla –, di origine O): 1.4.2
- cartesiane oblique (coordinate –, in un piano, nello spazio, ..): 1.2.4
- cartesiane ortogonali (coordinate –, in un piano, nello spazio, ..): 1.2.4
- cartesiana ortogonale (decomposizione –): 1.4.1
- categoricità (di  $H_n$ ): 1.3.1
- Cauchy-Schwarz (disuguaglianza di –): 1.3.1
- Cayley-Menger (determinante di –): 1.4.1
- Cayley-Menger (matrice di –): 1.4.1
- celerità (di una velocità): 2.2.1
- cinematica classica del punto: 2.1.1
- cinetica (energia –): 2.1.2
- Chasles (formula di –): 1.3.1
- chiusa (formula –): 0.1.3
- collineari (terna di punti distinti –): 1.2.2
- complementare (semifascio –): 1.2.3
- complementare (semipiano – rispetto a un semipiano): 1.2.3
- complementare (semiretta –): 1.2.2
- complementari (semispazi – di dato bordo): 1.2.3
- complemento B-ortogonale (di un insieme): 2.3.1
- completa (famiglia –, di uno SL): 1.3.1
- completo (linguaggio –): 0.1.3
- completamente antisimmetrico di ordine n (simbolo –): 1.4.2
- componente (di un elemento di uno SL, in una base data): 2.3.1
- componenti (di un vettore associato a  $\mathbb{R}^n$ ): 1.3.1
- congruenti (insiemi – di uno spazio metrico): 1.4.1
- conducibilità elettrica: 2.5.3
- congruenti, anticongruenti (matrici ortonormali –, rotazioni –): 2.A
- congruenza (di coppie di angoli): 1.2.3

- congruenza (di coppie di rette, teorema della –): 1.2.2
- congruenza (di coppie di punti): 1.2.2
- coniugazione CPT: 2.5.1
- cono isotropo: 2.3.1
- conservazione (leggi di – nella dinamica classica, relativistica, dei continui): 2.H
- continuità (assioma di –): 1.2.4
- convesso (cono –): 2.3.2
- coordinata (di un punto di una retta): 1.2.4
- coordinatazione: 1.1.1
- coplanare (coppia di rette –): 1.2.3
- coplanare (quaterna di quattro punti –): 1.2.3
- coplanare (terna costituita da una retta e da una coppia di punti fuori di essa –): 1.2.3
- coplanari (rette –): 1.2.3
- coppia (di forze): 2.1.2
- coppia libera (di punti): 1.2.2
- Coriolis (accelerazione di –): 2.1.1, anche 2.A
- corrente elettrica (densità di –): 2.5.3
- costanza della celerità della luce nel vuoto (principio della –): 2.2.1
- cumulativo (principio del carattere – delle scienze esatte): 0.1.2
- cuneo (di uno SL): 2.3.2
- cursore: 2.1.2
- curva ( $\equiv$  linea): 1.4.1
  
- Dedekind (proprietà di –): 1.A
- Dedekind (sezione di – di un insieme s-ordinato): 1.A
- deduttivo (ragionamento –): 0.1.2
- definita positiva [negativa] (FB –): 2.3.1
- deficienza (indice di – di una FB): 2.3.1
- definita (positività –, di un quadrato interno): 1.3.1
- definita positiva [negativa, indefinita] (forma quadratica –): 2.3.1
- deformazione (2-tensore di –, 2-tensore di velocità di –): 2.G
- degenerare (FB –): 2.3.1
- denso ( $\leftarrow$ -denso) (insieme s-ordinato –): 1.A
- denso ( $\leftarrow$ -denso) in un insieme s-ordinato (sottoinsieme –): 1.A
- diadica (geometria – del piano, dello spazio, ..): 1.2.3
- diadico positivo (numero): 1.2.3
- differenza (di un AL da un AL): 1.2.3
- differenza (di una CL da una CL): 1.2.2
- differenziante (relazione binaria –): 1.A
- dilatazione (degli intervalli temporali): 2.2.1
- dilatazione (omografia di –, omografia di velocità di –): 2.G
- dimensione (di uno SL): 1.3.1
- dimensione lineare (di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ ): 1.3.1
- dinamica (legge fondamentale della –): 2.1.2
- dinamica generalizzata (legge –): 2.1.2
- dinamici (sistemi –): 2.1.2
- dipendenza [indipendenza] lineare: 2.3.1
- diretta (somma –, di due SS): 2.3.1
- dimostrazione: 0.1.3

- direzioni (in un piano euclideo): 1.2.4
- distanza (applicazione di  $S^2$  in  $R_{\geq 0}$ ): 1.2.2
- distributività (del 1° , del 2° fattore, in uno SL): 1.3.1
- disuguaglianza triangolare: 1.2.3
- disuguaglianza triangolare in  $E_{4,3}$ : 2.4.1
- divisibilità (assioma di  $-$ ): 1.2.3
  
- effetti dinamici (principio di sovrapposizione degli  $-$ ): 2.1.2
- egualitario (linguaggio logico quantificato  $-$ ): 0.1.3
- elementari (rotazioni  $-$ ): 1.3.1
- elettrica (carica  $-$ ): 2.5.1
- elettrica (densità di carica  $-$ , di corrente  $-$ ): 2.5.1, 2.5.3
- elettrica (forza  $-$  di quiete): 2.5.1
- elettrica (conducibilità  $-$ ): 2.5.3
- elettrica (induzione  $-$ ): 2.5.3
- elettrica (permeabilità  $-$  nel vuoto): 2.5.3
- elettrico (campo  $-$  di quiete): 2.5.1
- elettromagnetica (densità di energia  $-$ , flusso di energia  $-$ ): 2.5.2
- elettromagnetici (2-tensori  $-$  coniugati): 2.5.2
- elettromagnetici (2-tensore degli sforzi  $-$ ): 2.5.2
- elettromagnetico (primo, secondo 2-tensore  $-$  antisimmetrico): 2.5.2
- energia meccanica (cinetica, potenziale): 2.1.2
- enunciativo (calcolo  $-$ ):  $\rightarrow$  proposizionale
- enunciato: 0.1.3
- epistemologico (problema  $-$ ): 0.1.1
- equicrone [anticrone] (pseudorotazioni  $-$ ): 2.C
- equidecomponibilità (di poligoni): 1.4.1
- equivalenti (insiemi di cursori  $-$ ): 2.1.2
- equivalenti (FB  $-$ , FQ  $-$ ): 2.3.1
- equiversa [antiversa] (trasformazione pseudortonormale  $-$ ): 2.3.1
- equiverse (semirette di una retta  $-$ ): 1.2.2
- equiversità [antiversità] (di una  $(n+1)$ -pla di  $H_n$ ): 1.4.2
- Erone (formula di  $-$ ): 1.4.1
- esatta (scienza  $-$ ): 0.1.1
- esaustione (metodo di  $-$ ): 1.4.1
- essenzialmente incompleto (linguaggio  $-$ ): 0.1.3
- essere tra (di tre raggi di un fascio): 1.2.3
- essere tra (di un punto rispetto ad altri due, di una terna di punti): 1.2.2
- essere tra (di una retta rispetto a una coppia di punti): 1.2.3
- euclidea (geometria  $-$ ): 1.1.2
- euclideo (invariante  $-$ ): 2.2.1
- euclideo [pseudoeuclideo, semieuclideo, isotropo] (piano  $-$ ): 2.3.1
- euclideo (spazio  $-$  3-dim): 1.2.3
- euclideo [pseudoeuclideo, semieuclideo, antieuclideo] (spazio  $-$  n-dim): 2.3.1
- euleriana (descrizione  $-$  del moto): 2.G
- Eulero (angoli di  $-$ ): 1.3.1
- evento: 2.1.1
  
- fascio (di raggi di un piano, di origine data nel piano): 1.2.3

- fisico-matematica (teoria –): 0.1.2
- fondamenti (problema dei –): 0.1.2
- forma bilineare (su E): 2.3.1
- forma quadratica (su E): 2.3.1
- formale (sistema –): 0.1.4
- formalizzata (teoria fisico-matematica –): 0.1.4
- forward (cono solido –, di  $E_{4,3}$ ): 2.3.2
- forza (agente su un PM): 2.1.2
- frase: 0.1.3
- frontiera (di un triangolo): 1.2.3
  
- galileiana (trasformazione – speciale, omogenea): 2.1.1
- galileiano (gruppo –): 2.1.2
- giacitura (di un piano): 1.2.4
- giacitura orientata (di un piano): 1.4.2
- gravità (accelerazione di –): 2.1.2
- gravitazionale (potenziale –, massa –): 2.1.2
  
- hermitiana (simmetria –): 2.3.1
- Hilbert (spazio di –): 2.3.1
- Hume (circolo vizioso di –): 0.1.3
  
- immaginaria (rotazione –): 2.2.1
- impulsiva (dinamica relativistica –): 2.E
- incidenti (retta e piano –): 1.2.3
- incidenti (rette –): 1.2.2
- incoerente (linguaggio –): 0.1.3
- incompletezza (teorema di –, 2° teorema di –): 0.1.3
- incompleto (linguaggio –): 0.1.3
- indecidibile (enunciato –): 0.1.3
- indefinita (metrica non-degenere –): 2.2.1
- indefinita (FB –): 2.3.1
- indice (di una FB): 2.3.1
- indipendenza degli assiomi: 0.1.3
- induttivo (ragionamento –): 0.1.2
- induzione elettrica [magnetica]: 2.5.3
- inerzia (legge d' –): 2.1.2
- inerziale (classe –): 2.1.2
- inerziale (massa –): 2.1.2
- insieme degli angoli liberi (AL) (struttura sull' –): 1.2.3
- insiemistico (linguaggio logico-quantificato –): 0.1.3
- interno (prodotto –, in uno SL): 1.3.1
- inverso (definizione dell' –): 1.3.1
- inverso (problema – della dinamica): 2.1.2
- isotropa (sfera –): 2.3.1
- isotropo (vettore –): 2.3.1
- istante: 2.1.1
  
- Jacobi (identità di –): 1.4.2



- J-cubabilità (di una regione spaziale): 1.4.1
- J-misurabilità (di una regione di  $H_n$ ): 1.4.1
- J-quadrabilità (di una regione piana): 1.4.1
  
- Kronecker (simboli di  $-$ ): 1.1.2
  
- lacuna (di un insieme s-ordinato): 1.A
- lagrangiana [euleriana] (descrizione – del moto): 2.G
- lati (di un angolo): 1.2.3
- lati (di un s-poligono): 1.4.1
- legame (massa-energia di  $-$ ): 2.2.2
- legge di inerzia: 2.1.2
- legge dinamica fondamentale (per un PM): 2.1.2
- legge dinamica generalizzata: 2.1.2
- libera (coppia di punti distinti  $-$ ): 1.2.2
- libera (famiglia – di elementi di uno SL): 1.3.1
- libero (angolo  $-$ ): 1.2.3
- libero (segmento  $-$ ): 1.2.2
- linea ( $\equiv$  curva): 1.4.1
- linea d'universo (di un punto mobile): 2.1.1
- linea oraria (in  $E_{4,3}$ ): 2.3.2
- lineare (applicazione  $-$ , di uno SL in uno SL): 1.3.1
- lineare (combinazione  $-$ ): 2.3.1
- lineare (dimensione  $-$ , di un SI di  $R^n$ ): 1.3.1
- lineare (dipendenza  $-$ , indipendenza  $-$ ): 2.3.1
- lineare (varietà  $-$ ): 2.3.1
- Lorentz (forza di  $-$ , densità di forza di  $-$ , densità di potenza di  $-$ , quadridensità di forza-energia/ $c^2$  di  $-$ ): 2.5.1, 2.5.2
- Lorentz (dilatazione di  $-$ , delle durate): 2.2.1
- Lorentz (gruppo di  $-$ ): 2.2.1
- Lorentz (tempo locale di  $-$ ): 2.2.1
- Lorentz (trasformazioni speciali di  $-$ ): 2.2.1
- Lorentz-Fitzgerald (contrazione di  $-$ ): 2.2.1
- lorentziana generalizzata (matrice  $-$ ): 2.C
- lorentziano (invariante  $-$ ): 2.2.1
- lorentziano (spazio  $-$ ): 2.3.1
- lunghezza (assiomi della  $-$  di segmenti): 1.4.1
- lunghezza (di una curva): 1.4.1
  
- magnetica (densità di carica  $-$ ): 2.5.1
- magnetica (induzione  $-$ ): 2.5.3
- magnetica (permeabilità – nel vuoto): 2.5.3
- magnetico (campo  $-$ ): 2.5.1
- magnitudine (di un quadrivettore): 2.3.2
- matematizzazione (attività di  $-$ ): 0.1.1
- matrice (di un automorfismo): 1.3.1
- matrice (di una FB simm. o di una FQ, rispetto ad una base): 2.3.1
- Maxwell (SDP di  $-$ , nel vuoto: SDP di  $-$ , in un mezzo materiale): 2.5.1, 2.5.3
- Maxwell (2-tensore di  $-$ ): 2.5.2

- metrica (assiomatizzazione  $-$ ): 1.2.1
- metrica (di uno SL): 2.2.1
- mezzo (punto di  $-$ ): 1.2.3
- Michelson e Morley (esperimento di  $-$ ): 2.2.1
- Minkowski (forza di  $-$ , agente su un PM): 2.2.2
- Minkowski (spazio di  $-$ ): 2.3.2
- Minkowski (2-tensore di  $-$ ): 2.5.3
- minkowskiano (cono, doppio-cono  $-$ , chiuso, aperto): 2.3.2
- misto (prodotto  $-$ , di vettori): 1.4.2
- misura (di un angolo, di un angolo libero): 1.2.4
- misura (di un segmento, di un segmento libero): 1.2.4
- misura standard (di un angolo, di un angolo libero): 1.2.4
- modellazione (attività di  $-$ ): 0.1.1
- modello normale (della geometria euclidea): 1.3.1
- modulo  $\rightarrow$  norma
- modulo [pseudomodulo]: 2.3.1
- moltiplicazione (di una CL per un naturale  $\geq 1$ ): 1.2.2
- momento (di un cursore, rispetto ad un polo): 2.1.2
- momento totale (di un insieme di cursori, rispetto ad un polo): 2.1.2
- morfologia (di un linguaggio): 0.1.3
- moti omorotatori (gruppo dei  $-$ ): 2.A
- moto (di un punto): 2.1.1
- moto (atto di  $-$ ): 2.A
- moto (massa di  $-$ ): 2.2.2
- moto (quantità di  $-$ ): 2.1.2
  
- negazione: 0.1.3
- Newton (prima legge di  $-$ , seconda legge di  $-$ ): 2.1.2
- newtoniana (dinamica  $-$ ): 2.1.2
- non: 0.1.3
- non-degenere ( $\equiv$  non-singolare, regolare) (FB  $-$ ): 2.3.1
- norma (assiomi della  $-$ ): 1.3.1
- normale (modello  $-$ ): 1.3.1
- normale (orologio  $-$ , tempo  $-$ ): 2.1.1
- normalizzata (misura  $-$  di un segmento, di un segmento libero): 1.2.4
- n-pla ordinata cartesiana ortogonale: 1.4.2
- n-volume con segno: 1.4.2
- numerica (densità  $-$ ): 2.H
  
- Ohm (legge di  $-$ ): 2.5.3
- omorotatori (spostamenti  $-$ , spin  $-$ , gruppo dei moti  $-$ ): 2.A
- opposto (angolo  $-$ ): 1.2.3
- ordinata (base canonica  $-$  di  $\mathbb{R}^n$ ): 1.4.2
- ordine (relazioni d'  $-$ , proprietà delle relazioni d'  $-$ ): 1.A
- ordine associato a un ordine stretto: 1.A
- ordine semplice (struttura di  $-$ , sull'insieme delle CL): 1.2.1
- ordine stretto associato a un ordine: 1.A
- ordine stretto totale (s-ordine): 1.A
- ordine totale (t-ordine): 1.A

- orientamenti di  $H_n$ : 1.4.2
- orientamento (di una retta): 1.2.2
- orientamento standard (dello spazio): 1.4.2
- orientata (giacitura – di un piano): 1.4.2
- orientata (retta –): 1.2.2
- orientato (fascio –): 1.2.3
- orientato (s-poliedro –, in  $H_n^{\wedge}$ ): 1.4.2
- orientato (s-poligono –, in  $H_2^{\wedge}$ ): 1.4.2
- orientato (spazio –): 1.4.2
- origine (di un riferimento assoluto, in una retta, in un piano, nello spazio): 1.2.4
- orologio: 2.1.1
- ortocroni (vettori –, in  $E_{4,3}$ ): 2.4.1
- ortogonale (base –, di uno SL): 2.3.1
- ortogonale (di un SI di uno SL): 2.3.1
- ortogonale (proiezione –, di un punto su una retta o un piano che non lo contiene): 1.2.3
- ortogonali (automorfismi –, matrici –): 1.3.1
- ortogonali (trasformazioni – n-dim): 1.2.4
- ortogonalità (criteri di –, in  $E_{4,3}$ ): 2.4.1
- ortogonalità (di due elementi di uno SL, rispetto a una FB simm.): 2.3.1
- ortogonalità: 1.3.1
- ortonormale (trasformazione – n-dim): 1.2.4
- ortonormale (base –): 1.3.1
- ortonormale (matrice): 2.A
- osservativa/induttiva (attività –): 0.1.1
  
- parallela (proiezione –, di un punto su una retta secondo una retta): 1.2.4
- parallele (assioma delle –): 1.2.4
- parallele (rette –): 1.2.3
- parallele (rette –, equiverse, antiverse, in  $E_{4,3}$ ): 2.4.2
- parallele (trasformazioni – di Lorentz (affini, delle velocità, delle forze, ecc.)): 2.D
- paralleli (piani –): 1.2.3
- parallelismo (trasporto per –): 1.3.1
- parallelogramma (regola generalizzata del –): 1.3.2
- parallelogramma orientato di  $H_n^{\wedge}$  (volume con segno del –): 1.4.2
- parola: 0.1.3
- Peano (area secondo –): 1.4.1
- Peano-quadrabilità (di una regione piana): 1.4.1
- permeabilità (elettrica, magnetica): 2.5.3
- perpendicolare (piano – ad un piano): 1.2.3
- perpendicolare (retta –, ad una retta data): 1.2.3
- perpendicolari (retta e piano –): 1.2.3
- piano (per tre punti distinti): 1.2.3
- piano: 1.2.3
- Pitagora (teorema di –): 1.2.4
- pitagorica (distanza –): 1.2.4
- più piccola (di due CL di punti): 1.2.2
- più piccolo (di due AL): 1.2.3
- Poincaré (trasformazioni di –, gruppo di –): 2.2.1
- Poincaré (trasformazione parallela affine di –): 2.D

- Poynting (vettore di –, teorema di –): 2.5.2
- Poisson (formule di –, in cinematica classica): 2.A
- polare (forma –, associata ad una FQ): 2.3.1
- poliedro: → s-poliedro
- poligono: → s-poligono
- potenza relativistica (equazione della –): 2.2.2
- predicativo (calcolo –): 0.1.3
- potenziale (energia –): 2.1.2
- predicativo (calcolo – del 1° ordine): 0.1.2
- prodotto (assiomi del –, in uno SL): 1.3.1
- prodotto (di un naturale per una CL): 1.2.2
- prodotto-vettore (di una coppia ordinata di Vettori): 1.4.2
- proiettiva (geometria –): 1.4.3
- proiettivo (gruppo –): 1.4.3
- proiezione ortogonale (di un evento su una retta non isotropa, in  $E_{4,3}$ ): 2.4.2
- proposizionale (calcolo –): 0.1.3
- propria (accelerazione –, di un PM): 2.2.2
- propria (lunghezza –): 2.2.2
- propria (velocità –, accelerazione –): 2.2.2
- propria [impropria] (rotazione –): 1.3.1
- proprio (tempo –, di un PM): 2.2.2
- pseudodistanza: 2.3.2
- pseudoeuclideo (spazio –): 2.2.1
- pseudoeuclideo [antieucledio, semieucledio] (spazio n-dim –): 2.3.1
- pseudolunghezza (in  $E_{4,3}$ ): 2.4.2
- pseudomodulo (di un vettore di uno spazio pseudoeuclideo): 2.3.1
- pseudopitagorica (FQ –): 2.3.1
- pseudopolari (coordinate –): 2.3.2
- pseudoprodotto interno (in  $E_{4,3}$ ): 2.3.2
- pseudorotazioni: 2.C
- pseudortogonale ( $\equiv$  lorentziano) (gruppo –): 2.D
- pseudortogonale (trasformazione –): 2.3.1
- pseudortonormale (base –): 2.3.1
- pseudosfera: 2.3.1
- pseudosferiche (coordinate –): 2.3.2
- pseudounitario (vettore –): 2.3.1
- punto (oggetto primitivo della geometria euclidea): 1.2.1
- punto-istante: 2.1.1
- punto materiale: 2.1.2
  
- quadrabile (regione piana –, secondo Peano, secondo Jordan): 1.4.1
- quadratica (forma –): 2.3.1
- quadrettatura: 1.4.1
- quadriaccelerazione: 2.3.2
- quadricorrente di convezione: 2.5.2
- quantificato (linguaggio logico –): 0.1.3
- quantità di moto: 2.1.2
- quiete istantanea (riferimento di –): 2.2.2
- quiete (massa di –): 2.2.2

- quinto postulato (di Euclide): 1.1.1
- raggio ( $\equiv$  semiretta): 1.2.2
- rango (di una FB): 2.3.1
- rango (teorema del  $-$ ): 2.3.1
- relativa (cinematica  $-$ , del punto): 2.1.1
- relativa (velocità  $-$ , accelerazione  $-$ ): 2.1.1
- relativistica (conservazione della energia  $-$ ): 2.2.2
- relativistica (equazione della potenza  $-$ ): 2.2.2
- relativistica (massa  $-$ , forza  $-$ , quantità di moto  $-$ , ecc): 2.2.2
- relatività einsteiniana (principio di  $-$ ): 2.1.2
- relatività galileiana (principio di  $-$ ): 2.1.2
- relatività speciale (o ristretta): 2.2.1
- relazione d'ordine: 1.A
- relazione d'ordine stretto: 1.A
- relazione "più piccolo di" (tra due CL): 1.2.2
- relazione "più piccolo di" (tra due AL): 1.2.3
- reticolazione:  $\rightarrow$  quadrettatura
- retta (per due punti): 1.2.2
- retta: 1.2.2
- retta di applicazione (di un cursore): 2.1.2
- rettangolari (coordinate  $-$  in un piano, nello spazio): 1.2.4
- retto (angolo  $-$ , angolo libero  $-$ ): 1.2.3
- relativo (spin  $-$ ): 2.A
- relativistica (forza  $-$ ): 2.2.2
- relativistica (densità di energia  $-$ ): 2.H
- relativistica (densità di quadriforza  $-$ ): 2.H
- relatività (principio di  $-$ ): 2.2.1
- reversibile (moto  $-$ ): 2.1.2
- riflessiva (relazione binaria  $-$ ): 1.A
- rigido (spostamento  $-$ ): 1.4.2, anche 2.A
- risultante (di un insieme di cursori): 2.1.2
- $\mathbb{R}^n$  orientato ( $\equiv \mathbb{R}^n$ ): 1.4.2
- Römer (coordinata di  $-$ ): 2.2.1
- rotatorio (atto di moto  $-$ ): 2.A
- rototraslazioni (gruppo delle  $-$ ): 1.4.3
- rotazione: 2.A
- rotazioni ( $\equiv$  matrici ortogonali, proprie, improprie): 1.3.1
- Saccheri (quadrilatero di  $-$ ): 1.2.4
- se... allora (implicazione  $-$ ): 0.1.1
- segmento (della geometria euclidea: aperto, chiuso, aperto-chiuso): 1.2.2
- segmento (tra due eventi di  $E_{4,3}$ ): 2.4.1
- segnatura (di una FB): 2.3.1
- semantica (di un linguaggio): 0.1.4
- semidefinita positiva [negativa] (forma quadratica  $-$ ): 2.3.1
- semifascio (di raggi di un semipiano, di origine data sul suo bordo): 1.2.3
- semigruppo abeliano senza elemento neutro (struttura di  $-$  sull'insieme delle CL): 1.2.2
- semipiano (di bordo dato e contenente un punto fuori di esso): 1.2.3

- semipiano (di un piano, bordato da una retta data del piano): 1.2.3
- semipiano positivo (di un riferimento assoluto, in un piano, nello spazio): 1.2.4
- semiortonormale (base  $-$ ): 2.3.1
- semiretta (di data origine e contenente un punto): 1.2.2
- semiretta (di una data origine e di una data retta): 1.2.2
- semiretta positiva (di un riferimento assoluto, in una retta, in un piano, nello spazio): 1.2.4
- semispazio positivo (di un riferimento assoluto nello spazio): 1.2.4
- separazione (di un insieme  $s$ -ordinato): 1.A
- separatore (di una  $D$ -sezione): 1.A
- separazione differenziale in  $E_{4,3}$ : 2.4.2
- separazione normalizzata in  $E_{4,3}$ : 2.4.2
- separazione ortogonale in  $E_{4,3}$ : 2.4.2
- sezione (di un insieme  $s$ -ordinato): 1.A
- sfera isotropa: 2.3.1
- sghembe (rette  $-$ , in  $E_{4,3}$ ): 2.4.2
- simili (figure  $-$ ): 1.2.4
- similitudine (fattore o coefficiente di  $-$ ): 1.2.4
- similitudine: 1.2.4
- similitudini (gruppo delle  $-$ ): 1.4.3
- simmetria (della somma, in uno SL): 1.3.1
- simmetrica (FB  $-$ , forma quadratica  $-$  su  $E$ ): 2.3.1
- simmetrica (relazione  $-$ ): 1.A
- simultaneità (relatività della  $-$ ): 2.2.1
- sincronizzazione (procedure di  $-$ ): 2.2.1, anche 2.B
- sintassi (di un linguaggio): 0.1.4
- sintetica (assiomatizzazione  $-$  della geometria euclidea): 1.1.1
- solido (cuneo  $-$ , cono  $-$ ): 2.3.2
- soluzione (di un'equazione): 0.1.2
- somma (assiomi della  $-$  in uno SL): 1.3.1
- somma (di due CL di punti): 1.2.2
- somma (di due AL): 1.2.3
- somma (di due SS): 2.3.1
- somma (di due SS): 2.3.1
- somma-prodotto (assiomi della  $-$  in uno SL): 1.3.1
- sottospazio (di uno SL): 2.3.1
- sottrazione (di una CL da una CL): 1.2.2
- sottrazione (formule di  $-$ , per Cos e Sin): 1.A
- sovrapposizione (principio di  $-$  degli effetti dinamici): 2.1.2
- spazio affine associato a  $R^n$ : 1.3.1
- spazio di Hilbert (assiomi di uno  $-$ ): 2.3.1
- spazio di Hilbert (euclideo, pseudoeuclideo): 2.3.1
- spazio di Minkowski: 2.3.2
- spazio euclideo 3-dimensionale: 1.2.3
- spazio lineare (su  $R$ , su  $C$ ; assiomi di uno  $-$ ): 1.3.1
- spazio orientato associato a  $H_n$ : 1.4.2
- spazio vettoriale associato a  $H_n$ : 1.3.2
- speciale (relatività  $-$ ): 2.2.1
- specifici (assiomi  $-$ , di una teoria matematica): 0.1.2
- spin (gruppo additivo degli  $-$ ): 2.A
- spin (relativo, di trascinamento): 2.A

- s-poliedro (volume di un  $-$ ): 1.4.1
- s-poliedro: 1.4.1
- s-poligono (area di un  $-$ ): 1.4.1
- s-poligono (di dato bordo): 1.4.1
- s-poligono (triangolazione di un  $-$ ): 1.4.1
- s-poligono: 1.4.1
- spostamento (di un punto, in un dato intervallo temporale): 2.1.1
- spostamento rigido in  $H_n$ : 1.4.2, 2.A
- stella  $\rightarrow$  fascio
- strettamente formalizzato (linguaggio): 0.1.3
- stringa: 0.1.3
- strutturale (stabilità  $-$ ): 0.1.2
- supplementare (angolo  $-$ ): 1.2.3
- supplementare (AL  $-$ ): 1.2.3
- Sylvester (teorema di  $-$ ): 2.3.1
  
- Talete (teorema di  $-$ ): 1.2.4
- temporale [spaziale, luminale] (quadrivettore  $-$ , curva  $-$ ): 2.3.2
- teorema: 0.1.3
- tetraedrazione (di un s-poliedro): 1.4.1
- tetraedro (di vertici distinti dati, chiuso, aperto): 1.2.3
- tetraedro: 1.4.1
- time-like (space-like, light-like) (quadrivettore  $-$ , curva  $-$ , di  $E_{4,3}$ ): 2.3.2
- traiettoria: 2.1.2
- transitiva (relazione binaria  $-$ ): 1.A
- trascinamento (velocità di  $-$ , accelerazione di  $-$ , spin di  $-$ ): 2.1.1, 2.A
- trasformazioni relativistiche (delle velocità, delle accelerazioni, delle forze, delle quantità di moto-energie/ $c^2$ , delle velocità proprie, delle accelerazioni proprie, delle forze di Minkowski, delle  $\tau$ -derivate delle quantità di moto-energie/ $c^2$ ): 2.D
- traslato (spazio  $-$ , di  $R^n$ ): 1.3.1
- traslatorio (atto di moto  $-$ ): 2.A
- traslazione uniforme speciale: 2.2.1
- traslazioni uniformi speciali (gruppo delle  $-$ ): 2.1.1
- traslazione: 2.A
- traslazioni (gruppo delle  $-$ ): 1.3.1
- traslazioni uniformi (gruppo delle  $-$ ): 2.1.1
- traslazioni uniformi parallele-omogenee (gruppo delle  $-$ ): 2.1.1
- triangolare (disuguaglianza  $-$  diretta, inversa): 2.4.1
- triangolare (disuguaglianza  $-$ ): 1.2.3
- triangolazione (di un s-poligono, s-poliedro): 1.4.1
- triangolare (uguaglianza  $-$ , in  $E_{4,3}$ ): 2.4.1
- triangolo (di vertici distinti dati, chiuso, aperto): 1.2.3
  
- unità (ruolo dell'  $-$ , in uno SL): 1.3.1
- uniforme speciale (traslazione  $-$ ): 2.1.1
- uniformemente accelerato (moto  $-$ ): 2.1.2
- unità di misura (per segmenti, per segmenti liberi): 1.2.4
- unitario [pseudounitario, isotropo] (vettore  $-$ ): 1.3.1, 2.3.1
- unitario (segmento campione  $-$ ): 1.2.4

- universo (dei punti della geometria euclidea): 1.2.2
- universo (curva o linea d' –; in uno spazio newtoniano, in uno spazio di Minkowski): 2.1.1, 2.3.2
  
- varietà lineare (abbracciata da un insieme di uno SL): 2.3.1
- velocità (di un punto): 2.1.1, 2.A
- velocità angolare ( $\equiv$  spin): 2.1.1
- velocità della luce (costanza della –): 2.2.1
- verso (di una retta)  $\rightarrow$  orientamento
- versore: 1.3.1
- vertice (di un fascio): 1.2.3
- vertice (di un semifascio): 1.2.3
- vettori associati a  $\mathbb{R}^n$ : 1.3.1
- Vettoriale (SL associato a  $H_n$ ): 1.3.2
  
- Wallace-Bolyai-Gerwein (teorema di –): 1.4.1
  
- zero (definizione dello –): 1.3.1



## GLOSSARIO DELLA PARTE 2<sup>a</sup> (CAPP. 3÷7)

Nota Bene: questo glossario elenca definizioni/locuzioni di sufficiente importanza, seguite dalla sigla della sottosezione (numero.numero.numero) o della appendice speciale (numero.lettera maiusc.) ove esse compaiono per la prima volta (scritte in **grassetto**). Le voci che non iniziano con una lettera latina sono alla fine della lista.

- abbassamento [innalzamento] (di un indice di una componente tensoriale): 3.1.1
- acustiche (equazione delle onde –): 7.1.2
- additività (di un integrale, come funzione d'insieme): 5.1.1
- additività (principio di – delle forze gravitazionali): 6.4.3
- affinemente connessa (varietà –): 4.3.2, anche 4.B
- aggiunta (equazione integrale –, di una equazione di Fredholm omogenea): 5.A
- ammissibili (funzioni di confronto –, nel CDV): 6.1.1
- analisi caratteristica (di un SDP): 5.3.3
- analitica-reale (n-struttura – su un insieme): 4.1.1
- anomalia media (di un moto kepleriano): 6.4.4
- anticommutatività graduata (del prodotto wedge): 4.4.3
- antisimmetrica (funzione –, rispetto ad una coppia di indeterminate): 3.1.3
- antisimmetrizzazione (operatore di – completa): 3.1.3
- applicazione leibniziana (di un'algebra in  $\mathbb{R}$ ): 4.2.3
- applicazione tangenziale (di uno spazio tangente<sub>f</sub> in uno spazio tangente<sub>f</sub>): 4.2.2, anche 4.2.3
- approssimazioni successive (metodo delle –): 5.3.2
- apsidale (asse –, di una ellisse): 6.A
- apsidali (punti –, di una ellisse): 6.4.2, anche 6.A
- areale (velocità – vettoriale, velocità – scalare): 6.4.2
- arealmente ammissibili (poliedri –): 5.1.3
- armonico (campo  $\kappa$ -tensoriale): 3.4.1
- ascendente (nodo –): 6.4.4
- asintoti (di una iperbole): 6.A
- asintotica (curva –): 3.5.3
- asintotica (direzione –): 3.5.3
- asse (di una parabola): 6.A
- assi [centro] (di una ellisse, di una iperbole): 6.A
- assiale (omografia –):
- associatività (del prodotto wedge): 4.4.3
- associato (autovettore –, ad un autovalore): 3.2.6
- associato (SDO – ad una data EDP): 5.4.1
- assoluta (curvatura –, di un arco): 3.5.2
- assoluta (derivata – di un tensore, lungo un arco di varietà p-riemanniana): 4.A
- assoluto (derivato –, di un campo  $\langle a,b \rangle$ -tensoriale su una varietà): 4.3.2
- assoluto (derivato –, di un campo scalare, vettoriale, covettoriale, su una varietà): 4.3.2
- assoluto (differenziale –, di una componente  $\langle a,b \rangle$ -tensoriale): 4.3.2
- assoluto (invariante –): 3.2.1
- astratta (varietà –): 3.4.1
- atlante (insieme di carte che ricopre un insieme): 4.1.1

- attrattivo-piano [repulsivo-piano] (moto elastico –): 6.4.2
- autoaggiunto: → hermitiano: 3.2.6
- autoconiugato (spazio –): 3.1.2
- automorfismi lineari: 3.2.1
- autoproblema: 3.2.6
- autospazio (di un operatore lineare): 3.2.6
- autovalore: 3.2.6
- autovettore (di un operatore lineare): 3.2.6
- avanzamento normale (velocità di –, di una superficie mobile): 7.A
- azione (integrale di –): 6.3.1
- azione-angolo (coppia di variabili coniugate di –): 6.4.2
- azione EM stazionaria (principio dell' –): 7.1.2
  
- banale ( $\langle r, n \rangle$ -varietà): 4.1.1
- Beltrami (identità di –): 6.3.1
- Betti (numero di –): 4.5.1
- Bianchi (identità di –): 3.4.1
- Bianchi (prime, seconde identità di –): 3.4.1
- biarmonico (campo  $\kappa$ -tensoriale): 3.4.1
- biduale (spazio –): 3.1.2
- bilineare (forma –): 3.2.6
- Binet (formula di –): 6.4.3
- binormale (versore –, di un arco): 3.5.2
- blocco (o  $\kappa$ -blocco): 5.1.2
- bordata (varietà –): 4.1.2
- bordo (di una varietà): 4.1.2
- B-ortogonali (matrici –): 3.2.1
- brachistocrona (problema della –): 6.1.1, 6.2.1
- bundle: → fibrato
  
- cambiamento di variabile in L-integrali (teorema del –): 5.1.4
- cambiamento di variabile (teorema del –): 5.1.3
- campo (nel CDV multidim): 7.1.1
- campo (rispetto a una lagrangiana, nel CDV unidim): 7.2.1
- canonica (base –, dello spazio delle  $\kappa$ -forme simmetriche, antisimmetriche): 4.4.2
- canonica (biiezione –, di uno spazio sul suo biduale): 3.1.4
- canonica (carta –, di  ${}^o\mathbb{R}^m$ ): 4.2.2
- canonica (corrispondenza –, tra  $\langle a, b \rangle$ -forme e  $\langle a, b \rangle$ -tensori): 4.3.1
- canonica (inclusione –, di una varietà in una varietà): 4.2.1
- canonica (prima, seconda rappresentazione – di una  $\kappa$ -forma simmetrica, antisimmetrica): 4.4.2
- canonica (topologia – di una varietà): 4.1.1
- canonica (trasformazione –): 6.3.3
- canonica controvariante [covariante] (base –, dello spazio cotangente<sub>f</sub> [tangente<sub>f</sub>] di una varietà, in una carta): 4.2.2
- canonica controvariante [covariante] (base –, secondo il metodo algebrico, in una carta): 4.2.3
- canonica elementare (trasformazione –; del 1° tipo, del 2° tipo): 6.3.4
- canonica(o) (applicazione –, isomorfismo –, di uno spazio lineare sul suo biduale): 4.3.1
- canonicamente duali (basi –): 4.3.1
- canoniche (forme simmetriche –, forme antisimmetriche –, rispetto a una coppia di indici): 4.4.2

- canoniche (identità –, equazioni –, nel CDV unidim): 6.3.2
- canoniche (identità –, equazioni –, nel CDV multidim): 7.1.1
- canoniche (identità –, equazioni –, nel CDV omogeneo unidim): 7.A
- canonici (momenti – del campo EM): 7.1.2
- canonici (momenti –, nel CDV multidim): 7.1.1
- canonici (momenti –, nel CDV omogeneo unidim): 7.A
- canonico ( $\langle \omega, 1 \rangle$ -atlante –, di un cerchio): 4.1.3
- capacità  $\langle a, b \rangle$ -tensoriale: 4.3.3
- canonico ( $\langle 1, 1 \rangle$ -atlante –, di un arco): 4.1.3
- caratteristica (di un indice ordinato): 4.4.1
- caratteristica (direzione –, come generatrice di un cono di Monge): 5.4.1
- caratteristica (direzione –, di un SDP): 5.3.3
- caratteristica (equazione –, di un SDP): 5.3.3
- caratteristica (equazione algebrica –): 3.2.6
- caratteristica (forma –, di un SDP): 5.3.3
- caratteristica (funzione –, di un dominio J-misurabile): 5.1.1
- caratteristica (matrice –, di un SDP): 5.3.3
- caratteristica (striscia –, per una EDP1): 5.4.1
- caratteristica (traiettoria – per una EDP1): 5.4.1
- caratteristica (traiettoria –, curva –, n-striscia –, per una EDP1<sub>n</sub>): 5.4.2
- caratteristica (varietà –, di un SDP): 5.3.3
- caratteristica di base (curva –, di una EDP1): 5.4.1
- caratteristica di base (varietà –, per una EDP1<sub>n</sub> quasilineare): 5.4.2
- caratteristiche (celerità, di un SDP iperbolico): 7.1.2
- caratteristiche (direzioni –, campo di direzioni –, di un SDP): 5.3.3, 5.4.1
- caratteristico ( $(n-1)$ -piano –, di un SDP): 5.3.3
- caratteristico (PCG –): 5.3.3
- caratteristico (SDO –, associato a una EDP1): 5.4.1
- carico (di uno spazio carico): 5.1.1
- carico (spazio –): 5.1.1
- carta (di un insieme): 4.1.1
- carta di una varietà (in un punto): 4.1.1
- carte (metodo delle –, o metodo fisico): 4.2.2
- carte (metodo esteso delle –): 4.3.1
- cartesiana (base –): 3.3.1
- cartesiane (componenti –, di un  $\kappa$ -tensore): 3.3.1
- cartesiane (coordinate – covarianti, coordinate – controvarianti): 3.3.1
- catena (regola della –, per funzioni differenziabili): 3.3.2
- Cauchy (dato di –): 5.3.2
- Cauchy (problema di – generalizzato, nei SDP): 5.3.3
- Cauchy (problema di – normale, nei SDP): 5.3.2
- Cauchy (problema di –): 5.3.1
- Cauchy-Kowalewskaia (teorema di –): 5.3.2
- Cauchy-Lipschitz (metodo di –): 5.3.2
- Cavalieri (principio di –): 5.1.1
- cavatappi (regola del –): 5.2.2
- Cavendish (costante di –): 6.4.3
- cellule (di un carico): 5.1.1

- centrale (moto  $\rightarrow$ , rispetto a un polo): 6.4.2
- centrata (carta di una varietà  $\rightarrow$  in un suo punto): 4.1.1
- cerchio (come  $\langle \omega, 1 \rangle$ -varietà): 4.1.3
- chiusa ( $\kappa$ -forma  $\rightarrow$ , in un punto): 4.5.1
- Christoffel (simboli di  $\rightarrow$ , di 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> specie): 3.3.2, anche 3.4.1
- Christoffel (simboli generalizzati di  $\rightarrow$ ): 3.4.1
- ciclo orientato: 5.2.2
- cilindro di sezione data compreso tra due reali: 5.1.1
- cinematica (condizione di compatibilità  $\rightarrow$ ): 5.3.3
- circolazione:  $\rightarrow$  circuitazione
- circuitazione (di un campo vettoriale, lungo un ciclo orientato): 5.2.2
- Clairaut (teorema di  $\rightarrow$ ): 6.2.1
- classe di continuità (di un atlante): 4.1.1
- classe di continuità (di un'applicazione di una varietà in una varietà, in un punto): 4.2.1
- classe di continuità (di una  $\langle r, n \rangle$ -struttura, di un  $\langle r, n \rangle$ -atlante): 4.1.1
- Clebsch (rappresentazione di  $\rightarrow$ , di un campo vettoriale): 5.2.3
- cobase (di una base): 3.1.1
- cogrediente (matrice  $\rightarrow$ , di una matrice): 3.1.1
- cogredienza [controgredienza] (trasformazioni per  $\rightarrow$ ): 3.1.1, anche 3.3.2
- combinatorio (calcolo  $\rightarrow$ , sui  $\langle m, \mu \rangle$ -indici): 4.4.1
- compatibile (atlante  $\rightarrow$ , con un altro atlante): 4.1.1
- compatibile (atlante  $\rightarrow$ , con una  $\langle r, n \rangle$ -struttura): 4.2.1
- compatibilità cinematica (condizioni di  $\rightarrow$ ): 5.3.3
- complementare ( $\langle m, m-\mu \rangle$ -indice  $\rightarrow$ , ad un  $\langle m, \mu \rangle$ -indice): 4.4.1
- completa (figura  $\rightarrow$ , nel CDV unidim): 7.2.1
- completamente simmetrica (funzione  $\rightarrow$ , rispetto a più indeterminate): 3.1.3
- completamente simmetriche [antisimmetriche] ( $\kappa$ -forme  $\rightarrow$ ): 4.4.2
- completo (atlante  $\rightarrow$ ): 4.1.1
- completo (integrale  $\rightarrow$  di una  $EDP_{1,n}$ ): 5.4.2, anche 5.4.3
- completo [incompleto] (rotore  $\rightarrow$ , di un campo tensoriale): 3.4.1
- componenti (di una  $\langle a, b \rangle$ -forma): 4.3.1
- condizionati o vincolati (problemi variaz.li  $\rightarrow$ ): 6.1.1
- conducibilità (tensore di  $\rightarrow$ ): 3.2.3
- conducibilità di Hall (coefficiente di  $\rightarrow$ ): 3.2.3
- conducibilità isotropa [parallela, perpendicolare] (coefficiente di  $\rightarrow$ ): 3.2.3
- configurazioni (spazio delle  $\rightarrow$ ): 6.3.2
- confronto (funzioni di  $\rightarrow$ , nel CDV): 6.1.1
- congiunte [disgiunte] (carte  $\rightarrow$ ): 4.1.1
- congruenza (condizioni di  $\rightarrow$ , per una discontinuità): 7.A
- coni delle normali (campo di  $\rightarrow$ , di un SDP): 5.3.3
- conica (definizione polare di una  $\rightarrow$ ): 6.A
- coniugate (basi  $\rightarrow$ ): 3.1.2
- coniugate (variabili canoniche  $\rightarrow$ ): 6.3.2
- coniugati (endomorfismi  $\rightarrow$ ): 3.1.2
- coniugati (spazi  $\rightarrow$ ): 3.1.2
- connessione (coefficienti di  $\rightarrow$ ): 4.3.2
- connessione simmetrica (generata da un 2-tensore simmetrico non singolare): 4.3.2
- connessioni affini (campo di  $\rightarrow$ ): 4.3.2
- conservazione (leggi di  $\rightarrow$ , leggi di  $\rightarrow$  generalizzate): 7.2.2

- contatto (n-strisce di  $-$ , per una EDP $1_n$ ): 5.4.3
- controvariante (componente  $-$ , di un vettore $_f$  di una varietà, in una carta): 4.2.2
- convesso (SI di uno spazio lineare): 5.1.1
- convex hull:  $\rightarrow$  k-inviluppo convesso
- coordinate (di un punto, in una carta): 4.1.1
- coordinate (funzioni  $-$ , di una carta): 4.1.1
- corda vibrante (equazione della  $-$ ): 7.1.2
- corrispondenza (principio di  $-$ , in meccanica quantistica): 6.3.4
- corrispondenza canonica (tra  $\kappa$ -tensori e  $\kappa$ -forme): 3.1.2
- cotangente $_f$  (spazio  $-$ , di una varietà in un suo punto): 4.2.2
- Coulomb (gauge di  $-$ ): 5.2.3
- covariante [controvariante] (componente  $-$  di una  $\kappa$ -forma in una data base): 3.1.1
- covariante (componente  $-$  di un covettore $_f$  di una varietà, in una carta): 4.2.2
- covarianti (componenti  $-$ , di un differenziale): 4.2.2
- covarianti [controvarianti] (componenti  $-$  di un ( $\kappa \geq 1$ )-tensore): 3.1.1
- covarianti [controvarianti, miste] (componenti  $-$  del tensore fondamentale): 3.3.2
- covarianza [controvarianza]:  $\rightarrow$  cogredienza [controgrredienza]
- covettore $_f$  (di una varietà in un suo punto, secondo il metodo fisico): 4.2.2
- critico (punto  $-$ , di un'applicazione di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ ): 3.4.1
- critico (punto o elemento  $-$ , per un funzionale): 6.1.2
- curvatura (di una ipersuperficie secondo un suo arco): 3.5.3
- curvatura geodetica [normale, totale] (vettore di  $-$  di un arco di varietà): 6.2.2
- curvatura (invarianti di  $-$ ): 3.4.2, anche 3.5.4
- curvatura (linea di  $-$ ):  $\rightarrow$  arco principale
- curvatura (tensore di  $-$ )  $\rightarrow$  Riemann (campo 4-tensoriale di  $-$ ): 3.4.1
- curvatura con segno (di un arco di piano euclideo): 3.5.1
- curvatura di misura (2-tensore di  $-$ ): 4.B
- curvatura scalare: 3.4.1
- curvature (di un arco  $C^m$  embedded in  $\mathbb{R}^m$ ): 3.5.2
- curve tangenti (di una varietà): 4.2.3
  
- d'Alembert (equazione di  $-$ ): 7.1.2
- d'Alembert (operatore DP di  $-$ ): 5.2.4
- Darboux (somme integrali di  $-$ ): 5.1.1
- decomponibile [indecomponibile] (elemento  $-$ ): 3.1.2
- decomposizione ortogonale marcata (in una parametrizzazione data): 5.1.3
- densità (di potenziale di volume, di strato semplice, di strato doppio): 5.2.3
- densità (di una J-misura): 5.1.3
- densità  $\langle a,b \rangle$ -tensoriale: 4.3.3
- derivata (di una funzione secondo un vettore): 4.2.3
- derivata (lungo un arco di una varietà immersa): 3.5.3
- derivata (secondo un vettore $_f$ ): 4.2.2
- derivata debole:  $\rightarrow$  G-derivata
- derivata forte:  $\rightarrow$  F-derivata
- derivata variazionale (di un funzionale integrale multidim): 7.1.1
- derivate ordinarie (equazione differenziale alle  $-$ , sistema di equazioni differenziali alle  $-$ ): 5.3.1
- derivate parziali (equazione differenziale alle  $-$ , sistema di equazioni differenziali alle  $-$ ): 5.3.1
- derivato (campo  $-$  di un campo  $\kappa$ -tensoriale): 3.3.1
- derivato (di un  $\langle a,b \rangle$ -tensore): 4.3.2

- derivato secondo (campo – di un campo  $\kappa$ -tensoriale): 3.3.1
- derivazione (come funzionale lineare leibniziano): 4.2.3
- derivazione di funzione di funzione (teorema della –): 5.3.3
- destrorsa (regola –) → cavatappi (regola del –): 5.2.2
- diagonalizzazione (di una matrice): 3.2.6
- Didone (problema di –): 6.2.1
- diffeomorfismo: →  $r$ -diffeomorfismo
- differenziabile ( $\langle r, n \rangle$ -struttura –, su un insieme): 4.1.1
- differenziabile ( $\langle r, n \rangle$ -varietà): 4.1.1
- differenziale: → applicazione tangenziale
- differenziale: → esterna
- differenziale (di una varietà in un suo punto, secondo il metodo algebrico): 4.2.3
- differenziali lineari del 1° ordine (operatori –, in varietà immerse): 3.4.1
- differenziale parziale (equazione –, sistema –): → derivate parziali
- diffusione (coefficiente di –, equazione di –, equazione di – backward): 7.1.2
- dilatazione (coefficiente di –): 7.1.2
- dimensionalmente pura (varietà –): 4.1.2
- dimensione (di un atlante): 4.1.1
- dimensione (di una  $\langle r, n \rangle$ -struttura, di un  $\langle r, n \rangle$ -atlante): 4.1.1
- dimensione (di una carta): 4.1.1
- dimensione (di una varietà, in un punto): 4.1.2
- Dini (teorema di –): 5.4.1
- dipendenza (dominio di –): 5.3.2
- Dirac (pseudofunzione o distribuzione di –): 5.2.3
- diramazione (curva di –, striscia di –): 5.4.1
- diretto (prodotto – ordinato tra due varietà): 4.1.2
- diretti (metodi – del CDV): 6.1.1
- direzioni caratteristiche (campo di –): 5.4.1
- Dirichlet (funzionale di –): 7.1.2
- Dirichlet (nucleo di – interno, nucleo di – esterno): 5.A
- Dirichlet (problema di – interno, problema di – esterno): 5.2.3
- discontinuità (fronte di – del 1°, del 2° ordine ...): 7.A
- discontinuità (superficie mobile di –): → discontinuità (fronte di –)
- divergenza (operatore di –): 3.4.1
- divergenza (teorema della –): 5.2.1
- divergenze (di un campo ( $\kappa \geq 1$ )-tensoriale, di un campo  $\langle a, b \rangle$ -tensoriale): 3.4.1, v. anche 4.3.3
- dominio (di una carta): 4.1.1
- dominio di  $I^n$ : 5.1.1
- Du Bois-Reymond (lemmi di –) : 6.1.2
- duale (base –): 3.1.2
- duale (spazio –, dei funzionali): 3.1.4
- duale (vettore –, di uno spazio lineare): 4.3.1
- due corpi (problema dei –): 6.4.3
- Dupin (indicatrice di –): → indicatrice
  
- eccentrica (anomalia –): 6.4.3
- eccentricità (di una conica): 6.4.2, anche 6.A
- eccesso (funzione di –, nel CDV unidim): 7.2.1
- eccesso (funzione di –, nel CDV omogeneo unidim): 7.3.1

- Einstein (2-tensore di  $-$ ): 3.4.2
- EL (vettore di  $-$ ): 7.2.1
- elastica (curva  $-$ ): 6.2.1
- elastico (4-tensore  $-$ ): 7.1.2
- elastico attrattivo [repulsivo] (moto $-$ ): 6.4.2
- elementare ( $(r,n)$ -varietà  $-$ ): 4.1.1
- elementare (dominio  $-$  di  $I^n$ ): 5.1.1
- elettromagnetici (gauges  $-$ ): 5.2.4
- elettromagnetico (formulazione hamiltoniana del SDP  $-$ ): 7.1.2
- elettromagnetico (potenziale vettore  $-$ , potenziale scalare  $-$ ): 5.2.4
- elettrostatica (equazione scalare dell'  $-$ ): 5.2.4
- ellisse (equazione canonica di una  $-$ ): 6.A
- ellittica [iperbolica, parabolica] (EDP semilineare del 2° ordine  $-$ ): 5.3.3
- ellittici [iperbolici, parabolici] (punti  $-$ , di una superficie): 3.5.4
- ellittico (SDP semilineare  $-$ ): 5.3.3
- equazione canonica della ellisse [iperbole, parabola]: 6.A
- equivalenti (lagrangiane  $-$ , nel CDV unidim, nel CDV omogeneo unidim): 7.2.1
- equiversa [antiversa] (immagine  $-$ ): 3.3.2
- esatta ( $\kappa$ -forma  $-$ , in un aperto): 4.5.1
- esaustione (metodo di  $-$ ): 5.1.1
- esterna (derivata  $-$  di una  $\kappa$ -forma): 4.5.1
- esterna (forma differenziale  $-$ ): 4.5.1
- esterno (calcolo differenziale  $-$ ): 4.5.1
- esterno (prodotto):  $\rightarrow$  wedge (prodotto)
- esterno (prodotto  $-$ , di una  $m$ -pla ordinata di vettori): 3.2.2
- estrema [estremante] (di un funzionale integrale unidim): 6.1.2
- estrema [estremante] (di un funzionale integrale multidim): 7.1.1
- estremante (di un funzionale): 6.1.1
- estremi fissi [liberi] (problema variabile  $a$   $-$ ): 6.1.1
- euleriana (differenza  $-$ , nel CDV multidim): 7.1.1
- euleriana (differenza  $-$ , nel CDV unidim): 6.1.2
- Eulero (teorema di  $-$ ): 3.2.6
- Eulero-Lagrange (equazione(i) di  $-$ , sistema di  $-$ , nel CDV unidim di ordine  $p$ ): 6.1.2
- Eulero-Lagrange (equazione(i) o sistema di  $-$ , nel CDV multidim): 7.1.1
  
- faccia (di un  $k$ -simpleso): 5.1.2
- fasi [cofasi] (spazio delle  $-$ ): 6.3.2
- F(réchet)-derivata (di una applicazione da uno SB in uno SB): 6.1.2
- F(réchet)-differenziabile (applicazione  $-$ , di uno SB in uno SB): 6.1.2
- Fermat (principio di  $-$ ): 6.2.1
- fibrato (vettoriale, covettoriale, ( $\kappa \geq 1$ )-tensoriale,  $\langle a, b \rangle$ -tensoriale): 3.4.1, v. anche 4.2.3, 4.3.1
- Fick (legge di  $-$ ): 7.1.2
- figura completa (di Caratheodory, nel CDV): 7.2.1
- figuratrice (superficie  $-$ , nel CDV omogeneo unidim): 7.3.1
- filo pesante (equilibrio di un  $-$ ): 6.2.1
- finito (atlante): 4.1.2
- Finsler (spazio di  $-$ , tensore metrico in uno spazio di  $-$ ): 7.3.1
- fissi (vincoli  $-$ ): 6.3.1
- flesso (punto di  $-$ , di un arco piano): 3.5.1

- flusso (di un campo vettoriale, attraverso una superficie orientata): 5.2.2
- focale (striscia  $-$ ): 5.4.1
- focali (curve  $-$ ):  $\rightarrow$  Monge (curve di  $-$ )
- fondamentale ((primo) tensore  $-$ ): 3.3.2
- fondamentale (tensore  $-$ , di una varietà riemanniana): 4.3.2
- fondamentale (formula  $-$  del CDV unidim, formula  $-$  del CDV multidim): 7.2.1
- fondamentale (formula  $-$  per la variazione totale di un funzionale integrale multidim): 7.2.2
- fondamentale (lemma  $-$  del CdV multidim): 7.1.1
- fondamentale ( $2^\circ$  tensore  $-$ ,  $3^\circ$  tensore  $-$ ): 3.5.3
- fondamentale (teorema  $-$  del calcolo): 5.2.1
- fondamentale (teorema  $-$  del calcolo su varietà): 5.2.4
- fondamentali (parentesi  $-$ ): 6.3.4
- forme antisimmetriche (algebra delle  $-$ ): 4.4.3
- forme differenziali esterne (teoria delle  $-$ , su varietà): 4.5.1
- forte [debole] (minimo  $-$ ): 6.1.2
- Fredholm (equazioni integrali di  $-$ ): 5.2.3, anche 5.A
- Frénet-Serret (formule di  $-$ , formule di  $-$  generalizzate): 3.5.2
- Frénet-Serret (estensione delle formule di  $-$  a una varietà): 4.A
- Frobenius (teorema di  $-$ ): 4.5.2
- Fubini (teorema di  $-$ ): 5.1.4
- funzionale (su  $E^k$ , in  $R$ ): 3.1.1
- funzionali lineari-leibniziani (metodo dei  $-$ , o metodo algebrico): 4.2.3
- funzione caratteristica (di un SI  $J$ -misurabile di uno spazio carico): 5.1.1
- funzione inversa (teorema della  $-$ ): 3.3.2
- fuochi (di una ellisse, di una iperbole): 6.4.2, anche 6.A
- fuoco (di una parabola): 6.4.2, anche 6.A
  
- Gamma (funzione  $-$ ): 5.1.2
- gauge (invarianza di  $-$ ): 5.2.3
- Gauss (equazioni di  $-$ ): 3.5.3
- Gauss (formule di  $-$ , per il tensore di Riemann): 3.4.1
- Gauss (integrale di  $-$ ): 5.2.3
- Gauss (simmetrie di  $-$ ): 3.5.3
- Gauss-Bonnet (teorema di  $-$ ): 4.5.3
- gaussiana (curvatura  $-$ ): 3.5.3
- Gauss-Ostrogradskij (teorema di  $-$ ): 5.2.1
- G(âteaux)-derivata, in una data direzione: 6.1.2
- gen-r-compatibili (carte  $-$ ): 4.1.2
- generale (integrale  $-$ , di una EDP $_{1n}$ ): 5.4.3
- generalizzata (equazione di H.J.  $-$ ): 7.2.1
- generalizzate(i) (coordinate  $-$ , momenti  $-$ ): 6.3.1, anche 6.3.2
- generalizzata (forza  $-$ ): 6.3.1
- geodetica (curvatura  $-$  di un arco di varietà): 6.2.2
- geodeticamente equidistanti (superfici  $-$ , superfici  $-$  in senso stretto): 7.2.1
- geodetiche (di una superficie di rotazione): 6.2.1
- geodetiche (di una superficie immersa): 6.1.1
- geodetiche (di una varietà riemanniana): 6.2.2
- geodetiche (di uno spazio euclideo): 6.2.1
- geodetiche (sistema di EL per le  $-$  di una varietà riemanniana): 6.2.2



- geodetico (campo versoriale  $-$ ): 6.2.2
- geodetico (gradiente  $-$ , nella teoria di H.J.): 7.2.1
- germe (delle funzioni differenziabili, intorno a un punto di una varietà): 4.2.2
- germe di curve 1-differenziabili: 4.2.3
- germi di curva (spazio lineare dei  $-$ ): 4.2.3
- germi di curve (metodo dei  $-$ , o metodo geometrico): 4.2.3
- gradiente:  $\rightarrow$  derivato (campo  $-$ )
- gradiente (di uno scalare definito su una varietà): 4.2.2
- gradiente (operatore  $-$ ): 3.4.1
- gradiente (teorema del  $-$ ): 5.2.1
- grado (di una forma  $\kappa$ -lineare): 3.1.1
- graduata (anticommutatività  $-$  del prodotto wedge): 4.4.3
- Gram (determinante di  $-$ ): 3.2.5
- gramiano:  $\rightarrow$  Gram
- Gram-Schmidt (procedura di ortogonalizzazione di  $-$ ): 3.2.4
- Grassmann (algebre di  $-$ ): 4.4.3
- Green (funzione di  $-$ ): 5.2.3
- Green (identità di  $-$ , mista): 5.2.3
- Green (identità di  $-$ , scalare): 5.2.3
- Green (identità di  $-$ , vettoriale del 1° ordine): 5.2.3
  
- Hadamard (soluzione stabile nel senso di  $-$ ): 5.3.2
- Hamilton (equazioni canoniche di  $-$ , funzione di  $-$ ): 6.3.2
- Hamilton (2-tensore di  $-$ ): 7.2.2
- Hamilton (funzione caratteristica di  $-$ ): 6.4.1
- Hamilton (funzione principale di  $-$ ): 6.4.1
- Hamilton (principio di  $-$ , nel CDV unidim, multidim): 6.3.1, 7.1.1
- hamiltoniana (associata a una lagrangiana 1-omogenea, nel CDV unidim): 7.A
- hamiltoniana (densità  $-$ , nel CDV multidim): 7.1.1
- hamiltoniana (formulazione  $-$  delle equazioni EM): 7.1.2
- hamiltoniana (funzione  $-$ , nel CDV multidim): 7.1.1
- hamiltoniane (equazioni  $-$ ): 6.3.2
- Hamilton-Jacobi (equazione di  $-$ ): 6.4.1
- Hamilton-Jacobi (equazione di  $-$  nel CDV omogeneo): 7.3.1
- Hamilton-Jacobi (equazione di  $-$  generalizzata): 7.2.1
- Hamilton-Jacobi (teoria di  $-$ ): 7.2.1
- Hamilton-Jacobi (applicazioni della equazione di  $-$ ): 6.4.2
- Hamilton-Jacobi ridotta (equazione di  $-$ ): 6.4.1
- h-diffeomorfe (varietà  $-$ ): 4.2.1, anche 4.2.2
- h-diffeomorfismo (tra varietà): 4.2.1, anche 4.2.2
- Helmholtz (equazione di  $-$ ): 7.1.2
- h-embedding (di una varietà in una varietà): 4.2.1
- hermitiana (forma bilineare  $-$ ): 3.2.6
- hermitiano (operatore  $-$ ): 3.2.6
- h-étale:  $\rightarrow$  h-diffeomorfismo (di un aperto di varietà)
- Hilbert (integrale indipendente di  $-$ , nel CDV unidim): 7.2.1
- Hilbert (integrale indipendente di  $-$ , nel CDV omogeneo): 7.3.1
- h-immersione (di un aperto di varietà intorno a suo un punto, in una varietà): 4.2.2
- h-immersione (di una varietà in una varietà): 4.2.1

- Hodge (duale di  $-$ ): 4.4.3
- Hodge (stella di  $-$ ): 4.4.3
- h-sommersione (di una varietà da parte di una varietà): 4.2.1
  
- idempotenza (di un proiettore ortogonale): 3.2.5
- impulso-energia (2-tensore di  $-$ ): 7.2.2
- indefinito (integrale  $-$ ): 5.2.1
- indicatore (di un vettore): 4.A
- indicatore (della traccia di un vettore): 4.A
- indicatrice (( $n-1$ )-quadrica  $-$  di Dupin, di una ( $n \geq 2$ )-superficie): 3.5.3
- indicatrice (superficie  $-$ , nel CDV omogeneo unidim): 7.3.1
- indipendente (integrale  $-$  di Hilbert): 7.2.1, 7.3.1
- indotta (topologia  $-$ , da una  $\langle r, n \rangle$ -struttura): 4.1.1
- inferiore [superiore] (faccia  $-$ , di un  $k$ -blocco): 5.1.2
- inferiore [superiore] (integrale  $-$ ): 5.1.1
- infinitesimale (generatore  $-$ , di un diffeomorfismo quasi-identitario): 7.2.2
- infinitesimale (trasformazione  $-$ ): 6.3.3
- influenza (dominio di  $-$ ): 5.3.2
- influenza (funzione di  $-$ ):  $\rightarrow$  Green (funzione di  $-$ )
- iniziali (problema ai valori  $-$ ): 5.3.1
- innalzamento (di un indice di una componente tensoriale): 3.1.1
- integrabile (singolarità  $-$ ): 5.2.3
- integrabilità (condizione di  $-$ , per l'equazione differenziale  $v_{(k)} = \partial \theta_{(k-1)}$ ): 4.5.1
- integrale (di un campo vettoriale lungo un arco orientato): 5.2.2
- integrale (di una equazione pfaffiana): 4.5.2
- integrale (di una funzione su uno spazio carico): 5.1.1
- integrale (di una funzione su un SI  $J$ -misurabile): 5.1.1
- integrale (rappresentazione  $-$ , di un campo scalare, vettoriale): 5.2.3
- integrale (somma  $-$ , per una data decomposizione marcata): 5.1.1
- integrale (striscia  $-$ ): 5.4.1
- integrale (superficie  $-$  di una EDP1): 5.4.1
- integrale (varietà  $-$ ): 4.5.2
- integrale di una funzione (su un pezzo di varietà  $k$ -dim di  $\mathbb{R}^n$ ): 5.1.3
- integrale iterato (teorema dell'  $-$ ): 5.1.1
- integrale superiore [inferiore] (di una funzione): 5.1.1
- integrale  $n$ -plo: 5.1.1
- integrazione (dominio di  $-$ ): 5.1.1
- integrazione su varietà (teoria della  $-$ ): 5.2.4
- interno (prodotto  $-$ ): 3.1.2
- intrinseca [estrinseca] (geometria  $-$ ): 3.4.1
- invariante (piano  $-$ , di un sistema di punti materiali): 6.4.3
- invariante cubico (di un 2-tensore): 3.2.7
- invariante lineare (o traccia, di un 2-tensore): 3.2.7
- invariante  $m$ -atico (primo  $-$ , di un operatore lineare): 3.2.6
- invariante quadratico (primo  $-$ , secondo  $-$ , di un 2-tensore): 3.2.7
- invariante scalare: 3.2.7
- invarianti (teoria degli  $-$ ): 3.2.1
- invarianti assoluti [relativi] (di  $O_n(B)$ ): 3.2.1
- invarianza (principio di  $-$ , per operazioni o uguaglianze tensoriali): 3.1.2

- inverso (problema –, del CDV unidim): 6.3.1
- inverso (teorema – di Riemann):
- invertenti (rotazioni –): 3.2.1
- invertibilità dell'ordine di integrazione (in L-integrali): → Fubini (teorema di)
- invertibilità dell'ordine di integrazione (teorema dell' –): 5.1.1
- inviluppo (di una famiglia di funzioni  $C^1$ ): 5.4.3
- inviluppo parziale [totale] (di una famiglia di funzioni  $C^1$ ): 5.4.3
- iperbole (equazione canonica di una –): 6.A
- ipersuperficie: 3.5.1
- irrotazionale (campo ( $\kappa \geq 1$ )-tensoriale –): 3.4.1
- irrotazionale (campo vettoriale –, in  $\mathbb{R}^{n \geq 2}$ ): 5.2.4
- irrotazionale (campo vettoriale –): 5.2.2
- isomorfismo (rispetto ad una struttura): 4.1.3
- isoperimetrica (disuguaglianza –, in  $\mathbb{R}^2$ ): 6.2.1
- isoperimetrico (problema –): 6.1.1
- isoperimetrico [olonomo, anolonomo] (problema variaz.le –): 6.1.3
- isotropi (tensori –): 3.2.2
- isotropo (sottospazio – di uno spazio pseudoeuclideo): 3.2.4
  
- J-misura (di un pezzo di varietà k-dim di  $\mathbb{R}^n$ ): 5.1.3
- J-misura (di un SI di uno spazio carico): 5.1.1
- J-misurabile (SI – di uno spazio carico): 5.1.1
- J-trascurabile (SI – di uno spazio carico): 5.1.1
  
- k-blocco (generato da k vettori): 5.1.2
- kepleriane(i) (variabili –, elementi –): 6.4.4
- Keplero (equazione di –): 6.4.4
- Keplero (leggi di –): 6.4.3
- Keplero (problema di –): 6.4.2
- k-inviluppo convesso (di k+1 vettori): 5.1.2
- Kirchoff (soluzione di – dei potenziali ritardati, anticipati): 5.2.4
- Klein-Gordon (equazione di –): 7.1.2
- König (teorema di –): 6.4.3
- Kronecker (simboli generalizzati di –): 3.2.2
- k-simplesso (generato da k vettori): 5.1.2
  
- L-integrale: → Lebesgue (integrale di –)
- Lagrange (moltiplicatore di –): 6.1.3
- Lagrange (parentesi di –): 6.3.4
- lagrangiana (densità –, funzione – nel CDV multidim): 7.1.1
- lagrangiana (forza –): → generalizzata (forza –)
- Lamé (costanti elastiche di –): 7.1.2
- laplaciano (di un campo  $\kappa$ -tensoriale): 3.4.1
- lastra vibrante (equazione della –): 7.1.2
- Lebesgue (integrale di –): 5.1.1
- Legendre (applicazione duale di –): 6.3.2
- Legendre (condizione di –, nel CDV multidim): 7.1.1
- Legendre (condizione di –, nel CDV unidim di ordine  $p \geq 1$ ): 6.1.2
- Leibniz-Newton (teorema di –) → fondamentale del calcolo (teorema –): 5.2.1

- lemma fondamentale (del CDV): 6.1.2
- lessicografico (ordinamento  $\rightarrow$ ): 3.3.1
- Levi-Civita (campo di connessioni affini di  $\rightarrow$ ): 4.3.2
- Levi-Civita (pseudotensore antisimmetrico di  $\rightarrow$ ): 3.2.2
- Lie (algebra di  $\rightarrow$ ): 6.3.4
- lineare [lineare-omogenea, semilineare, quasilineare] (EDP  $\rightarrow$ ): 5.3.2
- lineare-leibniziano (funzionale  $\rightarrow$ ): 4.2.3
- lineari-leibniziani (metodo dei funzionali  $\rightarrow$ , o metodo algebrico): 4.2.3
- Liouville (teorema di  $\rightarrow$ ): 6.3.2
- lipschitziana (funzione  $\rightarrow$ ): 5.2.3
- liscia (n-struttura  $\rightarrow$ , su un insieme): 4.1.1
- liscio (vincolo  $\rightarrow$ ): 6.3.1
- locale (base  $\rightarrow$ , componente  $\rightarrow$ ): 3.3.1
- locale [globale] (invertibilità  $\rightarrow$  nel CDV): 6.3.2
- locali (componenti  $\rightarrow$  di un  $\kappa$ -tensore): 3.3.1
- localmente geodetiche (coordinate  $\rightarrow$ ): 3.4.1
- localmente inerziali (coordinate  $\rightarrow$ ):  $\rightarrow$  localmente geodetiche
- localmente  $\mathbb{R}^n$  (spazio topologico  $\rightarrow$ ): 4.1.1
- lorentziana (varietà  $\rightarrow$ ): 3.4.1
- Lorenz (gauge di  $\rightarrow$ ): 5.2.4
- lunghezza (di un arco di una varietà p.riemanniana): 4.A
- Lyapounov (superficie di  $\rightarrow$ ): 5.2.3
  
- maggiorante (problema  $\rightarrow$ , di un problema di Cauchy normale): 5.3.2
- maggiorante [maggiorata] (serie di potenze  $\rightarrow$ ): 5.3.2
- magnetostatica (equazione vettoriale della  $\rightarrow$ ): 5.2.4
- Mainardi-Codazzi (equazioni di  $\rightarrow$ ): 3.5.3
- mappa (di una carta): 4.1.1
- marcata (decomposizione  $\rightarrow$ ): 5.1.1
- massimale (atlante  $\rightarrow$ ): 4.1.1
- massimale (soluzione  $\rightarrow$  di un problema di Cauchy): 5.3.2
- Maxwell (SDP di  $\rightarrow$ , sua analisi caratteristica): 7.A
- Mayer (campi di  $\rightarrow$ ): 7.2.1
- membrana vibrante (equazione della  $\rightarrow$ ): 7.1.2
- metrico (tensore  $\rightarrow$ , di uno spazio di Finsler): 7.3.1
- Meusnier (teorema di  $\rightarrow$ ): 3.5.3
- Minkowski (spazio di  $\rightarrow$ ): 3.2.1
- miste (componenti  $\rightarrow$ , di un tensore di rango  $> 1$ ): 3.1.1
- misto (prodotto  $\rightarrow$ ): 3.2.2
- Möbius (nastro di  $\rightarrow$ ): 5.2.2
- momenti (canonici generalizzati): 6.3.2
- monopolo (potenziale di  $\rightarrow$ ): 5.A
- Monge (asse di  $\rightarrow$ ): 5.4.1
- Monge (cono di  $\rightarrow$ , campo di coni di  $\rightarrow$ ): 5.4.1
- Monge (conoide di  $\rightarrow$ ): 5.4.1
- Monge (curve di  $\rightarrow$ ): 5.4.1
- monogeniche (forze  $\rightarrow$ ): 6.3.1
- monopolo (potenziale di  $\rightarrow$ ): 5.A

- multilineare (algebra  $\rightarrow$ ): 3.1.2
- naturale (parametro  $\rightarrow$  associato a una lagrangiana 1-omogenea): 7.3.1
- n-blocco rettangolo equiverso: 5.1.2
- Neumann (nucleo di  $\rightarrow$  interno, nucleo di  $\rightarrow$  esterno): 5.A
- Neumann (problema di  $\rightarrow$  interno): 5.2.3
- Noether (teorema di  $\rightarrow$ ): 7.2.2
- noetheriane (correnti  $\rightarrow$ , cariche  $\rightarrow$ ): 7.2.2
- non singolari (gruppo delle matrici  $\rightarrow$ ): 3.2.2
- norma (derivata in  $\rightarrow$ ): 4.5.2
- normale (cono  $\rightarrow$  di un SDP): 5.3.3
- normale (vettore di curvatura  $\rightarrow$ ):
- normale principale (versore  $\rightarrow$  di un arco di varietà): 6.2.2
- normale principale (versore  $\rightarrow$  di un arco): 3.5.2
- normale rispetto a un asse (dominio di integrazione  $\rightarrow$ ): 5.2.1
- normali (cono delle  $\rightarrow$ , di una EDP1): 5.4.1
- normalmente carico (spazio  $\rightarrow$ ): 5.1.1
- n-palla (di raggio e centro dati): 5.1.2
- n-parallelepipedo: 3.2.2
- parallelogramma: 3.2.2
- n-striscia (per una EDP1<sub>n</sub>, relazione di  $\rightarrow$ ): 5.4.2
- n-toro (come  $\langle \omega, n \rangle$ -varietà): 4.1.3
- n-volume: 3.2.2
- olonomi [anonomi] (vincoli  $\rightarrow$ ): 6.1.1
- ombra (di un grafo): 5.1.1
- omeomorfismo di (di uno ST su stesso): 3.3.2
- omeomorfismo di-su (di uno ST su uno ST): 3.3.2
- omeomorfismo in (di un SI di uno ST su un altro SI dello stesso): 3.3.2
- omogenee (funzioni  $\rightarrow$ , di grado  $\alpha$ ): 7.3.1
- omogenee (trasformazioni canoniche  $\rightarrow$ ): 6.3.4
- omogenei (problemi  $\rightarrow$  del CDV unidim, problemi  $\rightarrow$  del CDV multidim): 7.3.1, anche 7.3.2
- omografia assiale (duale di Hodge di una  $\rightarrow$ ): 4.4.3
- omotetie (gruppo delle  $\rightarrow$ ): 5.1.2
- onde m-dim (equazione delle  $\rightarrow$ ): 7.1.2
- orbita: 6.4.2
- ordinaria(o) (equazione differenziale  $\rightarrow$ , sistema differenziale  $\rightarrow$ ): 5.3.1
- ordinato ( $\langle m, \mu \rangle$ -indice  $\rightarrow$ ): 4.4.1
- ordine (di una curvatura di un arco): 3.5.2
- ordine (di un  $\kappa$ -tensore):  $\rightarrow$  rango
- ordine  $p \geq 1$  (problema variabile di  $\rightarrow$ ): 6.1.1
- orientabile (varietà  $\rightarrow$ , varietà  $\rightarrow$  in un punto): 4.1.1
- orientabilità (condizione di  $\rightarrow$  di una superficie embedded in  $\mathbb{R}^3$ ): 5.2.2
- orientante (atlante  $\rightarrow$ ): 4.1.1
- ortogonale (proiettore  $\rightarrow$ , su un sottospazio regolare): 3.2.5
- ortogonali proprie [improprie] (trasformazioni  $\rightarrow$ ): 3.2.1
- ortogonali (elementi  $\rightarrow$  rispetto ad un operatore lineare): 3.2.6
- ortonormale (autobase  $\rightarrow$ , base  $\rightarrow$ ): 3.2.6
- osculatore (cerchio  $\rightarrow$ , di un arco di piano euclideo): 3.5.1

- osculatore (piano  $\rightarrow$ , di un arco): 3.5.2
- Ostrogradskij:  $\rightarrow$  Gauss-Ostrogradskij:
- ottica geometrica:  $\rightarrow$  Fermat (principio di  $\rightarrow$ )
  
- palla (n-palla): 5.1.2
- parabola (equazione canonica di una  $\rightarrow$ ): 6.A
- parabolica (EDP  $\rightarrow$ ): 5.3.3
- parallelepipedo (volume con segno di un  $\rightarrow$ ): 3.2.2
- parametrizzazione (di  $I^k$ ): 5.1.3
- parametrizzazione di riferimento (di un arco): 4.1.3
- parametro (di una conica):  $\rightarrow$  semilatus rectum
- parametro-indipendente (problema variaz.le unidim  $\rightarrow$ ): 6.1.2
- parte principale (della variazione di un funzionale differenziabile): 6.1.2
- particolare (integrale  $\rightarrow$  di una EDP $_{1n}$ ): 5.4.3
- p-curvatura: 3.4.1
- perielio [afelio]: 6.4.2
- peso (di un invariante relativo): 3.2.1
- Peterson-Codazzi (equazioni di  $\rightarrow$ )  $\rightarrow$  Mainardi-Codazzi (equazioni di  $\rightarrow$ ): 3.5.3
- pfaffiane (forme  $\rightarrow$ ): 4.5.1
- pfaffiani:  $\rightarrow$  pfaffiane (forme  $\rightarrow$ )
- pfaffiano (equazioni di tipo  $\rightarrow$ ): 4.5.2
- piano invariante (di un sistema di  $N \geq 2$  PM): 6.4.3
- piatta [curva] (regione  $\rightarrow$ , di varietà immersa): 3.4.1
- piegabilità (curve di  $\rightarrow$ , di una superficie): 3.5.3
- Plateau (problema di  $\rightarrow$ ): 7.1.2
- Poincaré (lemma di  $\rightarrow$ ): 4.5.1
- Poincaré (teorema di  $\rightarrow$ , o lemma di  $\rightarrow$  inverso): 4.5.1
- Poisson (equazione di  $\rightarrow$ ): 5.2.3
- Poisson (parentesi di  $\rightarrow$ ): 6.3.4
- polidroma (funzione  $\rightarrow$ ): 5.2.2
- polo (del moto di un sistema di punti): 6.4.2
- posizionale (forza  $\rightarrow$ ): 6.3.1
- potenziale newtoniano [coulombiano] (teoria del  $\rightarrow$ ): 5.2.3
- potenziale generalizzata (energia  $\rightarrow$ ): 6.3.1
- potenziali (di un campo vettoriale irrotazionale): 5.2.2
- precompatto (spazio semimetrico  $\rightarrow$ ): 5.1.1
- prima curvatura:  $\rightarrow$  assoluta (curvatura  $\rightarrow$ )
- primitiva (di una funzione continua): 5.2.1
- primitiva ( $(\kappa-1)$ -forma  $\rightarrow$ , di una  $\kappa$ -forma chiusa): 4.5.1
- principale (arco  $\rightarrow$ , linea di curvatura  $\rightarrow$ , di una ( $n \geq 2$ )-superficie): 3.5.3
- principale (curvatura  $\rightarrow$ ): 3.5.3
- principale (direzione  $\rightarrow$ ): 3.5.3
- principale (funzione  $\rightarrow$ , associata a una hamiltoniana): 6.4.1
- principale-media (curvatura  $\rightarrow$ , di una ( $n \geq 2$ )-superficie): 3.5.3
- principali (direzioni  $\rightarrow$ , di una forma quadratica): 3.2.6
- principio di uguaglianza (tra vettori $_f$  di una varietà): 4.2.2
- problema agli autovalori:  $\rightarrow$  autoproblema
- prodotto (di forme multilineari): 3.1.1
- prodotto (di un reale per un vettore $_f$  di una varietà): 4.2.2

- prodotto (di un reale per una  $\langle a,b \rangle$ -forma): 4.3.1
- prodotto (di una  $\langle a,b \rangle$ -forma per una  $\langle c,d \rangle$ -forma): 4.3.1
- prodotto diretto (di due varietà): 4.1.2
- propriamente sghembo (arco  $-$ ): 3.5.2
- proprio [improprio] (moto centrale  $-$ ): 6.4.2
- prossimale [distale] (vertice  $-$ , di una ellisse): 6.A
- pseudortogonale (gruppo  $-$ , matrice  $-$ ): 3.2.1
- pseudortogonale (trasformazione  $-$  propria [impropria]): 3.2.1
- pseudoriemanniana astratta (varietà  $-$ ): 4.3.2
- pseudotensore [campo pseudotensoriale]: 4.3.3
- pseudotensore completamente antisimmetrico: 3.2.2
- pseudounitario (vettore  $-$ ): 4.A
- pull-back (di una funzione): 4.2.3, anche 4.C
- pura (varietà dimensionalmente  $-$ ): 4.1.2
- pushed-forward (campo vett.  $-$ ): 4.C
  
- R-integrale:  $\rightarrow$  Riemann (integrale di  $-$ )
- R-integrale generalizzato: 5.1.1
- rango (di un  $\kappa$ -tensore): 3.1.2
- rango (di un'applicazione di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ ): 3.4.1
- r-arco astratto (come varietà 1-dim.): 4.1.2
- r-compatibili (carte  $-$ ; carte  $-$  in senso generalizzato): 4.1.1, v. anche 4.1.2
- r-diffeomorfismi di  $\mathbb{R}^n$  (gruppo degli  $-$ ): 3.3.2
- r-diffeomorfismo di, in  $\mathbb{R}^n$ : 3.3.2
- regola della catena: 3.3.2
- regolare (punto  $-$ , di un'applicazione di  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}^m$ ): 3.4.1
- regolare (punto  $-$ , di un'applicazione di una varietà in una varietà): 4.2.1
- relativo ( $\langle a,b \rangle$ -tensore  $-$ ,  $\langle a,b \rangle$ -pseudotensore  $-$ , di peso  $w$ ): 4.3.2, 4.3.3
- relativo (invariante  $-$ ): 3.2.1
- r-embedding ( $\equiv$  r-incastonamento): 3.4.1
- Ricci (2-curvatura di  $-$  in una direzione data): 3.5.3
- Ricci (2-tensore simmetrico di  $-$ ): 3.4.2
- Ricci (identità di  $-$ ): 4.3.2
- Ricci (pseudotensore antisimmetrico di  $-$ ): 3.2.2
- Ricci (teorema di  $-$ ): 3.3.2
- ridotta (equazione di H.J.  $-$ ): 6.4.1
- ridotta (massa  $-$ , di un sistema di due punti mat.li): 6.4.3
- ridotte al baricentro (coordinate  $-$ ): 6.4.3
- Riemann (campo 4-tensoriale di  $-$ ): 3.4.2
- Riemann (integrale di  $-$ ): 5.1.1
- Riemann (teorema di  $-$ ): 3.4.2
- rifrazione (indice di  $-$ ): 6.2.1
- r-immersione: 3.4.1
- r-incastonamento  $\rightarrow$  r-embedding: 3.4.1
- Robin (densità di  $-$ ): 5.A
- Rodriguez (equazione di  $-$ ): 3.5.3
- rotazioni ( $\equiv$  trasformazioni p.ortogonali proprie): 3.2.1
- rot-grad (teorema  $-$ ): 5.2.3
- rotore (operatore  $-$ , operatore  $-$  completo [incompleto]): 3.4.1

- rotore (teorema del  $\nabla$ ): 5.2.1
- rotore-divergenza (problema del  $\nabla$ ): 5.2.3
- r-sommersione: 3.4.1
- r-superficie: 4.1.2
  
- scalare (potenziale  $\nabla$ ): 5.2.3
- scalare (prodotto  $\nabla$ ): 3.1.2
- Schmidt:  $\rightarrow$  Gram-Schmidt: 3.2.4
- seconda curvatura:  $\rightarrow$  torsione (di un arco): 3.5.2
- seme:  $\rightarrow$  germe
- semicono: 7.3.1
- semilatus rectum (di una conica): 6.A
- simmetrico (spazio  $\nabla$ ): 5.1.1
- sezionale (curvatura  $\nabla$ , rispetto a un piano): 3.5.4
- sezionali (matrice delle curvatures  $\nabla$ , di una varietà): 3.5.4
- sfera  $(n-1)$ -dim: 5.1.2
- simmetria (di una densità lagrangiana, rispetto a un diffeomorfismo quasi-identitario): 7.2.2
- simmetrica [antisimmetrica] (funzione  $\nabla$ , rispetto ad una coppia di indeterminate): 3.1.3
- simmetriche [antisimmetriche] ( $\kappa$ -forme  $\nabla$ ): 4.4.2
- simmetrico (operatore lineare  $\nabla$ ): 3.2.6
- simmetrico rispetto a  $B$  (di un proiettore ortogonale): 3.2.5
- simmetrizzazione completa (operatore di  $\nabla$ ): 3.1.3
- simpleso: 5.1.2
- симплектика (forma  $\nabla$  delle equazioni canoniche): 6.3.3
- симплектика (varietà  $\nabla$ , struttura  $\nabla$ ): 6.3.3
- singolare (integrale  $\nabla$ , di una EDP $_n$ ): 5.4.3
- solenoidale (campo ( $\kappa \geq 1$ )-tensoriale  $\nabla$ ): 3.4.1
- soluzione di un problema di Cauchy normale: 5.3.2
- somma (di  $\langle a, b \rangle$ -forme): 4.3.1
- somma (tra vettori $_f$  di una varietà): 4.2.2
- somma integrale (di una funzione su uno spazio carico, rispetto ad una decomposizione marcata): 5.1.1, anche 5.1.3
- sottovarietà (di una varietà): 4.2.1
- sottovarietà aperta (di una varietà): 4.1.1
- spinto avanti:  $\rightarrow$  pushed forward
- Stokes (teorema di  $\nabla$ ):  $\rightarrow$  rotore (teorema del  $\nabla$ )
- standard (struttura analitica-reale  $\nabla$  su  $\mathbb{R}^n$ ): 4.1.3
- strato semplice [doppio] (potenziale di  $\nabla$ , densità di  $\nabla$ ): 5.2.3
- strettamente ordinato ( $\langle m, \mu \rangle$ -indice  $\nabla$ ): 4.4.1
- stretto ( $\langle m, \mu \rangle$ -indice  $\nabla$ ): 4.4.1
- striscia (per una EDP $_1$ ): 5.4.1
- striscia (relazione di  $\nabla$ ): 5.4.1
- struttura analitica standard (su  $\mathbb{R}^n$ ): 4.1.3
- superficie: 3.5.1
- superficie astratta (come varietà 2-dim.): 4.1.2
  
- tangente (spazio  $\nabla$ , ad una r-immersione, in un punto): 3.4.1
- tangente (trasformazione lineare  $\nabla$ , ad una r-immersione, in un punto): 3.4.1
- tangente $_a$  (spazio  $\nabla$ , di una varietà in un suo punto, secondo il metodo algebrico): 4.2.3



- tangente<sub>f</sub> (spazio –, di una varietà in un suo punto, secondo il metodo fisico): 4.2.2
- tangente<sub>g</sub> (spazio –, secondo il metodo geometrico): 4.2.3
- tensore fondamentale: → fondamentale
- tensoriale (algebra –): 3.1.2
- teoria di Weyl (funzione di eccesso nella –, integrale indipendente nella –, equazione di H.J. nella –): 7.2.1
- Theorema egregium: 3.5.3
- tipo (valori di –): 3.1.1
- tirato indietro: → pulled back
- topologica [differenziabile, liscia, analitica] (n-struttura – su un insieme, n-varietà –): 4.1.1
- topologicamente equivalenti (metriche –): 3.3.1
- toro [2-toro, t>2-toro]: 4.1.3
- Torricelli-Barrow (teorema di –): → Leibniz-Newton (teorema di –)
- torsione (di un arco): 3.5.2
- torsione (di una (n≥2)-superficie, secondo un arco): 3.5.3
- torsione (vettore di –, ⟨2,1⟩-tensore di –): 4.3.2
- totale (curvatura –): → gaussiana (curvatura –)
- totale (curvatura –, di una (n≥2)-superficie): 3.5.3
- totale (energia –): 6.3.1
- totalmente iperbolico (SDP semilineare –): 5.3.3
- totalmente isotropo (sottospazio –, di uno spazio pseudoeuclideo): 3.2.4
- totalmente limitato: → precompatto (spazio)
- traccia: → invariante lineare
- transizione (dominio di –): 4.1.1
- transizione (funzioni di –, da una carta a una carta congiunta e compatibile): 4.1.1
- transizione (mappe di –): 4.1.1
- transizione (matrice di –, da una carta a una carta congiunta e compatibile): 4.1.1
- trasposizione: 3.1.3
- trasversalità (relazione di –, nella teoria di H.J.): 7.2.1
- trasverso (asse –, di una iperbole): 6.A
  
- unidimensionale [multidimensionale] (problema variazionale –): 6.1.1
- uniforme di ordine p (norma –): 6.1.2
- uniformemente convessa [concava] (applicazione –): 6.3.2
  
- valori al contorno (problemi ai –): 5.2.3
- valori iniziali (problema ai –): → Cauchy (problema di –)
- variazionale (derivata –): 6.1.2
- variazionali (problemi –, su una varietà): 6.1.1
- variazionali omogenei (problemi –): 7.3.1
- variazioni (calcolo delle –, problema-base del CDV): 6.1.1
- velocità angolare media (di un moto kepleriano): 6.4.4
- verga vibrante (equazione della –): 7.1.2
- vettore (potenziale –): 5.2.3
- vettore (prodotto –): 3.2.2
- vettore<sub>a</sub> (di una varietà, secondo il metodo algebrico): 4.2.3
- vettore<sub>f</sub> (di una varietà in un suo punto, secondo il metodo fisico): 4.2.2
- vettore<sub>g</sub> (di una varietà, secondo il metodo geometrico): 4.2.3
- vettoriale [covettoriale] (fibrato –): 4.2.3

- vettoriale [covettoriale] (campo  $-$ , in una varietà): 4.2.3
- vincolare (forza  $-$ ): 6.3.1
- viscosità (4-tensore di  $-$ ): 3.2.3
  
- w-divergenza (di un campo vettoriale relativo di peso  $w$ ): 4.3.2
- wedge (prodotto  $-$ ): 4.4.3
- Weierstrass (condizione di  $-$ , per problemi variaz.li unidim omogenei): 7.2.1, anche 7.3.1.
- Weingarten (equazioni di  $-$ ): 3.5.3
- Weyl (4-tensore di  $-$ ): 3.4.2
- Weyl (teoria di  $-$ , nel CDV multidim): 7.2.1
- Weyl (trasformazioni di  $-$ , gruppo (delle trasformazioni) di  $-$ ): 4.B
- Weyl (varietà di  $-$ ): 4.3.2
- Whitney (teorema di embedding di  $-$ ): 4.1.3
- Wirtinger (disuguaglianza di  $-$ ): 6.2.1
  
- $\langle 2,1 \rangle$ -tensore di torsione (di una connessione): 4.3.2
- $\langle 3,1 \rangle$ -tensore di curvatura (di una varietà astratta): 4.3.2
- $\langle a,b \rangle$ -forma basata su uno spazio lineare: 4.3.1
- $\langle a,b \rangle$ -pseudotensore: 4.3.3
- $\langle a,b \rangle$ -tensore (di una varietà): 4.3.1
- $\langle a,b \rangle$ -tensore basato su uno spazio lineare: 4.3.1
- $\langle a,b \rangle$ -tensoriale (densità  $-$ , capacità  $-$ ): 4.3.2
- $\langle a,b \rangle$ -tensoriale (fascio  $-$ , campo  $-$ ): 4.3.1
- $(C,\alpha)$ -lipschitziana (funzione  $-$ ): 5.2.3
- $\langle m,\mu \rangle$ -indice (ordinato, stretto, strettamente ordinato): 4.4.1
- $(n-1)$ -sfera (di raggio e centro dati): 5.1.2
- $\langle p,q \rangle$ -contrazione (di una  $\langle a,b \rangle$ -forma, con  $1 \leq p \leq a$ ,  $1 \leq q \leq b$ ): 4.3.1
- $(p,q)$ -contrazione (operazione di  $-$ ): 3.1.1
- $\langle r,n \rangle$ -struttura (su un insieme): 4.1.1
- $\langle r,n \rangle$ -varietà: 4.1.1
- $\alpha$ -omogenea (funzione  $-$ ): 7.3.1
- $\delta$ -cellule: 5.1.1
- $\kappa$ -cogredienza [ $\kappa$ -controgredienza] (leggi di trasformazione per  $-$ ): 3.1.1
- $\kappa$ -forma completamente simmetrica [antisimmetrica] (su uno spazio lineare): 4.4.2
- $\kappa$ -forme completamente simmetriche [antisimmetriche] (spazio delle  $-$ ): 4.4.2
- $\kappa$ -lineare (forma  $-$ ): 3.1.1
- $\kappa$ -linearità: 3.1.1
- $\kappa$ -tensore: 3.1.2
- $\kappa$ -tensoriale (campo  $-$ ): 3.3.1
- $\kappa$ -tensoriale (campo  $-$ ): 3.4.1
- $\kappa$ -vettore (associato a una  $\kappa$ -pla ordinata): 3.1.3
- $v$ -striscia (di una curva  $C^1$  di  $\mathbb{R}^{v+1 \geq 2}$ ): 5.4.1
- $v$ -striscia (elemento di una  $-$ ): 5.4.1
- $v$ -striscia (sostegno di una  $-$ ): 5.4.1
- 1-differenziabile (curva parametrizzata  $-$ , di una varietà): 4.2.3
- 1-omogeneità multidim (condizione di  $-$ ): 7.3.2
- 2-curvature (di una  $(n \geq 2)$ -superficie embedded in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ): 3.5.1
- 2-curvature sezionali (matrice delle  $-$ ): 3.5.4

- 2-toro (come  $\langle \omega, 2 \rangle$ -varietà): 4.1.3
- 3-rotore (di un campo  $(\kappa \geq 1)$ -tensoriale): 3.4.1

## GLOSSARIO DELLA PARTE 3<sup>a</sup> (CAPP. 8÷9)

Nota Bene: questo glossario elenca definizioni/locuzioni di sufficiente importanza, seguite dalla sigla della sottosezione (numero.numero.numero) o della appendice speciale (numero.lettera maiusc.) ove esse compaiono per la prima volta (scritte in **grassetto**). Le voci che non iniziano con una lettera latina sono alla fine della lista.

- affine (simmetria –): 9.5.2
- antibivettore (area di un –, di una varietà riemann.): 8.2.1
- antiderivazione: 8.5.2
- antisimmetrico (bivettore –): 8.2.1
- antivalente (classe –): 8.4.2
- antivalenza (relazione di –): 8.4.2
- antiversa (riparametrizzazione –): 9.2.2
- aperto (sistema fisico –): 9.4.3
- area (di un antibivettore): → antibivettore
- assoluta (curvatura –, di una sup.): 8.1.1
- assoluta (derivata – di un tensore lungo una curva di una varietà affin. conn.): 8.2.2
- assoluta (derivata –): → geodetica (derivata –)
- assoluto (parallelismo –): 8.2.2
- autoparallelismo (proprietà di –, delle geodetiche di una n-superf.): 8.1.3
  
- base ortogonale (teorema della –): 9.2.1
- Beltrami (pseudosfera di –): 8.1.1
- Beltrami-Klein (modello di – del piano iperbolico): 8.A
- Bianchi (1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup> identità generalizzate di –, in una varietà affin. conn.): 8.2.2
- biantisimmetrico ( $\langle p, p \rangle$ -campo –): 8.3.2
- Birkhoff (teorema di –): 9.5.2
- bordificazione: 8.5.2
- bordo: → frontiera
- Born (distanza spaziale secondo –): 9.4.1
- bouncing photon: → Born
  
- campi tensoriali (algebra dei –, in un punto di una varietà): 8.3.1
- campo einsteiniano (SDP del –): 9.3.3
- carta (germe di –): 9.3.2
- catena (di  $\kappa$ -domini orientati): 8.4.3
- catenoide: 8.1.1
- chiuso (sistema fisico –): 9.4.3
- cobordificazione: 8.5.2
- cochiusa (forma –): 8.5.2
- codifferenziazione: 8.5.2
- coesatta (forma –): 8.5.2
- confinanti ( $\kappa$ -domini –): 8.4.3
- conforme (simmetria –): 9.5.2
- connesso-equivalenza (di varietà affin. conn.): 8.2.2

- contorno: → frontiera
- cosmologica (costante  $-$ ): 9.3.3
- covariante (derivata  $-$  di un tensore di una varietà affin. conn.): 8.2.2
- curvatura (tensore di  $-$ , di una varietà affin. conn.): 8.2.2
- curvatura costante (varietà riemann. a  $-$ ): 8.2.1
- curvatura isotropa (varietà riemann. a  $-$ ): 8.2.1
- curvatura formale: → pseudocurvatura
- curvatura\*: 8.1.1
  
- de Rham (1° teorema di  $-$ , 2° teorema di  $-$ ): 8.5.4
- derivazione (su  $C$ ): 8.3.2
- deviazione geodetica (SDP della  $-$ ): 9.2.2
- diametro (di una partizione): 8.4.1
- diffeomorfismo locale ( $r$ -diffeomorfismo, di un aperto di  $\mathbb{R}^n$  sulla sua immagine): 8.1.1
- diretta esterna (somma  $-$ ): 8.3.1
- disgregato (continuo materiale  $-$ ): 9.4.3
- doppio duale (4-tensore  $-$ , del tensore di Riemann): 9.2.4
  
- elicoide: 8.1.1
- elastico (solido  $-$ ): 9.4.3
- ellittico (piano  $-$ ): 8.A
- ellittico [iperbolico, parabolico] (punto  $-$ , di una  $n$ -superf.): 8.1.1
- energetico (2-tensore  $-$  totale, parziale): 9.4.3
- energia (densità di  $-$ , flusso di  $-$  totale, parziale): 9.4.3
- equivalenza (tra  $\kappa$ -domini orientati, tra  $\kappa$ -catene): 8.4.3
- equivalenti (coordinate  $-$ , rispetto a una metrica): 9.5.2
- equiversa (riparametrizzazione  $-$ ): 9.2.2
- esterna (coderivata  $-$ , di una  $\kappa$ -forma): 8.5.2
- euclideo (elemento  $-$ , di un  $\kappa$ -quadroide): 8.4.3
- Eulero (teorema di  $-$ ): 8.1.1
  
- fattorizzata (base  $-$ ): 8.3.1
- fattorizzazione (assiomi di  $-$ ): 8.3.1
- Fermi-Walker (trasporto secondo  $-$ , di un vettore, lungo una curva time-like): 9.2.3
- fluido (ideale): 9.4.4
- fondamentale (tensore  $-$ , di una varietà p.riemann.): 8.2.1
- formale (curvatura  $-$ ): → pseudocurvatura
- formalmente invariante (metrica  $-$ ): 9.5.2
- forza (densità di  $-$ ): 9.4.3
- forzata (curvatura  $-$ , vettore di curvatura  $-$ , di una  $n$ -superf.): 8.1.2
- forzata (derivata  $-$ , lungo una curva di una  $n$ -superf.): 8.1.3
- frontiera (di un  $\kappa$ -dominio orientato): 8.4.3
  
- Gauss (protocollo di  $-$ , sul teorema della base ortogonale): 9.2.1
- Gauss (teorema di  $-$  del triangolo geodetico di una sup.): 8.1.3
- Gauss (teorema di  $-$ , di invarianza della curvatura): 8.1.1
- gaussiana (iniezione  $-$ ): → sferica (iniezione  $-$ )
- gaussiana (interpretazione  $-$  della curvatura): 8.1.1
- gemelli (paradosso dei  $-$ ): 9.4.2

- geodetica (assioma della –): 9.3.3
- geodetica (curva –, di una superf.): 8.1.2
- geodetica (curvatura –, vettore di curvatura –, di una n-superf.): 8.1.2
- geodetica (derivata –, lungo una curva di una n-superf.): 8.1.3
- geodetica (deviazione –): 9.2.4
- geodetica (parallela –, di una sottovarietà ad una sottovarietà di una varietà): 8.1.2
- geodetico (parallelismo –): 8.1.2
- geodetico (piede – di un punto, su una sottovarietà di una varietà): 8.1.2
- geodetico (problema – del 1°, 2°, 3° tipo): 8.1.2
- geometrodinamica: 9.3.3
- girogruppo: 9.D
- gravitazionale-scalare (potenziale –): 9.4.1
- gravitazionale-vettore (potenziale –): 9.4.1
  
- Hilbert (principio di azione di –): 9.3.3
  
- ideale (fluido –): 9.4.4
- incipiente (moto iperbolico –): 9.4.1
- inerziali (coordinate –): → coordin. localm. geod.
- infinitesima (L-trasformazione –): 9.D
- infinitesimo (dominio –, di una varietà topologica): 9.3.2
- infinitesimo-inerziale (riferimento –): 9.3.2
- infinitesimo-inerziale-di-quiete (riferimento –): 9.3.2
- integrale (somma –, su un  $\kappa$ -quadrato unitario): 8.4.1
- intrinseca (proprietà –, di una n-superf.): 8.1.1
- iperbolico (moto – incipiente): 9.4.1
- isometria (rispetto a una metrica): 9.5.2
- isometriche (n-superf. –): 8.1.1
- isotropa (metrica –, rispetto ad un centro): 9.5.2
- isotropa (terna – di K-campi): 9.5.2
  
- Jacobi (assioma di –, di un'algebra di Lie): 8.3.2
- Jacobi (condizione di –): 9.2.1
- Jacobi (metodo di –): 9.2.1
  
- Killing (equazioni di –): 9.5.2
- Killing (campo vettoriale di –): 9.5.2
- Killing (simmetria di –): 9.5.2
  
- Laplace-Beltrami (operatore di –): 8.5.2
- L-boost: → parallela (L-trasformazione –)
- Levi-Civita (teorema di –): 8.1.3
- Lie (algebra di –): 8.3.2
- Lie-costanza (secondo un campo vett., di un campo tensor.): 8.3.2
- Lie (derivata di –, secondo un campo vett., di un  $\langle a, b \rangle$ -tensore di una varietà ordinaria): 8.3.2
- Lie (derivata generalizzata di –, secondo un campo vett., di un tensore relativo): 8.3.2
- Lie (derivata di –, secondo un campo vett., di una  $\kappa$ -forma): 8.3.2
- Lie (parentesi di –): 8.3.2
- localmente geodetiche (coordinate –): 8.2.1

- localmente inerziali (coordinate  $-$ ):  $\rightarrow$  localmente geodetiche (coordinate  $-$ )
- lorentziana (matrice  $-$ ): 9.2.2
- lorentziana (tetrade  $-$ ): 9.2.2
- L-trasformazione (del tensore degli sforzi): 9.4.4
- L-trasformazione (di una 4-velocità propria, di una densità di forza-potenza): 9.B
- L-trasformazione (di un 2-tensore): 9.B
- L-trasformazioni (complementi sulle  $-$ ): 9.D
- L-trasformazioni (deduzione einsteiniana delle  $-$ ): 9.A
  
- massimamente simmetrica (metrica, varietà  $-$ ): 9.5.2
- materiale (continuo  $-$ ): 9.4.3
- metrica (di una varietà p.riemann.): 8.2.1
- Meusnier (teorema di  $-$ ): 8.1.1
- Möller (trasformazione di  $-$ , trasformazione speciale di  $-$ ): 9.4.1
- momentum: 9.4.3
- momentum (densità di  $-$ , flusso di  $-$ ): 9.4.3
- multiapplicazione con selezione: 8.3.1
  
- naturale (metrica  $-$ ): 8.1.1
- normale (curva  $-$ ): 9.2.2
- normale (versore  $-$ , a una n-superf.): 8.1.1
- normali (coordinate  $-$ ):  $\rightarrow$  coordin. localm. geod.
- nulla ( $\kappa$ -catena  $-$ ): 8.4.3
- nulla (geodetica  $-$ ): 9.2.2
  
- omologhe [coomologhe] (forme  $-$ ): 8.5.2
- omotetica (simmetria  $-$ ): 9.5.2
- ordinaria (varietà  $-$ ): 8.3.1
- orientata (frontiera  $-$  di un  $\kappa$ -dominio): 8.4.3
- orientato (elemento superficiale  $-$ ): 9.4.4
- orientato ( $\kappa$ -dominio  $-$ ): 8.4.3
- orologi (paradosso degli  $-$ ):  $\rightarrow$  gemelli (paradosso dei  $-$ )
- osservative (coordinate  $-$ ): 9.3.2
  
- Palatini (equazioni di  $-$ ): 9.3.3
- parallela (L-trasformazione  $-$ , o L-boost): 9.D
- parallelismo (angolo di  $-$ , di un circuito): 8.1.3
- parallelo (trasporto  $-$  di un tensore lungo una curva di una varietà riemann.): 8.2.1
- parallelo (trasporto  $-$  di un tensore lungo una curva di una varietà affin. conn): 8.2.2
- parallelo (trasporto  $-$  di un tensore, lungo una curva di una n-superf.): 8.1.3
- peso (di un  $\kappa$ -dominio orientato): 8.4.3
- pilota (campo vettoriale  $-$ , di una Lie-derivata): 8.3.1
- più fine (partizione  $-$  di una partizione): 8.4.1
- planeità (punto di  $-$ , di una n-superf.): 8.1.1
- Playfair (assioma di  $-$ ): 8.A
- Poincaré (modello del disco di  $-$  del piano iperbolico): 8.A
- Poincaré (semipiano di  $-$ ): 8.A
- Poincaré-Stokes (teorema di  $-$ ): 8.4.3
- poloidale (angolo  $-$ , di un 2-toro circolare): 8.1.1

- potenza (densità di  $-$ ): 9.4.3
- problema  $\partial$ - $\delta$ : 8.5.3
- pseudocurvatura (di una sup. immersa in uno spazio minkowskiano): 8.1.4
- pseudoKronecker (simbolo di  $-$ ): 9.2.3
- pseudometrica: 8.2.1
- pseudortonormale (tetrade  $-$ ): 9.2.3
- pseudoriemanniana (varietà  $-$ , varietà elementare  $-$ ): 8.2.1
- pseudosfera: 8.1.4
  
- quadroide: 8.4.3
- quiete (accelerazione propria di  $-$ ): 9.4.1
  
- rango (teorema del  $-$ ): 9.2.1
- regresso (spigolo di  $-$ ): 8.1.3
- Ricci (4-tensore di tipo  $-$ ): 8.2.1
- Ricci (identità generalizzate di  $-$ , in una varietà affin. conn.): 8.2.2
- riemanniana (varietà  $-$ , varietà elementare  $-$ ): 8.2.1
- Riemann-Klein (modello di  $-$  del piano ellittico): 8.A
- riferimento rotante (geodetiche del  $-$ , metrica del  $-$ ): 9.4.1
- rigido (sistema  $-$  di orologi): 9.4.1
- rotante (riferimento  $-$  a velocità angol. costante): 9.4.1
- rotante (metrica del riferimento  $-$ ): 9.4.1
- riparametrizzazione (di una curva normale): 9.2.2
  
- Schur (teorema di  $-$ ): 8.2.1
- Schwarzschild (metrica esterna di  $-$ ): 9.5.1
- Schwarzschild (metrica interna di  $-$ ): 9.5.1
- semiequatore: 8.A
- semigeodetica naturale (metrica  $-$ ): 8.1.2
- semigeodetiche (coordinate  $-$ , di data base): 8.1.2
- sferica (iniezione  $-$ , di una superf.): 8.1.1
- sforzi meccanici (2-tensore degli  $-$ ): 9.4.4
- sforzo meccanico: 9.4.4
- simmetrico [antisimmetrico] (bivettore  $-$ ): 8.2.1
- simmetrizzato (tensore di Riemann  $-$ ): 9.2.4
- singolare (parete  $-$ ): 9.4.1
- spaziale (geodetica  $-$ ): 9.2.2
- speciali (parametri  $-$ , classe dei parametri  $-$ ): 9.2.2
- statica (metrica  $-$ ): 9.3.3
- statica einsteiniana (2-tensore della  $-$ ): 9.3.3
- stazionaria (metrica  $-$ ): 9.3.3
- sviluppabile (superficie  $-$  circoscritta ad una superficie): 8.1.3
- Sylvester (criterio di  $-$ ): 9.2.1
- Sylvester (teorema di  $-$ ): 9.2.1
  
- temporale (geodetica  $-$ , assioma della geodetica  $-$ ): 9.3.3
- tensoriale (algebra  $-$  basata su E): 8.3.1
- tempo-ortogonale (metrica  $-$ ): 9.3.2
- temporale (geodetica  $-$ ): 9.2.2



- tensore degli sforzi (L-trasformazione del  $\rightarrow$ ): 9.4.4, anche 9.C
- tetrate: 9.2.3
- Thomas (precessione o rotazione di  $\rightarrow$ ): 9.D
- tipico (o standard,  $\kappa$ -simplesso  $\rightarrow$ ): 8.5.4
- torsione (tensore di  $\rightarrow$ , in una varietà affin. conn.): 8.2.2
- torsione (vettore di  $\rightarrow$ , in una varietà affin. conn.): 8.2.2
- totale (derivata  $\rightarrow$ , lungo una curva di una n-superf.): 8.1.3
- traslazione (di un vettore lungo una curva):  $\rightarrow$  parallelo (trasporto  $\rightarrow$ )
- attrice: 8.1.1
  
- uniformemente accelerato (riferimento  $\rightarrow$ ): 9.4.1
- uniformemente accelerato (riferimento  $\rightarrow$ ): 9.4.1
- unitario (antibivettore  $\rightarrow$ , di una varietà riemann.): 8.2.1
  
- velocità della luce (vettore di  $\rightarrow$ ): 9.3.2
- viscoso (fluido  $\rightarrow$ ): 9.4.4
  
- Weitzenböck (teorema di  $\rightarrow$ ): 8.5.2
- Weysenhoff (simmetrie di  $\rightarrow$ ): 9.4.1
  
- $\nabla^2$ -armonicità: 8.5.3
- $\langle a, b \rangle$ -tensoriale (fibrato  $\rightarrow$ ): 8.3.1
- $\Delta$ -armonicità: 8.5.3
- $\partial$ - $\delta$  (problema  $\rightarrow$ ): 8.5.3
- $\kappa$ -catena (di  $\kappa$ -domini orientati): 8.4.3
- $\kappa$ -ciclo: 8.4.3
- $\kappa$ -dominio orientato (di una varietà elementare): 8.4.3
- $\kappa$ -frontiera (come frontiera di una  $(\kappa+1)$ -catena): 8.5.4
- $\kappa$ -periodo (di una  $\kappa$ -forma chiusa su un  $\kappa$ -ciclo): 8.5.4
- $\kappa$ -quadroide: 8.4.3
- $\kappa$ -simplesso (di  $\mathbb{R}^n$ , di una varietà): 8.5.4
- 0-catena: 8.4.3
- 2-toro (circolare): 8.1.1

## INDICE ANALITICO DELLE APPENDICI GENERALI A ÷ F

Nota Bene: questo glossario elenca definizioni/locuzioni di sufficiente importanza, seguite dalla sigla della sezione (lettera maiusc. numero) ove esse compaiono per la prima volta (scritte in **grassetto**). Le voci che non iniziano con una lettera latina sono alla fine della lista.

- accumulazione (punto di  $-$ , rispetto a un SIST): B.1
- additiva [ $\sigma$ -additiva] (funzione d'insieme  $-$ ): C.1
- adeguatezza [adeguatezza normale] (teorema generalizzato di  $-$ ): A.4
- aderenza (punto di  $-$ , rispetto a un SIST): B.1
- adiabatico (processo  $-$ ): E.1
- algebra (di insiemi): C.2
- anello (di insiemi): C.2
- aperti, chiusi (di una topologia, su un dato supporto): B.1
- appartenenza (simbolo di  $-$ , relazione di  $-$ ): A.1
- applicazione:  $\rightarrow$  funzione
- approssimata di ordine (n) (soluzione  $-$ , di una equazione in SB): D.3
- approssimazione (schema di  $-$ ): D.3
- approssimazioni successive (metodo di soluzione di una EDO per  $-$ ): D.2
- assioma [teorema] (di un SF): A.2
- assoluta (temperatura  $-$ ): vedi termodinamica
- assurdo (metodo di dimostrazione per  $-$ ): A.3
- atomica (formula  $-$ ): A.1
  
- Baire (spazio di  $-$ ): B.1
- base (di una topologia): B.1
- base di intorni (di un SIST, in un punto di uno ST): B.1
- bicontinua (funzione  $-$ ): B.2
- Borel (algebra di  $-$ , spazio di  $-$ , insieme di  $-$ ): C.2
- Boyle (legge di  $-$ ): E.2
- Brouwer (teorema di  $-$ ): D.3
  
- calcolo dei predicati del 1° ordine: A.3
- campo di azione (di un quantificatore):  $\rightarrow$  scopo (di un quantificatore)
- Carnot (ciclo di  $-$ ): E.2
- Carnot (macchina di  $-$ ): E.2
- Carnot (tesi di  $-$ ): E.2
- cartesiano (prodotto  $-$ , di un insieme per un insieme): A.1
- chimico (potenziale  $-$ ): E.3
- chiusa [aperta] (formula  $-$ ): A.1
- chiusura (di un SIST): B.1
- chiusura deduttiva (di un insieme di enunciati, in un SF): A.4
- ciclico (processo): E.1
- ciclo (di uno ST, basato su un suo punto): B.2
- Clausius (postulato di  $-$ ): E.3
- coerente [incoerente] (SF  $-$ ): A.2

- coerente [incoerente, completo, incompleto] (insieme di enunciati di un SF  $\rightarrow$ ): A.3
  - collettivizzante (formula  $\rightarrow$ ): A.3
  - compatto (ST): B.2
  - compatto per successioni (ST  $\rightarrow$ ): B.2
  - complemento (di un insieme, rispetto ad un suo soprainsieme): A.1
  - completo [incompleto] (SF  $\rightarrow$ ): A.2
  - componente connesso (di uno ST rispetto a un suo punto): B.2
  - componenti connessi (famiglia dei  $\rightarrow$ , di uno ST): B.2
  - composizione di funzioni: A.1
  - composizione di grafi: A.1
  - congiunti [disgiunti] (insiemi  $\rightarrow$ ): A.1
  - congiunzione: A.1
  - connessa (coppia di punti di uno ST): B.2
  - connesso (ST  $\rightarrow$ , SIST  $\rightarrow$ ): B.2
  - connettivi (di un linguaggio): A.1
  - continua (funzione  $\rightarrow$ , da uno ST in uno ST): B.2
  - continua rispetto a un SIST (funzione  $\rightarrow$ ): B.2
  - contorno:  $\rightarrow$  frontiera
  - contrapposizione (legge debole, forte di  $\rightarrow$ ): A.3
  - contrazione (di un SI di uno SB in se stesso): D.3
  - contrazione (rapporto di  $\rightarrow$ ): D.3
  - convergenza (di una successione di SB a uno SB): D.3
  - coppia (assioma della  $\rightarrow$ ): A.3
  - corretto, adeguato (SF $\rightarrow$ , SF  $\rightarrow$ ): A.4
  - corrispondenza: A.1
  - cosmico (tempo  $\rightarrow$ ): F.3
  - cosmologico (principio  $\rightarrow$ ): F.2
  - costante (ciclo  $\rightarrow$ , in uno ST): B.2
  - costante [inverso, composto] (arco  $\rightarrow$ ,  $\rightarrow$  (di un arco),  $\rightarrow$  (di due archi presi in un certo ordine): B.2
  - costanti (di un linguaggio): A.1
  - costitutivo (modello termodinamico  $\rightarrow$ ): E.3
  - cotopologia (topologia duale): B.1
  - critica (densità  $\rightarrow$ ): F.3
- 
- De Morgan (formule di  $\rightarrow$ ): C.2
  - decidibile (SF  $\rightarrow$ ): A.2
  - decisione (problema di  $\rightarrow$ ): A.2
  - decidibile [indecidibile] (enunciato  $\rightarrow$ ): A.3
  - deducibile (da un insieme di enunciati, in un SF): A.4
  - deducibile [refutabile] (enunciato  $\rightarrow$ ): A.2
  - deduttive (regole  $\rightarrow$ , di un SF): A.2
  - densità (parametri adimensionali di  $\rightarrow$ ): F.3
  - denso in sé (SIST  $\rightarrow$ ): B.1
  - denso, denso rispetto a (SIST  $\rightarrow$ , SIST  $\rightarrow$  un SIST): B.1
  - derivato (insieme  $\rightarrow$  di un SIST): B.1
  - de Sitter (modello cosmologico di  $\rightarrow$ ): F.2
  - di 1<sup>a</sup> categoria, di 2<sup>a</sup> categoria (SIST  $\rightarrow$ , SIST): B.1
  - di un SIST, di un punto di uno ST): B.1
  - diagonale (grafo  $\rightarrow$ ): A.1

- differenza insiemistica (di un insieme da un insieme): A.1
- differenza simmetrica: A.1
- differenze (schemi alle  $-$ ): D.3
- dimostrazione (teoria della  $-$ ): A.2
- dimostrazione naturale: A.2
- dinamico (sistema  $-$ ): D.5
- discreta [banale] (topologia  $-$  (o massimale), topologia  $-$  (o minimale)): B.1
- disgiunzione: A.1
- disgiunzione (metodo di dimostrazione per  $-$ ): A.3
- dominio [codominio] (di una funzione): A.1
- doppia negazione (legge debole, forte della  $-$ ): A.3
- Duns Scoto (legge di  $-$ ): A.3
  
- egualitari (schemi di assiomi  $-$ ): A.3
- Einstein (modello cosmologico di  $-$ ): F.2
- elementari (insiemi  $-$ ): C.1
- ellittico (modello cosmologico einsteiniano  $-$ ): F.2
- embedding topologico: B.2
- empirica (temperatura  $-$ ): E.1
- entalpia: E.3
- entropia: E.3
- enunciativo (calcolo  $-$ ): A.3
- enunciato: A.1
- equazione determinante [malsana, vuota]: A.3
- equivalenti (SF  $-$ ): A.2
- estensionalità (assioma di  $-$ ): A.3
- estensione (di una formula collettivizzante): A.1, anche A.3
- esterna [interna] (misura  $-$ , di un sottoinsieme del quadrato unitario): C.1
  
- famiglia (di insiemi): A.1
- famiglia indicizzata (di insiemi): A.1
- fattore di scala (nella metrica FRW): F.3
- fattore di scala normalizzato (nella metrica FRW): F.4
- finito (insieme  $-$ ): A.3
- fondamentale (riferimento  $-$ ): F.3
- formula (di un linguaggio): A.1
- Friedmann (modelli cosmologici di  $-$ ): F.4
- Friedmann-Robertson-Walker (metrica di  $-$ , metrica normalizzata di  $-$ ): F.3
- frigorifero (ciclo  $-$ ): vedi utilizzatore
- frontiera (assiomi di  $-$ ): B.1
- frontiera (di un SIST): B.1
- funzionale (grafo  $-$ ): A.1
- funzionale-numerica (analisi  $-$ ): D.3
- funzione definita mediante termine: A.1
- funzione: A.1
  
- gerarchia  $T_0 \div T_4$ : B.2
- grafo: A.1
- gruppo fondamentale (di uno ST): B.2
- gruppo fondamentale (in uno ST, basato su un suo punto): B.2

- Heine-Borel (teorema di  $-$ ): B.2
- Hilbert (segno di  $-$ , operatore di  $-$ ): A.1
- Hubble (costante di  $-$ ): F.2
- Hubble (parametro di  $-$ ): F.3
- Hubble (legge di  $-$ ): F.2
- Hubble (tempo di  $-$ ): F.4
  
- identità (funzione  $-$ ): A.1
- identità (relazione di  $-$ ): A.3
- immagine (sotto una funzione, di un sottoinsieme del suo dominio): A.1
- inclusione (relazione di  $-$ ): A.1
- implicazione: A.1
- inclusiva [esclusiva] (disgiunzione  $-$ ): A.1
- indipendenza (degli assiomi di un SF): A.2
- indotta (topologia  $-$ , da uno ST su un suo SI): B.1
- induzione completa (principio dell'  $-$ ): A.3
- inferenziali (regole  $-$ )  $\rightarrow$  deduttive (regole  $-$ ): A.2
- infinito (assioma dell'  $-$ ): A.3
- iniezione [suriezione, biiezione]: A.1
- insieme dei  $z$  per cui: A.1
- insieme  $n$ -pla: A.1
- insiemi-misura (famiglia di  $-$ ): C.1
- interna, esterna (potenza  $-$ , potenza  $-$ ): E.1
- interna (energia potenziale  $-$ ): E.1
- interna (energia  $-$ ): E.1
- interno [esterno] (punto  $-$ , a un SIST): B.1
- intersezione (di due insiemi, di una famiglia di insiemi): A.1
- intersezione (topologia-  $-$ , di topologie con lo stesso supporto): B.1
- inversa (funzione  $-$ , di una funzione invertibile): A.1
- inversione (di un grafo): A.1
- ipotesi ausiliaria (metodo di dimostrazione dell'  $-$ ): A.3
- irreversibile (ciclo  $-$ ): E.3
- isobaro (processo  $-$ ): E.3
- isocoro (processo  $-$ ): E.3
- isolato (punto  $-$ , di un SIST): B.1
  
- J-estensione (di una semialgebra con misura): D.3
- J-misura esterna, interna (di un elemento di  $\mathcal{P}(E)$ ): D.3
- J-misurabile (elemento di  $\mathcal{P}(E)$ ): D.3
  
- Kantarovich (teorema di  $-$ ): D.3
- Kuratowski (assiomi di  $-$ ): B.1
  
- L-algebra (generata da una semialgebra con misura): D.3
- Lemaitre (modelli cosmologici di  $-$ ): F.4
- Leray-Schauder (teorema di  $-$ ): D.3
- L-estensione:  $\rightarrow$  L-spazio
- libera (energia  $-$ ): E.3

- libera (entalpia  $\rightarrow$ ): E.3
- limite (punto-  $\rightarrow$ ):  $\rightarrow$  accumulazione (punto di  $\rightarrow$ )
- linguaggio: A.1
- L-misura (di un elemento di  $\mathcal{P}(E)$ , riferita a una semialgebra con misura): C.3
- L-misura (sottoinsieme del quadrato unitario  $\rightarrow$ ): C.1
- L-misurabile (elemento di  $\mathcal{P}(E)$ , con riferimento a una semialgebra con misura): C.3
- L-misurabile (sottoinsieme del quadrato unitario  $\rightarrow$ ): C.1
- localmente compatto (ST): B.2
- localmente connesso (ST): B.2
- logica (teoria  $\rightarrow$ ): A.3
- logica-quantificata (teoria  $\rightarrow$ ): A.3
- logici (schemi di assiomi  $\rightarrow$ ): A.3
- L-spazio (generato da una semialgebra con misura): C.3
  
- metrizzabile, metrico (spazio  $\rightarrow$ ): B.2
- minimale (anello  $\rightarrow$ ,  $\sigma$ -anello  $\rightarrow$ , algebra  $\rightarrow$ ,  $\sigma$ -algebra  $\rightarrow$ , su una famiglia di insiemi): C.2
- misura (problema della estensione della  $\rightarrow$ ): C.1
- misura nulla (insieme di  $\rightarrow$ )  $\rightarrow$  trascurabile (insieme  $\rightarrow$ ): C.3
- misurabile (insieme  $\rightarrow$ , spazio  $\rightarrow$ ): C.2
- modello (di un SF): A.4
- modello cosmologico standard: F.3
- modus ponens (regola del  $\rightarrow$ ): A.2
- momenti (metodo dei  $\rightarrow$ ): D.3
- motore (ciclo  $\rightarrow$ ): E.2
- multifluido (modello cosmologico  $\rightarrow$ ): F.4
  
- negazione: A.1
- n-pla [n-pla ordinata]: A.1
- Nernst (principio di  $\rightarrow$ ):  $\rightarrow$  termodinamica (3° principio della  $\rightarrow$ )
- numerica astratta (analisi  $\rightarrow$ ):  $\rightarrow$  funzionale-numerica (analisi  $\rightarrow$ )
  
- oggettuali (segni  $\rightarrow$ , di un linguaggio): A.1
- omeomorfismo (di uno ST su uno ST): B.2
- omotopia (classi di  $\rightarrow$ , in uno ST): B.2
- omotopiche (funzioni continue  $\rightarrow$ , di uno ST in uno ST): B.2
  
- paracompatto (ST): B.2
- parte interna (di un SIST): B.1
- partenza [arrivo] (insieme di  $\rightarrow$ , di una corrispondenza): A.1
- parti (assioma delle  $\rightarrow$ ): A.3
- parti (insieme delle  $\rightarrow$ ): A.1
- pathwise-connessi (componenti  $\rightarrow$  di uno ST): B.2
- pathwise-connessione (di due punti di uno ST): B.2
- perfetto (SIST  $\rightarrow$ ): B.1
- perpetuo (moto  $\rightarrow$ , di 1<sup>a</sup>, di 2<sup>a</sup> specie): E.3
- Picard (metodo di  $\rightarrow$ ):  $\rightarrow$  approssimazioni successive
- più fine [meno fine] (topologia  $\rightarrow$ , ST  $\rightarrow$ ): B.1
- più forte [più debole] (SF  $\rightarrow$ ): A.2
- potenza (assioma della  $\rightarrow$ ):  $\rightarrow$  parti (assioma delle  $\rightarrow$ )

- pre-misura (assiomi di  $\rightarrow$ ): C.2
- prodotto topologico (di uno ST per uno ST): B.2
- proiezione ( $1 \leq i \leq n$ )-ma (di una n-pla ordinata): A.1
- proiezioni (metodo delle  $\rightarrow$ ): D.3
- prolungamento (di una funzione, ad un soprainsieme del suo dominio): A.1
- proposizionale (calcolo  $\rightarrow$ ): A.3
- punto fisso (equazione di  $\rightarrow$ ): D.2
  
- quantificatore esistenziale stretto: A.1
- quantificatore esistenziale [universale]: A.1
- quantificatori tipici: A.1
- quantificazione (schemi di assiomi di  $\rightarrow$ ): A.3
- quasi-equilibrio (processo di  $\rightarrow$ ): E.3
- quasi-ovunque: C.3
  
- raro (SIST  $\rightarrow$ ): B.1
- realizzazione (di un linguaggio): A.4
- relativamente compatto [ $\sigma$ -compatto] (SIST  $\rightarrow$ ): B.2
- relazionali (segni  $\rightarrow$ , di un linguaggio): A.1
- rendimento (di un ciclo motore): E.2
- restrizione (di una funzione, ad un sottoinsieme del suo dominio): A.1
- restrizione (schema di  $\rightarrow$ ): D.3
- reversibile (processo  $\rightarrow$ ): E.1
- reversa (funzione  $\rightarrow$ ): E.1
- ricoprimento (di un insieme): B.2
  
- Schauder (teorema di  $\rightarrow$ ): D.3
- scopo (di un quantificatore): A.1
- selezione e unione (schema di assiomi di  $\rightarrow$ ): A.3
- semialgebra [algebra,  $\sigma$ -algebra] (di insiemi): C.2
- semianello [anello,  $\sigma$ -anello] (di insiemi): C.2
- sentenza:  $\rightarrow$  enunciato
- separabile (SIST): B.1
- separazione (principio di  $\rightarrow$ ): A.3
- separazione (regola di  $\rightarrow$ )  $\rightarrow$  modus ponens (regola del): A.2
- serie di potenze di piccolo parametro (sviluppo in  $\rightarrow$ ): D.2
- sferico (modello cosmologico einsteiniano  $\rightarrow$ ): F.2
- sillogistico (calcolo  $\rightarrow$ ): A.3
- singolo: A.1
- soluzioni deboli (teoria delle  $\rightarrow$ ): D.3
- spazio topologico quoziente (modulo un'equivalenza): B.2
- spazio-misura: C.3
- stabile (successione  $\rightarrow$ , di applicazioni da uno SB in uno SB): D.3
- standard (modello cosmologico  $\rightarrow$ ): F.3
- sub-additiva [sub- $\sigma$ -additiva] (funzione d'insieme  $\rightarrow$ ): C.1
- supporto (di uno ST): B.1
  
- tautologia (in una teoria logica): A.3
- termine (di un linguaggio): A.1
- termodinamica: E.1

- termodinamica (temperatura –): E.2
- termodinamica (1° principio della –): E.1
- termodinamica (2° principio della –): E.3
- termodinamica (3° principio della –): E.3
- termodinamico (equilibrio –): E.1
- termodinamico (processo –): E.1
- termometro: E.1
- termostato: E.2
- terzo escluso (legge del –): A.3
- topologia indotta da una metrica: B.2
- topologia quoziente modulo un'equivalenza: B.2
- topologia standard (su  $\mathbf{R}$ , su  $\mathbf{R}^n$ ): B.2
- topologia: B.1
- topologici (assiomi –): B.1
- topologico (sottospazio –, di uno ST): B.1
- topologico (spazio –): B.1
- topologie standard (di  $\mathbf{R}$ , di  $\mathbf{Q}$ , di  $\mathbf{Z}$ , di  $\mathbf{N}$ ): B.2
- totalmente sconnesso (ST –): B.2
- traiettoria o path (in uno ST): B.2
- trascurabile (insieme –): C.2
  
- uguaglianza (simbolo di –, relazione di –): A.1
- unione (di due insiemi, di una famiglia di insiemi): A.1
- unità (di una famiglia di insiemi): B.2
- univoca [soddisfacibile, funzionale] (relazione –): A.1
- utilizzatore (ciclo –): E.2
- valore di una funzione (in un elemento del suo dominio): A.1
- variazione delle costanti (metodo di –): C.2
- vuoto (insieme –): A.1
  
- Zermelo (teorema di –): A.3
  
- $\sigma$ -anello [ $\delta$ -anello] (di insiemi): C.2
- “insieme degli y di tipo U(x) per qualche x”: A.3
- 1-numerabile (ST –): B.1
- 2-numerabile (ST): B.1



## INDICE DEI NOMI NOTEVOLI (nome completo, data/luogo di nascita/morte)

- AMPÈRE, André-Marie (Lione, 1775 – Marsiglia, 1836)  
ARCHIMEDE (Siracusa, 287 a.C. – Siracusa, 212 a.C.)  
ARISTOTELE (Stagira Gr. 384 a.C. – Calcide Gr. 322 a.C.)  
ASCOLI, Giulio (Trieste, 1843, – Milano, 1896)
- BAIRE, René-Louis (Parigi, 1874 – Chambery Fr. 1932)  
BARROW, Isaac (Londra, 1630 – Londra, 1677)  
BELTRAMI, Eugenio (Cremona It., 1835 – Roma, 1900)  
BERNOULLI, Jakob (Basilea, 1655 – Basilea, 1705)  
BERNOULLI, Johann (Basilea, 1667 – Basilea, 1748)  
BETTI, Enrico (Pistoia It., 1823 – Pisa, 1892)  
BIANCHI, Luigi (Parma, 1856 – Pisa, 1928)  
BOLTZMANN, Ludwig Eduard (Vienna, 1844 – Duino It., 1906)  
BOLYAI, Janos (Colosvár Ungh., 1802 – Marorsvásárhely Ungh., 1860)  
BONDI, Hermann (Vienna, 1919 – Cambridge, 2005)  
BOREL, Émile (Saint-Affrique Fr., 1871 – Parigi, 1956)  
BRAHE, Tycho (Knudstrup Scania, 1546 – Praga, 1601)  
BROUWER, Luitzen Eghertus Jan (Overschie Ol., 1881 – Blaricum Ol., 1966)
- CANTOR, Georg Ferdinand (S. Pietroburgo, 1845 – Halle Germ., 1918)  
CAPELLI, Alfredo (Milano, 1855 – Napoli, 1910)  
CARATHEODORY, Constantin (Berlino, 1873 – Monaco di Bav., 1950)  
CARNOT, Sadi Nicolas (Parigi, 1796 – Parigi, 1872)  
CARTAN, Élie Joseph (Dolomieu Fr., 1869 – Parigi, 1951)  
CAUCHY, Augustin-Louis (Parigi, 1789 – Sceaux Fr., 1857)  
CAVALIERI, Bonaventura (Milano, 1598 – Bologna, 1647)  
CAVENDISH, Henry (Nizza, 1731 – Londra, 1810)  
CAYLEY, Arthur (Richmond Ingh., 1821 – Cambridge, 1895)  
CHASLES, Michel (Éperimon Fr., 1793 – Parigi, 1880)  
CHRISTOFFEL, Elwin Bruno (Monschau Germ., 1829 – Strasburgo, 1900)

CLAUDIUS, Rudolf (Köslin Germ., 1822 – Bonn, 1888)  
 CLEBSCH, Rudolf Friedrich (Königsberg, 1833 – Gottinga, 1872)  
 CODAZZI, Delfino (Lodi It., 1824 – Pavia, 1875)  
 COPERNICUS (COPERNICO), Nikolai (Torun Pol., 1473 – Fromborg Pol., 1543)  
 CORIOLIS, Gustave Gaspard (Parigi, 1792 – Parigi, 1843)  
 COULOMB, Charles Augustin de (Angoulême Fr., 1736 – Parigi, 1806)  
 COURANT, Richard (Lubliniec Sles., 1888 – New York, 1972)

D’ALEMBERT, Jean Baptiste Le Ronde (Parigi, 1717 – Parigi, 1783)  
 DARBOUX, Gaston (Nîmes Fr., 1842 – Parigi, 1917)  
 DE RHAM, Georges (Roche Svizz., 1903 – Losanna, 1990)  
 DEDEKIND, Richard (Braunschweig Germ., 1831 – Braunschweig, 1916)  
 DEMOCRITO (Abdera Gr., 460 a.C. – (?) 370 a.C.)  
 DESARGUES, Girard (Lione, 1591 – Lione, 1661)  
 DESCARTES (CARTESIO), René (Le Haye Fr., 1596 – Stoccolma, 1650)  
 DIEUDONNÉ, Jean Alexandre Eugène (Lille Fr., 1906 – Nizza, 1992)  
 DIRAC, Paul Adrien Maurice (Bristol, 1902 – Tallahassee USA, 1984)  
 DIRICHLET, Peter Gustav Lejeune (Düren Germ., 1805 – Gottinga, 1859)  
 DOPPLER, Christian (Salisburgo, 1803 – Venezia, 1853)  
 DU BOIS RAYMOND, Paul David Gustav (Berlino, 1831 – Friburgo, 1889); 1.2.3

EINSTEIN, Albert (Ulm Germ., 1879 – Princeton USA, 1955)  
 ENRIQUES, Federigo (Livorno, 1877 – Roma, 1946)  
 EÖTVÖS, Jozsef (Budapest, 1848 – Budapest, 1919)  
 ERONE DI ALESSANDRIA ( $\approx$  I sec. a.C. – I sec. d.C.)  
 EUCLIDE (Gela, III sec. a.C – (?))  
 EUDOSSO DI CNIDO (IV sec. a.C.)  
 EULER (EULERO), Leonhard (Basilea, 1707 – S.Pietroburgo, 1783)

FARADAY, Michael (Newington Ingh., 1791 – Hampton Ingh., 1867)  
 FERMAT, Pierre de (Beaumont Fr., 1601 – Castres Fr., 1665)  
 FERMI, Enrico (Roma, 1901 – Chicago, 1954)

FEYNMAN, Richard (New York, 1918 – Los Angeles, 1988)  
 FITZGERALD, George Francis (Dublino, 1851 – Dublino, 1901)  
 FIZEAU, Armand Hyppolite Louis (Parigi, 1819 – Nanteuille Fr., 1896)  
 FRÉCHET, Maurice (Maligny Fr., 1878 – Parigi, 1973)  
 FREDHOLM, Erik Ivar (Stoccolma, 1866 – Stoccolma, 1927)  
 FREGE, Gottlob (Wismar Germ., 1848 – Bad-Kleinen Germ., 1925)  
 FRÉNET, Frédéric Jean (Périgueux Fr., 1816 – Périgueux, 1900)  
 FRIEDMANN, Alexandr Alexandrovich (S. Pietroburgo, 1888 – Leningrado, 1925)  
 FROBENIUS, Ferdinand Georg (Charlottenburg (Berlino), 1849 – Berlino, 1917)  
 FUBINI, Guido (Venezia, 1879 – New York, 1943)

GALILEI, Galileo (Pisa, 1564 – Arcetri It., 1642)  
 GAMOW, Georgy Antonovich (Odessa, 1904 – Boulder USA, 1968)  
 GASSENDI, Pierre (Champtercier Fr., 1592 – Parigi, 1655)  
 GAUSS, Karl Friedrich (Braunschweig Germ., 1777 – Gottinga, 1855); 1.1.1  
 GIBBS, Willard (New Haven USA, 1839 – New Haven, 1903)  
 GÖDEL, Kurt (Brno Cecosl., 1906 – Princeton, 1978)  
 GRAM, Jorgen Pedersen (Nustrup Dan., 1850 – Copenhagen, 1916)  
 GRASSMANN, Hermann Günther (Stettino Germ., 1809 – Stettino, 1877)  
 GREEN, George (Sneinton Ingh., 1793 – Sneinton, 1841)  
 GROSSMANN, Marcel (Budapest, 1878 – Zurigo, 1936)  
 GROTHENDIECK, Alexandr (Berlino, 1928 – )

HAAR, Alfred (Budapest, 1885 – Szeged Ungh., 1933)  
 HADAMARD, Jacques (Versailles, 1865 – Parigi, 1963)  
 HAMILTON, William Rowan (Dublino, 1805 – Dublino, 1865)  
 HAUSDORFF, Felix (Breslavia, 1868 – Bonn, 1942)  
 HEAVISIDE, Oliver (Londra, 1850 – Torquay Ingh., 1925)  
 HEISENBERG, Werner (Würzburg Germ., 1901 – Monaco di Bav., 1976)  
 HELMOLTZ, Hermann von (Potsdam, 1821 – Berlino, 1894)  
 HERBRAND, Jacques (Parigi, 1908 – La Bérard, 1931)  
 HERTZ, Heinrich (Amburgo 1857 – Bonn 1894)

HILBERT, David (Königsberg, 1862 – Gottinga, 1943)

HODGE, William (Edimburgo, 1903 – Cambridge, 1975)

HOYLE, Fred (Gilstead Ingh., 1915 – Bornemouth Ingh., 2001)

HUBBLE, Edwin Powell (Marshfield USA, 1888 – S. Marino, 1953)

HUME, David (Edimburgo, 1711 – Edimburgo, 1776)

IPPOCRATE DI CHIO (IV sec a. C.)

JACOBI, Karl Gustav Jakob (Potsdam, 1804 – Berlino, 1851)

JORDAN, Camille (Lione, 1838 – Milano, 1922)

KANT, Immanuel (Königsberg, 1724 – Königsberg, 1804)

KEPLER, Johannes (Veil der Stadt Germ., 1571 – Ratisbona (o Regensburg), 1630)

KLEIN, Felix (Düsserlforf, 1849 – Gottinga, 1925)

KRONECKER, Leopold (Liegnitz Germ., 1823 – Berlino, 1891)

KURATOWSKI, Kazimir (Varsavia, 1896 – Varsavia, 1980)

LAGRANGE, Joseph-Louis (Torino, 1736 – Parigi, 1813)

LAMB, Horace (Stockport Ingh., 1849 – Cambridge, 1934)

LAPLACE, Pierre Simon de (Beaumont Fr., 1749 – Parigi, 1827)

LE VERRIER, Urbain Jean Joseph (Saint Lô Fr., 1811 – Parigi, 1877)

LEBESGUE, Henri (Beauvais Fr., 1875 – Parigi, 1941)

LEGENDRE, Adrien-Marie (Parigi, 1752 – Parigi, 1833)

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (Lipsia, 1646 – Hannover, 1716)

LEMAÎTRE, Georges (Charleroi Belg., 1894 – Lovanio, 1966)

LEONARDO DA VINCI (Vinci It., 1452 – Amboise Fr., 1519)

LEVI-CIVITA, Tullio (Padova, 1873 – Roma, 1941)

LIE, Sophus (Nordfjordeide Norv., 1842 – Kristiania, 1899)

LIPSCHITZ, Rudolf Otto Sigismund (Königsberg, 1832 – Bonn, 1903)

LOBATCHEWSKY, Nikolai Ivanovich (Novgorod Russ., 1792 – Kazan Russ., 1856)

LORENTZ, Hendrik Antoon (Arnhem Ol., 1853 – Haarlem Ol., 1928)

ŁUKASIEWICZ, Jan (Lwow Pol., 1878 – Dublino, 1956)

MACH, Ernst (Brno Cecosl., 1838 – Monaco di Bav., 1916)

MAINARDI, Gaspare (Abbiategrasso It., 1800 – Lecco It., 1879)  
 MAXWELL, James Clerk (Edimburgo, 1831 – Cambridge, 1879)  
 MEUSNIER, DE LA PLACE, Jean Baptiste Marie (Tours Fr., 1754 – Le Pont de Cassel Fr., 1793)  
 MICHELSON, Albert Abraham (Strzelno Pol., 1852 – Pasadena USA, 1931)  
 MINKOWSKI, Hermann (Aleksotas Russ., 1864 – Gottinga, 1909)  
 MÖBIUS, Augustus Ferdinand (Schulpforta Germ., 1790 – Lipsia, 1868)  
 MORLEY, Edward Williams (Newark USA, 1838 – West-Hartford USA, 1923).

NERNST, Walther (Briesen Germ., 1864 – Zibelle Germ., 1941)  
 NEUMANN, Carl Gottfried (Königsberg, 1832 – Lipsia, 1925)  
 NEUMANN VON, John (Budapest, 1903 – Washington, 1977)  
 NEWTON, Isaac (Woolsthorpe Ingh., 1642 – Londra, 1727)  
 NIKODYM, Otton Marcin (Zablotow Ucr., 1889 – Utica USA, 1974)  
 NOETHER, Amalie (Emmy) (Erlangen Germ., 1882 – Bryn Mawr College USA, 1935)

OSTROGRADSKIJ, Michel (Pachenna Ucr., 1801 – Poltava Ucr., 1861)

PAPPO (Alessandria, fine III sec. d.C.)  
 PASCAL, Blaise (Clermont-Ferrand Fr., 1623 – Parigi, 1662)  
 PASCH, Moritz (Breslavia Germ., 1843 – Amburgo, 1930)  
 PEANO, Giuseppe (Spinetta It., 1858 – Torino, 1932)  
 PENZIAS, Arno (Monaco di Bav., 1933 )  
 PIERI, Mario (Lucca, 1860 – Capannori It., 1913)  
 PITAGORA DI SAMO (582 a.C. – 496 a.C.)  
 PLANCK, Max (Kiel Germ., 1858 – Gottinga, 1947)  
 PLATONE (Atene, 428 a.C. – Atene, 348 a.C.)  
 POINCARÉ, Henri (Nancy Fr., 1854 – Parigi, 1912)  
 POISSON, Siméon Denis (Pitivier Fr., 1781 – Parigi, 1840)  
 POPPER, Karl (Vienna, 1902 – Londra, 1994)

RADON, Johann (Decin Cecosl., 1887 – Vienna, 1956)  
 RAYLEIGH, John William (Lanford Ingh., 1842 – Whitham Ingh., 1919)  
 RICCI-CURBASTRO, Gregorio (Lugo It., 1853 – Bologna, 1925)

RIEMANN, Bernhard (Breselenz Germ., 1826 – Selasca It., 1866)  
 ROBERVAL, Gilles Personne de (Beauvais Fr., 1602 – Parigi, 1675)  
 RÖMER, Ole Christensen (Aarhus Dan., 1644 – Copenhagen, 1710)  
 RUTHERFORD, Ernest (Brightwater Ingh., 1871 – Cambridge, 1937)

SACCHERI, Girolamo (Sanremo It., 1667 – Milano, 1733)  
 SCHMIDT, Erhard (Dorpat Germ., 1876 – Berlino, 1959)  
 SCHÖNFLIES, Arthur (Landsberg Germ., 1853 – Francoforte, 1928)  
 SCHWARTZ, Laurent (Parigi, 1915 – Parigi, 2002)  
 SCHWARZ, Hermann (Hermsdorf Germ., 1843 – Berlino, 1921)  
 SCHWARZSCHILD, Karl (Francoforte, 1863 – Potsdam, 1916)  
 SERRET, Joseph Alfred (Parigi, 1819 – Versailles Fr., 1885)  
 SKOLEM, Thoralf (Sandswär Norv., 1887 – Oslo, 1963)  
 SOMMERFELD, Arnold Johannes Wilhelm (Königsberg, 1868 – Monaco di Bav., 1951)  
 STIELTJES, Thomas Jan (Zwolle Ol., 1856 – Tolosa, 1898)  
 STOKES, George (Skreen Ingh., 1819 – Cambridge, 1903)  
 SYLVESTER, James Joseph (Londra, 1814 – Londra, 1897)

TALETE (Mileto Gr.,  $\approx$  640 a.C. – lunga vita)  
 TAYLOR, Brook (Edmonton Ingh., 1685 – Londra, 1731)  
 THOM, René (Montbéliard Fr., 1923 – Bur-sur-Yvette Fr., 2002)  
 THOMSON, William (Belfast Ingh., 1804 – Netherall Ingh., 1907)  
 TORRICELLI, Evangelista (Faenza It., 1608 – Firenze, 1647)  
 TURING, Alan (Londra, 1912 – Wilmslow Ingh., 1954)

VEBLEN, Oswald (Decorah USA, 1880 – Princeton, 1960)  
 VERONESE, Giuseppe (Chioggia It., 1854 – Padova, 1917)

WEIERSTRASS, Karl (Ostenfelde Germ., 1815 – Berlino, 1897)  
 WEIL, André (Parigi, 1906 – Princeton, 1998)  
 WEINGARTEN, Julius (Berlino, 1836 – Friburgo, 1910)  
 WEYL, Hermann (Elmshorn Germ., 1885 – Zurigo, 1955)

WHEELER, John Archibald (Jacksonville USA, 1911 – Hightstown USA, 2008)

WHITEHEAD, Alfred North (Ramsgate Ingh., 1861 – Cambridge USA, 1947)

WHITNEY, Hassler (New York, 1907 – Princeton, 1989)

WIGNER, Jenò (Eugene) Pál (Budapest, 1902 – Princeton, 1995)

ZERMELO, Ernst (Berlino, 1871 – Friburgo, 1953)