



ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Laboratori Nazionali di Frascati

INFN-12-12/LNF
1st August 2012

**Fondamenti Matematici Della Fisica Macroscopica
(un percorso geometrico), Parte II**

Camillo Lo Surdo

INFN, Laboratori Nazionali di Frascati, P.O. Box 13, I-00044 Frascati, Italy
Published

Published by SIDS-Pubblicazioni
Laboratori Nazionali di Frascati

FONDAMENTI MATEMATICI DELLA FISICA
MACROSCOPICA
(UN PERCORSO GEOMETRICO)

C. LO SURDO

INDICE

- 0.0 PRESENTAZIONE
 - 0.0.1 CONSIDERAZIONI GENERALI E PIANO DI LAVORO
 - 0.0.2 I CONTENUTI CAPITOLO PER CAPITOLO: SINTESI E COMMENTI
 - 0.0.3 “ISTRUZIONI PER L’USO”
- 0.1 INTRODUZIONE: ALCUNE RIFLESSIONI SULLE TEORIE FISICO-MATEMATICHE
 - 0.1.1 PREMessa
 - 0.1.2 RAGIONAMENTO ASSIOMATICO-DEDUTTIVO VS. RAGIONAMENTO INDUTTIVO
 - 0.1.3 MATEMATICA SIGNIFICANTE VS. MATEMATICA NON SIGNIFICANTE
 - 0.1.4 SCIENZE MATEMATIZZABILI VS. SCIENZE NON MATEMATIZZABILI, E ALTRI COMMENTI

PARTE PRIMA

GEOMETRIA EUCLIDEA E PSEUDOEUCLEIDEA

CAP.1 LA GEOMETRIA EUCLIDEA

- 1.1 LA GEOMETRIA COME PROTOTIPO DI TEORIA FISICO-MATEMATICA
 - 1.1.1 GENERALITÀ E INQUADRAMENTO STORICO
 - 1.1.2 GEOMETRIA EUCLIDEA SINTETICA E ANALITICA
- 1.2 UNA FORMALIZZAZIONE METRICA DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA
 - 1.2.1 INTRODUZIONE
 - 1.2.2 I PRIMI NOVE ASSIOMI E LA GEOMETRIA “SPECIALE” DELLA RETTA
 - 1.2.3 I SUCCESSIVI OTTO ASSIOMI E LE GEOMETRIE DIADICHE DEL PIANO E DELLO SPAZIO
 - 1.2.4 GLI ULTIMI DUE ASSIOMI: LA GEOMETRIA ASSOLUTA E LA GEOMETRIA EUCLIDEA
- 1.3 L’ISOMORFISMO TRA H_n E LO SPAZIO CARTESIANO REALE N DIMENSIONALE \mathbf{R}^n
 - 1.3.1 \mathbf{R}^n COME MODELLO NORMALE DI H_n : PARTE PRIMA
 - 1.3.2 \mathbf{R}^n COME MODELLO NORMALE DI H_n : PARTE SECONDA
- 1.4 QUESTIONI DI ESTENSIONE E ORIENTAMENTO, CONCLUSIONI
 - 1.4.1 ESTENSIONE
 - 1.4.2 ORIENTAMENTO
 - 1.4.3 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

- 1.A LE RELAZIONI D'ORDINE
- 1.B LE FUNZIONI Cos E Sin

CAP. 2 LA GEOMETRIA PSEUDOLUCLIDEA

- 2.1 PREMESSA: LO SPAZIO-TEMPO DI EUCLIDE-NEWTON
 - 2.1.1 ELEMENTI DI CINEMATICA EUCLIDEA-NEWTONIANA
 - 2.1.2 ELEMENTI DI DINAMICA NEWTONIANA
- 2.2 INTRODUZIONE ALLA CINEMATICA E ALLA DINAMICA RELATIVISTICHE SPECIALI
 - 2.2.1 CINEMATICA RELATIVISTICA SPECIALE E TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
 - 2.2.2 RUDIMENTI DI DINAMICA RELATIVISTICA SPECIALE
- 2.3 INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA PSEUDOEUCLEIDEA
 - 2.3.1 GLI SPAZI PSEUDOEUCLEIDEI (NOZIONI DI BASE)
 - 2.3.2 LO SPAZIO DI MINKOWSKI (NOZIONI DI BASE)
- 2.4 ALGEBRA E GEOMETRIA DELLO SPAZIO DI MINKOWSKI
 - 2.4.1 PARTE PRIMA
 - 2.4.2 PARTE SECONDA
- 2.5 INTRODUZIONE ALL'ELETTROMAGNETISMO MAXWELLIANO
 - 2.5.1 LE EQUAZIONI DI MAXWELL-LORENTZ
 - 2.5.2 LA TEORIA EM NEL LINGUAGGIO DEL CALCOLO TENSORIALE
 - 2.5.3 L'ELETTROMAGNETISMO NEI CONTINUI MATERIALI

APP. SPEC. CAP. 2

- 2.A SPOSTAMENTI RIGIDI E CINEMATICA CLASSICA
- 2.B PROCEDURE DI SINCRONIZZAZIONE
- 2.C COMPLEMENTI SULLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ
- 2.D LE FORMULE DI TRASFORMAZIONE DI LORENTZ PARALLELA
- 2.E INDUZIONE DI LEGGI DI CONSERVAZIONE IN MECCANICA RELATIVISTICA SPECIALE (SECONDO LEWIS E TOLMAN)
- 2.F ANCORA SULLA RELAZIONE TRA MASSA DI QUIETE E MASSA DI MOTO
- 2.G DESCRIZIONE LAGRANGIANA E DESCRIZIONE EULERIANA DEL MOTO DI UN CONTINUO
- 2.H ELEMENTI DI DINAMICA CLASSICA E RELATIVISTICA DEI MEZZI MATERIALI CONTINUI
- 2.I I PARADOSSI DELLE VELOCITÀ SUPERLUMINALI IN RELATIVITÀ SPECIALE

PARTE SECONDA

STRUMENTI MATEMATICI DI BASE

CAP. 3 STRUMENTI MATEMATICI I

3.1 ELEMENTI DI ALGEBRA MULTILINEARE E TENSORIALE IN SPAZI PSEUDOEUCLIDEI

3.1.1 FORME κ -LINEARI

3.1.2 κ -TENSORI

3.1.3 FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

3.2 SVILUPPI E APPLICAZIONI DELL'ALGEBRA TENSORIALE

3.2.1 SULLE TRASFORMAZIONI ORTOGONALI E PSEUDORTOGONALI

3.2.2 PSEUDOTENSORE DI LEVI-CIVITA

3.2.3 ALCUNE APPLICAZIONI ALLA FISICA

3.2.4 B -ORTOGONALITÀ E SOTTOSPAZI

3.2.5 GRAMIANI E PROIETTORI ORTOGONALI

3.2.6 OPERATORI LINEARI SIMMETRICI E HERMITIANI, AUTOPROBLEMI

3.2.7 INVARIANTI SCALARI

3.3 ANALISI TENSORIALE LOCALE IN SPAZI PSEUDOEUCLIDEI E IN LORO VARIETÀ IMMERSE I

3.3.1 CAMPI TENSORIALI, BASI CARTESIANE E BASI LOCALI

3.3.2 DERIVAZIONE DI UN CAMPO TENSORIALE IN UNA BASE LOCALE

3.4 ANALISI TENSORIALE LOCALE IN SPAZI PSEUDOEUCLIDEI E IN LORO VARIETÀ IMMERSE II

3.4.1 DERIVAZIONE DI CAMPI TENSORIALI INTERNA A VARIETÀ IMMERSE

3.4.2 IL TENSORE DI RIEMANN IN VARIETÀ IMMERSE

3.5 TEORIA DELLA CURVATURA PER VARIETÀ EMBEDDED IN UNO SPAZIO EUCLIDEO m -DIMENSIONALE

3.5.1 INTRODUZIONE

3.5.2 CASO DELLE CURVE, $n = 1$

3.5.3 CASO DELLE (IPER)SUPERFICI, $2 \leq n = m-1$

3.5.4 CASO DELLE VARIETÀ, $2 \leq n < m-1$

APP. SPEC. CAP. 3

3.A NOTA SUL TENSORE FONDAMENTALE IN RELATIVITÀ SPECIALE

3.B ALCUNI ASPETTI DELLA GEOMETRIA DIFFERENZIALE DI UNA SUPERFICIE IMMERSA IN \mathbb{R}^3

CAP 4 STRUMENTI MATEMATICI II

4.1 VARIETÀ TOPOLOGICHE E DIFFERENZIABILI

- 4.1.1 NOZIONI DI BASE I
- 4.1.2 NOZIONI DI BASE II
- 4.1.3 ESEMPI E COMMENTI

4.2 CALCOLO DIFFERENZIALE SU VARIETÀ

- 4.2.1 APPLICAZIONI DI UNA VARIETÀ IN UNA VARIETÀ
- 4.2.2 CALCOLO DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE SU O TRA VARIETÀ
- 4.2.3 APPROCCI ALTERNATIVI AL CALCOLO DIFFERENZIALE SU O TRA VARIETÀ

4.3 ALGEBRA E ANALISI DIFFERENZIALE DI CAMPI $\langle a, b \rangle$ -TENSORIALI SU VARIETÀ ASTRATTE

- 4.3.1 ALGEBRA DEI $\langle a, b \rangle$ -TENSORI
- 4.3.2 CAMPI TENSORIALI IN VARIETÀ A CONNESSIONE AFFINE
- 4.3.3 CAMPI TENSORIALI RELATIVI E CAMPI PSEUDOTENSORIALI

4.4 ALGEBRE DELLE FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

- 4.4.1 INTRODUZIONE
- 4.4.2 FORME (COMPLETAMENTE) SIMMETRICHE ED ANTISIMMETRICHE
- 4.4.3 ALGEBRE DI GRASSMANN

4.5 INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE ESTERNO

- 4.5.1 DALLE FORME DIFFERENZIALI ESTERNE AL LEMMA DI POINCARÉ INVERSO
- 4.5.2 TEOREMI DEL TIPO “FROBENIUS”
- 4.5.3 IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET

APP. SPEC. CAP. 4

- 4.A ESTENSIONE DELLE FORMULE DI FRENET-SERRET A UNA VARIETÀ PSEUDORIEMANNIANA
- 4.B COMPLEMENTI: OLTRE IL PULL-BACK
- 4.C LE GEOMETRIE A CONNESSIONE AFFINE CON TENSORE FONDAMENTALE. CENNI ALLE TEORIE FISICHE UNITARIE

CAP 5 STRUMENTI MATEMATICI III

5.1 INTEGRAZIONE

- 5.1.1 INTEGRAZIONE SU SPAZI CARICHI
- 5.1.2 J-MISURA DI SOTTOINSIEMI NOTEVOLI DI \mathbf{R}^n
- 5.1.3 INTEGRAZIONE SU SOTTOVARIETÀ DI \mathbf{R}^n
- 5.1.4 ESTENSIONI AGLI L-INTEGRALI

5.2 IL RAPPORTO DIFFERENZIAZIONE-INTEGRAZIONE I

- 5.2.1 IL TEOREMA DI GAUSS-OSTROGRADSKIJ
- 5.2.2 ESEMPI ED APPLICAZIONI I

- 5.2.3 ESEMPI ED APPLICAZIONI II (TEORIA DEL POTENZIALE NEWTONIANO)
- 5.2.4 ESEMPI ED APPLICAZIONI III (TEORIA DEI POTENZIALI ELETTROMAGNETICI)

5.3 IL RAPPORTO DIFFERENZIAZIONE-INTEGRAZIONE II:

- 5.3.1 EQUAZIONI DIFFERENZIALI E LORO SISTEMI: GENERALITÀ
- 5.3.2 IL PROBLEMA DI CAUCHY NORMALE NELLA TEORIA DEI SDP
- 5.3.3 IL PROBLEMA DI CAUCHY GENERALIZZATO NELLA TEORIA DEI SDP

5.4 L'EQUAZIONE DIFFERENZIALPARZIALE DEL 1° ORDINE:

- 5.4.1 IL CASO PROTOTIPO CON 2 VARIABILI INDIPENDENTI
- 5.4.2 IL CASO GENERALE CON $n \geq 2$ VARIABILI INDIPENDENTI
- 5.4.3 L'INTEGRALE COMPLETO

APP. SPEC. CAP. 5

- 5.A I PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN, INTERNI ED ESTERNI

CAP. 6 STRUMENTI MATEMATICI IV

6.1 ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI I

- 6.1.1 GENERALITÀ
- 6.1.2 LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE NEL CASO UNIDIM
- 6.1.3 PROBLEMI VARIAZIONALI UNIDIM CONDIZIONATI

6.2 APPLICAZIONI DEL CDV UNIDIM

- 6.2.1 RASSEGNA DI PROBLEMI CLASSICI
- 6.2.2 GEODETICHE DI UNA VARIETÀ RIEMANNIANA

6.3 DINAMICA ANALITICA CLASSICA I

- 6.3.1 DALLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI ALLA DINAMICA LAGRANGIANA
- 6.3.2 LE BASI CONCETTUALI DELLA DINAMICA HAMILTONIANA
- 6.3.3 TRASFORMAZIONI CANONICHE I
- 6.3.4 TRASFORMAZIONI CANONICHE II (PARENTESI DI LAGRANGE E DI POISSON)

6.4 DINAMICA ANALITICA CLASSICA II

- 6.4.1 L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI
- 6.4.2 APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI
- 6.4.3 ELEMENTI DI DINAMICA CELESTE I
- 6.4.4 ELEMENTI DI DINAMICA CELESTE II

APP. SPEC. CAP. 6

- 6.A SULLA RAPPRESENTAZIONE POLARE DELLE CONICHE
- 6.B FORMULAZIONE LAGRANGIANA/HAMILTONIANA DELLA DINAMICA RELATIVISTICA SPECIALE DI UN PUNTO MATERIALE CARICO

CAP. 7 STRUMENTI MATEMATICI V

- 7.1 ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI II
 - 7.1.1 FONDAMENTI DEL CDV MULTIDIMENSIONALE
 - 7.1.2 ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CDV MULTIDIMENSIONALE I
 - 7.1.3 ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CDV MULTIDIMENSIONALE II
 - 7.2 ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI III
 - 7.2.1 COMPLEMENTI DI CDV
 - 7.2.2 SUL TEOREMA DI NOETHER
 - 7.3 PROBLEMI VARIAZIONALI OMOGENEI DEL 1° ORDINE
 - 7.3.1 PROBLEMI OMOGENEI UNIDIMENSIONALI
 - 7.3.2 PROBLEMI OMOGENEI MULTIDIMENSIONALI (CENNI)
- APP. SPEC. CAP. 7
- 7.A DISCONTINUITÀ DI SOLUZIONI DI SDP QUASI-LINEARI

PARTE TERZA

COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE E DI RELATIVITÀ SPECIALE, RELATIVITÀ GENERALE

CAP. 8 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

- 8.1 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE I
 - 8.1.1 n-SUPERFICI IMMERSE IN UNO SPAZIO EUCLIDEO: UNA RIVISITAZIONE ALTERNATIVA
 - 8.1.2 PARALLELISMO GEODETICO E COORDINATE SEMIGEODETICHE
 - 8.1.3 SUL TRASPORTO PARALLELO (DI UN VETTORE LUNGO UNA CURVA SU UNA SUPERFICIE)
 - 8.1.4 2-SUPERFICI IMMERSE IN UNO SPAZIO MINKOWSKIANO 3-DIM
- 8.2 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE II
 - 8.2.1 GEOMETRIA DELLE VARIETÀ ELEMENTARI PSEUDORIEMANNIANE
 - 8.2.2 GEOMETRIA DELLE VARIETÀ ELEMENTARI A CONNESSIONE AFFINE
- 8.3 COMPLEMENTI DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE LOCALE III
 - 8.3.1 ALGEBRA DEI CAMPI TENSORIALI SU VARIETÀ
 - 8.3.2 DERIVAZIONE DI CAMPI TENSORIALI SU VARIETÀ ORDINARIE. DERIVATA DI LIE

8.4 ELEMENTI DI TEORIA DELL'INTEGRAZIONE SU VARIETÀ ELEMENTARI

8.4.1 PROPEDEUTICA

8.4.2 IL TEOREMA DI POINCARÉ-STOKES

8.4.3 ESEMPI ED APPLICAZIONI

8.5 INTEGRAZIONE DI FORME DIFFERENZIALI ESTERNE SU VARIETÀ: COMPLEMENTI

8.5.1 κ -FORME E DUALITÀ DI HODGE

8.5.2 CODIFFERENZIAZIONE

8.5.3 IL "PROBLEMA ∂ - δ "

8.5.4 I TEOREMI DI DE RHAM

APP. SPEC. CAP. 8

8.A SUI MODELLI CANONICI DEL PIANO ELLITTICO E DI QUELLO IPERBOLICO

CAP. 9 COMPLEMENTI DI RELATIVITÀ SPECIALE, RELATIVITÀ GENERALE

9.1 NOTA STORICA: DA GAUSS A EINSTEIN

9.1.1 VERSO LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

9.1.2 LA RELATIVITÀ SPECIALE

9.1.3 LA RELATIVITÀ GENERALE

9.1.4 LA RELATIVITÀ E I FATTI OSSERVATIVI

9.2 SULLA GEOMETRIA DI UNA VARIETÀ LORENTZIANA

9.2.1 PARTE PRIMA: APPROFONDIMENTI ALGEBRICI

9.2.2 PARTE SECONDA: APPROFONDIMENTI ANALITICI

9.2.3 TETRADI E MATRICI LORENTZIANE, TRASPORTO ALLA FERMI-WALKER

9.2.4 COMPLEMENTI SUL TENSORE DI RIEMANN

9.3 LA TEORIA RELATIVISTICA GENERALE

9.3.1 PRELIMINARI

9.3.2 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE PRIMA

9.3.3 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE SECONDA

9.3.4 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE TERZA

9.3.5 FONDAMENTI DI RELATIVITÀ GENERALE: PARTE QUARTA

9.4 APPLICAZIONI E COMPLEMENTI I

9.4.1 ANALISI GEODETICA IN RIFERIMENTI NON INERZIALI

9.4.2 IL PARADOSSO DEI GEMELLI E LA SUA SOLUZIONE MEDIANTE LA TRASFORMAZIONE DI MØLLER

9.4.3 SUL TENSORE ENERGETICO TOTALE

9.4.4 MEZZO MATERIALE CONTINUO CON SFORZI "DI CONTIGUITÀ"

9.5 APPLICAZIONI E COMPLEMENTI II

9.5.1 LE METRICHE, ESTERNA ED INTERNA, DI SCHWARZSCHILD

9.5.2 CAMPI VETTORIALI DI KILLING, K-SIMMETRIE

- 9.5.3 IL TEOREMA DI BIRKHOFF
- 9.5.4 DINAMICA RELATIVISTICA GENERALE DEL PUNTO MATERIALE E DEL FOTONE

APP. SPEC. CAP. 9

- 9.A SULLA DEDUZIONE EINSTEINIANA DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ SPECIALI
- 9.B TRASFORMAZIONI DI LORENTZ PARALLELE DI κ -TENSORI 4-DIMENSIONALI
- 9.C TRASFORMAZIONE DI LORENTZ PARALLELA DEL 2-TENSORE DEGLI SFORZI MECCANICI
- 9.D L-TRASFORMAZIONI E L-BOOSTS
- 9.E MOTI RADIALI E CIRCOLARI DI PUNTI MATERIALI O DI FOTONI IN UNA VARIETÀ DI SCHWARTZSCHILD ESTERNA
- 9.F SULLE VARIETÀ CARATTERISTICHE DELLE EQUAZIONI DI EH
- 9.G NOTA SULLE COORDINATE PSEUDOARMONICHE

APPENDICI GENERALI

APP. GEN. A NOZIONI ELEMENTARI DI LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI

- A.0 PREMESSA
- A.1 LOGICA E TEORIA DEGLI INSIEMI: NOTAZIONI, MORFOLOGIA, INTERPRETAZIONE INTUITIVA
- A.2 GENERALITÀ SULLA TEORIA DELLA DEDUZIONE
- A.3 GLI ASSIOMI E SCHEMI DI ASSIOMI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI, E ALCUNE DELLE LORO CONSEGUENZE
- A.4 ALCUNE CONSIDERAZIONI SULLA FONDAZIONE E LA FORMALIZZAZIONE DELLE TEORIE MATEMATICHE
- A.5 SEMANTICA DEI SISTEMI FORMALI E TEORIA DEI MODELLI (CENNI)

APP. GEN. B GLOSSARIO RAGIONATO DI TOPOLOGIA

- B.0 PREMESSA
- B.1 DEFINIZIONI FONDAMENTALI
- B.2 CONTINUITÀ, CONNESSIONE, COMPATTEZZA, CICLI, GRUPPO FONDAMENTALE, ECC.

APP. GEN. C STRUTTURE DI MISURA

- C.0 PREMESSA
- C.1 MISURA DI LEBESGUE SUL QUADRATO UNITARIO
- C.2 STRUTTURE DI PRE-MISURA
- C.3 L-MISURE E J-MISURE ASTRATTE

APP. GEN. D INTRODUZIONE ALLA SCIENZA COMPUTAZIONALE

- D.1 RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI
- D.2 RISOLUZIONE APPROSSIMATA DI EQUAZIONI: ESEMPI ED APPLICAZIONI
- D.3 GENERALITÀ SULL'ANALISI FUNZIONALE-NUMERICA
- D.4 ESEMPI DI METODI COSTRUTTIVI PER LA SOLUZIONE DI EQUAZIONI ASTRATTE
- D.5 I SISTEMI DINAMICI E IL CAOS DETERMINISTICO (CENNI)

APP. GEN. E BREVE STORIA RAGIONATA DEI FONDAMENTI DELLA TERMODINAMICA CLASSICA

- E.1 IL 1° PRINCIPIO
- E.2 LA TESI DI CARNOT E LA TEMPERATURA ASSOLUTA
- E.3 IL 2° PRINCIPIO, L'ENTROPIA E I POTENZIALI TERMODINAMICI
- E.4 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE (DAL PUNTO DI VISTA FISICO-MATEMATICO)

APP. GEN. F ELEMENTI DI TEORIA COSMOLOGICA MACROSCOPICA

- F.1 CENNI STORICI
- F.2 I MODELLI COSMOLOGICI DI EINSTEIN E DI DE SITTER
- F.3 IL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD
- F.4 APPLICAZIONI DEL MODELLO COSMOLOGICO STANDARD: FRIEDMANN E LEMAITRE

BIBLIOGRAFIA GENERALE

GLOSSARI

INDICE DEI NOMI

INDICE GENERALE

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF
MACROSCOPIC PHYSICS
(A GEOMETRICAL ROUTE)

C. LO SURDO

CONTENTS

- 0.0 INTRODUCTION
 - 0.0.1 GENERAL CONSIDERATIONS, PLAN OF THE WORK
 - 0.0.2 CONTENTS AND COMMENTS
 - 0.0.3 “DIRECTIONS FOR USE”
- 0.1 SOME CONSIDERATIONS ABOUT THE PHYSICO-MATHEMATICAL THEORIES
 - 0.1.1 PRELIMINARIES
 - 0.1.2 AXIOMATIC-DEDUCTIVE VS. INDUCTIVE REASONING
 - 0.1.3 SIGNIFICANT VS. NON-SIGNIFICANT MATHEMATICS
 - 0.1.4 MATHEMATIZABLE VS. NON-MATHEMATIZABLE SCIENCES

PART ONE

EUCLIDEAN AND PSEUDOEUCLEIDEAN GEOMETRY

CHPT. 1 EUCLIDEAN GEOMETRY

- 1.1 GEOMETRY AS A PROTOTYPE OF THE PHYSICO-MATHEMATICAL THEORIES
 - 1.1.1 OUTLINE AND HISTORICAL FRAMING
 - 1.1.2 SYNTHETIC VS. ANALYTICAL EUCLIDEAN GEOMETRY
- 1.2 A METRIC FORMALIZATION OF EUCLIDEAN GEOMETRY
 - 1.2.1 INTRODUCTION
 - 1.2.2 THE FIRST NINE AXIOMS AND THE “SPECIAL” GEOMETRY OF THE STRAIGHT-LINE
 - 1.2.3 THE SUBSEQUENT EIGHT AXIOMS AND THE DYADIC PLANE/SPACE GEOMETRIES
 - 1.2.4 THE LAST TWO AXIOMS: ABSOLUTE VS. EUCLIDEAN GEOMETRY
- 1.3 ISOMORPHISM BETWEEN H_n AND THE REAL CARTESIAN SPACE \mathbf{R}^n
 - 1.3.1 \mathbf{R}^n AS A NORMAL MODEL OF H_n : PART 1
 - 1.3.2 \mathbf{R}^n AS A NORMAL MODEL OF H_n : PART 2
- 1.4 EXTENSION AND ORIENTATION, CONCLUDING REMARKS
 - 1.4.1 EXTENSION
 - 1.4.2 ORIENTATION
 - 1.4.2 CONCLUDING REMARKS

SPEC. APP.S TO CHPT. 1

- 1.A ORDER RELATIONS
- 1.B THE SPECIAL FUNCTIONS Cos AND Sin

CHPT. 2 PSEUDOEUCCLIDEAN GEOMETRY

- 2.1 PRELIMINARIES: THE EUCLID-NEWTON SPACE-TIME
 - 2.1.1 ELEMENTS OF CLASSICAL KINEMATICS
 - 2.1.2 ELEMENTS OF CLASSICAL DYNAMICS
- 2.2 INTRODUCTION TO SPECIAL-RELATIVISTIC KINEMATICS AND DYNAMICS
 - 2.2.1 SPECIAL-RELATIVISTIC KINEMATICS, SPECIAL LORENTZ'S TRANSFORMATIONS
 - 2.2.2 RUDIMENTS OF SPECIAL-RELATIVISTIC DYNAMICS
- 2.3 INTRODUCTION TO PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES
 - 2.3.1 PSEUDOEUCCLIDEAN SPACES (BASIC CONCEPTS)
 - 2.3.2 MINKOWSKI'S SPACE (BASIC CONCEPTS)
- 2.4 ALGEBRA AND GEOMETRY OF THE MINKOWSKI SPACE
 - 2.4.1 PART 1
 - 2.4.2 PART 2
- 2.5 INTRODUCTION TO CLASSICAL ELECTROMAGNETISM
 - 2.5.1 THE MAXWELL-LORENTZ EQUATIONS
 - 2.5.2 ELECTROMAGNETIC THEORY IN TENSOR LANGUAGE
 - 2.5.3 ELECTROMAGNETIC THEORY IN MATERIAL CONTINUOUS MEDIA

SPEC. APP.S TO CHPT. 2

- 2.A RIGID DISPLACEMENTS AND CLASSICAL KINEMATICS
- 2.B SYNCHRONIZATION PROCEDURES
- 2.C COMPLEMENTS ON LORENTZ'S TRANSFORMATIONS
- 2.D PARALLEL LORENTZ TRANSFORMATIONS
- 2.E INDUCTION OF THE CONSERVATION LAWS IN SPECIAL RELATIVISTIC MECHANICS
- 2.F MORE ON THE RELATIONSHIP BETWEEN "REST" AND "MOTION" MASS
- 2.G LAGRANGE VS. EULER DESCRIPTION OF THE MOTION OF A CONTINUOUS MEDIUM
- 2.H CLASSICAL AND RELATIVISTIC DYNAMICS OF A CONTINUOUS MATERIAL MEDIUM
- 2.I THE PARADOXES ARISING FROM SUPERLUMINAL VELOCITIES IN SPECIAL RELATIVITY

PART TWO

BASIC MATHEMATICAL TOOLS

CHPT. 3 MATHEMATICAL TOOLS I

3.1 MULTILINEAR AND TENSOR ALGEBRA IN PSEUDOEUCLEIDEAN SPACES

3.1.1 κ -LINEAR FORMS

3.1.2 κ -TENSORS

3.1.3 SYMMETRIC AND ANTISYMMETRIC FORMS

3.2 TENSOR ALGEBRA AND APPLICATIONS

3.2.1 ORTHOGONAL AND PSEUDORTHOGONAL TRANSFORMATIONS

3.2.2 LEVI-CIVITA'S PSEUDOTENSOR

3.2.3 SOME PHYSICAL APPLICATIONS

3.2.4 B -ORTHOGONALITY AND SUBSPACES

3.2.5 GRAMIANS AND ORTHOGONAL PROJECTORS

3.2.6 SYMMETRIC AND HERMITIAN OPERATORS, EIGENPROBLEMS

3.2.7 SCALAR INVARIANTS

3.3 TENSOR ANALYSIS IN PSEUDOEUCLEIDEAN SPACES AND IMMERSED MANIFOLDS I

3.3.1 TENSOR FIELDS, CARTESIAN AND LOCAL BASES

3.3.2 DERIVATION OF A TENSOR FIELD IN A LOCAL BASE

3.4 TENSOR ANALYSIS IN PSEUDOEUCLEIDEAN SPACES AND IMMERSED MANIFOLDS II

3.4.1 "INNER" DERIVATION OF A TENSOR FIELD (IN AN IMMERSSED MANIFOLD)

3.4.2 RIEMANN TENSOR (IN AN IMMERSSED MANIFOLD)

3.5 CURVATURE THEORY IN A MANIFOLD EMBEDDED IN A m -DIM EUCLIDEAN SPACE

3.5.1 INTRODUCTION

3.5.2 CASE OF A CURVE, $n = 1$

3.5.3 CASE OF A (HYPER)-SURFACE, $2 \leq n = m-1$

3.5.3 CASE OF A MANIFOLD, $2 \leq n < m-1$

SPEC. APP.S TO CHPT. 3

3.A A NOTE ON THE FUNDAMENTAL TENSOR IN SPECIAL RELATIVITY

3.B SOME ASPECTS OF THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF A SURFACE IMMERSSED IN \mathbb{R}^3

CHPT. 4 MATHEMATICAL TOOLS II

- 4.1 TOPOLOGICAL AND DIFFERENTIABLE MANIFOLDS
 - 4.1.1 BASIC CONCEPTS I
 - 4.1.2 BASIC CONCEPTS II
 - 4.1.2 EXAMPLES AND COMMENTS
- 4.2 DIFFERENTIAL CALCULUS ON MANIFOLDS
 - 4.2.1 APPLICATIONS OF A MANIFOLD INTO A MANIFOLD
 - 4.2.2 1ST-ORDER DIFFERENTIAL CALCULUS ON, OR BETWEEN, MANIFOLDS
 - 4.2.3 ALTERNATIVE APPROACHES TO DIFFERENTIAL CALCULUS ON, OR BETWEEN, MANIFOLDS
- 4.3 ALGEBRAIC AND DIFFERENTIAL ANALYSIS OF $\langle a, b \rangle$ -TENSOR FIELDS ON MANIFOLDS
 - 4.3.1 $\langle a, b \rangle$ -TENSOR ALGEBRA
 - 4.3.2 MANIFOLDS WITH AN AFFINE CONNECTION AND TENSOR FIELDS ON THEM
 - 4.3.3 RELATIVE TENSOR FIELDS AND PSEUDOTENSOR FIELDS
- 4.4 ALGEBRAS OF THE SYMMETRIC/ANTISYMMETRIC FORMS
 - 4.4.1 PRELIMINARIES
 - 4.4.2 (COMPLETELY) SYMMETRIC/ANTISYMMETRIC FORMS
 - 4.4.3 GRASSMANN'S ALGEBRAS
- 4.5 INTRODUCTION TO EXTERIOR DIFFERENTIAL CALCULUS
 - 4.5.1 FROM THE EXTERIOR DIFFERENTIAL FORMS TO THE INVERSE POINCARÉ'S LEMMA
 - 4.5.2 THEOREMS OF THE FROBENIUS TYPE
 - 4.5.3 THE GAUSS-BONNET THEOREM
- SPEC. APP.S TO CHPT. 4
 - 4.A EXTENSION OF FRENET-SERRET'S FORMULAS TO A PSEUDORIEMANNIAN MANIFOLD
 - 4.B COMPLEMENTS: BEYOND THE PULL-BACK
 - 4.C AFFINELY CONNECTED GEOMETRIES WITH A FUNDAMENTAL TENSOR. UNITARY PHYSICAL THEORIES (SHORT ACCOUNT)

CHPT. 5 MATHEMATICAL TOOLS III

- 5.1 INTEGRATION
 - 5.1.1 INTEGRATION IN "CHARGED" SPACES
 - 5.1.2 J-MEASURE OF TYPICAL SUBSETS OF \mathbf{R}^n
 - 5.1.3 INTEGRATION ON SUBMANIFOLDS OF \mathbf{R}^n
 - 5.1.4 EXTENSIONS TO L-INTEGRALS
- 5.2 THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENTIATION AND INTEGRATION I
 - 5.2.1 THE GAUSS-OSTROGRADSKIJ THEOREM
 - 5.2.2 EXAMPLES AND APPLICATIONS I
 - 5.2.3 EXAMPLES AND APPLICATIONS II (NEWTONIAN POTENTIAL THEORY)
 - 5.2.4 EXAMPLES AND APPLICATIONS III (ELECTROMAGNETIC POTENTIAL THEORY)

5.3 THE RELATIONSHIP BETWEEN DIFFERENTIATION AND INTEGRATION II

- 5.3.1 DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SYSTEMS: AN OUTLINE
- 5.3.2 THE NORMAL CAUCHY PROBLEM IN PDS THEORY
- 5.3.3 THE GENERALIZED CAUCHY PROBLEM IN PDS THEORY

5.4 THE 1ST-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

- 5.4.1 SIMPLEST CASE WITH TWO INDEPENDENT VARIABLES
- 5.4.2 GENERAL CASE WITH $n \geq 2$ INDEPENDENT VARIABLES
- 5.4.3 THE COMPLETE INTEGRAL

SPEC. APP.S TO CHPT. 5

5.A INTERIOR/EXTERIOR DIRICHLET/NEUMANN PROBLEMS

CHPT. 6 MATHEMATICAL TOOLS IV

6.1 CALCULUS OF VARIATIONS I

- 6.1.1 PRELIMINARIES
- 6.1.2 EULER-LAGRANGE EQUATIONS IN THE ONE-DIMENSIONAL CASE
- 6.1.3 CONDITIONED VARIATIONAL ONE-DIMENSIONAL PROBLEMS

6.2 APPLICATIONS OF THE ONE-DIMENSIONAL COV

- 6.2.1 SOME CLASSICAL PROBLEMS
- 6.2.2 GEODETICS OF A RIEMANN MANIFOLD

6.3 CLASSICAL ANALYTICAL DYNAMICS I

- 6.3.1 FROM THE DYNAMICS OF A SYSTEM OF MATERIAL POINTS TO LAGRANGE'S FORMALISM
- 6.3.2 FUNDAMENTALS OF HAMILTON'S DYNAMICS
- 6.3.3 CANONICAL TRANSFORMATIONS I
- 6.3.4 CANONICAL TRANSFORMATIONS II (POISSON AND LAGRANGE BRACKETS)

6.4 CLASSICAL ANALYTICAL DYNAMICS II

- 6.4.1 THE HAMILTON-JACOBI EQUATION
- 6.4.2 APPLICATIONS OF THE HAMILTON-JACOBI EQUATION
- 6.4.3 ELEMENTS OF CELESTIAL DYNAMICS I
- 6.4.4 ELEMENTS OF CELESTIAL DYNAMICS II

SPEC. APP.S TO CHPT. 6

- 6.A POLAR REPRESENTATION OF THE CONIC CURVES
- 6.B THE LAGRANGE/HAMILTON FORMULATION OF THE SPECIAL-RELATIVISTIC DYNAMICS FOR A MATERIAL, CHARGED POINT

CHPT. 7 MATHEMATICAL TOOLS V

- 7.1 CALCULUS OF VARIATIONS II
 - 7.1.1 FUNDAMENTALS OF THE TO MULTI-DIM COV
 - 7.1.2 SOME APPLICATIONS OF MULTI-DIM COV I
 - 7.1.3 SOME APPLICATIONS OF MULTI-DIM COV II
- 7.2 CALCULUS OF VARIATIONS III
 - 7.2.1 COMPLEMENTS OF COV
 - 7.2.2 NOETHER'S THEOREM
- 7.3 HOMOGENEOUS VARIATIONAL PROBLEMS OF THE 1ST ORDER
 - 7.3.1 ONE-DIMENSIONAL CASE
 - 7.3.2 HOMOGENEOUS MULTI-DIMENSIONAL PROBLEMS (SHORT ACCOUNT)
- SPEC. APP.S TO CHPT. 7
 - 7.A DISCONTINUITIES OF SOLUTIONS OF QUASI-LINEAR PDS

PART THREE

COMPLEMENTS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY AND SPECIAL RELATIVITY. GENERAL RELATIVITY

CHPT. 8 COMPLEMENTS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY

- 8.1 COMPLEMENTS OF LOCAL DIFFERENTIAL GEOMETRY I
 - 8.1.1 IMMERSED n -SURFACES: A DIFFERENT APPROACH TO SOME BASIC CONCEPTS
 - 8.1.2 GEODETIC PARALLELISM AND SEMIGEODETIC COORDINATES
 - 8.1.3 PARALLEL TRANSPORT OF A VECTOR ALONG A CURVE OF AN IMMERSED SURFACE
 - 8.1.4 2-SURFACES IMMERSED IN A PSEUDOEUCLEIDEAN MINKOWSKI 3-DIM SPACE
- 8.2 COMPLEMENTS OF LOCAL DIFFERENTIAL GEOMETRY II
 - 8.2.1 GEOMETRY OF ELEMENTARY PSEUDORIEMANNIAN MANIFOLDS
 - 8.2.2 GEOMETRY OF ELEMENTARY MANIFOLDS WITH AN AFFINE CONNECTION
- 8.3 COMPLEMENTS OF LOCAL DIFFERENTIAL GEOMETRY III
 - 8.3.1 ALGEBRA OF TENSOR FIELDS ON MANIFOLDS
 - 8.3.2 DERIVATION OF TENSOR FIELDS ON ORDINARY MANIFOLDS. LIE DERIVATIVE
- 8.4 ELEMENTS OF INTEGRATION THEORY ON ELEMENTARY MANIFOLDS

- 8.4.1 PRELIMINARIES
- 8.4.2 THE THEOREM OF POINCARÉ-STOKES
- 8.4.3 EXAMPLES AND APPLICATIONS

8.5 EXTERIOR DIFFERENTIAL FORMS ON MANIFOLDS: COMPLEMENTS

- 8.5.1 κ -FORMS AND HODGE DUALITY
- 8.5.2 CODIFFERENTIATION
- 8.5.3 THE ∂ - δ PROBLEM
- 8.5.4 DE RHAM'S THEOREMS

SPEC. APP.S TO CHPT. 8

- 8.A CANONICAL MODELS OF THE ELLIPTIC AND HYPERBOLIC PLANES

CHPT. 9 COMPLEMENTS OF SPECIAL RELATIVITY, GENERAL RELATIVITY

9.1 FROM GAUSS TO EINSTEIN: A HISTORICAL NOTE

- 9.1.1 TOWARDS THE NON-EUCLIDEAN GEOMETRIES
- 9.1.2 SPECIAL RELATIVITY
- 9.1.3 GENERAL RELATIVITY
- 9.1.4 RELATIVITY AND OBSERVATIONAL FACTS

9.2 ON THE GEOMETRY OF A LORENTZ MANIFOLD

- 9.2.1 PART ONE: ALGEBRAIC ASPECTS
- 9.2.2 PART TWO: ANALYTICAL ASPECTS

9.3 MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY

- 9.3.1 PRELIMINARIES
- 9.3.2 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY I
- 9.3.3 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY II
- 9.3.4 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY III
- 9.3.5 FOUNDATIONS OF GENERAL RELATIVITY IV

9.4 APPLICATIONS AND COMPLEMENTS I

- 9.4.1 GEODETIC ANALYSIS IN NON-INERTIAL FRAMES
- 9.4.2 THE TWIN PARADOX AND ITS SOLUTION ACCORDING TO MØLLER
- 9.4.3 ABOUT THE TOTAL ENERGY TENSOR
- 9.4.4 CONTINUOUS MATERIAL MEDIUM WITH "CONTIGUITY" STRESSES

9.5 APPLICATIONS AND COMPLEMENTS II

- 9.5.1 SCHWARZSCHILD'S METRICS, EXTERIOR AND INTERIOR
- 9.5.2 KILLING'S VECTORS, K-SYMMETRIES
- 9.5.3 BIRKHOFF'S THEOREM
- 9.5.4 ON THE RELATIVISTIC DYNAMICS OF A MATERIAL POINT (PRECESSION OF MERCURY, BENDING OF LIGHT, ETC.)

SPEC. APP.S TO CHPT 9

- 9.A EINSTEIN'S DEDUCTION OF THE SPECIAL LORENTZ TRANSFORMATIONS
- 9.B PARALLEL LORENTZ'S TRANSFORMATIONS FOR 4-DIM κ -TENSORS
- 9.C PARALLEL LORENTZ'S TRANSFORMATION OF THE ENERGY 2-TENSOR
- 9.D L-TRANSFORMATIONS AND L-BOOSTS
- 9.E ON THE GEODETICS ON SCHWARZSCHILD'S MANIFOLD: RADIAL AND CIRCULAR MOTIONS OF MATERIAL POINTS OR PHOTONS
- 9.F A NOTE ON THE GRAVITATIONAL WAVES
- 9.G PSEUDOHARMONIC COORDINATES

GENERAL APPENDICES

GEN APP. A ELEMENTS OF LOGIC AND SET THEORY

- A.0 PRELIMINARIES
- A.1 LOGIC AND SET THEORY: NOTATIONS, MORPHOLOGY, INTUITIVE INTERPRETATION
- A.2 ELEMENTS OF DEDUCTION THEORY
- A.3 AXIOMS AND AXIOM SCHEMATA OF THE SET THEORY, AND SOME OF THEIR CONSEQUENCES
- A.4 FOUNDATION AND FORMALIZATION OF MATHEMATICAL THEORIES
- A.5 SEMANTICS OF THE FORMAL SYSTEMS, AND MODEL THEORY (SHORT ACCOUNT)

GEN APP. B TOPOLOGY: A REASONED GLOSSARY

- B.0 PRELIMINARIES
- B.1 BASIC DEFINITIONS
- B.2 CONTINUITY, CONNECTEDNESS, COMPACTNESS, LOOPS, ETC

GEN. APP. C MEASURE STRUCTURES

- C.0 PRELIMINARIES
- C.1 INTRODUCTION
- C.2 PRE-MEASURE STRUCTURES
- C.3 ABSTRACT L-MEASURE AND J-MEASURE

GEN. APP. D INTRODUCTION TO COMPUTATIONAL SCIENCE

- D.1 APPROXIMATE SOLUTION OF EQUATIONS
- D.2 EXAMPLES AND APPLICATIONS
- D.3 ON NUMERICAL-FUNCTIONAL ANALYSIS
- D.4 CONSTRUCTIVE METHODS TO SOLVE ABSTRACT EQUATIONS (EXAMPLES)
- D.5 DYNAMICAL SYSTEMS AND DETERMINISTIC CHAOS (SHORT ACCOUNT)

GEN. APP. E A SHORT HISTORY OF CLASSICAL THERMODYNAMICS

- E.1 FIRST PRINCIPLE
- E.2 CARNOT'S THESIS AND ABSOLUTE TEMPERATURE
- E.3 SECOND PRINCIPLE, ENTROPY AND THERMODYNAMIC POTENTIALS
- E.4 CONCLUDING REMARKS (FROM THE PHYSICO-MATHEMATICAL STANDPOINT)

GEN. APP. F ELEMENTS OF MACROSCOPIC COSMOLOGY

- F.1 HISTORICAL NOTE
- F.2 EINSTEIN'S AND DE SITTER'S COSMOLOGICAL MODELS
- F.3 THE STANDARD COSMOLOGICAL MODEL
- F.4 APPLICATIONS OF THE STANDARD COSMOLOGICAL MODEL: FRIEDMANN AND LEMAITRE

GENERAL BIBLIOGRAPHY

SUBJECT INDICES (1÷4)

AUTHOR INDEX

CONTENTS

CAP. 3

STRUMENTI MATEMATICI I

Con poche eccezioni, la piena intelligenza di quanto fin qui illustrato in materia di geometria euclidea classica 3-dimensionale, e di geometria pseudoeuclidea-lorentziana 4-dimensionale, non ha quasi mai presupposto cognizioni matematiche che andassero al di là di una preparazione generale di base; per intenderci, all'incirca quella che si riceve nel primo biennio dei corsi di laurea in Fisica, e di norma anche molto meno. Questo orizzonte deve ormai essere significativamente allargato; ma i limiti imposti dalle finalità del nostro lavoro non consentono quella illustrazione organica e sistematica degli strumenti matematici adesso necessari che è offerta dalla trattatistica specializzata. La seconda parte del libro, che inizia con questo Cap. 3, è quindi condizionata dalle contrastanti esigenze di fornire una traccia abbastanza ampia e consistente della vastissima materia di interesse, senza tuttavia perdere di vista il suo carattere sostanzialmente strumentale.

3.1) ELEMENTI DI ALGEBRA MULTILINEARE E TENSORIALE IN SPAZI PSEUDOEUCCLIDEI

3.1.1 FORME κ -LINEARI

Nella S.sez. 2.4.1 abbiamo definito le componenti del generico vettore x di uno spazio R -lineare (\equiv lineare su R) pseudoeuclideo $E_{n \geq 1, 0 \leq \pi \leq n}$ con forma bilineare simmetrica non singolare B , rispetto ad una base $\{e_1, \dots, e_n\} \equiv \{e_i\}_{i=1 \div n}$ (o anche $\{e_i\}$, o addirittura $\{e_i\}$, sottintendendo che l'indice varia da 1 a n) di $E_{n, \pi}$ stesso, come i coefficienti, unicamente determinati, della sua rappresentazione come combinazione lineare su quella base. Abbiamo finora scritto in basso l'indice di quelle componenti; ma la convenzione più usata, e che preferibilmente seguiremo d'ora in avanti, è quella di scrivere l'indice in alto. Si ha dunque

$$(1) \quad x = x^i e_i,$$

ove la posizione dei due indici ripetuti, *uno in basso e uno in alto*, meglio richiama la necessità di sommare (da 1 a n) su di essi. Dalla (1), se la base è pseudortonormale, cioè se la matrice B_{ij} è

diagonale con elementi $\varepsilon(i) = \pm 1$, sappiamo che $B(x, e_i) = x^j \varepsilon(i) \delta_{ij} = \varepsilon(i) x^i$ (non sommare su i nel 3° membro!).

D'ora in avanti, chiameremo più precisamente **componenti controvarianti** di x i numeri x^i che abbiamo fin qui detto semplicemente sue "componenti". I numeri

$$(2) \quad x_i =: B(x, e_i)$$

si diranno invece **componenti covarianti** di x (con indice in basso). Ancora, se la base è pseudortonormale valgono le

$$(3_1) \quad x^i = \varepsilon(i) x_i,$$

$$(3_2) \quad x_i = \varepsilon(i) x^i,$$

con ogni evidenza equivalenti; cioè, in questo caso la moltiplicazione per $\varepsilon(i)$ trasforma la componente covariante (i) di un vettore nella corrispondente componente controvariante (i), e viceversa. Per una base qualsiasi, è infine:

$$(4) \quad B(x, y) = x_i y^i = x^i y_i;$$

e quindi, se la base è pseudortonormale, $B(x, y) = \sum \varepsilon(i) x^i y^i = \sum \varepsilon(i) x_i y_i$. Se lo spazio è euclideo ($\pi = n$), e la base è ortonormale ($\varepsilon(i) = 1 \forall i$), alla luce delle (3) cade ogni distinzione tra componenti controvarianti e componenti covarianti dello stesso vettore ed indice; tuttavia potrà essere utile, anche in questo caso, scrivere convenzionalmente lo stesso indice in alto e in basso per indicare una somma di prodotti di componenti vettoriali euclidee.

Sia adesso $\tau_{(\kappa)}$, con κ intero ≥ 1 , una **forma** (reale) κ -**lineare** (o in breve κ -**forma**) su un generico spazio R -lineare E di dimensione $n \geq 1$ (e in particolare su uno spazio pseudoeuclideo $E \equiv E_{n, \pi}$), cioè una applicazione di E^κ (κ -ma potenza cartesiana di E) in R – o **funzionale**, definito su E^κ – lineare rispetto a ciascuna delle sue κ indeterminate ($\in E$) considerata separatamente. Ci riferiremo a questa proprietà di $\tau_{(\kappa)}$ come alla sua κ -**linearità**, e diremo κ il suo **grado**. La stessa forma fondamentale bilineare simmetrica B associata ad E è evidentemente una 2-forma, che per uniformità scriveremo d'ora innanzi corsiva (B). Per $\kappa = 0$, invece, una 0-forma è definita come uno *specifico* numero reale, cioè $\tau_{(0)} = \tau \in R$. (Molto di quanto segue per $\kappa > 0$ degenera quando $\kappa = 0$, pur restando ad esso banalmente estendibile.) Consideriamo ora l'insieme delle ($\kappa > 0$)-forme su E : all'interno di questo insieme, due κ -forme possono essere combinate linearmente nel modo standard, cioè attraverso i valori che esse assumono in corrispondenza ad una arbitraria κ -pla ordinata $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle \in E^\kappa$. Denotando con $\tau_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}}^1$ (o in qualche caso per maggior chiarezza

¹ Il pedice (κ) di $\tau_{(\kappa)}$ diventerebbe invece necessario nel caso in cui si denotasse con un unico simbolo l'intera κ -pla ordinata. In particolare, il valore di B nella generica coppia (x, y) (B è per ipotesi simmetrica, e quindi non occorre ordinare la coppia) si denoterà $B_{xy} = B_{yx}$.

con $\tau(x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)})$ il valore di $\tau_{(\kappa)}$ in $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle$, si avrà cioè, per arbitrari α, β reali e arbitrarie κ -forme $\sigma_{(\kappa)}, \tau_{(\kappa)}$,

$$(5) \quad (\alpha\sigma + \beta\tau)x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} =: \alpha\sigma x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} + \beta\tau x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$$

per ogni $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle$. Con questa definizione, l'insieme delle κ -forme su E è uno spazio \mathbb{R} -lineare che denoteremo con $E^{(\kappa)}$. Ovviamente $E^{(0)} = \mathbb{R}$.

Sia $\{e.\}$ una base di E ; alla luce della (1) e della κ -linearità di $\tau_{(\kappa)}$, per $\kappa > 0$ e $\forall \langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle$, avremo:

$$(6) \quad \tau x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} = x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(\kappa)}^{i_\kappa} \tau_{i_1 \dots i_\kappa},$$

avendo posto:

$$(6') \quad \tau_{i_1 \dots i_\kappa} =: \tau e_{i_1} \dots e_{i_\kappa}.^2$$

Il reale $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ si dice **componente covariante** di $\tau_{(\kappa)}$, di indici (ordinati) $\langle i_1, \dots, i_\kappa \rangle$ nella base $\{e.\}$. In generale, le componenti covarianti indipendenti di $\tau_{(\kappa)}$ sono n^κ , e quindi questa è anche la dimensione dello spazio lineare $E^{(\kappa)}$. Il loro insieme, che potrà pensarsi come “matrice a κ indici” correnti ciascuno su $(1, \dots, n)$, quindi costituita da n^κ reali ordinati, individua completamente la forma $\tau_{(\kappa)}$ in oggetto per la data $\{e.\}$. La (6) si estende al caso $\kappa = 0$ come $\tau_{(0)} = \tau$, per cui la dimensione di $E^{(0)}$ è 1. Per $\kappa = 1$, attraverso la (6') lo spazio n -dimensionale $E^{(1)}$ risulta linearmente isomorfo a \mathbb{R}^n secondo la biiezione $\tau_{(1)} (\in E^{(1)}) \leftrightarrow \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle (\in \mathbb{R}^n)$.

L'attributo “covariante” dato alla componente $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ ha il significato seguente. Supponiamo di sottoporre la base $\{e.\}$ ad una trasformazione lineare non singolare secondo la

$$(7) \quad e'_i = L_i^j e_j$$

($i, j = 1 \dots n$, somma su j),³ dove $\det\{L_i^j\}_{i,j=1 \dots n} \neq 0$ per ipotesi. Sono allora evidenti due fatti complementari, e cioè da una parte che l'insieme degli elementi $\{e'_1, \dots, e'_n\} \equiv \{e'.\}$ di E è ancora una sua base, e dall'altra, che gli elementi di ogni base $\{e'.\}$ di E devono essere legati a quelli della base di partenza da una relazione lineare del tipo (7) per una conveniente matrice non singolare $\{L_i^j\}_{i,j=1 \dots n}$. Se richiediamo che il valore di $\tau_{(\kappa)}$ in $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle$ non dipenda dalla scelta della base, le componenti covarianti di $\tau_{(\kappa)}$ nella base $\{e'.\}$, diciamo $\tau'_{i_1 \dots i_\kappa}$, devono essere legate alle corrispondenti componenti $\tau_{j_1 \dots j_\kappa}$ nella base $\{e.\}$ dalle

$$(8) \quad \tau'_{i_1 \dots i_\kappa} = L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_\kappa}^{j_\kappa} \tau_{j_1 \dots j_\kappa}$$

² Come abbiamo avvertito nella Presentazione (0.0), quando un soprascritto o apice [un sottoscritto o pedice] è a sua volta indicizzato (tipicamente con un sottoscritto), come ad es. nel caso di i_r , per esigenze tipografiche quel soprascritto [sottoscritto] i_r verrà realizzato come i_r .

³ In casi come questi, l'indice di riga è sempre il primo e quello di colonna sempre il secondo, indipendentemente dalla loro posizione verticale.

(e per $\kappa = 0$, dalla $\tau' = \tau$); e questo appunto si verifica in forza delle (6', 7). Se $\kappa > 0$, la legge lineare di trasformazione (8) “riproduce κ volte”, per così dire, la (7); ossia le componenti “covariano” per κ volte con la base. La (8) si dice anche **legge di trasformazione** (delle componenti covarianti di una κ -forma) **per κ -cogredienza** (o **κ -covarianza**). Anche la (8) è una trasformazione lineare non singolare, perché può essere invertita rispetto alle componenti senza apice moltiplicandola κ volte a sinistra per la matrice inversa della $L \equiv \{L_i^j\}_{i,j=1 \div n}$.

In particolare riferendoci alla 2-forma fondamentale B , risulta

$$(8bis) \quad B'_{ij} = L_i^h L_j^k B_{hk};$$

e da questa segue anche che $\det(B') = \det^2(L)\det(B)$ (qui $\det(B)$ sta per $\det\{B_{ij}\}$, e simili). Quindi il segno del determinante della 2-forma B è base-indipendente, come era stato anticipato nel Cap 2. Sempre per $E \equiv E_{n,\pi}$, e riferendoci come è sempre possibile ad una base pseudortonormale, risulta $\text{signdet}(B) = \text{sign}\prod_i \varepsilon(i) = \text{sign}(-1)^v$, con v = indice negativo della forma (numero degli ε negativi), indipendente dalla base.

In forza della non-singularità della forma B , cioè della matrice $\{B_{ij}\}$, sono univocamente determinati n elementi e^j di E dati dalla

$$(9) \quad e^j = B^{-1}_{ji} e_i,$$

dove con B^{-1}_{ji} abbiamo denotato l'elemento $(_{ji})$ della matrice (simmetrica) inversa della B , e abbiamo sommato su i a 2° membro. L'insieme di elementi $\{e^1, \dots, e^n\} \equiv \{e^j\}_{1 \div n}$ è evidentemente ancora una base di E , che si dice **cobase** della base di partenza. Per la definizione, si prova facilmente che, a fronte di una trasformazione (7) della base $\{e_i\}$, la corrispondente cobase $\{e^j\}$ si trasforma nella cobase $\{e'^j\}$ secondo la legge (implicita)

$$(10) \quad e'^j = e^i L_i^j$$

di cui la non-singularità di L assicura l'invertibilità rispetto alla cobase con apice $\{e'^j\}$. Il confronto tra la (7) e la (10) mostra che mentre la prima è risolta rispetto alla base con apice, e la somma è fatta rispetto al 2° indice (di colonna) di L , la seconda è risolta rispetto alla cobase senza apice, e la somma è fatta rispetto al 1° indice (di riga) di L . Volendo uniformare la scrittura della (10) a quella della (7), si dovrà introdurre la trasposta di L , tL , e poi invertirla; oppure il contrario, perché l'inversa della trasposta è uguale alla trasposta dell'inversa. Indicando questa matrice $({}^tL)^{-1} \equiv {}^t(L^{-1})$ con cL (matrice **cogrediente** di L), la (10) si riscrive allora come

$$(10bis) \quad e'^j = {}^cL^j_i e^i,$$

formalmente analoga alla (7). Se conveniamo di scrivere B^{jk} in luogo di $B(e^j, e^k)$, dalla (9) abbiamo $B^{jk} = B^{-1}_{ji} B^{-1}_{kh} B_{ih} = B^{-1}_{ji} \delta_{ki} = B^{-1}_{jk}$. Nel seguito, denoteremo quindi l'elemento $(_{jk})$ della matrice inversa della $\{B_{ih}\}$ come $B^{jk} = B(e^j, e^k)$.

Oltre che secondo la (1), il generico elemento di E si esprime in termini della cobase come

$$(1bis) \quad x = x_j e^j,$$

ove x_j è dato dalla (2). La verifica è immediata, perché $x_j e^j = B(x, e_j) e^j = x^i B_{ij} e^j = x^i e_i (= x)$, avendo tenuto conto della $B_{ij} = B(e_i, e_j)$. Dalla $x_j e^j = x^i e_i$ si ha anche $(x_j B^{ji} - x^i) e_i = 0$, quindi $x^i = B^{ij} x_j$, e reciprocamente $x_j = B_{ij} x^i$. Più in generale, un ragionamento simile a quello che partendo dalla rappresentazione (1) di x porta alla (6), partendo dalla rappresentazione (1bis) di x porta (sempre per $\kappa > 0$) alla

$$(11) \quad \tau_{X(1) \dots X(\kappa)} = X_{(1)i_1} \dots X_{(\kappa)i_\kappa} \tau^{j_1 \dots j_\kappa},$$

avendo analogamente posto

$$(11') \quad \tau^{j_1 \dots j_\kappa} =: \tau e^{i_1} \dots e^{i_\kappa} \equiv B^{i_1 j_1} \dots B^{i_\kappa j_\kappa} \tau_{j_1 \dots j_\kappa};$$

Il reale $\tau^{j_1 \dots j_\kappa}$ a 1° membro si dice **componente controvariante** di $\tau_{(\kappa)}$ (di indici $\langle i_1, \dots, i_\kappa \rangle$ e nella base $\{e_i\}$). Ancora in forza della base-indipendenza dei valori di $\tau_{(\kappa)}$ nella generica $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle$, si trova allora

$$(12) \quad \tau^{j_1 \dots j_\kappa} = \tau^{i_1 \dots i_\kappa} L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_\kappa}^{j_\kappa},$$

la quale fa il paio con la (8). La (12) riproduce κ volte la (10), e quindi $\tau^{j_1 \dots j_\kappa}$ covaria per κ volte con la cobase, ovvero “controvaria” per κ volte con la base. Ciò rende conto dell’attributo “controvariante” dato alla componente $\tau^{j_1 \dots j_\kappa}$ di $\tau_{(\kappa)}$. La legge di trasformazione (lineare non singolare) (12) viene detta **legge di trasformazione** (delle componenti controvarianti di una κ -forma) **per κ -controgredienza** (o **κ -controvarianza**).

Per $\kappa \geq 2$, possiamo generalizzare i due quadri simmetrici illustrati facendo contemporaneamente uso di entrambe le rappresentazioni (1,1bis) del generico x di E. Si ottiene così per $\tau_{X(1) \dots X(\kappa)}$ una rappresentazione che in generale partecipa sia della (6) che della (11), nel senso che tale valore risulta uguale alla somma dei prodotti delle componenti covarianti di certi p , $1 < p < \kappa$, dei vettori $x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)}$, per le componenti controvarianti dei rimanenti $\kappa - p$ di essi, e per le **componenti miste** complementari della forma $\tau_{(\kappa)}$. Queste componenti miste della forma, cioè con p indici di controvarianza (scritti in alto) e i rimanenti $\kappa - p$ di covarianza (scritti in basso), si ottengono nel solito modo, ponendo nella forma p elementi della cobase in certe posizioni (...) e $\kappa - p$ elementi della base nelle posizioni complementari (...). Per esempio, considerando la 3-forma $\tau_{(3)}$, $\tau_{ij}^k = \tau e_i e_j e^k$ è la componente mista di $\tau_{(3)}$ con indici di covarianza i, j nella prima e nella seconda posizione, ed indice di controvarianza k nella terza posizione. La legge di trasformazione per componenti miste, a fronte delle solite trasformazioni (7) della base e (10) della cobase, si deduce

facilmente. Nell'esempio in questione, risulta $L_k^p \tau'_{ij}{}^k = L_i^r L_j^s \tau_{rs}{}^p$, ove la non-singularità di L assicura l'invertibilità del sistema rispetto a componenti miste con apice oppure senza apice.⁴

Nel caso della 2-forma simmetrica fondamentale B , avremo $B^{ij} (= B^{ji}) = B e^i e^j (= B e^j e^i)$ come già convenuto, e $B_i^j (= B^j_i) = B e_i e^j (= B e^j e_i)$ (oltre a $B_{ij} (= B_{ji}) = B e_i e_j (= B e_j e_i)$). Considerando la matrice B^{ij} , l'uso della (9) conferma che

$$(13) \quad B^{ij} = B^{ik} B^{jh} B e_k e_h = B^{ik} B^{jh} B_{kh} = \delta_h^i B^{jh} = B^{ji}$$

Se in particolare la base è pseudortonormale, oltre alla $B_{ij} = \varepsilon(i)\delta_{ij}$ abbiamo $B^{ij} = \varepsilon(i)\delta^{ij}$, ossia $\{B_{ij}\}$ e $\{B^{ij}\}$ sono la stessa matrice diagonale, con elementi $\varepsilon(i) = \pm 1$. Infine, in qualunque base

$$(14) \quad B_i^k = B e_i e^k = B_{ij} B e^j e^k = B_{ij} B^{jk} = \delta_i^k.$$

Le $B e_i e^j = \delta_i^j$ costituiscono un sistema lineare nelle e_i per date e^j , o viceversa, sistema che è risolto dalla $e_i = B_{ij} e^j$ nel primo caso e dalla

$$(9bis) \quad e^j = B^{ji} e_i$$

nel secondo caso.

Torniamo ora alle (6, 6'). Per quanto abbiamo visto, per una prefissata base $\{e_i\}$ la generica ($\kappa \geq 1$)-forma individua univocamente una matrice a κ indici (se $\kappa = 0$ la forma si riduce ad unico numero reale) data dalla (6'), i cui n^κ elementi si trasformano secondo le (8) a fronte di una trasformazione della base di tipo (7). Ma evidentemente vale anche il contrario: una data matrice a κ indici associata ad $\{e_i\}$ i cui elementi si trasformino secondo le (8) a fronte di una trasformazione (7) della base, individua univocamente una κ -forma. Esiste dunque una corrispondenza 1-1 (\leftrightarrow), base-dipendente se $\kappa > 0$, tra κ -forme e matrici a κ indici (di elementi κ volte covarianti al variare della base), e i due spazi lineari (delle κ -forme e delle corrispondenti matrici a κ indici) sono linearmente isomorfi. Vale a dire, se (con riferimento a $\{e_i\}$) $\tau_{(\kappa)} \leftrightarrow \{\tau_{i_1 \dots i_\kappa}\}$ e $\sigma_{(\kappa)} \leftrightarrow \{\sigma_{i_1 \dots i_\kappa}\}$, allora per arbitrari reali α, β , $\alpha \tau_{(\kappa)} + \beta \sigma_{(\kappa)} \leftrightarrow \{\alpha \tau_{i_1 \dots i_\kappa} + \beta \sigma_{i_1 \dots i_\kappa}\}$. Una analoga ed equivalente biiezione base-dipendente si ha tra κ -forme e matrici a κ indici controvarianti, o (se $\kappa \geq 2$) a κ indici

⁴ La notazione adottata per la generica componente di un tensore non ne permette una scrittura "generalizzata" (cioè con indici a loro volta indicizzati) nel caso misto, come è invece possibile per una componente esclusivamente covariante o controvariante. Il rimedio consiste nell'attribuire al generico i_h ($h = 1, \dots, \kappa$) non soltanto uno degli n possibili valori $\{1, \dots, n\}$, ma anche uno dei due **valori di tipo**, diciamo $t(h)$, {controvariante, covariante}; ad esempio mediante uno dei segni $\{+, -\}$ (per controvariante, $-$ per covariante)}. In altre parole, si passa così da $i: \{1, \dots, \kappa\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ a $i: \{1, \dots, \kappa\} \rightarrow \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$. A questo punto gli indici possono scriversi tutti sullo stesso livello, ad es. in basso. Con ogni evidenza, si tratta di un problema di notazione. Facendo uso di questa convenzione, la legge di trasformazione per componenti di *qualsiasi tipo* assume la forma $\tau'_{i_1 \dots i_\kappa} = \prod_{t(p)=+} L_{ip}^{jp} \prod_{t(q)=-} L_{iq}^{jq} \tau_{j_1 \dots j_\kappa}$, dove la prima [la seconda] produttoria è estesa ai p per cui il tipo $t(p) = +$ [$t(p) = -$], e si sottintende che le componenti con e senza apice siano dello stesso tipo (cioè che il segno dell'indice h -mo in τ' sia uguale a quello dell'indice h -mo in τ).

⁵ In questa come in molte altre simili occasioni, in forza della simmetria di B_{ij} non sarebbe necessario sfalsare orizzontalmente gli indici nello scrivere una sua componente mista. La versione sfalsata data nel testo è dovuta a limitazioni tipografiche. Ciò vale per qualunque coppia di indici misti adiacenti di una forma simmetrica rispetto a quegli indici.

misti. I relativi insiemi di matrici a κ indici, che sono altrettanti spazi lineari a n^κ dimensioni, sono tutti linearmente isomorfi a $E^{(\kappa)}$ sotto \leftrightarrow .

L'algebra sulle forme multilineari si estende al di là delle operazioni lineari in $E^{(\kappa)}$. Precisamente, date una $(\iota \geq 0)$ -forma $\sigma_{(\iota)}$ e una $(\kappa \geq 0)$ -forma $\tau_{(\kappa)}$, si definisce come **prodotto** della prima per la seconda (ordinato) la $(\iota + \kappa)$ -forma che ha per valore il prodotto dei loro valori per qualsiasi $(\iota + \kappa)$ -pla ordinata di elementi di E . Per il momento, questo prodotto si denoterà con il segno \bullet , da scrivere "tra". Si ha cioè per definizione, $\forall \langle x_{(1)}, \dots, x_{(\iota)}, x_{(\iota+1)}, \dots, x_{(\iota+\kappa)} \rangle \in E^{\iota+\kappa}$:

$$(15) \quad (\sigma_{(\iota)} \bullet \tau_{(\kappa)})_{x_{(1)} \dots x_{(\iota)} x_{(\iota+1)} \dots x_{(\iota+\kappa)}} = \sigma_{x_{(1)} \dots x_{(\iota)}} \tau_{x_{(\iota+1)} \dots x_{(\iota+\kappa)}},$$

con le banali modifiche del caso se ι e/o κ sono nulli. La linearità di $\sigma_{(\iota)} \bullet \tau_{(\kappa)}$ rispetto a ciascuno dei $x_{(1)} \dots x_{(\iota+\kappa)}$ è evidente. In base alla definizione, le componenti, ad es. covarianti, di $\sigma_{(\iota)} \bullet \tau_{(\kappa)}$ sono i prodotti (ordinati) delle componenti covarianti di $\sigma_{(\iota)}$ per quelle di $\tau_{(\kappa)}$:

$$(16) \quad (\sigma_{(\iota)} \bullet \tau_{(\kappa)})_{i_1 \dots i_\iota i_{(\iota+1)} \dots i_{(\iota+\kappa)}} = \sigma_{i_1 \dots i_\iota} \tau_{i_{(\iota+1)} \dots i_{(\iota+\kappa)}};$$

e similmente per componenti di qualunque altro tipo, sia della prima che della seconda forma. (A causa delle solite limitazioni tipografiche qui $i_{(i+1)}$ sta per i_{i+1} , e simili.) Ancora in base alla definizione, si verifica subito che il prodotto \bullet di una forma per un'altra è distributivo rispetto alle operazioni lineari sui due fattori; e inoltre, che è associativo, ossia che:

$$(17) \quad \sigma_{(\iota)} \bullet (\tau_{(\kappa)} \bullet \rho_{(\lambda)}) = (\sigma_{(\iota)} \bullet \tau_{(\kappa)}) \bullet \rho_{(\lambda)},$$

comunque si scelgano $\iota, \kappa, \lambda (\geq 0)$. La (17) ci permette dunque di scrivere il prodotto \bullet di più di due forme senza le parentesi.

D'altra parte, la stessa (15) mostra che non tutte le $(\iota + \kappa)$ -forme sono prodotti \bullet di una ι -forma per una κ -forma; e del resto $E^{(\iota + \kappa)}$ è uno spazio lineare, mentre l'insieme delle $(\iota + \kappa)$ -forme del tipo prodotto \bullet di una ι -forma per una κ -forma, che è incluso in $E^{(\iota + \kappa)}$, non lo è in generale (cioè non è un suo sottospazio), almeno per ι e κ entrambi > 0 . In conclusione, \bullet è una operazione binaria bilineare, generalmente non commutativa, su $E^{(\iota)} \times E^{(\kappa)}$ con valori "in" (ma in generale non "su") $E^{(\iota + \kappa)}$.

Un'ultima operazione lineare, questa volta unaria, conclude la descrizione dell'algebra sulle forme multilineari. Sia $\tau_{(\kappa)}$ una $(\kappa \geq 2)$ -forma; per una data $\{e.\}$, si definisce su di essa una operazione di (p, q) -**contrazione**, con $1 \leq p < q \leq \kappa$, che si denota con $C_{(p, q)}$. In base a questa operazione, $\tau_{(\kappa)}$ diventa la $(\kappa - 2)$ -forma $C_{(p, q)} \tau_{(\kappa)}$, e precisamente quella che in $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa-2)} \rangle$ ha il valore $\tau_{x_{(1)} \dots e_i \dots e^i \dots x_{(\kappa-2)}}$, dove e_i occupa la p -ma posizione ed e^i la q -ma posizione di $\tau_{(\kappa)}$; e ciò $\forall \langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa-2)} \rangle \in E^{\kappa-2}$. La risultante $(\kappa - 2)$ -forma $C_{(p, q)} \tau_{(\kappa)}$ non cambia sostituendo nella definizione $\{e.\}$ con $\{e'.\}$ secondo la (7) o scambiando tra loro e^i con e_i . Le dimostrazioni sono immediate. $\forall \langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa-2)} \rangle \in E^{\kappa-2}$, si ha infatti:

$\tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e^i \dots e^i \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)} = L_i^j \tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e_j \dots e^h \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)} \overset{c}{L}_h^i = \delta_h^j \tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e_j \dots e^h \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)} = \tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e_j \dots e^j \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)}$;
e similmente,

$$\tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e^i \dots e_i \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)} = B^{ij} \tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e_j \dots e^h \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)} B_{hi} = \delta_h^j \tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e_j \dots e^h \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)} = \tau_{\mathbf{x}(1)} \dots e_j \dots e^j \dots \mathbf{x}_{(\kappa-2)}.$$

Le componenti, ad es. covarianti, di $C_{\langle p,q \rangle} \tau_{(\kappa)}$, sono

$$(18) \quad (C_{\langle p,q \rangle} \tau_{(\kappa)})_{i_1 \dots i_{(\kappa-2)}} = \tau_{e_{i_1} \dots e_{i_{(\kappa-2)}}};$$

e si vede subito che esse si trasformano secondo la (8). Formule analoghe ed equivalenti si hanno riferendosi a componenti di qualunque tipo. Quindi la definizione di $C_{\langle p,q \rangle}$ è consistente, e la $C_{\langle p,q \rangle}$ stessa è una applicazione lineare di $E^{(\kappa)}$ in (ma anche su, come si verifica facilmente) $E^{(\kappa-2)}$.

Evidentemente, su una κ -forma si possono effettuare $\kappa(\kappa-1)/2$ contrazioni a seconda delle diverse possibili scelte di p e q , le quali danno luogo ad altrettante $(\kappa-2)$ -forme generalmente diverse. Inoltre le contrazioni possono iterarsi fino a $\kappa/2$ volte se κ è pari (finendo con 0-forme) e $(\kappa-1)/2$ volte se κ è dispari (finendo con 1-forme). Infine è possibile far seguire una contrazione ad un prodotto \bullet tra una ι -forma per una κ -forma, e anche contrazioni iterate di tale prodotto che conducano ad una sua traccia se $\iota+\kappa$ è pari; il risultato è un funzionale bilineare di $E^{(\iota)} \times E^{(\kappa)}$. Ad esempio il prodotto $\tau_{(\kappa)} \bullet B$ ha componente $_{i_1 \dots i_{\kappa}}^{ij}$ data da $\tau_{i_1 \dots i_{\kappa}} B^{ij}$. Ponendo in quest'ultima (i) in posizione p -ma nella prima componente ($1 \leq p \leq \kappa$), e sommando su (i), si ottiene $\tau_{i_1 \dots i_{\kappa}}^j$, dove in posizione p -ma c'è ora l'indice controvariante (j) (cioè la componente mista di $\tau_{(\kappa)}$ con indici di covarianza in tutte le posizioni salvo che in quella p -ma), come combinazione lineare di tutte le sue componenti covarianti. In generale, partendo da una componente di tipo arbitrario di $\tau_{(\kappa)}$ in cui (i) è un indice di covarianza [di controvarianza] e (j) *non* è un indice, moltiplicandola per B^{ij} [per B_{ij}] e sommando rispetto ad i, il risultato è la trasformazione dell'indice (i) in (j) e il suo simultaneo spostamento in alto [in basso] come indice di controvarianza [di covarianza], ossia

$$(19) \quad \tau \dots_i \dots B^{ij} = \tau \dots^j \dots \quad [\tau \dots^i \dots B_{ij} = \tau \dots_j \dots].$$

Come deve essere, la stessa forma fondamentale B sottostà alla (19) (eventualmente iterata): infatti ad es. $B_{ik} B^{ij} = \delta_k^j = B_k^j$, oppure $B_{ij} B^{ik} B^{jh} = \delta_j^k B^{jh} = B^{hk}$, ecc. Alternativamente, l'indice (i) della (19) può cambiare tipo mantenendo il nome: basterà riscriverlo come (j) (che per ipotesi non è indice della componente), moltiplicare per B^{ij} o per B_{ij} a seconda dei casi, e sommare rispetto a (j). Questa operazione si dice di **innalzamento** (o **abbassamento**) **dell'indice** (i) della componente, ed è ovviamente lineare in essa. Se la base è pseudortonormale, l'innalzamento o l'abbassamento dell'indice i della componente equivale alla sua moltiplicazione per $\varepsilon(i)$. Se poi lo spazio è euclideo e la base è ortonormale, le stesse operazioni non producono alcun cambiamento; ossia, vi è un solo tipo di componente di una forma data. Diamo un'utile relazione valida in questo caso euclideo-

ortonormale. Sia $\{f_{(\alpha)}\}_{\alpha=1+n}$ una base ortonormale (abbiamo qui usato pedici greci per maggior chiarezza), e $\{e_i\}$ la solita base di riferimento. Avremo $e^i = \sum_{\alpha} f_{(\alpha)} B(f_{(\alpha)}, e^i)$, e quindi

$$(20_1) \quad B^{ij} = B(e^i, e^j) = \sum_{\alpha, \beta} B(f_{(\alpha)}, f_{(\beta)}) B(f_{(\alpha)}, e^i) B(f_{(\beta)}, e^j) = \sum_{\alpha} f_{(\alpha)}^i f_{(\alpha)}^j;$$

similmente,

$$(20_2) \quad B_{ij} = \sum_{(\alpha)} f_{(\alpha)i} f_{(\alpha)j},$$

$$(20_3) \quad B_i^j = \sum_{\alpha} f_{(\alpha)i} f_{(\alpha)}^j = \sum_{\alpha} f_{(\alpha)i} f_{(\alpha)h} B^{hj} = B_{ih} B^{hj} = \delta_i^j,$$

come deve essere in ogni caso.

Un'altra semplice osservazione è la seguente. Sia $\{h_{(\alpha)}\}_{\alpha=1+n}$ una base pseudortonormale rispetto a B , cioè $(\circ) B_{ik} h_{(\alpha)}^i h_{(\beta)}^k = \varepsilon_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$, dove gli indici latini sono da associare alla base di riferimento $\{e_i\}$. Si sottoponga quest'ultima a una trasformazione (7), e quindi le nuove componenti covarianti B'_{ij} siano date dalla (8bis). Allora $h'^i_{(\alpha)} =: h_{(\alpha)}^j \circ L_j^i$ sono le componenti controvarianti di una base pseudortonormale rispetto a B' , con gli stessi elementi diagonali ε , ossia la precedente (\circ) continua a valere ponendo apici su B e su h . La prova consiste in una semplice verifica.

Riassumendo, le operazioni considerate sulla famiglia di spazi lineari $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ sono (i) le operazioni lineari su ciascun $E^{(\kappa)}$, che producono elementi di $E^{(\kappa)}$ stesso; (ii) il prodotto \bullet , generalmente non commutativo, di un elemento di $E^{(1)}$ per un elemento di $E^{(\kappa)}$ (nell'ordine), che produce un elemento di $E^{(1+\kappa)}$, e che è un'applicazione bilineare di $E^{(1)} \times E^{(\kappa)}$ "in" (ma non "su" in generale) $E^{(1+\kappa)}$, distributiva rispetto ai fattori e associativa; (iii) la (p,q) -contrazione, che è un'applicazione lineare di $E^{(\kappa \geq 2)}$ su $E^{(\kappa-2)}$. Fissata una base di E , si ha una corrispondenza 1-1 (\leftrightarrow) tra κ -forme e matrici a κ indici che ne sono le componenti di un certo tipo. Le operazioni descritte si riflettono allora in corrispondenti operazioni sulle componenti, e le due algebre sono equivalenti; ossia, detto $E^{(\kappa)}_{e,t}$ lo spazio lineare delle componenti nella base $\{e_i\}$ e di tipo t , gli spazi $E^{(\kappa)}$ e $E^{(\kappa)}_{e,t}$ sono linearmente isomorfi, mentre le famiglie di spazi $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ e $\{E^{(\kappa)}_{e,t}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ sono algebricamente isomorfe (cioè isomorfe rispetto all'intero sistema di operazioni (i), (ii), (iii)), sotto la biiezione \leftrightarrow .

3.1.2 κ -TENSORI

Sarebbe a questo punto desiderabile disporre di una famiglia di spazi lineari $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ che goda dell'isomorfismo algebrico della famiglia $\{E^{(\kappa)}_{e,t}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ nei confronti della famiglia $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$, ma, a differenza della $\{E^{(\kappa)}_{e,t}\}_{\kappa=0,1,\dots}$, definita indipendentemente dalla scelta di una

base e di un tipo di componente. Ciò è come vedremo possibile, anche se non in modo univoco. Gli elementi di $E^{(\kappa)}$ si dicono κ -**tensori**, e saranno qui denotati con $\tau_{(\kappa)}$, $\sigma_{(\iota)}$ ecc., cioè come le corrispondenti κ -forme ma con caratteri non corsivi. (Il κ di un κ -tensore si usa dire suo **ordine** o **rango** piuttosto che “grado”.) Evidentemente il problema non si pone per $\kappa = 0$: per definizione uno 0-tensore è uno specifico reale τ , come una κ -forma è uno specifico reale τ , e la corrispondenza 1-1 (\leftrightarrow) tra $E^{(0)}$ e $E^{(0)}$ viene stabilita in modo naturale identificando questi reali, $\tau = \tau$. Per $\kappa = 1$, un 1-tensore è per definizione un **vettore** di E , cioè un oggetto del tipo $\tau^i e_i = \tau_i e^i$, dove τ^i e $[\tau_i]$ sono componenti controvarianti [covarianti] nella base $\{e^i\}$ [nella base $\{e_i\}$]; la corrispondenza 1-1 (\leftrightarrow) tra $E^{(1)}$ e $E^{(1)} \equiv E$ è stabilita, ancora in modo naturale, con l'identificazione $\tau_i =: \tau_i$, o equivalentemente $\tau^i =: \tau^i$. Gli 1-tensori \equiv vettori sono evidentemente base-indipendenti, e gli spazi lineari $E^{(1)}$ e $E^{(1)} = E$ sono, come già anticipato, linearmente isomorfi sotto \leftrightarrow .

Per definire la famiglia di spazi lineari $E^{(2)}$, $E^{(3)}$, .. con le richieste proprietà, occorre introdurre una nuova operazione (binaria) bilineare su E , e un sistema di assiomi. Cominciamo con $E^{(2)}$. Sia G uno spazio lineare e \otimes una applicazione bilineare di $E \times E$ in G soddisfacenti all'assioma: «se $\{e_i\}_{1 \div n} \equiv \{e_i\}$ è una base di E , $\{e_i \otimes e_j \equiv e_{ij}\}_{i,j=1 \div n} \equiv \{e_{ij}\}_{1 \div n}$ è una base di G .» (Naturalmente in questo caso anche $\{e_i \otimes e^j \equiv e_i^j\}_{1 \div n}$, $\{e^i \otimes e_j \equiv e^i_j\}_{1 \div n}$ e $\{e^i \otimes e^j \equiv e^{ij}\}_{1 \div n}$ sono basi di G .) Ammesso che una coppia (\otimes, G) come richiesta esista, si pone $E^{(2)} =: G \equiv \text{vect}_G\{e_{ij}\} \equiv \text{vect}_G(\{e_i^j\})$, ecc. Chiaramente, la dimensione di $E^{(2)}$, $\dim(E^{(2)})$, è n^2 . La corrispondenza 1-1 (\leftrightarrow) tra $E^{(2)}$ e $E^{(2)}$ si può stabilire identificando le componenti di uno stesso tipo (il risultato non dipende dalla scelta del tipo) della 2-forma $\tau_{(2)} \in E^{(2)}$ e quelle del 2-tensore $\tau_{(2)} \in E^{(2)}$, definito come $\tau_{ij} e^{ij}$ o equivalentemente come $\tau_i^j e_j^i$, ecc., cioè ponendo $\tau_{ij} =: \tau_{ij}$, oppure equivalentemente $\tau_i^j =: \tau_i^j$, ecc. In conclusione $\tau_{(2)} \leftrightarrow \tau_{(2)} \Leftrightarrow \tau_{ij} = \tau_{ij}$; se $E^{(2)}$ esiste, esso e $E^{(2)}$ sono linearmente isomorfi sotto \leftrightarrow , e le famiglie $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,2}$ e $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,2}$ lo sono algebricamente, cioè rispetto alle operazioni fin qui definite e *in esse possibili*. Vi è tuttavia un elemento di arbitrarietà nella scelta di identificare τ_{ij} con τ_{ij} , perché allo stesso titolo avremmo potuto identificare τ_{ij} con τ_{ji} . D'altra parte, anche se la corrispondenza biunivoca $\tau_{(2)} \leftrightarrow \tau_{(2)}$ sarebbe in tal caso cambiata, l'isomorfismo tra $E^{(2)}$ e $E^{(2)}$ sarebbe rimasto valido. Resta da descrivere la (1,1)-contrazione (o la contrazione, visto che ne è possibile soltanto una) in $E^{(2)}$ del 2-tensore in oggetto. Questo si può fare mediante le componenti; vale a dire, avendo accettato ad es. la $\tau_{ij} = \tau_{ij}$, definiremo la contrazione del 2-tensore $\tau_{(2)}$ come quella della corrispondente 2-forma $\tau_{(2)}$, che è $\tau_i^i (= \tau^i_i)$, indipendente dalla base.

Proseguendo con la definizione degli spazi $E^{(\kappa > 2)}$, il caso di $E^{(3)}$ presenta una difficoltà addizionale. Sia ancora G uno spazio lineare e si introduca una applicazione bilineare \otimes di $E \times E^{(2)}$ in G . Questa \otimes è di tipo più generale di quella usata in precedenza (sebbene sia stata denotata allo

stesso modo), perché il suo dominio è il prodotto cartesiano di due spazi *diversi*. Anche dando d'ora innanzi a \otimes questo più ampio significato, resta tuttavia l'alternativa di procedere partendo dalla $\otimes: E \times E^{(2)} \rightarrow G$ oppure dalla $\otimes': E^{(2)} \times E \rightarrow G'$ (G' essendo un altro spazio lineare), ugualmente legittima. L'alternativa si riflette in quella di richiedere assiomaticamente che $\{e_i \otimes e_{jh}\}_{i,j,h=1 \div n}$ sia una base di G , oppure che $\{e_{ij} \otimes' e_h\}_{i,j,h=1 \div n}$ sia una base di G' . L'imporre assiomaticamente $\otimes = \otimes'$, $G = G'$, $e_i \otimes e_{jh} = e_{ij} \otimes' e_h$ risolverebbe la difficoltà, ma potrebbe essere una richiesta troppo forte, incompatibile con l'esistenza di una coppia (\otimes, G) con la proprietà desiderate. D'altra parte le stesse richieste sono ridondanti ai nostri fini, bastandoci che $\text{vect}_G\{e_i \otimes e_{jh}\}_{i,j,h=1 \div n}$ e $\text{vect}_{G'}\{e_{ij} \otimes' e_h\}_{i,j,h=1 \div n}$ siano isomorfi sotto una specifica biiezione. A questa più debole condizione, da richiedere assiomaticamente, potremo dunque seguire una delle due procedure a nostra scelta, ad esempio partendo dalla $\otimes: E \times E^{(2)} \rightarrow G$ e lasciando cadere la $\otimes': E^{(2)} \times E \rightarrow G'$. Richiederemo dunque, assiomaticamente, che (ad es.) $\{e_i \otimes e_{jh} \equiv e_{ijh}\}_{i,j,h=1 \div n}$ sia una base di G ,⁶ e porremo $E^{(3)} =: G = \text{vect}_G\{e_{ijk}\}_{i,j,h=1 \div n}$ (ammesso che una coppia (\otimes, G) come richiesta esista). La dimensione di $E^{(3)}$ è n^3 . Infine la corrispondenza 1-1 (\leftrightarrow) tra $E^{(3)}$ e $E^{(3)}$ può essere stabilita al solito modo mediante la “ $\tau_{(3)} \equiv \tau_{ijh} e^{ijh} \leftrightarrow \tau_{(3)}$ ” \leftrightarrow “ $\tau_{ijh} =: \tau_{ijh}$ ”. Se $E^{(3)}$ esiste sotto le richieste avanzate assiomaticamente, esso è linearmente isomorfo a $E^{(3)}$, e la famiglia $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,2,3}$ è algebricamente isomorfo alla famiglia $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,2,3}$ rispetto a tutte le operazioni in essi possibili, sotto \leftrightarrow .

Si potrebbe continuare così per ogni $\kappa > 3$, sebbene al costo di un sistema di assiomi e di scelte sempre più complicato. Che le famiglie $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ e $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$ così prodotte siano algebricamente isomorfe sotto la \leftrightarrow specificata, e rispetto a tutte le operazioni, scenderebbe ancora dalle definizioni. Ad esempio, se $\sigma_{(1)} \leftrightarrow \sigma_{(1)}$ e $\tau_{(\kappa)} \leftrightarrow \tau_{(\kappa)}$, allora $\sigma_{(1)} \bullet \tau_{(\kappa)} \leftrightarrow \sigma_{(1)} \otimes \tau_{(\kappa)}$. Come $E^{(1)} \bullet E^{(\kappa)}$ (l'insieme dei prodotti \bullet di una 1-forma per una κ -forma) è incluso in $E^{(1+\kappa)}$ senza esserne in generale un sottospazio, così $E^{(1)} \otimes E^{(\kappa)}$ (l'insieme dei prodotti \otimes di un 1-tensore per un κ -tensore) sarebbe similmente incluso in $E^{(1+\kappa)}$ senza esserne in generale un sottospazio.

Questo quadro appare poco soddisfacente per varie ragioni, e cioè: (i) la mancanza di una prova di consistenza tra gli assiomi necessari a definire i vari $E^{(\kappa \geq 2)}$; (ii) la non univocità della procedura, che comporta un numero crescente di scelte tra alternative ugualmente legittime; e ancora (iii) la sua inelegante complessità. C'è infine da chiedersi (iv) se sia veramente necessario dotare lo spazio base di una 2-forma simmetrica non singolare B .

Gli algebristi hanno da tempo rimosso questi problemi; ma, si deve aggiungere, al prezzo di trasferire l'algebra tensoriale su un livello di notevole astrattezza concettuale, e quindi di allontanarla dall'abito mentale tipico del fisico “medio” (e anche del fisico matematico medio). Nel

⁶ Anche in questo caso le $\{e_i^{jh}\}$, $\{e_{ij}^h\}$, .. e via dicendo, risultano altrettante basi di G .

resto della sottosezione, ci limiteremo a dare una traccia di questi sviluppi, rinviando il lettore alla letteratura specializzata per i necessari dettagli.

In realtà il problema di cui al punto (iv) della precedente lista si risolve in modo naturale come segue. Supponiamo che E sia uno spazio lineare n -dim e nulla di più, quindi privo di una 2-forma B . Non è allora più possibile definire una cobase $\{e^*\}$ a partire dalla base $\{e\}$ mediante la (3.1.1, 9) o la (3.1.1, 9bis). Si deve tuttavia osservare che $E^{(1)}$ non è altro che lo spazio duale E^* (spazio dei funzionali lineari su E) di E ; se allora si definiscono n 1-forme lineari $e^{*1 \leq j \leq n}$ ($\in E^*$) mediante le n^2 relazioni $e^{*j}(e_i)$ (\equiv valore di e^{*j} in e_i , che sarà comodo denotare con $(e_i, e^{*j}) = \delta_i^j$), un importante teorema dell'algebra lineare afferma che $\{e^{*j}\}_{j=1+n}$ è una base di E^* (quindi che $\dim E^* = \dim E$). Questa base $\{e^{*j}\}_{j=1+n}$ si dice **base duale** della $\{e_i\}_{i=1+n}$.⁷

Mentre in generale non vi è modo di identificare $E^* \equiv E^{(1)}$ con E ,⁸ proprio a questo si perviene quando a E è associata una forma bilineare simmetrica non singolare B , perché i vettori $e^{*i} \in E^{(1)} \equiv E$, in corrispondenza canonica con le 1-forme $e^{*i} \in E^*$, coincidono allora con i vettori e^i . Denotando infatti con $(e^{*i})_j$ la componente covariante (j) del vettore e^{*i} , si trova $e^{*i} = e^j(e^{*i})_j = e^j e^{*i}(e_j) = e^j \delta_j^i = e^i$. Detto altrimenti, se si correda E con B , tale B fornisce l'applicazione lineare di E in E^* $x \mapsto B(x, \cdot) \equiv B(\cdot, x)$; ma essendo B non singolare, questa applicazione è in effetti una biiezione tra i vettori (di E) e le 1-forme (di E^*), rispetto alla quale E ed E^* sono linearmente isomorfi. e^{*i} si ha facendo $x = e^i$ nella precedente $B(x, \cdot)$, cioè ponendo $e^{*i}(\cdot) = B(e^i, \cdot)$, e risulta appunto $e^{*i}(e_j) = B(e^i, e_j) = \delta_j^i$. D'altra parte, se la possibilità di identificare in tal senso E^* con E viene meno con la mancanza di B , occorre rinunciare all'idea di $(\kappa \geq 1)$ -tensore come entità indipendente dal tipo delle sue componenti. Il tensore coincide cioè con l'insieme delle sue componenti *di un certo tipo*, che si definisce come il "tipo" del tensore stesso. Se continuiamo a

⁷ Si considerino due spazi lineari (su R) a dimensione finita E, F per i quali è definito un **prodotto scalare** o **interno**, ossia un'applicazione bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \rightarrow R$ soggetta all'assioma (di non degenerazione) « $\langle x, y \rangle = 0$ per $y \in F$ fisso (ma arbitrario) e $\forall x \in E$ implica $y = 0$; e viceversa, per $x \in E$ fisso (ma arbitrario) e $\forall y \in F$ implica $x = 0$.» Se questo è il caso, E ed F (che risultano allora automaticamente equidimensionali), si dicono **spazi** (tra loro) **coniugati**. Se E ed F sono tra loro coniugati, ed $\{e\}$ ed $\{f\}$ sono basi di E e rispettivamente di F tali che $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall (i, j)$, quelle basi si dicono a loro volta **basi** tra loro **coniugate**. Si dimostra facilmente che il duale E^* di E ed E stesso sono tra loro coniugati, e quindi che la base duale di $\{e\}$ ed $\{e\}$ stessa sono tra loro coniugate. D'altra parte per qualunque spazio F coniugato con E esiste un unico isomorfismo (canonico) di F su E^* . In altre parole, E^* è "essenzialmente" l'unico spazio coniugato di E . Questo spiega la confusione che talvolta si incontra in letteratura nell'uso degli attributi "duale" e "coniugato". È anche facile rendersi conto che uno spazio lineare E dotato di una forma bilineare simmetrica non degenera B è automaticamente coniugato con se stesso, o **autoconiugato**: basta assumere come prodotto scalare (simmetrico) tra x e y (di E) il numero $B(x, y)$, che ha tutte le proprietà richieste. In questo caso la base coniugata ad una base di E , evidentemente unica, è la sua cobase.

⁸ Ciò è invece possibile per lo **spazio biduale** E^{**} di E , perché esiste comunque una specifica biiezione (lineare) di E su E^{**} (**biiezione canonica di E sul suo biduale E^{**}**), sotto la quale E ed E^{**} sono isomorfi come spazi lineari. Un ruolo essenziale gioca in ciò la supposta *finitezza* della dimensione di E . Identificando allora E ed E^{**} , e ponendo $e^{**}_i \equiv e_i$, risulta $e_i(e^{**j}) = \delta_i^j$, in simmetria con la precedente $e^{*i}(e_j) = \delta_j^i$. Quindi se $v^* = v_s e^{*s}$ è un elemento di E^* e $u = u^r e_r$ è un elemento di E , risulta $v^*(u) = v_s e^{*s} u^r e_r = v_s u^r \delta_r^s = v_s u^s$, e similmente $u(v^*) = u^s v_s \equiv v_s u^s = v^*(u)$. È questa l'espressione base-indipendente del prodotto con contrazione (o prodotto interno) di v^* e u .

definire le contrazioni “via componenti” avremo ad esempio che la contrazione del “covettore”, o $\langle 1,0 \rangle$ -tensore, di componenti v_i (che si trasformano per 1-cogredienza) con il “vettore”, o $\langle 0,1 \rangle$ -tensore, di componenti u^j (che si trasformano per 1-controgredienza), è per definizione il contratto del $\langle 1,1 \rangle$ -tensore di componenti $v_i u^j$, quindi il reale base-indipendente $v_i u^i$. Riprenderemo questo più generale approccio all'algebra tensoriale nel Cap. 4.

Veniamo ora ai problemi di cui ai punti (i,ii,iii) di alcuni capoversi più sopra. Siano E, F spazi lineari di dimensione finita, diciamo $m \geq 1$ e rispettivamente $n \geq 1$; sia poi G un terzo spazio lineare, e \otimes un'applicazione bilineare di $E \times F$ in G , $\otimes: E \times F \rightarrow G$. Questo sarà in quanto segue sottinteso quando menzioneremo una quaterna del tipo $\{E, F, \otimes, G\}$. L'insieme $\Sigma =: \{z | \exists x (\in E) \exists y (\in F) \{z = x \otimes y\}\}$ è incluso in G , ma non ne è in generale un sottospazio; lo è invece, evidentemente, $\text{vect}_G(\Sigma)$. Gli elementi del s.i. Σ di G si dicono **decomponibili** (o **semplici**), e quelli del suo complemento rispetto a G **indecomponibili** (o **composti**). Si suppongano ora soddisfatte (assiomaticamente) le condizioni:

(I) « $G = \text{vect}_G \Sigma$; cioè $\Sigma \subset G$ è “linearmente completo” in G .»

(II) « $\forall p \leq m, \forall q \leq n$, se $\{e_i\}_{1 \leq p}, \{f_j\}_{1 \leq q}$ sono famiglie di elementi linearmente indipendenti di E e rispettivamente di F , allora $\{e_i \otimes f_j\}_{1 \leq p; 1 \leq q}$ è una famiglia di elementi (di $\Sigma \subset G$) linearmente indipendenti in G .»

È chiaro che (I) e (II) sono vincoli, sui dati E, F, \otimes, G , tali che quaterne $\{E, F, \otimes, G\}$ che li soddisfano potrebbero non esistere. Un primo e fondamentale teorema è dunque ⁹:

T_0 . «Comunque siano dati E ed F , esiste una coppia $\{\otimes, G\}$ che soddisfa (I,II).» (La dimostrazione è di tipo costruttivo.)

Scriveremo $\vdash \{E, F, \otimes, G\}$ per significare che la quaterna $\{E, F, \otimes, G\}$ soddisfa (I,II). Valgono allora i seguenti teoremi:

T_1 . «Sotto $\vdash \{E, F, \otimes, G\}$, se $\{e_i\}_{i=1 \div m} \equiv \{e_i\}_{1 \div m}$ e $\{f_j\}_{j=1 \div n}$ sono basi di E e rispettivamente di F , risulta $G = \text{vect}_G \{e_i \otimes f_j\}_{1 \div m; 1 \div n}$. $\{e_i \otimes f_j\}_{1 \div m; 1 \div n}$ è cioè una base di G , e quindi $\dim G = mn$.

⁹ Rinviamo alla letteratura specializzata per le dimostrazioni dei teoremi $T_0 \div T_5$ che seguono. La trattativa sull'algebra tensoriale, e sulla analisi tensoriale su varietà che la presuppone, è ormai vastissima, e ci limitiamo a segnalare qualche opera particolarmente nota. J. Schouten: “Tensor analysis for physicists”, Cambridge U.P. (1951); J. Schouten: “Ricci-Calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications”, Springer (1954); G. de Rham: “Differentiable Manifolds” (engl. transl.), Springer (1984), origin. franc. Hermann (1955); W. Greub: “Linear Algebra”, 2nd ed., Springer (1963); S. Kobayashi, K. Nomizu: “Foundations of Differential Geometry” 2 vols. Interscience (1963); I. Sokolnikoff: “Tensor Analysis”, Wiley (1964); W. Greub: “Multilinear Algebra”, (1967); N. Bourbaki: “Algebra. Linear Structures. Linear Algebra” (engl. transl.) Addison-Wesley (1974); K. Yano, M. Kon: “Structures on Manifolds”, World Scient. (1984); A. Koistrikin, Yu. Manin: “Linear Algebra and Geometry” (engl. transl.), Gordon & Breach (1989).

T₂. «Sotto $\vdash\{E,F,\otimes,G\}$, per ogni spazio lineare H e ogni applicazione bilineare $\varphi: E \times F \rightarrow H$ esiste un'unica applicazione lineare $\chi: G \rightarrow H$ tale che $\varphi(x,y) = \chi(x \otimes y) \quad \forall(x \in E, y \in F)$.» È vero anche l'inverso, cioè se la tesi di (T₂) vale per una quaterna $\{E,F,\otimes,G\}$, allora $\vdash\{E,F,\otimes,G\}$.

T₃. «Se $\vdash\{E,F,\otimes_1,G_1\}$ e $\vdash\{E,F,\otimes_2,G_2\}$, esiste un unico isomorfismo lineare $\chi_{1|2}: G_{1|2} \rightarrow G_{2|1}$ (leggi una volta a sinistra e una volta a destra di \cdot) per il quale $x \otimes_{2|1} y = \chi_{1|2}(x \otimes_{1|2} y) \quad \forall(x \in E, y \in F)$.» Ovviamente χ_1 e χ_2 sono inversi l'uno dell'altro, e $(\circ) \otimes_{2|1} = \chi_{1|2} \circ \otimes_{1|2}$, $G_{2|1} = \chi_{1|2}(G_{1|2})$. Quindi una coppia $\{\otimes,G\}$ per cui $\vdash\{E,F,\otimes,G\}$ esiste *unica a meno di un isomorfismo* nel senso delle (\circ) . Denotando ancora con $\{\otimes,G\}$ la relativa classe di equivalenza (o una sua coppia rappresentante scelta una volta per tutte), scriveremo convenzionalmente $G = E \otimes F$.

T₄. «Siano E e F spazi lineari di dimensione finita. Allora esiste un unico isomorfismo lineare $\chi: E \otimes F \rightarrow F \otimes E$ per il quale $y \otimes x = \chi(x \otimes y) \quad \forall(x \in E, y \in F)$.» In particolare per $F = E$ con base $\{e_i\}$, si ha $e_{ji} = \chi e_{ij}$. Le basi $\{e_{ij}\}$ e $\{\chi e_{ij}\}$ constano evidentemente degli stessi elementi, e abbracciano entrambe lo spazio lineare $E \otimes E$.

T₅. «Siano D, E, F spazi lineari di dimensione finita. Allora esiste un unico isomorfismo lineare $\chi: (D \otimes E) \otimes F \rightarrow D \otimes (E \otimes F)$ per il quale $x \otimes (y \otimes z) = \chi((x \otimes y) \otimes z) \quad \forall(x \in D, y \in E, z \in F)$.» Potremo quindi riferirci sempre ad uno dei due spazi scartando l'altro. Lo spazio prescelto sarà denotato come $D \otimes E \otimes F$.

Una sufficiente riflessione su questi risultati, che il lettore più solerte potrà svolgere autonomamente, chiarisce in che senso i punti questionabili della precedente definizione degli spazi $E^{(\kappa \geq 2)}$ siano effettivamente rimossi. Ribadiamo che la rappresentazione *intrinseca* del κ -tensore di componenti covarianti $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ come $\tau_{i_1 \dots i_\kappa} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_\kappa}$ (e simili nel caso di componenti controvarianti o miste), nella quale i pedici $i_1 \dots i_\kappa$ di τ e gli apici $i_1 \dots i_\kappa$ di $e \otimes \dots \otimes e$ si susseguono *nello stesso ordine*, è frutto di una scelta convenzionale (per quanto naturale) rispetto alle possibili alternative. Essa equivale a che la componente covariante $(j_1 \dots j_\kappa)$ di $e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_\kappa}$, $(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_\kappa})_{j_1 \dots j_\kappa}$, sia uguale a $\delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_\kappa}^{i_\kappa}$.

Si deve ancora sottolineare il fatto che l'algebra sulla famiglia $\{E^{(\kappa)}\}$ è stata costruita assiomaticamente in analogia con quella sulla famiglia $\{E^{(\kappa)}\}$ proprio in modo da garantire *un isomorfismo tra le due famiglie rispetto a tutte le operazioni definite*. Ad esempio, mentre la proprietà associativa del prodotto \bullet tra forme multilineari segue automaticamente dalle definizioni, la stessa proprietà del prodotto \otimes tra tensori è conseguenza degli assiomi (I,II) e dell'isomorfismo χ di cui in (T₅). La corrispondenza 1-1 tra $\tau_{(\kappa)}$ e $\tau_{(\kappa)}$, $\tau_{(\kappa)} \leftrightarrow \tau_{(\kappa)}$, che consegue dalla identificazione delle loro componenti di uno stesso tipo e in una stessa base, si dice **corrispondenza canonica tra κ -tensori e κ -forme**. Alla luce dell'isomorfismo ottenuto, l'algebra dei tensori può dunque

considerarsi a tutti gli effetti come *una parafrasi* (definita unicamente a meno di isomorfismi) *dell'algebra delle forme multilineari*, un fatto cui non sempre viene dato il rilievo che merita.¹⁰ In forza della uguaglianza tra componenti di forme e componenti di tensori canonicamente corrispondenti, potremmo d'ora in avanti abolire il carattere corsivo per denotare le forme e le loro componenti, scrivendole anch'esse in carattere tondo, e rinunciare al simbolo \bullet in favore di \otimes .

Da quanto sopravvisto emerge poi un **principio di invarianza** (talvolta anche detto “principio di covarianza”) delle operazioni e uguaglianze algebriche tensoriali. Vale a dire, qualsiasi operazione su [qualsiasi uguaglianza tra] componenti tensoriali (in una base $\{e.\}$), che possa esprimersi nell'algebra su $\{E^{(\kappa)}\}$, si riproduce in una operazione sulle [in una uguaglianza tra le] corrispondenti componenti con apice in un'altra base $\{e'.\}$ ottenuta dalla precedente mediante una trasformazione lineare non singolare. Ad esempio, una (p,q)-contrazione può essere fatta direttamente sulle componenti senza apice, oppure passando prima a componenti con apice, (p,q)-contraendo, e tornando poi alle componenti senza apice. Similmente, ad es. alla identità $\tau_{i_r}^k - \tau_{ihr} B^{hk} \equiv 0$ corrisponde la stessa identità in componenti con apice (base $\{e'.\}$); alla uguaglianza $\sigma_{ik} + v_i v_k - a_{pik} = 0$ (ove $a \in E^{(0)} \equiv \mathbb{R}$) corrisponde la stessa uguaglianza nelle componenti con apice (tenendo presente che $a' \equiv a$), .. e così via. L'invarianza che abbiamo descritto si estende infine al passaggio da un tipo di componente ad un altro tipo, purché gli indici interessati siano liberi. Ad esempio alla identità menzionata più sopra corrisponde l'identità $\tau_{i_r}^{ik} - \tau_{ihr}^i B^{hk} \equiv 0$ (perché l'indice i è libero), ciò essendo dovuto alla non-singularità della matrice $\{B^{hk}\}$.

Munita di tutte le operazioni descritte, l'algebra su $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$, e quella ad essa equivalente su $\{E^{(\kappa)}\}_{\kappa=0,1,\dots}$, con $E^{(\kappa)} \approx E^{(\kappa)}$ (ove \approx significa “isomorfismo sotto la corrispondenza canonica” \equiv “isomorfismo canonico”), si dicono **algebra multilineare**, e rispettivamente **algebra tensoriale**, **basata su E**. Altre informazioni e commenti sull'algebra tensoriale si troveranno nella S.sez. 8.3.

3.1.3 FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

Passiamo ora ad occuparci di un argomento di grande importanza fondazionale ed applicativa, quello delle forme ($\kappa \geq 2$)-lineari simmetriche o antisimmetriche rispetto a certe coppie delle loro indeterminate. Per cominciare, sia $f = f(x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)})$ una qualsiasi funzione di $\kappa \geq 2$

¹⁰ Nelle usuali trattazioni dell'algebra tensoriale, questa è identificata con l'algebra delle matrici (a $\kappa = 0, 1, \dots$ indici) formate con le loro componenti rispetto ad una data base di E, e di un certo tipo, cioè soggette ad una specifica legge di trasformazione a fronte di una data trasformazione della base. Questo è anche l'approccio comunemente seguito dai fisici, ed offre una notevole semplificazione concettuale pur essendo insoddisfacente dal punto di vista logico perché elude la nozione “intrinseca” di tensore.

indeterminate $x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)}$ (nell'ordine), tutte appartenenti ad un dato arbitrario insieme Σ , e avente valori in uno spazio R -lineare L , cioè $f: \Sigma^{\kappa \geq 2} \rightarrow L$. Per $1 \leq p < q \leq \kappa$, una tale f si dice **simmetrica** [**antisimmetrica**] **rispetto a** $x_{(p)}$ e $x_{(q)}$ se resta inalterata [cambia segno] scambiando tra loro $x_{(p)}$ e $x_{(q)}$. Nel secondo caso, facendo in particolare $x_{(p)} = x_{(q)}$ si trova che la *stessa* espressione del valore di f deve essere uguale al suo opposto, e quindi che quel valore è zero. La funzione f si dice poi **completamente simmetrica** [**completamente antisimmetrica**] se è simmetrica [antisimmetrica] rispetto a $x_{(p)}$ e $x_{(q)}$ per *ogni* coppia di indici p, q come sopra definita. Ancora nel secondo caso, si vede dunque che f è nulla se le sue κ indeterminate non sono tutte diverse una dall'altra; e in particolare, se κ è maggiore della cardinalità di Σ . Sia ora s [a] una funzione come f a priori completamente simmetrica [antisimmetrica]. Scrivendo per brevità $\langle x \rangle$ per la κ -pla ordinata $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle$, si ha, $\forall \langle x \rangle \in \Sigma^\kappa$:

$$(1_1) \quad s(\pi \langle x \rangle) \equiv s(\langle x \rangle),$$

e rispettivamente

$$(1_2) \quad a(\pi \langle x \rangle) \equiv \text{sign}(\pi) a(\langle x \rangle)$$

per ogni permutazione π degli indici $1, \dots, \kappa$, ove $\text{sign}(\pi) = (-1)^{\text{par}(\pi)}$ e $\text{par}(\pi)$ è la parità di π rispetto a $1, \dots, \kappa$ presa come fondamentale (ad esempio, il numero degli scambi di elementi adiacenti¹¹). In forza della linearità di L potremo poi definire un **operatore di simmetrizzazione completa** \mathcal{S} e un **operatore di antisimmetrizzazione completa** \mathcal{A} agenti su f secondo (sempre $\forall \langle x \rangle \in \Sigma^\kappa$):

$$(2_1) \quad (\mathcal{S}f)(\langle x \rangle) \equiv: (\kappa!)^{-1} \sum_{\pi} f(\pi \langle x \rangle),$$

e rispettivamente secondo

$$(2_2) \quad (\mathcal{A}f)(\langle x \rangle) \equiv: (\kappa!)^{-1} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) f(\pi \langle x \rangle),$$

dove le somme sono estese alle $\kappa!$ permutazioni π di $1, \dots, \kappa$, e sempre $\forall \langle x \rangle \in \Sigma^\kappa$. È manifesto che \mathcal{S} [\mathcal{A}] trasforma una qualunque funzione f di $\langle x \rangle \in \Sigma^\kappa$ con valori in L in una analoga funzione completamente simmetrica [antisimmetrica]. Sottintendendo che le successive (3 ÷ 6) valgano $\forall \langle x \rangle \in \Sigma^\kappa$ (e quindi trascurandovi l'argomento $\langle x \rangle$), abbiamo:

$$(3_1) \quad \mathcal{S}s = s,$$

$$(3_2) \quad \mathcal{A}a = a;$$

e poiché $\sum_{\pi} \text{sign}(\pi) = 0$,

$$(3_3) \quad \mathcal{S}a = 0$$

$$(3_4) \quad \mathcal{A}s = 0;$$

quindi

¹¹ O anche non adiacenti. Non è difficile dimostrare l'equivalenza delle due definizioni. Gli scambi tra elementi, non necessariamente adiacenti, sono talvolta detti **trasposizioni**.

$$(4_1) \quad \mathcal{S}\mathcal{S}f = \mathcal{S}f,$$

$$(4_2) \quad \mathcal{A}\mathcal{A}f = \mathcal{A}f,$$

mentre

$$(4_3) \quad \mathcal{S}\mathcal{A}f = \mathcal{A}\mathcal{S}f = 0,$$

per qualunque f come sopra definita. Infine si verifica agevolmente che

$$(5_1) \quad “\mathcal{S}f = f \text{ in } \Sigma^{\kappa}” \Rightarrow “f \text{ è completamente simmetrica}”, \text{ e}$$

$$(5_2) \quad “\mathcal{A}f = f \text{ in } \Sigma^{\kappa}” \Rightarrow “f \text{ è completamente antisimmetrica}”.$$

(Poiché le implicazioni opposte alle (5) sono le (3), le (5) stesse sono in realtà equivalenze \Leftrightarrow .)

Supponiamo ora che Σ sia a sua volta uno spazio R -lineare ($n \geq 1$)-dim E , e che f sia la κ -forma (reale) $\tau_{(\kappa)}$, quindi che $L = R$. Come sappiamo, $f(\langle x \rangle) \equiv \tau_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}}$ può ad esempio scriversi come $\tau_{i_1 \dots i_\kappa} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(\kappa)}^{i_\kappa}$, dove le $x_{(s)}^{i_s}$ (con $1 \leq s \leq \kappa$) sono le componenti controvarianti di indice i_s di $x_{(s)}$ rispetto ad una base di E , $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ quelle covarianti di $\tau_{(\kappa)}$, e si somma da 1 a n su ciascuno degli indici ripetuti. È chiaro allora che una possibile (p, q) -simmetria [(p, q)-antisimmetria] di $\tau_{(\kappa)}$ equivale ad una corrispondente (p, q) -simmetria [(p, q)-antisimmetria] delle sue componenti $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ in una qualunque base di E . Se poi E è pseudoeuclideo, ciò continua a valere con riferimento a componenti controvarianti o miste di $\tau_{(\kappa)}$; vale a dire, “simmetria/antisimmetria di $\tau_{(\kappa)}$ rispetto ad una data coppia delle sue κ indeterminate” \Leftrightarrow “simmetria/antisimmetria delle sue componenti di qualunque tipo rispetto alla corrispondente coppia di indici”. (La facile verifica è lasciata al lettore).

Gli operatori di simmetrizzazione/antisimmetrizzazione completa su una ($\kappa \geq 1$)-forma possono dunque esprimersi facendoli agire sulle sue componenti, ad es. covarianti, secondo:

$$(6_1) \quad (\mathcal{S}\tau)_{i_1 \dots i_\kappa} = (\kappa!)^{-1} \sum_{\pi} \tau_{\pi(i_1 \dots i_\kappa)},$$

e rispettivamente

$$(6_2) \quad (\mathcal{A}\tau)_{i_1 \dots i_\kappa} = (\kappa!)^{-1} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) \tau_{\pi(i_1 \dots i_\kappa)},$$

dove ognuno degli indici i_1, \dots, i_κ può assumere un qualsiasi valore compreso tra 1 e n , e le somme sono ancora sulle $\kappa!$ permutazioni degli indici. Si usa spesso, ed è comodo, scrivere $(\mathcal{S}\tau)_{i_1 \dots i_\kappa}$ come $\tau_{(i_1 \dots i_\kappa)}$, e $(\mathcal{A}\tau)_{i_1 \dots i_\kappa}$ come $\tau_{[i_1 \dots i_\kappa]}$. Per qualunque $\tau_{(\kappa)}$, risulta $\tau_{(i_1 \dots i_\kappa)} = \tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ se gli indici sono tutti uguali, e $\tau_{[i_1 \dots i_\kappa]} = 0$ se gli indici non sono tutti diversi, e quindi in particolare se $\kappa > n$. Naturalmente in generale non è possibile ricostruire $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ mediante $\tau_{(i_1 \dots i_\kappa)}$ e $\tau_{[i_1 \dots i_\kappa]}$, salvo che nel caso $\kappa = 2$, per il quale $\tau_{ik} = \tau_{(ik)} + \tau_{[ik]}$. Resta da osservare che una “funzione f di κ indeterminate” può definirsi anche nel caso degenerare $\kappa = 1$. Allora c'è una sola permutazione, ed è pari, per cui $\mathcal{S}f = f$ e $\mathcal{A}f = f$. Lo stesso avviene per $\kappa = 0$, quando f è un elemento dato dello spazio di arrivo. Questi casi possono generalmente ignorarsi, essendo banale estendere ad esso le definizioni

introdotte, o le proposizioni dedotte, nei casi con $\kappa > 1$. È chiaro infine che i contenuti di questa sottosezione che sono stati riferiti a κ -forme si possono trasferire tal quali ai κ -tensori associati sotto la corrispondenza canonica.

Se $\langle v_{(1)}, \dots, v_{(\kappa)} \rangle$, $\kappa \geq 2$, è una κ -pla ordinata di vettori, il κ -tensore $v_{(1)} \otimes v_{(2)} \dots \otimes v_{(\kappa)}$ si usa dire κ -**vettore** associato a quella κ -pla ordinata. Abbiamo già incontrato κ -vettori, come le κ -basi covarianti $\{e_{i_1 \dots i_\kappa}\}$, e in particolare la 2-base $\{e_{ij}\}$. La componente, ad es. controvariante, di indici (nell'ordine) i_1, \dots, i_κ del κ -vettore associato a $\langle v_{(1)}, \dots, v_{(\kappa)} \rangle$ è ovviamente $v_{(1)}^{i_1} \dots v_{(\kappa)}^{i_\kappa}$. Vedremo più avanti che in particolare i κ -tensori che sono esprimibili come parte *completamente antisimmetrica* di un κ -vettore hanno applicazioni importanti. Naturalmente, se è dato un generico κ -tensore, non sempre esiste una κ -pla ordinata di vettori per la quale quel κ -tensore è il κ -vettore associato a quella κ -pla ordinata; ¹² vale a dire, i κ -vettori non sono altro che i κ -tensori decomponibili.

¹² Ad esempio riferendoci a tensori antisimmetrici, se τ_{ij} è un generico 2-tensore antisimmetrico non nullo, si può dimostrare che esso è la parte antisimmetrica di un 2-tensore semplice sse $\tau_{ij}\tau_{kh} + \tau_{ik}\tau_{hj} + \tau_{ih}\tau_{jk} = 0 \quad \forall (i,j,k,h)$.

3.2) SVILUPPI E APPLICAZIONI DELL'ALGEBRA TENSORIALE

In questa Sez. 3.2 sono presentati certi importanti sviluppi dell'algebra tensoriale in spazi pseudoeuclidei, nonché alcune delle loro più immediate applicazioni alla fisica-matematica classica. Come si vedrà, i nessi tra le sette brevi sottosezioni che seguono non sono particolarmente stretti, ma l'importanza dei loro contenuti giustifica il carattere un po' disorganico della sezione.

Ripartiamo dall'algebra tensoriale basata su E descritta nella Sez. 3.1. Essa è caratterizzata dalle seguenti operazioni: 1) le due operazioni lineari di somma di due tensori di comune ordine $\kappa \geq 1$, e di prodotto di un reale per un tensore di ordine $\kappa \geq 1$, da $E^{(\kappa)} \times E^{(\kappa)}$ e rispettivamente da $\mathbb{R} \times E^{(\kappa)}$, in $E^{(\kappa)}$; 2) il prodotto ordinato di un $(\iota \geq 1)$ -tensore per un $(\kappa \geq 1)$ -tensore, da $E^{(\iota)} \times E^{(\kappa)}$ in $E^{(\iota+\kappa \geq 2)}$; 3) la (p,q) -contrazione di un $(\kappa \geq 2)$ -tensore, da $E^{(\kappa)}$ in $E^{(\kappa-2)}$. Queste operazioni, salvo l'ultima che è unaria, sono binarie; inoltre $E^{(0)}$ si identifica con \mathbb{R} , e $E^{(1)}$ con E . È ovvio che lo studio di quest'algebra *come struttura formale* è cosa diversa dalla mera capacità di *manipolare le sue operazioni*. Su questo punto diremo ancora qualcosa più avanti, nel Cap. 8.

3.2.1) SULLE TRASFORMAZIONI ORTOGONALI E PSEUDORTOGONALI

Ripetendoci in parte, riprendiamo qui l'esame delle trasformazioni (B) -ortogonali (v. Cap. 1), e di quelle (B) -pseudortogonali (v. Cap. 2). Le trasformazioni ortogonali sono state introdotte nel Cap. 1, nel caso dello spazio $\mathbb{R}^n \approx H_n$, come quelle biiezioni lineari che, agendo sul generico $x \in \mathbb{R}^n$, lasciano invariata la forma quadratica pitagorica $\sum_i x_i^2$. Le trasformazioni pseudortogonali ("p.ortogonali") sono state introdotte nel Cap. 2 come naturale estensione di quelle ortogonali (su \mathbb{R}^n) ad un più generale spazio pseudoeuclideo $E_{n,\pi}$. Esse sono cioè gli **automorfismi** (lineari¹) di $E_{n,\pi}$ che preservano la forma B (o equivalentemente l'associata forma quadratica Q , in forza della corrispondenza $B \leftrightarrow Q$, vedi Cap. 2). Vale a dire, le trasformazioni p.ortogonali di $E_{n,\pi}$ sono i suoi automorfismi φ per i quali

$$(1) \quad B\varphi x \varphi y = Bxy,$$

$\forall (x,y) (\in E_{n,\pi})$; o equivalentemente, per i quali

$$(1bis) \quad Q(\varphi x) = Q(x)$$

¹ Un automorfismo dello spazio lineare X è una biiezione lineare di X su X .

$\forall(x) (\in E_{n,\pi})$. Sotto composizione, questi automorfismi formano un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di $E_{n,\pi}$, sottogruppo che si denota $O_n(B)$, e si dice **gruppo B -p.ortogonale** di $E_{n,\pi}$. Se infatti φ e ψ soddisfano la (1), allora $\forall(x,y) B\varphi(\psi x)\varphi(\psi y) = B\psi x\psi y = Bxy$, e quindi anche l'automorfismo composto $\varphi \circ \psi$ la soddisfa; se φ soddisfa la (1), ponendo $x = \varphi u$, $y = \varphi v$ abbiamo $B\varphi^{-1}x\varphi^{-1}y = Buv = B\varphi u\varphi v = Bxy$, e quindi anche l'inverso φ^{-1} la soddisfa. L'elemento neutro di $O_n(B)$ è l'identità su $E_{n,\pi}$, e infine l'associatività discende da quella degli automorfismi in genere.

La (1) può tradursi in termini di corrispondenti matrici relative ad una data base (ad es. covariante) $\{e_i\}_{i=1,\dots,n} \equiv \{e.\}$ di $E_{n,\pi}$. Riservando al solito al primo [secondo] indice il ruolo di indice di riga [colonna] indipendentemente dalla sua posizione verticale, ed avendo posto $(\varphi x)^i =: \varphi^i_j x^j$, abbiamo

$$(1\text{bis}) \quad B_{hk} \varphi^h_i x^i \varphi^k_j y^j = B_{ij} x^i y^j,$$

e quindi, per l'arbitrarietà di x e y ,

$$(2) \quad \varphi^h_i B_{hk} \varphi^k_j = B_{ij};$$

ovvero, in notazione non indiciale ($^t \equiv$ trasposizione)

$$(2\text{bis}) \quad {}^t \varphi B \varphi = B.$$

Le matrici $\{\varphi^i_j\}_{i,j=1,\dots,n}$, (o φ), non singolari per definizione e soddisfacenti la (2) (o la (2bis)), si dicono **matrici B -p.ortogonali**. Ovviamente, il loro insieme forma un gruppo, sotto moltiplicazione, isomorfo a $O_n(B)$, e quindi può denotarsi allo stesso modo se il senso è chiaro dal contesto. Notiamo che il primo membro della (2) è l'espressione delle componenti B'_{ij} sotto la trasformazione (3.1.1, 7) della base quando si identifichi la matrice L della (3.1.1, 7) con ${}^t \varphi$; in questo senso, essa afferma che $B'_{ij} = B_{ij}$ per ogni matrice $L = {}^t \varphi$ con φ B -p.ortogonale. Ove non vi sia rischio di confusione, nel seguito sottintenderemo spesso la B negli attributi B -ortogonale e B -p.ortogonale.

Essendo $\det(B) \neq 0$, la (2) implica che $\det^2(\varphi) = 1$. Vengono così a distinguersi in modo naturale due tipi di automorfismi p.ortogonali (di $E_{n,\pi}$): quelli con $\det(\varphi) = 1$, e quelli con $\det(\varphi) = -1$. I primi si dicono **automorfismi p.ortogonali propri** (o anche **rotazioni** (r.)), e formano un sottogruppo di $O_n(B)$ che si denota $O_n^+(B)$ (o anche $SO_n(B)$, “Special Ortogonal”) e si dice **gruppo p.ortogonale proprio**; i secondi si dicono **automorfismi p.ortogonali impropri** (o anche **rotazioni invertenti** (i.)), e *non* formano un gruppo. Infatti il prodotto di due automorfismi p.ortogonali segue la regola dei segni, cioè: (r.)(r.) = (r.), (r.)(i.) = (i.), (i.)(r.) = (i.), (i.)(i.) = (r.), che rendono evidenti le due precedenti affermazioni. Tutto ciò vale in particolare con riferimento ad uno spazio euclideo $E_{n,n} \equiv E_n$ e ai relativi automorfismi ortogonali.

Le componenti (di qualunque tipo, e non soltanto covarianti, come si vede subito) del tensore B sono evidentemente **invarianti assoluti** di $O_n(B)$.² È naturale chiedersi se, oltre a B , esistano altri tensori con componenti invarianti assoluti di $O_n(B)$. La risposta è positiva, perché sono certamente invarianti assoluti le componenti delle varie potenze tensoriali di $B_{(2)}$: ad esempio, il 4-tensore di componenti $(ikjh) B_{ik}B_{jh}$, oppure $B_{ij}B_{kh}$, oppure $B_{ih}B_{jk}$, oppure il 6-tensore di componenti $(ikjhlm) B_{ik}B_{jh}B_{lm}$, .. e via dicendo. Si riconosce che vi sono esattamente $(2k - 1)!!$ ³ potenze k -esime di $B_{(2)}$ di questo tipo linearmente indipendenti; come abbiamo appena visto, per $k = 2$, i tre $(= (4-1)!!)$ 4-tensori di componenti $B_{ik}B_{jh}$, $B_{ij}B_{kh}$ e $B_{ih}B_{jk}$.

Le (2) sono un sistema di $n(n+1)/2$ equazioni indipendenti in φ ; poiché le componenti di φ sono n^2 , ne restano $n(n-1)/2$ indipendenti. Ciò significa che $\varphi \in O_n(B)$ contiene in generale $n(n-1)/2$ parametri indipendenti; cioè, uno per $n = 2$, tre per $n = 3$, ecc. La struttura del sistema (2) è particolarmente semplice e interessante quando esso sia riferito ad una base **p.ortonormale**, cioè nella quale B_{ik} è diagonale con certi $\varepsilon(i) = \pm 1$ sulla diagonale principale. In questo caso, si ha:

$$(3) \quad \varphi^h_i \delta_{hk} \varepsilon(h) \varphi^k_j = \delta_{ij} \varepsilon(i).$$

In uno spazio *euclideo*, ove tutti gli ε_i sono $+1$, e quindi $B_{ik} = \delta_{ik}$, si è ridotti alla

$$(3bis) \quad \varphi^h_i \delta_{hk} \varphi^k_j = \delta_{ij}.$$

In questo caso l'espressione di φ in termini dei suoi $n(n-1)/2$ parametri liberi (angoli, o meglio loro seni e coseni) è determinata elementarmente, almeno per i valori più piccoli di n , in particolare per $n = 2$ e $n = 3$. Precisamente, se $\det(\varphi) = 1$ (rotazioni), per $n = 2$ risulta $\varphi^1_1 = \varphi^2_2 = \cos\theta$, e $\varphi^1_2 = -\varphi^2_1 = \sin\theta$, ove $0 \leq \theta < 2\pi$ è l'angolo della rotazione del piano dei nuovi assi coordinati rispetto ai vecchi, convenendo che sia positivo l'angolo dall'asse (1) all'asse (2). Sempre per $\det(\varphi) = 1$, per $n = 3$ le formule delle rotazioni sono anch'esse ben note, ma un po' più laboriose da trascrivere (sono comunque quasi sempre riportate nei manuali di geometria analitica). In questo caso gli angoli sono tre, tutti variabili entro gli stessi limiti $[0, 2\pi)$. Per $n = 4$ gli angoli liberi sono sei, ma le relative formule hanno scarso interesse perché il valore $n = 4$ di solito si riferisce al caso pseudoeuclideo di $E_{4,3}$ e non ad uno spazio euclideo. Il caso degli automorfismi ortogonali invertenti ($\det(\varphi) = -1$) si tratta in modo analogo: per $n = 2$, si trova $\varphi^1_1 = -\varphi^2_2 = \cos\theta$ e $\varphi^1_2 = \varphi^2_1 =$

² Nel linguaggio della **Teoria degli Invarianti**, un invariante assoluto (o anche spesso invariante tout court) J rispetto ad un gruppo di sostituzioni G sopra un insieme D è un'applicazione da D su un altro insieme (che può essere D stesso), per la quale vale la $\forall \Gamma (\in G) \forall x (\in D) [J(\Gamma x) = J(x)]$. Si ha invece un più generale **invariante relativo** quando, essendo l'insieme nel quale J prende i valori uno spazio lineare sul campo K , la precedente vale con il contenuto delle [] sostituito da $J(\Gamma x) = M(\Gamma)J(x)$, dove M è un elemento di K , generalmente dipendente da Γ , ma costante su D , che si dice **peso** (o **fattore**) dell'invariante relativo. Tipicamente, D è uno spazio lineare su R o su C , e G è un gruppo di sostituzioni (o automorfismi) lineari; inoltre anche l'insieme dei valori di J è uno spazio lineare su R o su C .

³ Per definizione, il doppio fattoriale $!!$ del naturale $n (\geq 1)$ vale $n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ se n è dispari, e $n \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2$ se n è pari. Quindi risulta anche, per ogni naturale k , $(2k+1)!!(2k)!! = (2k+1)!$.

= $\sin\theta$. Si noti che questa matrice è uguale alla corrispondente matrice di rotazione con la seconda riga invertita.⁴

Passando a uno spazio *pseudoeuclideo* $E_{n,\pi}$ e ad una sua base p.ortonormale, alla luce della (3) si vede subito che le $(n \times n)$ -matrici diagonali $\eta_i \delta_{ij}$, con arbitrari $\eta_i = \pm 1$, sono p.ortogonali. Denotiamo con \mathcal{I}^+ [\mathcal{I}^-] la generica $(n \times n)$ -matrice del tipo $\eta_i \delta_{ij}$ con un numero pari [dispari] di -1 ; allora, se A è una $(n \times n)$ -matrice qualsiasi, risulta $\det\{A\mathcal{I}^+\} = \det\{\mathcal{I}^+A\} = \det\{A\}$ e $\det\{A\mathcal{I}^-\} = \det\{\mathcal{I}^-A\} = -\det\{A\}$. Infatti $A\mathcal{I}^+$ [\mathcal{I}^+A] è uguale alla A con un numero pari di colonne [righe] invertite; e similmente $A\mathcal{I}^-$ [\mathcal{I}^-A] è uguale alla A con un numero dispari di colonne [righe] invertite.

Ancora con riferimento alle (3), il caso pseudoeuclideo di $E_{2,1}$ (**spazio di Minkowski speciale**) fornisce le trasformazioni di Lorentz speciali. Dando all'indice 1 il significato spaziale e all'indice 2 quello temporale, e prendendo $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(2) = -1$, le (3) danno le quattro alternative nelle (2.C, 9) con le identificazioni $\varphi^1_1 = a$, $\varphi^1_2 = b$, $\varphi^2_1 = c$, $\varphi^2_2 = d$. Scartando ancora le (2.C, 9_{2,3,4}), finiamo con $\varphi^1_1 = \varphi^2_2 = \text{Ch}\theta$, $\varphi^1_2 = \varphi^2_1 = \text{Sh}\theta$, cioè con le trasformazioni di Lorentz speciali, automorfismi p.ortogonali propri ($\det\varphi = 1$). Ciò vale anche nel caso di $E_{4,3}$, perché le trasformazioni di Lorentz generali sono il prodotto di una trasformazione di Lorentz speciale per una rotazione puramente spaziale.

3.2.2) PSEUDOTENSORE DI LEVI-CIVITA

Ci si aspetta che possano esistere altri invarianti assoluti di $O_n(B)$; e questo è appunto il caso, come mostreremo in un momento. Abbiamo visto che ogni potenza di $B_{(2)}$ è invariante; in particolare lo è quella di esponente $n \geq 1$ (ad es. in componenti covarianti) data da $A_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n} = \det\{C_{pq} = B_{ip, jq}\}_{p,q=1, \dots, n}$. Chiaramente la generica componente di A non cambia sotto lo scambio di i con j ; ma cambia di un fattore $(-1)^\sigma$ sotto una permutazione di parità σ su $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$ mentre si tiene fissa la $\langle j_1, \dots, j_n \rangle$, o sotto una permutazione di parità σ su $\langle j_1, \dots, j_n \rangle$ mentre si tiene fissa la $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$. Ciò è compatibile con la possibilità di scrivere $A_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_n}$ nella forma $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n}$, cioè

$$(1) \quad \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \det\{B_{ip, jq}\}_{p,q=1, \dots, n},$$

avendo posto

$$(2) \quad \varepsilon_{i_1 \dots i_n} =: \pm \Upsilon_{i_1 \dots i_n} |\det(B)|^{1/2},$$

⁴ Altre scelte di righe o colonne equivalgono ad una conveniente ridefinizione di θ . Ad esempio invertendo la prima colonna della matrice di rotazione (invece della seconda riga) si riottiene il precedente risultato con $\pi - \theta$ al posto di θ .

e dove $\Upsilon_{i_1 \dots i_n}$ è il simbolo totalmente antisimmetrico introdotto nel Cap. 1. Il segno di $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ viene così a dipendere da una scelta convenzionale, da fare una volta per tutte: quella del segno nella (2). (Ricordiamo che $\Upsilon_{1 \dots n} = 1$ per definizione.) Sceglieremo definitivamente il segno + nella (2), e continueremo a nominare come (2) la definizione di $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ sotto questa scelta. Ci interessa la legge di trasformazione degli oggetti a 1° membro della (2) a fronte del passaggio dalla base covariante $\{e.\}$ alla base covariante $\{e'.\}$ secondo la (3.1.1, 7), con matrice di transizione L . Punto di partenza è l'identità, valida per ogni matrice L ,

$$(3) \quad \Upsilon_{i_1 \dots i_n} = \det^{-1}\{L\} L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_n}^{j_n} \Upsilon_{j_1 \dots j_n}.$$

Questa si ottiene sostituendo nella $\det\{L\} = L_1^{j_1} \dots L_n^{j_n} \Upsilon_{j_1 \dots j_n}$ generici indici i_1, \dots, i_n (variabili al solito tra 1 e n) agli indici 1, ..., n , e tenendo conto della proprietà di un determinante di cambiare segno sotto interscambio di due righe o due colonne. Se non fosse per la presenza del fattore $\det^{-1}\{L\}$ a 2° membro della (3), quest'ultimo darebbe le componenti covarianti di un n -tensore nella nuova base $\{e'.\}$ in funzione di quelle nella vecchia base $\{e.\}$. In generale, una legge di trasformazione che a differenza di quella per cogredienza standard contiene nel 2° membro una potenza di esponente intero relativo w di $\det\{L\}$ come fattore è quella che caratterizza le componenti covarianti di un cosiddetto “tensore relativo di peso w ”. Dei tensori relativi ci occuperemo più in generale nella S.sez. 4.3.4. Qui rileviamo che la (3) può interpretarsi come legge di trasformazione delle componenti covarianti di un n -tensore relativo di peso -1 ; e in questo senso, potremo ripensarla scrivendo il suo 1° membro come $\Upsilon'_{i_1 \dots i_n}$, ovvero

$$(3bis) \quad \Upsilon'_{i_1 \dots i_n} = \det^{-1}\{L\} L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_n}^{j_n} \Upsilon_{j_1 \dots j_n}.$$

Seguendo la (2), per definizione avremo

$$(4) \quad \varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \Upsilon'_{i_1 \dots i_n} |\det\{B'\}|^{1/2}.$$

Ma risulta $\det\{B'\} = \det^2\{L\} \det\{B\}$; da cui, prendendo il valore assoluto e poi la radice quadrata,

$$(5) \quad |\det\{B'\}|^{1/2} = |\det\{L\}| |\det\{B\}|^{1/2}.$$

Sostituendo allora le (3bis, 5) nella (4) otteniamo

$$(6) \quad \varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = \det^{-1}\{L\} L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_n}^{j_n} \Upsilon_{j_1 \dots j_n} |\det\{L\}| |\det\{B\}|^{1/2} = \text{sign}(\det\{L\}) L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_n}^{j_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n}.$$

Ancora, se non ci fosse il fattore $\text{sign}(\det\{L\})$ a 2° membro, la (6) direbbe che le ε_{\dots} si trasformano come le componenti covarianti di un n -tensore a fronte della solita trasformazione della base. In generale, una legge di trasformazione che a differenza di quella per cogredienza [controgrredienza] standard ha nel 2° membro un fattore-segno $\text{sign}(\det\{L\})$ caratterizza le componenti covarianti [controvarianti] di un cosiddetto “pseudotensore”. Anche dei pseudotensori ci occuperemo in modo più sistematico nella S.sez. 4.3.4; ma è ovvio che essi si comportano come tensori standard per trasformazioni della base con $\det\{L\} > 0$. Per il momento, ci limitiamo a

osservare che le ε_{\dots} si trasformano come componenti *covarianti* di un n-pseudotensore antisimmetrico, che viene detto **n-pseudotensore antisimmetrico di Levi-Civita** (o talvolta, **di Ricci**).

La (3bis) può equivalentemente leggersi come legge di trasformazione per controgradienza di un n-tensore relativo di peso +1, cioè secondo la $\Upsilon^{i_1 \dots i_n} L_{i_1}^{j_1} \dots L_{i_n}^{j_n} = \det\{L\} \Upsilon^{j_1 \dots j_n}$, dove le componenti controvarianti (indici in alto) di Υ hanno *gli stessi valori numerici* di quelle covarianti. Ciò considerato, è naturale introdurre oggetti simili a quelli definiti mediante la (2), e precisamente:

$$(7) \quad \varepsilon^{i_1 \dots i_n} = \Upsilon^{i_1 \dots i_n} / |\det\{B\}|^{1/2}.$$

Argomenti completamente analoghi ai precedenti dimostrano allora che le ε^{\dots} si trasformano come componenti controvarianti di un n-pseudotensore antisimmetrico, cioè secondo le

$$(6bis) \quad \varepsilon^{i_1 \dots i_n} = \text{sign}(\det\{L\}) L_{j_1}^{i_1} \dots L_{j_n}^{i_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}.$$

D'altra parte le $\Upsilon_{i_1 \dots i_n}$ e le $\Upsilon^{j_1 \dots j_n}$ *non* sono legate tra loro mediante la formula standard in termini della matrice di elementi B_{ij} o B^{ij} , ma piuttosto dalle $\Upsilon_{i_1 \dots i_n} = \det^{-1}\{B\} B_{i_1 j_1} \dots B_{i_n j_n} \Upsilon^{j_1 \dots j_n}$ e $\Upsilon^{i_1 \dots i_n} = \det\{B\} B^{i_1 j_1} \dots B^{i_n j_n} \Upsilon_{j_1 \dots j_n}$: vi sono cioè a 2° membro fattori $\det^{-1}\{B\}$, e rispettivamente $\det\{B\}$, estranei a tale formula standard. In corrispondenza alle precedenti formule, le componenti p.covarianti e quelle p.controvarianti di $\varepsilon_{(n)}$ risultano legate tra loro dalla $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \text{sign}(\det\{B\}) \cdot B_{i_1 j_1} \dots B_{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$, e rispettivamente $\varepsilon^{i_1 \dots i_n} = \text{sign}(\det\{B\}) B^{i_1 j_1} \dots B^{i_n j_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n}$: anche in questo caso, dunque, a 2° membro figura un fattore $\text{sign}(\det\{B\})$ estraneo alla formula standard. Queste sono conseguenze del fatto che né $\Upsilon_{(n)}$ né $\varepsilon_{(n)}$ sono genuini n-tensori.

In particolare, dalla (6) otteniamo

$$(8) \quad \varepsilon'_{1 \dots n} = \text{sign}(\det\{L\}) L_1^{j_1} \dots L_n^{j_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} = \text{sign}(\det\{L\}) \det\{L\} |\det\{B\}|^{1/2} = |\det\{L\}| |\det\{B\}|^{1/2} = |\det\{L\}| \varepsilon_{1 \dots n};$$

vale a dire, le componenti $(1 \dots n)$ di $\varepsilon_{(n)}$ sono invarianti relativi del generico automorfismo ($\det(L) \neq 0$), $L \in GL(n)$ (**gruppo delle n×n-matrici non singolari**, General Linear), con fattore $|\det(L)|$; e dunque quelle componenti $(1 \dots n)$ sono invarianti assoluti rispetto al gruppo $O_n(B)$, i cui automorfismi, come sappiamo, hanno $|\text{determinante}| = 1$. Simmetricamente, dalle (6bis) si trae

$$(8bis) \quad \varepsilon^{1 \dots n} = \text{sign}(\det\{L\}) L_{j_1}^1 \dots L_{j_n}^n \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = |\det\{L\}| \varepsilon'^{1 \dots n}$$

La stessa (8) [(8bis)] vale per le generiche componenti $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ [$\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$], perché il passaggio a queste da $\varepsilon_{1 \dots n}$ [da $\varepsilon^{1 \dots n}$] avviene in base ad uno stesso meccanismo: $\varepsilon'_{i_1 \dots i_n} = |\det(L)| \varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ [$\varepsilon'^{i_1 \dots i_n} = |\det(L)|^{-1} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}$]. In particolare ε_{\dots} [ε^{\dots}] non varia passando dalla base (ordinata) $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ad una base $\langle e'_1, \dots, e'_n \rangle$ che ne sia una arbitraria permutazione: infatti in questo caso $\det\{L\} = \pm 1$ a seconda della parità della permutazione, e così $|\det\{L\}| = 1$.

Si possono infine facilmente ricavare i prodotti, parzialmente (o nel primo caso, vedi la successiva (9₀), completamente) contratti, di due $\Upsilon_{(n)}$ in forma covariante e rispettivamente controvariante. Essi sono (al solito, si sommi sugli indici ripetuti in alto e in basso):

$$(9_0) \quad \Upsilon_{k_1 \dots k_n} \Upsilon^{k_1 \dots k_n} = n!$$

$$(9_1) \quad \Upsilon_{k_1 \dots k_{(n-1)i}} \Upsilon^{k_1 \dots k_{(n-1)j}} = (n-1)! \delta_i^j$$

.....

$$(9_{n-1}) \quad \Upsilon_{k_1 k_2 \dots i_n} \Upsilon^{k_1 k_2 \dots j_n} = 1! \delta_{i_2 \dots i_n}^{j_2 \dots j_n}$$

$$(9_n) \quad \Upsilon_{i_1 \dots i_n} \Upsilon^{j_1 \dots j_n} = \delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n},$$

che si possono compendiare nella

$$(9) \quad \Upsilon_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_{(n-m)}} \Upsilon^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_{(n-m)}} = (n-m)! \delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m},$$

valide per ogni n e ogni $0 \leq m \leq n$ (in cui si ponga $\delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m} = 1$ per $m = 0$).

Le δ indicizzate a secondo membro delle (9_{1≤i≤n}), con ugual numero di indici in basso e in alto, sono i **simboli di Kronecker generalizzati**, uguali a $(-1)^\sigma$ se gli indici in basso sono tutti diversi tra loro e quelli in alto sono una loro permutazione di parità σ , e uguali a zero in tutti gli altri casi.⁵ Si prova facilmente che $\delta_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$ è il determinante della $(n \times n)$ -matrice che ha sulla riga [colonna] p -ma e sulla colonna [riga] q -ma δ_{ip}^{jq} , e quindi che è somma algebrica di $n!$ prodotti di n simboli di Kronecker standard. Secondo le (9), i simboli di Kronecker generalizzati sono componenti miste di un 2-tensore isotropo “tipico” (di fatto, $B_{(2)}$ per la (9₁)), ..., di un $2(n-1)$ -tensore isotropo tipico (eq. (9_{n-1})), ..., di un $2n$ -tensore isotropo tipico (eq. (9_n)).⁶ Infatti (si dimostra che) il prodotto, possibilmente contratto c volte, di due n -tensori relativi di pesi uguali e opposti, come nelle (9), è un $2(n-c)$ -tensore “assoluto” (\equiv di peso 0), ove $c = n - m$, quindi $2(n-c) = 2m$. Il simbolo di Kronecker standard è ovviamente il primo della serie dei simboli generalizzati, vedi la (9₁). Risulta inoltre, con ogni evidenza, $\Upsilon_{i_1 \dots i_n} = \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n}$ e $\Upsilon^{i_1 \dots i_n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n}$. Infine è utile tener presente che se $v_{(\kappa)}$ è un κ -tensore completamente antisimmetrico, ad es. in componenti controvarianti, si ha $\delta_{i_1 \dots i_\kappa}^{j_1 \dots j_\kappa} v^{i_1 \dots i_\kappa} = \kappa! v^{j_1 \dots j_\kappa}$. In forza delle (2, 7), alle (9) si possono aggiungere le stesse scritte con $\varepsilon_{(n)}$ in luogo di $\Upsilon_{(n)}$, ossia

$$(9_{bis}) \quad \varepsilon_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_{(n-m)}} \varepsilon^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_{(n-m)}} = (n-m)! \delta_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_m}.$$

La disponibilità dell' n -pseudotensore ε_{\dots} permette una naturale estensione delle nozioni di prodotto misto e prodotto vettore, introdotte nella S.sez. 1.7.2, ad un generico spazio

⁵ Banalmente, il risultato di questa definizione resta inalterato scambiandovi tra loro le espressioni “in basso” e “in alto”.

⁶ Si noti che queste componenti sono simmetriche rispetto a coppie di indici come i_1 e j_1 ecc., che potrebbero (dovrebbero) essere allineati verticalmente, e che non lo sono a causa delle solite limitazioni tipografiche.

pseudoeuclideo $E_{n,\pi}$, $n \geq 2$, e ormai qui presentate come casi particolari di **prodotto esterno** di una m -pla ordinata di m suoi vettori $\langle {}^1V, {}^2V, \dots, {}^mV \rangle$, con $2 \leq m \leq n$. Precisamente, per $m < n$ questo prodotto esterno è il $(n-m)$ -p.tensore di componenti covarianti $T_{i_1 \dots i_{(n-m)}} =: \varepsilon_{j_1 \dots j_m i_1 \dots i_{(n-m)}} {}^1V^{j_1} \dots {}^mV^{j_m}$, e per $m = n$, lo p.scalar $T =: \varepsilon_{j_1 \dots j_n} {}^1V^{j_1} \dots {}^nV^{j_n}$. Questo $(n-m)$ -p.tensore (o p.scalar per $m = n$) è evidentemente m -lineare nei vettori fattori, si annulla sse la matrice a m righe ed n colonne formata con le n componenti degli m vettori ha rango $< m$, cioè sse i vettori in oggetto non sono linearmente indipendenti, e infine cambia segno scambiando tra loro due dei vettori-fattori. Il caso $m = n$ viene anche detto **prodotto misto**, e corrisponde al prodotto esterno introdotto nella S.sez. 1.4.2 per \mathbb{R}^n al posto di $E_{n,\pi}$. Se poi $m = n - 1$, si ha un **prodotto-p.vettore** di componenti $T_r =: \varepsilon_{j_1 \dots j_{(n-1)r}} {}^1V^{j_1} \dots {}^{(n-1)}V^{j_{(n-1)}}$, che corrisponde al prodotto-vettore nella S.sez. 1.4.2; questo vettore è ortogonale a ciascuno dei vettori fattori. Il prodotto misto di n vettori si dice **n -volume con segno del n -parallelepipedo** avente per lati uscenti dall'origine i vettori fattori presi nell'ordine, misurato nell'unità in cui il $|n\text{-volume}|$ dell' n -cubo costruito sui versori coordinati vale 1.

Anche le potenze (di qualsiasi esponente) di $\varepsilon_{(n)}$ sono invarianti assoluti rispetto al gruppo $O_n^+(B)$. La famiglia degli invarianti assoluti si arricchisce dunque in $O_n^+(B)$, perché ad essa appartengono non solo le potenze (di esponente $p \geq 0$) di $B_{(2)}$, che sono $2p$ -tensori, ma anche quelle (di esponente $q \geq 0$) di $\varepsilon_{(n)}$, che sono qn -tensori, nonché tutti i loro prodotti. (Si ricordi che $\varepsilon_{(n)}$ è un n -tensore, e non un n -p.tensore, rispetto a trasformazioni di $O_n^+(B)$.) Fissato il grado κ di un tale prodotto, deve chiaramente aversi $2p + qn = \kappa$. La selezione, tra i prodotti di questo tipo, di quelli che sono linearmente indipendenti, può farsi caso per caso fissati n e κ ; “a mano”, quando n e κ sono abbastanza piccoli, oppure mediante un conveniente algoritmo di calcolo logico. Ad esempio, quando $n = \kappa = 2$ (il più semplice dei casi significativi), si trovano $B_{(2)}$ e $\varepsilon_{(2)}$ (che si riconoscono subito come linearmente indipendenti⁷), e niente altro. Un teorema della Teoria degli Invarianti (dovuto a Hilbert, “teorema della base finita”) afferma poi che i prodotti linearmente indipendenti sopradescritti sono comunque in numero finito per i dati n e κ ; inoltre, un altro teorema afferma che essi sono *completi* nello spazio lineare dei tensori invarianti (assoluti) associati a n e κ . Altrimenti detto, fissati n e κ , quei prodotti linearmente indipendenti costituiscono una base (finita) di tensori invarianti assoluti. Se in particolare lo spazio è euclideo, i tensori in oggetto si dicono anche **isotropi**, perché non privilegiano alcuna sua direzione.

Esaminando la situazione un po' più in dettaglio, cominciamo col supporre $\kappa > 2$ e dispari (caso 1), diciamo $\kappa = \kappa_d$. Allora sia n che q devono essere dispari, diciamo n_d e rispettivamente q_d , e

⁷ Più in generale, è immediato verificare che, per n pari $= 2k$ il tensore $\varepsilon_{(n)}$ e una qualsiasi delle $(n-1)!!$ potenze k -esime di $B_{(2)}$ sono linearmente indipendenti.

$n_d q_d = \kappa_d - 2p$. Se invece κ è pari (caso 2) si devono distinguere due casi: quello di n pari (caso 2₁), $n = n_p$, in cui q può essere sia pari che dispari ma soddisfacente a $n_p q = \kappa_p - 2p$, e quello di n dispari (caso 2₂), $n = n_d$, in cui q deve essere pari, $q = q_p$, sotto $n_d q_p = \kappa_p - 2p$. Per esempio, per $\kappa = 3$ (caso 1) e $n_d > 1$, $n_d q_d = 3 - 2p$ dà soltanto $n_d = 3$, $q_d = 1$, $p = 0$; vale a dire, la 3-base isotropa è vuota se $n_d > 3$, mentre consta del solo $\varepsilon_{(3)}$ se $n_d = 3$. Per $\kappa = 4$ e $n = n_d = 3$ (caso 2₂), si ha $q_p = 0$, $p = 2$, e quindi si è ridotti alla base dei tre 4-tensori menzionata nella S.sez. 3.2.1.

3.2.3) ALCUNE APPLICAZIONI ALLA FISICA

Il teorema di “completezza” ricordato più sopra permette di costruire in modo abbastanza semplice la κ -base di invarianti assoluti rispetto a $O_n^+(B)$ per dati n e κ , e trova interessanti e dirette applicazioni in fisica-matematica. Per fare un esempio molto semplice, la struttura a priori del 4-tensore isotropo della viscosità lineare (in questo caso $E_{n,\pi}$ è ovviamente euclideo, con $n = \pi = 3$, $E_{n,\pi} = E_3$), si ottiene esprimendo la sua componente $(i_k j_h)$ come combinazione lineare delle *tre* sopradette componenti di $B_{(2)}B_{(2)}$ ($B_{ik}B_{jh}$, $B_{ij}B_{kh}$, $B_{ih}B_{jk}$); ma dovendosi anche soddisfare (per ragioni che diamo per note da un corso di meccanica razionale) le tre simmetrie rispetto a (i,k) , (j,h) e (i_k, j_h) , i coefficienti possibilmente non nulli della combinazione si riducono a due, il primo a fattore di $B_{ik}B_{jh}$ e il secondo a fattore della *somma* $B_{ij}B_{kh} + B_{ih}B_{jk}$. Una situazione analoga si verifica per il 4-tensore isotropo della elasticità lineare, ecc.

Una notevole estensione del precedente “teorema della base isotropa” è la seguente. Supponiamo che l’isotropia dello spazio *euclideo* E_n sia rotta dall’esistenza, in esso, di una direzione orientata privilegiata Ω (vettore unitario). Sussiste allora il teorema seguente: «Una κ -base per i κ -tensori “incompletamente” (a causa di tale direzione privilegiata) isotropi è *ancora finitamente generabile*, perché si ottiene prendendo tutti i κ -tensori linearmente indipendenti che sono prodotti contratti h (≥ 0) volte di Ω per un $(\kappa+h)$ -tensore della $(\kappa+h)$ -base isotropa, sotto l’ovvia richiesta che sia $2p + nq - h = \kappa$.»⁸

Per fare un esempio, applichiamo questo teorema al caso $n = 3$, $\kappa = 2$. Partendo da $h = 0$, abbiamo:

$h = 0 \Rightarrow (p=1, q=0)$, che dà il singolo 2-tensore simmetrico $B_{(2)}$;

⁸ Il gruppo delle corrispondenti rotazioni, diciamo $O_{n,\Omega}^+(B)$ è un sottogruppo di $O_n^+(B)$ e quindi la nuova base include la base isotropa, come si vede subito dalla sua definizione.

$h = 1 \Rightarrow (p=0, q=1)$, che dà il singolo 2-tensore antisimmetrico $\varepsilon_{(3)} \cdot \Omega$ (il \cdot denota il prodotto interno);

$h = 2 \Rightarrow (p=2, q=0)$, che dà il singolo 2-tensore simmetrico $\Omega\Omega$;

$h \geq 3 \Rightarrow$ non esistono altri 2-tensori linearmente indipendenti dai precedenti. La costruzione della base è così completa.

Nel caso della conduzione elettrica lineare di un fluido in presenza di un campo magnetico M (per cui Ω è ora il versore di questo M), il **2-tensore di conducibilità** (lineare) $\sigma_{(2)}$ deve essere una combinazione lineare dei tre 2-tensori appena ottenuti, cioè di $B_{(2)}$, $\varepsilon_{(3)} \cdot \Omega$ e $\Omega\Omega$. Ciò può essere scritto nella forma: $\sigma_{ik} = \sigma_{\perp} B_{ik} - \sigma_{\wedge} \varepsilon_{ikj} \Omega^j + (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) \Omega_i \Omega_k$. I tre coefficienti σ_{\parallel} , σ_{\wedge} , σ_{\perp} introdotti sono le usuali **conducibilità parallela** (σ_{\parallel}), **conducibilità di Hall** (σ_{\wedge}), e **conducibilità perpendicolare** (σ_{\perp}) del mezzo. Per ovvie ragioni, esse devono dipendere dal modulo di M , $|M|$, in modo che $\sigma_{\wedge} \rightarrow 0$ e $\sigma_{\perp} \rightarrow \sigma_{\parallel}$ quando $|M| \rightarrow 0$, così che in questo limite σ_{ik} si riduca all'usuale **conducibilità isotropa** (o **scalare**) $\sigma^{(0)} B_{ik}$, ove $\sigma^{(0)} = \lim_{|M| \rightarrow 0} \sigma_{\perp} = \sigma_{\parallel}$. Tale struttura del 2-tensore di conducibilità, qui inferita da argomentazioni algebriche, coincide con quella derivabile dalla teoria del trasporto statistico (che naturalmente dà anche i valori numerici delle tre conducibilità), ed è sperimentalmente ben nota. Su analoga base, ma più laboriosamente, si potrebbe dedurre la struttura a priori del **4-tensore di viscosità** (lineare) dello stesso fluido sotto l'influenza del campo magnetico M , che risulta caratterizzato da sei coefficienti funzioni di $|M|$ (come ancora conferma la teoria del trasporto statistico).⁹ Questi e altri simili risultati sottolineano come l'algebra tensoriale possa fornire previsioni di inaspettata potenza attraverso alcuni dei suoi teoremi più profondi.

3.2.4) B-ORTOGONALITÀ E SOTTOSPAZI

Riferendoci ora ad un generico spazio *semieuclideo* ($n \geq 1$)-dim $\{E, B\}$ (cioè al più generale spazio finito-dim dotato di una B), sia H un suo sottospazio (SS) ($1 \geq p \geq n$)-dim. H si dice **isotropo** se $H \cap H^{\perp} \neq \{O\}$ ($O \equiv$ zero di E), e **totalmente isotropo** se inoltre $H \subset H^{\perp}$. L'isotropia totale di H implica la sua isotropia.¹⁰ Facciamo qualche esempio di spazio isotropo. (i): $E = \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, $H = \{x | x_1 = x_2\}$, quindi $p = 1$, $H^{\perp} = H$ (in tal caso H è totalmente isotropo). (ii): $E = \mathbb{R}^4$, $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$, $H = \{x | x_1 = x_2, x_3 = x_4\}$, quindi $p = 2$ e $H^{\perp} = \{x | x_1 + x_2 = 0, x_3 = x_4\}$;

⁹ Vedi C. Lo Surdo, "On the a priori Structure of the Viscous Tensor in a Magnetoplasma", Lettere al Nuovo Cimento, 40, 493 (1984).

¹⁰ Se in deroga alla definizione di SS fosse $p = 0$, allora H^{\perp} sarebbe E , $H \cap H^{\perp}$ sarebbe uguale a $H = \{O\}$ e quindi H non sarebbe isotropo; tuttavia si avrebbe $H \subset H^{\perp}$, e l'implicazione in questione non varrebbe. Questo caso degenerare è privo di interesse, ed infatti abbiamo assunto $p \geq 1$.

$H \cap H^\perp$ è la retta ($x_1=x_2=0, x_3=x_4$), quindi $H \cap H^\perp \neq \{O\}$. Allora H è isotropo, ma non totalmente isotropo, perché H non è $\subset H^\perp$. (iii): $E = \mathbb{R}^3, B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, H = \{x|x_1=x_3, x_2=0\}$, quindi $p = 1$ e $H^\perp = \{x|x_1=x_3\}$. $H \cap H^\perp$ è la retta ($x_1=x_3, x_2=0$), quindi $H \cap H^\perp \neq \{O\}$. Allora H è isotropo, e anche totalmente isotropo, perché $H \subset H^\perp$.

Denotiamo con $B|_H$ la restrizione di B ad H . La teoria dei sistemi lineari omogenei ci dice che $\dim H^\perp = n - \text{rng}(B|_H)$, per cui $\dim H + \dim H^\perp - n = p - \text{rng}(B|_H)$. Poiché $0 \leq \text{rng}(B|_H) \leq p$, questa precisa la disuguaglianza (2.3.1, 10) indicandoci l'eccesso di $\dim H + \dim H^\perp$ su n , che è zero sse $\text{rng}(B|_H) = p$. Convieni, per proseguire, distinguere due casi.

Caso(I): $\text{rng}(B|_H) = 0$. Allora $H^\perp = E$ e $B(x,y) = 0 \forall (x,y) \in H, H \cap H^\perp = H \neq \{O\}$. Quindi H è isotropo. Inoltre $H \subset H^\perp$, e quindi H è anche totalmente isotropo. Sia ora $\{u_{(s)}\}_{1 \div p}$ una base ortogonale di H , che esiste certamente (teorema della base ortogonale). Si ha quindi $B(u_{(s)}, u_{(s')}) = 0 \forall (s,s') = 1 \div p$. In particolare ciò vale per $s = s'$, e quindi $B(u_{(s)}, u_{(s)}) = 0 = Q(u_{(s)}) \forall s = 1 \div p$: i vettori della base sono isotropi. In definitiva, $\{u_{(s)}\}_{1 \div p}$ è una base ortogonale isotropa di H .

Caso (II): Sia ora $1 \leq \text{rng}(B|_H) (\leq p)$. Allora esistono in H *esattamente* $p' =: p - \text{rng}(B|_H)$ vettori ortogonali isotropi linearmente indipendenti. Se $p' \geq 1$, sia $\{u_{(s)}\}_{s=1 \div p'}$ una p' -pla arbitraria di tali vettori. Poniamo $w_{(1)} = u_{(1)}, \dots, w_{(p')} = u_{(p')}$; $w_{(p'+1)} = v_{(1)}, \dots, w_{(p)} = v_{(q)}$, con $q = \text{rng}(B|_H)$, e $v_{(1)}, \dots, v_{(q)}$ vettori non isotropi di H , i quali si possono sempre scegliere in modo che $\{w_{(t)}\}_{1 \div p}$ sia una base ortogonale di H . I vettori isotropi $\{w_{(t)}\}_{1 \div p'}$ appartengono anche a H^\perp , e quindi $H \cap H^\perp \neq \{O\}$: H è isotropo. Tuttavia non è totalmente isotropo, perché i $v_{1 \leq t \leq q}$ non appartengono a H^\perp ¹¹, e quindi non è $H \subset H^\perp$. D'altra parte supponiamo $p' = 0$: allora $p = q, H \cap H^\perp = \{O\}$ (infatti, la sola possibilità che si abbia $B(x,y) = 0$ per un x di H ed un y di H^\perp è che sia $x = y = O$); quindi H non è isotropo. Concludiamo che H è isotropo sse $p > \text{rng}(B|_H)$ ($\equiv B|_H$ è singolare), che H è totalmente isotropo sse $\text{rng}(B|_H) = 0$ ($\equiv B|_H = 0$), e che H è non isotropo sse $p = \text{rng}(B|_H)$ ($\equiv B|_H$ è non singolare).

Concettualmente più semplice è la **procedura di Schmidt**, o più comunemente di **Gram-Schmidt** (J. Gram, 1850-1916, E. Schmidt, 1876-1959) per ricavare una base ortonormale a partire da una base prescritta in uno spazio a metrica definita ($\pi = n$ o $\pi = 0$). Benché sia molto nota, per completezza la ricordiamo qui per $E = E_n$ euclideo ($\pi = n$; il caso di uno spazio antieuclideo, $\pi = 0$, segue da questo con una banale modifica). Si parta dunque con una generica base $\{v_1, \dots, v_n\}$, che converrà ordinare come $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$; dimostreremo che esiste una base ortonormale ordinata $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ tale che per ogni $1 \leq p \leq n$ è $Bv_p e_p > 0$, e che la varietà lineare abbracciata da e_1, \dots, e_p e quella abbracciata da v_1, \dots, v_p coincidono. La procedura di Schmidt si ottiene allora per induzione su p . Per

¹¹ Supponiamo infatti che uno dei $v_{1 \leq t \leq q}$, diciamo v_t , appartenga a H^\perp ; allora avremmo $\forall (x \in H) \{B(x, v_t) = 0\}$, quindi facendo $x = v_t, B(v_t, v_t) = 0$. Allora v_t sarebbe isotropo contro l'ipotesi che non lo sia, contraddizione.

$p = 1$, porremo $e_1 = v_1(Q(v_1))^{-1/2}$ ($v_1 \neq O$, quindi $Q(v_1) > 0$). Si noti che $Be_1v_1 > 0$. Supponendo $\langle e_1, \dots, e_p \rangle$, con $1 \leq p < n$, già costruita, evidentemente si potrà scrivere $e_{p+1} = \mu_{p+1}v_{p+1} + \lambda_1e_1 + \dots + \lambda_pe_p$, ove μ_{p+1} , $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono reali da determinare. Le richieste di ortogonalità sono:

$$(2) \quad \forall (1 \leq i \leq p) \quad 0 = Be_ie_{p+1} = \mu_{p+1}Be_iv_{p+1} + \lambda_i Q(e_i),$$

ove $Q(e_i) = 1$ per ipotesi,

da cui $\lambda_i = -\mu_{p+1}Be_iv_{p+1}$. Quindi $e_{p+1} = \mu_{p+1} w_{p+1}$, con

$$(3) \quad w_{p+1} =: v_{p+1} - \sum_i e_i Be_iv_{p+1},$$

e dove la somma rispetto a i va da 1 a p . Poiché per definizione di base v_{p+1} è fuori dalla varietà abbracciata da v_1, \dots, v_p , la quale coincide per costruzione con quella abbracciata da e_1, \dots, e_p , $w_{p+1} \neq 0$, e dunque $Q(w_{p+1}) > 0$. Inoltre $\text{sign}Be_{p+1}v_{p+1} = \text{sign}\mu_{p+1}$ perché $Q(v_{p+1}) > 0$, e

$$(4) \quad Q(e_{p+1}) = \mu_{p+1}Bw_{p+1}e_{p+1} = \mu_{p+1}Bv_{p+1}e_{p+1} = (\mu_{p+1})^2 Q(w_{p+1});$$

ossia, ponendo $\mu_{p+1} = (Q(w_{p+1}))^{-1/2} > 0$, si ottiene

$$(5) \quad Q(e_{p+1}) = 1, \quad e \quad Be_{p+1}v_{p+1} > 0.$$

Se si calcola esplicitamente la matrice S (S come Schmidt) che trasforma la base originale $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ nella base ortonormale $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ si vede subito che tale S è triangolare, e che la sua diagonale principale è data dalle $S_{ii} = \mu_i > 0$. Segue che $\det(S) > 0$: la procedura illustrata produce cioè una base ortonormale *congruente*, o equiversa, alla base di partenza. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che si è scelta per μ_{p+1} la radice *positiva* dell'equazione $(\mu_{p+1})^2 Q(w_{p+1}) = 1$. Se avessimo fatto un numero dispari di scelte opposte (sulle n totali), avremmo ottenuto una base ortonormale *antiversa* a quella originale.

3.2.5) GRAMIANI E PROIETTORI ORTOGONALI

Diamo ancora alcune utili definizioni e proposizioni ad esse collegate. Sia $\{a_{(i)}\}_{i=1, \dots, m} \equiv \{a_{(.)}\}_{1 \div m}$ un insieme di $m \geq 1$ elementi dello spazio pseudoeuclideo n -dim $E_{n,\pi}$ con forma B ; allora $\det(B(a_{(i)}, a_{(j)}))$, $i, j = 1, \dots, m$, si dice **determinante di Gram**, o **gramiano**, di $\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$, e si denota $\text{Gr}\{a_{(i)}\}_{i=1, \dots, m}$, o $\text{Gr}\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$. Con un comune abuso di linguaggio, diremo che l'insieme $\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$ è linearmente dipendente (l.d.) [linearmente indipendente (l.i.)] se lo sono i suoi m elementi. Si prova facilmente che “ $\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$ è l.d.” \Rightarrow “ $\text{Gr}\{a_{(.)}\}_{1 \div m} = 0$ ”; quindi, per trasposizione, che “ $\text{Gr}\{a_{(.)}\}_{1 \div m} \neq 0$ ” \Rightarrow “ $\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$ è l.i.”. Se tutti gli m $a_{(i)}$ sono diversi da O (zero di $E_{n,\pi}$), il conseguente dell'ultima implicazione è falso per $m > n$. Supposti dunque $a_{(i)} \neq O \forall i$ e $m \leq n$, consideriamo l'implicazione “ $\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$ è una base di $H =: \text{vect}\{a_{(.)}\}_{1 \div m}$ ” \Rightarrow “ $\text{Gr}\{a_{(.)}\}_{1 \div m} \neq 0$ ”. Con

ogni evidenza, essa vale universalmente sse la restrizione di B a H , $B|_H$, è non singolare (cioè ha rango m). Ma (i) “ $B|_H$ è non singolare” equivale a “ $\forall x(\in H)\{Bxy=0\} \Rightarrow (y\in H \Rightarrow y=O)$ ”, che a sua volta equivale a (ii) $H \cap H^\perp = \{O\}$. In conclusione, per un dato sottospazio H di $E_{n,\pi}$ abbiamo tre caratterizzazioni della possibilità che H sia a sua volta pseudoeuclideo (diremo anche regolare, o non isotropo), e cioè le precedenti (i), (ii), e la (iii): «il gramiano di una qualsiasi base di H è diverso da zero». $E_{n,\pi}$ è banalmente regolare: infatti $(E_{n,\pi})^\perp = \{O\}$, dunque $E_{n,\pi} \cap (E_{n,\pi})^\perp = \{O\}$. Se poi $E_{n,\pi}$ è euclideo ($\pi = n$) [antieuclydeo, $\pi = 0$], ogni suo sottospazio (proprio) è regolare ed euclideo [antieuclydeo].¹²

Queste premesse si possono utilizzare per introdurre una importante nozione che useremo nella prossima sottosezione. Per un dato sottospazio regolare m -dim H di (E, B) , definiamo su $E_{n,\pi}$ il **proiettore ortogonale** su H , da denotare \wp_H , secondo le:

$$(1_1) \quad \wp_H(x) \in H$$

$$(1_2) \quad (x - \wp_H(x)) \in H^\perp.$$

Potremo scrivere \wp in luogo di \wp_H finché dal contesto sia chiaro il riferimento ad H . Affinché \wp sia una genuina applicazione di $E_{n,\pi}$ in H , dobbiamo tuttavia assicurarci che $\wp(x)$ esista unico in forza della definizione (1₁, 1₂). Sia $\{a_{(i)}\}_{1 \rightarrow m}$ una base di H , quindi $\text{Gr}\{a_{(i)}\}_{1 \rightarrow m} \neq 0$; per la (1₁), $\forall x$ $\wp(x)$ si potrà scrivere come $x^i a_{(i)}$ per certi reali x^i . D'altra parte, per la (1₂) si dovrà avere $B((x - x^i a_{(i)}), a_{(j)}) = 0$ per ogni $j = 1, \dots, m$. Questo sistema lineare di m equazioni nelle m incognite x^i ha una e una sola soluzione $\forall x$, perché il suo determinante, il gramiano di $\{a_{(i)}\}_{1 \rightarrow m}$, è per ipotesi diverso da zero. Quindi $\wp(x)$ esiste unico, ed è lineare in x (per cui potremo scrivere $\wp x$ in luogo di $\wp(x)$). Inoltre qualunque $y \in H$ può porsi nella forma $\wp x$ per qualche x ; cioè \wp è suriettivo, anche se non iniettivo. Si verifica poi facilmente che \wp è **simmetrico rispetto a B** , nel senso che $B(x, \wp y) \equiv B(\wp x, y) \forall (x, y)$, e infine che è **idempotente**, cioè soddisfa la $\wp^2 = \wp$ (o come anche si dice, è “proiettivo”; e infatti è stato introdotto come “proiettore”).

3.2.6) OPERATORI LINEARI SIMMETRICI E HERMITIANI, AUTOPROBLEMI

Proseguiamo con un importante argomento, legato all'introduzione di un tipo di forma bilineare simmetrica *più generale* della B di cui già disponiamo, e definita attraverso di essa. Sia

¹² Infatti, si supponga per assurdo che il gramiano di una base di H sia nullo in questo caso. Allora il sistema lineare di m equazioni in m incognite x^j , $j = 1 \dots m$, $B|_H(a_{(i)}, a_{(j)})x^j = 0$, $i = 1, \dots, m$, ha una soluzione non banale. Moltiplichiamo la i -ma equazione del sistema per x^i e sommiamo rispetto a i da 1 a m . Si ottiene $0 = B|_H(a_{(i)}, a_{(j)}) x^i x^j \equiv Q(x)$, dove x è il vettore che ha x^j per j -ma componente controvariante nella base $\{a_{(i)}\}$. Ma è ora $Q(x) > 0$ [< 0] $\forall x \in E_{n,n}$ [$\forall x \in E_{n,0}$], contraddizione.

dunque $A: E_{n,\pi} \rightarrow E_{n,\pi}$ un'applicazione lineare (in questo contesto più comunemente detta **operatore**) e **simmetrica** nel senso appena introdotto a proposito di \wp che

$$(1) \quad B(Ax,y) = B(x,Ay)$$

per qualunque coppia di elementi x,y di $E_{n,\pi}$. Posto $A(x,y) =: B(Ax,y)$, è evidente che la forma $A_{(2)} = A(x,y)$ è bilineare e simmetrica nel senso standard (cioè non varia scambiando tra loro x e y), e si riduce alla forma fondamentale di $E_{n,\pi}$, $B(x,y)$, quando A è l'identità; ciò è dovuto alla linearità di A e alla bilinearità e simmetria di B . Sempre con A come sopra definito, x e y si dicono **ortogonali rispetto ad A** se $A(x,y) = 0$. Se $\{e_i\}$ è una base di $E_{n,\pi}$, A (qui e nel seguito sempre supposto lineare e simmetrico) è biunivocamente associato alla matrice simmetrica $\{a_{ij} =: A(e_i,e_j) = a_{ji}\}$, che sono le componenti doppiamente covarianti della forma $A_{(2)}$, e quindi anche alle matrici (simmetriche) delle sue componenti miste o doppiamente controvarianti. Ovviamente, $A(x,e_i) = (Ax)_i = a_{ih}x^h$, con $x = e_j x^j$, ecc. Per il dato A (lineare simmetrico), l'introduzione della nuova forma bilineare simmetrica $A_{(2)}$ si rivela specialmente feconda quando $\pi = n$, cioè quando $E_{n,\pi} \equiv E_n$, con riferimento al classico **autoproblema** (o **problema agli autovalori**)

$$(2) \quad (A - \lambda \mathbf{1})x = 0, \quad^{13}$$

dove $\mathbf{1}$ è l'identità su E_n e $x \in E_n$ è un **autovettore** (per definizione non nullo) **di A associato** (o **appartenente**) **all'autovalore** $\lambda \in \mathbb{R}$; ovvero, in termini delle matrici associate alla base $\{e_i\}$, all'autoproblema

$$(2bis) \quad (a_{ik} - \lambda B_{ik})x^k = 0.$$

Le (2,2bis) ammettono una naturale generalizzazione quando a E_n si sostituisce un corrispondente spazio n -dim hilbertiano \mathcal{H}_n . Precisiamo il senso di questa generalizzazione. \mathcal{H}_n è uno spazio lineare n -dim su \mathbb{C} (campo complesso), o \mathbb{C} -lineare, dotato di una **forma bilineare** (complessa) **hermitiana** C , tale cioè che $C(x,y) = C(y,x)^* \forall (x,y)$ di \mathcal{H}_n (ove $*$ denota l'operatore di coniugazione, che fa passare da un complesso al suo coniugato); e inoltre definita positiva, tale cioè che $C(x,x)$, evidentemente reale, sia $> 0 \forall x$ non nullo di \mathcal{H}_n . Per un generico $\alpha \in \mathbb{C}$, inoltre, $C(\alpha x,y)$ è definito (assiomaticamente) come uguale a $\alpha C(x,y)$, e quindi $C(x,\alpha y) = \alpha^* C(x,y)$.¹⁴ In questo più generale contesto, per un *generico* operatore lineare $\Omega: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$, le (2,2bis) si riscrivono come

$$(3) \quad (\Omega - \mu \mathbf{1})x = 0,$$

e rispettivamente

$$(3bis) \quad (\omega_{ik} - \mu C_{ik})x^k = 0,$$

¹³ Secondo la (2), x appartiene allo spazio lineare nullo ($\subset E^n$) dell'operatore lineare simmetrico $A - \lambda \mathbf{1}$.

¹⁴ L'altra scelta $C(\alpha x,y) = \alpha^* C(x,y)$, quindi $C(x,\alpha y) = \alpha C(x,y)$, condurrebbe a sviluppi analoghi.

dove $\mathbf{1}$ è ora l'identità su \mathcal{H}_n , $\mu \in \mathbf{C}$, e ω_{ij} , C_{ij} , x^j sono numeri complessi definiti rispetto a una base $\{\eta_i\}$ di \mathcal{H}_n , e con riferimento a Ω , C e $x \in \mathcal{H}_n$, esattamente come i numeri reali a_{ij} , B_{ij} e x^j lo sono rispetto alla base $\{e_i\}$ di E_n (e con riferimento a A , B e $x \in E_n$). L'esistenza di una soluzione non banale della (3), o della equivalente (3bis), implica che $\Omega - \mu\mathbf{1}$ sia singolare, ovvero che sia soddisfatta l'equazione algebrica **caratteristica** di grado n in μ

$$(4) \quad \det\{\omega_{ik} - \mu C_{ik}\} = 0. \quad {}^{15}$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra (Gauss), la (4) ha esattamente n radici, non necessariamente distinte, nel senso che se ha $1 \leq p \leq n$ radici distinte, la s -ma ($1 \leq s \leq p$) delle quali di molteplicità m_s , risulta $\sum_{s=1}^p m_s = n$.

Fin qui Ω è un operatore lineare generico, mentre l'operatore A delle analoghe (2, 2bis) era simmetrico secondo la (1). Per ottenere un corrispondente vincolo su Ω , basta riscrivere formalmente la (1) con Ω al posto di A :

$$(5) \quad C(\Omega x, y) = C(x, \Omega y) = \mathcal{Q}(x, y) = \mathcal{Q}(y, x)^*$$

per ogni x, y di H_n . Un operatore lineare Ω , o l'associata 2-forma \mathcal{Q} , soddisfacente alla (5) si dice **hermitiano(a)** (o anche **autoaggiunto(a)**). Tradotta in termini di matrice $\{\omega_{ik}\}$, la (5) equivale alle

$$(5bis) \quad \omega_{ik} = \omega_{ki}^*.$$

Per Ω hermitiano, l'autovalore μ della (3) (o (3bis)) è *reale*: se infatti x è un autovettore ($\neq 0$), $\mathcal{Q}(x, x)$ (che è *reale* essendo uguale al suo coniugato) vale $\mu C(x, x)$, ove $C(x, x) > 0$, da cui la tesi. Questo significa che l'equazione caratteristica (4) in μ ha soltanto radici reali se (ma non necessariamente sse) vale la (5bis). Nulla vieta di specializzare questo fondamentale risultato immergendo E_n in \mathcal{H}_n , e quindi \mathbf{R} in \mathbf{C} . Con ciò, la forma C (complessa hermitiana) si riduce alla forma B (reale), l'operatore Ω (hermitiano) si riduce all'operatore reale A (simmetrico), e l'autovalore μ (generalmente complesso, ma come abbiamo visto reale se Ω è hermitiano) si riduce a λ (reale). La conclusione è che l'equazione caratteristica di grado n in λ

$$(4bis) \quad \det\{a_{ik} - \lambda B_{ik}\} = 0$$

che ha in generale radici complesse per a_{ik} (reali) generiche, ha soltanto radici reali se (ma non necessariamente sse) $a_{ik} = a_{ki}$ ¹⁶

¹⁵ Per sincerarsene, basta osservare che il coefficiente di μ^n nel determinante della (4) è $(-1)^n \det\{C_{ij}\}$, e che $\det\{C_{ij}\} > 0$ per la richiesta definitezza positiva di C .

¹⁶ L'importanza di questo teorema ne giustifica una dimostrazione alternativa, materialmente più laboriosa, ma indipendente dalla possibilità di immergere E_n in H_n . Sia dunque (*) $(a_{ik} - \lambda B_{ik})x^k = 0$ il sistema lineare omogeneo di partenza, ove ora λ e x^k sono pensati come complessi, ma le a_{ik} (reali) sono simmetriche. Coniugando la (*), abbiamo (***) $(a_{ik} - \lambda^* B_{ik})x^{k*} = 0$. Dalle (*) e (***) si ottengono le $(a_{ik} - \lambda B_{ik})x^i x^k = 0$ e $(a_{ik} - \lambda^* B_{ik})x^i x^{k*} = 0$. Sottraendo membro a membro queste ultime e tenendo conto della simmetria di a_{ik} (oltre che di B_{ik}), troviamo $(\lambda^* - \lambda)B_{ik}x^i x^{k*} = 0$. Proviamo ora che $B_{ik}x^i x^{k*} > 0$. Posto $x^k = u^k + iv^k$ con u^k e v^k *reali* ($i = \sqrt{-1}$) risulta che $B_{ik}x^i x^{k*} = B_{ik}u^i u^k + B_{ik}v^i v^k \geq 0$, perché

Per un operatore hermitiano Ω [simmetrico A] si vede subito che due autovettori x, y di Ω [di A] “appartenenti” (o “associati”) ad autovalori distinti sono necessariamente ortogonali ($C(x,y) = 0$) [$B(x,y) = 0$]; e inoltre, ortogonali rispetto ad Ω ($\mathcal{Q}(x,y) = 0$) [ortogonali rispetto ad A , ($A(x,y) = 0$)]. Per provare il primo asserto, detti μ_x e μ_y [λ_x e λ_y] gli autovalori cui appartengono x e y , si ottiene $\mathcal{Q}(x,y) = \mu_x C(x,y)$ e $\mathcal{Q}(x,y) = \mu_y^* C(x,y)$ [$A(x,y) = \lambda_x B(x,y)$ e $A(x,y) = \lambda_y B(x,y)$], e la tesi scende sottraendo membro (e tenendo conto, nel caso di Ω , che esso ha solo autovalori reali). Il secondo asserto segue dal primo.

D'altra parte, restringendoci ormai al caso dell'operatore simmetrico $A: E_n \rightarrow E_n$, si prova facilmente che esiste comunque una famiglia di autovettori di A mutuamente ortogonali. Sia infatti λ_1 un autovalore, e sia $p_{(1)}$ un autovettore che gli appartiene. L'insieme dei vettori di E_n ortogonali a $p_{(1)}$ è un sottospazio lineare $(n-1)$ -dim di E_n , diciamo ${}_1E_{n-1}$; in questo sottospazio si può procedere esattamente come nel precedente E_n , perché $\forall x \in {}_1E_{n-1}, Ax \in {}_1E_{n-1}$ (cioè $A: {}_1E_{n-1} \rightarrow {}_1E_{n-1}$). Così ristretto a ${}_1E_{n-1}$, A si mantiene simmetrico. Sia poi λ_2 un autovalore del problema ristretto, quindi anche dell'autoproblema originale, di A (non necessariamente distinto da λ_2) e $p_{(2)}$ un autovettore che gli appartiene: l'insieme dei vettori di ${}_1E_{n-1}$ ortogonali a $p_{(2)}$ è un suo sottospazio $(n-2)$ -dim, diciamo ${}_{2,1}E_{n-2}, \dots$, e così via. La famiglia degli autovettori mutuamente ortogonali $p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(n)}$ così ottenuta non è in generale determinata univocamente, salvo il caso che gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ siano tutti distinti tra loro. Per costruzione, questa famiglia abbraccia E_n , e i suoi elementi sono linearmente indipendenti (infatti, dalla $0 = \sum_h a^h p_{(h)}$ segue che $0 = B(p_{(i)}, \sum_h a^h p_{(h)}) = a^i B(p_{(i)}, p_{(i)})$, e quindi che $a^i = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$). In definitiva, $\{p_{(i)}\}$ è una base ortogonale di E_n che volendo può normalizzarsi richiedendo $B(p_{(i)}, p_{(i)}) = 1$. In questa **autobase ortonormale**, la matrice di A si **diagonalizza** diventando $a_{ik} = \lambda_i \delta_{ik}$, cosicché l'equazione caratteristica si riduce alla $\det\{\lambda_i \delta_{ik} - \lambda \delta_{ik}\} = 0$, che dà come deve le radici $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda = \lambda_n$.

Se vi è un unico autovalore λ di molteplicità n , allora $a_{ik} = \lambda B_{ik}$; se poi $\lambda = 0$, $a_{ik} = 0$. Questo fatto suggerisce che il rango $1 \leq r \leq n$ della matrice $\{a_{ik}\}$ sia uguale al numero di autovettori linearmente indipendenti appartenenti ad autovalori non nulli, il che si dimostra facilmente. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono non nulli (ma non necessariamente distinti), e $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ sono nulli, gli autovettori ortonormali $p_{(1)}, \dots, p_{(r)}$ che si ottengono con la precedente procedura sono tali che, $\forall x \in E_n, Ax \in \text{vect}\{p_{(1)}, \dots, p_{(r)}\}$. Quest'ultimo sottospazio r -dim di E_n si dice **autospatio di A** : vale a dire, A inietta E_n nel suo autospatio $\text{vect}\{p_{(1)}, \dots, p_{(r)}\}$, mentre $\text{vect}\{p_{(1)}, \dots, p_{(r)}\}$ è invariante sotto A . Se $\det\{a_{ik}\} \neq 0$, allora $r = n$, e $\text{vect}\{p_{(1)}, \dots, p_{(n)}\}$ coincide con E_n . In questo caso tutti gli autovalori sono

B_{ik} è definito positivo. La sola possibilità per cui vale il segno di uguaglianza è $u^i = v^i = 0$, quindi $x^i = 0$, contrariamente all'ipotesi $x \neq 0$. Si conclude che $\lambda = \lambda^*$, qed.

diversi da zero. L'argomentazione si estende in modo ovvio, parola per parola, al caso di $\Omega: \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ hermitiano.

Quando $x = y$ nella forma bilineare simmetrica $B(Ax, y) \equiv A(x, y)$, si ottiene una associata forma quadratica $Q_A(x) =: B(Ax, x) \equiv A(x, x)$, della quale è sufficiente considerare i valori sulla sfera unitaria $B(x, x) = 1$. La somma dei valori di questa Q_A corrispondenti agli n elementi di una base ortonormale $\{e_i\}$ eguaglia (i) l'invariante lineare della 2-forma simmetrica A , nonché (ii) la somma degli autovalori di A . Proviamo dapprima (i), cioè che $\sum_i Q_A(e_i) = a_k^k$. Si ha $Q_A(e_i) = a_{pq} e_i^p e_i^q$, dove gli indici (p, q) si riferiscono ad una base qualunque. Sommando su i e tenuto conto che $\{e_i\}$ è ortonormale, quindi che $\sum_i e_i^p e_i^q = B^{pq}$ (cfr. 3.1, 20₁) abbiamo $\sum_i Q_A(e_i) = a_{pq} B^{pq} = a_k^k$, qed. Il secondo asserto (ii) segue da un teorema generale di Eulero, secondo il quale, se x è unitario e $p_{(h)}$ è l'elemento h -mo di una autobase normalizzata di A (cioè, $B(p_{(h)}, p_{(h)}) = 1$), allora $Q_A(x) = \sum_h \lambda_{(h)} B^2(x, p_{(h)})$ (ove al solito $B^2(\cdot, \cdot)$ sta per $(B(\cdot, \cdot))^2$, e la somma è estesa a tutti gli autovalori di A , non necessariamente distinti). Applicando questo teorema a e_i (che è unitario, come richiesto), troviamo $Q_A(e_i) = \sum_h \lambda_{(h)} (p_{(h)i})^2$, dove $p_{(h)i}$ è la componente covariante di $p_{(h)}$ nella base $\{e_i\}$, $B(e_i, p_{(h)})$. La tesi segue sommando su i perché, essendo E_n euclideo, è $\sum_i (p_{(h)i})^2 = 1$. In conclusione:

$$(6) \quad \sum_h \lambda_{(h)} = a_p^p, \text{ qed. }^{17}$$

Le autosoluzioni normalizzate della equazione caratteristica (2) sono i punti della sfera unitaria nei quali $Q_A(x)$ è stazionaria, che si dicono **direzioni principali** della forma Q_A . Questo legame tra i due problemi (l'autoproblema (2) per l'operatore A , e quello della determinazione dei punti di stazionarietà di Q_A sulla sfera unitaria) è a prima vista inaspettato, ma si giustifica facilmente. L'Analisi insegna che per avere gli estremi di Q_A vincolati ad essere sulla sfera unitaria basta considerare la forma quadratica $Q_A(x) - \gamma Q(x)$ (Q essendo la forma associata a B) ove γ è un parametro di Lagrange, e ricercarne gli estremi non vincolati. In forza della simmetria di A , si ottiene allora (in una base qualsiasi), se δ è l'usuale simbolo di variazione, $0 = \delta[(a_{ij} - \gamma B_{ij})x^i x^j] = 2(a_{ij} - \gamma B_{ij})x^j \delta x^i$. Quindi, per l'arbitrarietà delle variazioni δx^i , vale la (2bis) con γ al posto di λ , qed.

La generica potenza A^m ($m = 2, 3 \dots$) di A è a sua volta lineare e simmetrica, e ha gli stessi autovettori di A , ciascuno associato alla potenza m -ma del corrispondente autovalore di A . Ciò si vede subito partendo dalla (1) e rispettivamente dalla (2). Segue che la somma degli autovalori di A^m (al solito, non necessariamente distinti) è il 1° **invariante di grado m di A** ; in particolare per

¹⁷ Del resto, riferendoci direttamente alla base ortonormale $\{e_i\}$, ove $e_i^p = \delta_i^p$, $Q_A(e_i) = a_{ii}$, e dunque $\sum_i Q_A(e_i) = \sum_i a_{ii}$; ma l'ultima somma si scrive a_p^p in una base generica, e si ritrova il risultato precedente.

$m = 2$, tale somma è uguale al 1° invariante quadratico $a_{ik}a^{ik}$. Poiché la potenza m -ma di una somma di numeri si esprime come somma di prodotti di grado m degli stessi numeri, si ricavano altre interessanti relazioni algebriche tra somme di prodotti di grado m degli autovalori di A e invarianti di grado m o inferiore di A . Sempre per $m = 2$, essendo il quadrato di una somma di numeri uguale alla somma dei quadrati di quei numeri più il doppio dei prodotti di ciascun numero per i successivi, si trova:

$$(7) \quad 2\sum_{p<q} \lambda_p \lambda_q = B^{ik} B^{jh} (a_{ik} a_{jh} - a_{ih} a_{jk}),$$

nel cui 2° membro (omogeneo di grado 2 rispetto agli elementi della matrice di A) figura la differenza tra il quadrato dell'invariante lineare e il 1° invariante quadratico di A .

Segnaliamo un ultimo teorema, di giustificazione elementare, che useremo nelle prossime applicazioni. Torniamo ad un'equazione algebrica in $\mu \in \mathbb{C}$ del tipo

$$(8) \quad \det\{P_{ik} - \mu Q_{ik}\} \equiv \sum_{t=0}^n a_t \mu^{n-t} = 0,$$

dove $\{P_{ik}\}$ e $\{Q_{ik}\}$ sono $n \times n$ -matrici generiche (anche complesse), la seconda per ipotesi non singolare, $\det\{Q_{ik}\} \neq 0$. Facendo $|\mu| \rightarrow \infty$, e rispettivamente $\mu = 0$, nel determinante a 1° membro, si trova che il coefficiente a_0 di μ^n è uguale a $(-1)^n \det\{Q_{ik}\}$ (quindi la (8) è di grado n se $\det\{Q_{ik}\} \neq 0$), e rispettivamente che il termine noto a_n (coefficiente di μ^0) è uguale a $\det\{P_{ik}\}$. D'altra parte, fattorizzando il determinante stesso, questo si esprime come $a_0 \prod_{s=1}^n (\mu - \mu_s)$, dove μ_s ($1 \leq s \leq n$) è la radice s -ma (in un ordine qualsiasi), e quindi $a_n = (-1)^n a_0 \prod_{s=1}^n \mu_s$. Scrivendo brevemente $\det\{P_{ik}\}$ come P e $\det\{Q_{ik}\}$ come Q , vediamo dunque che $P = Q \prod_{s=1}^n \mu_s$, con $Q \neq 0$ per ipotesi. Questa mostra che, se $P \neq 0$, tutte le n radici μ_s sono diverse da zero, mentre se $P = 0$, almeno una di esse è uguale a zero; in ogni caso, poi, la loro produttoria è uguale a P/Q . Quest'ultimo risultato gioca un ruolo nella teoria della curvatura di varietà $(n-1)$ -dim immerse in uno spazio euclideo E_n .

3.2.7) INVARIANTI SCALARI

In algebra tensoriale, il termine "invariante" è comunemente usato in un senso sostanzialmente diverso da quello classico e assai generale di "invariante rispetto ad un gruppo di sostituzioni" (vedi nota (2)), e precisamente in quello di **invariante scalare**, ossia di "invariante rispetto al gruppo delle trasformazioni (non singolari) della base". È questo ad esempio il risultato di una contrazione completa degli indici (supposti in numero pari) di un prodotto di tensori, tipicamente di un prodotto di un dato tensore con il tensore fondamentale $B_{(2)}$ e/o con il tensore totalmente antisimmetrico $\varepsilon_{(n)}$. Ad esempio $u_i v_k B^{ik}$ è l'invariante "prodotto interno" dei vettori u e v ,

$\tau_{ik}B^{ik}$ è l'**invariante lineare** (o **traccia**) del tensore doppio $\tau_{(2)}$ (che ne coinvolge soltanto la parte simmetrica), $\tau_{ik}\tau_{jh}B^{ih}B^{kj}$ è il **1° invariante quadratico** di $\tau_{(2)}$ e (per $n \geq 2$) $\tau_{ik}\tau_{jh} \varepsilon^{r_1 \dots r_{(n-2)} ij} \cdot \varepsilon_{r_1 \dots r_{(n-2)} kh} \equiv \tau_i^k \tau_j^h (n-2)! \delta_{kh}^{ij}$ è il suo **2° invariante quadratico**. Esiste una semplice relazione tra i due invarianti quadratici e il quadrato dell'invariante lineare di un 2-tensore: ad esempio, nello spazio euclideo E_3 quest'ultimo quadrato è la somma dei due corrispondenti invarianti quadratici. Inoltre, nello spazio euclideo E_2 , il 2° invariante quadratico è uguale al doppio del determinante costruito con le componenti miste di $\tau_{(2)}$, $\det\{\tau_i^k\} \equiv \tau_1^1 \tau_2^2 - \tau_1^2 \tau_2^1$.

Passando agli **invarianti cubici**, sempre di un tensore doppio $\tau_{(2)}$, in analogia con i corrispondenti invarianti quadratici il primo di essi è $\tau_{ik}\tau_{rs}\tau_{hj}B^{is}B^{rj}B^{kh}$; mentre il secondo è $\tau_i^k \tau_r^s \tau_h^j (n-3)! \delta_{ksj}^{irh}$ (per $n \geq 3$). Anche da queste definizioni discendono semplici relazioni tra i due invarianti cubici, quelli quadratici e quello lineare: in E_3 , ad esempio, detto L l'invariante lineare, $Q_{1,2}$ il 1° e rispettivamente il 2° invariante quadratico, e $C_{1,2}$ il 1° e rispettivamente il 2° invariante cubico, si trova che $C_2 = L^3 - 3LQ_1 + 2C_1$. In questo stesso caso, il 2° invariante cubico è uguale a $3!$ volte il determinante costruito con le componenti miste di $\tau_{(2)}$, $\det\{\tau_i^k\}_{i,k=1,2,3}$. Sussistono facilmente immaginabili estensioni (agli invarianti di grado > 3) di questi asserti, ma quanto abbiamo esposto fin qui è adeguato alle applicazioni più comuni.

3.3) ANALISI TENSORIALE LOCALE IN SPAZI PSEUDOEUCLEIDEI E IN LORO VARIETÀ IMMERSE I

Ci occuperemo ora della fondamentale nozione di “campo ($\kappa \geq 0$)-tensoriale” in uno spazio pseudoeuclideo $E_{n \geq 1, \pi}$ o in una varietà in esso immersa, e del calcolo differenziale che vi si può istituire. Sia B la forma bilineare associata a $E_{n, \pi}$, e sia $E^{(\kappa)}$ il relativo spazio dei ($\kappa \geq 0$)-tensori. Salvo eccezioni, nel seguito n sarà pensato come un dato invariabile (tipicamente ≥ 2), e quindi normalmente non sarà reso esplicito nelle notazioni. Sarà inoltre conveniente distinguere mediante il carattere **grassetto**, o sottolineato se riferito a lettere greche, gli elementi (vettori) di $E^{(1)} \equiv E$, spazio-supporto di $E_{n, \pi} \equiv (E, B)$ che non siano già contrassegnati con il pedice (1) . La denotazione $\tau_{(\kappa)}$ del generico ($\kappa > 1$)-tensore permarrà invece immutata, mentre lo scalare $\tau_{(0)}$ verrà di norma scritto semplicemente come τ .

3.3.1) CAMPI TENSORIALI, BASI CARTESIANE E BASI LOCALI

Per dato $\kappa \geq 1$, fissata una base $\{\mathbf{f}\}$ di E , fissato un “tipo” $t: \{1, \dots, \kappa\} \rightarrow \{+, -\}$ dell’indice h -mo ($h=1, \dots, \kappa$) della componente del generico κ -tensore $\tau_{(\kappa)} \in E^{(\kappa)}$ ¹ (ci sono 2^κ tipi distinti di componenti), fissato infine un ordinamento sulle n^κ componenti di $\tau_{(\kappa)}$, allora la regola

$$(1) \quad \langle \tau_{i_1 \dots i_\kappa} \rangle (\in \mathbb{R}^{n^* \kappa}) \mapsto \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_\kappa} \tau_{i_1 \dots i_\kappa} \equiv \tau_{(\kappa)} (\in E^{(\kappa)}),$$

dove $\mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_\kappa}$ sta per $\mathbf{f}_{-i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{f}_{-i_\kappa}$, determina una e una sola biiezione lineare di $\mathbb{R}^{n^* \kappa}$ su $E^{(\kappa)}$, diciamo $A_{(\kappa)}: \mathbb{R}^{n^* \kappa} \rightarrow E^{(\kappa)}$. Nella (1), $\langle \tau_{i_1 \dots i_\kappa} \rangle$ (per $|i_1| = 1, \dots, n; \dots; |i_\kappa| = 1, \dots, n$) è la n^κ -pla ordinata delle componenti di $\tau_{(\kappa)}$ (indici con segno), ove l’indice h -mo $i_{1 \leq h \leq \kappa}$ ha segno $t(h)$.^{3, 4}

Se l’ordinamento delle componenti è fissato con una regola universale (diciamo, come **ordinamento lessicografico standard**⁵), la biiezione lineare $A_{(\kappa)}$ è completamente determinata da

¹ Evidentemente, qui ci riferiamo alla notazione del tipo di componente mediante il segno del relativo indice (+ per controvariante, - per covariante), vedi S.sez. 3.1.1.

² Per necessità tipografica, quando sarà soprascritta la potenza n^κ si denoterà con $n^* \kappa$.

³ È chiaro che essendo gli indici dotati di segno, la notazione usata nella (1) per rappresentare $\tau_{(\kappa)}$ in forma mista è già di per sé del tutto generale, ed intercambiabile con quella che da essa si otterrebbe con una diversa distribuzione dei segni nei due fattori, come ad es. la $\mathbf{f}_{i_1, -i_2 \dots -i_\kappa} \tau_{-i_1, i_2 \dots i_\kappa}$. Ciò che conta è soltanto che gli indici di ugual posto nei due fattori siano uguali ed opposti.

⁴ La (1) è in realtà compatibile con il caso $\kappa = 0$, ma diventa banale. Infatti $E^{(0)}$ si riduce allora ad \mathbb{R} con la struttura di spazio lineare, per cui si ha: $x^1 \equiv x (\in \mathbb{R}) \equiv \tau \mapsto \tau (\in \mathbb{R})$, mentre $A_{(0)}$ si riduce a $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$.

⁵ L’ordinamento lessicografico di n^κ oggetti indicizzati con κ indici correnti ciascuno su $\{1, \dots, n\}$ è quello delle “parole” $i_1, i_2, \dots, i_\kappa$ rispetto alle “lettere” i_1, i_2, \dots, i_n , prese in quest’ordine, esattamente come avviene nei dizionari. Se

t e da $\{\mathbf{f}\}$, cioè $A_{(\kappa)} \equiv A_{(\kappa)}(t, \{\mathbf{f}\})$. Ad esempio per $\kappa = 1$, si ha $A_{(1)}: \mathbb{R}^n \rightarrow E^{(1)} \equiv E$; ed essendovi in tal caso soltanto *due* tipi ($t_+(\{1\}) = +$, $t_-(\{1\}) = -$), per la data $\{\mathbf{f}\}$ ci sono esattamente due biiezioni lineari di \mathbb{R}^n su E , quella per cui τ_i è l' n -pla ordinata delle componenti controvarianti, e rispettivamente delle componenti covarianti, del vettore $\tau_{(1)}$.

Per i dati $\kappa \geq 1$, t e $\{\mathbf{f}\}$, $A_{(\kappa)}$ trasferisce su $E^{(\kappa)}$ una parte della ricchezza strutturale di $\mathbb{R}^{n^*\kappa}$. Se per esempio si munisce $\mathbb{R}^{n^*\kappa}$ di una metrica, e per il suo tramite di una topologia, queste strutture vengono automaticamente assunte (via $A_{(\kappa)}$) da $E^{(\kappa)}$. Interessano particolarmente le cosiddette p -metriche d_p su $\mathbb{R}^{n^*\kappa}$ ⁶ (p reale sotto $1 \leq p \leq \infty$); come è noto dalla Topologia, esse sono **metriche topologicamente equivalenti**, cioè inducono la stessa topologia (“topologia standard”) sulla generica potenza di \mathbb{R} , indipendentemente dal valore di p . Via $A_{(\kappa)}(t, \{\mathbf{f}\})$, $E^{(\kappa)}$ acquista così la p -metrica prescelta e la topologia standard da essa indotta. In particolare, $E^{(\kappa)}$ risulta così uno spazio lineare topologico su \mathbb{R} , perché le operazioni lineari sono continue rispetto alla topologia standard indotta da d_p su $E^{(\kappa)}$ e a quella di \mathbb{R} .

Sia ora $U \neq \emptyset$ un *aperto* di $\mathbb{R}^{m \geq 1}$ (non si esclude $U = \mathbb{R}^m$) e $\mathbf{x} \equiv \langle x^1, \dots, x^m \rangle \in U$. Un **campo κ -tensoriale** definito in U è un'applicazione di U in $\mathbb{R}^{n^*\kappa}$, diciamo $K: U \rightarrow \mathbb{R}^{n^*\kappa}$; e quindi, attraverso $A_{(\kappa)}(t, \{\mathbf{f}\})$, in $E^{(\kappa)}$, secondo la:

$$(2) \quad \mathbf{x} (\in U) \mapsto K(\mathbf{x}) (\in \mathbb{R}^{n^*\kappa}) \mapsto A_{(\kappa)}(t, \{\mathbf{f}\})K(\mathbf{x}) (\in E^{(\kappa)}) \quad 7$$

(poiché $A_{(\kappa)}$ è lineare, per brevità abbiamo scritto $A_{(\kappa)}K$ in luogo di $A_{(\kappa)}(K)$). Si noti che l'applicazione-prodotto $A_{(\kappa)}(t, \{\mathbf{f}\}) \circ K: U \rightarrow E^{(\kappa)}$ dipende da t e da $\{\mathbf{f}\}$ attraverso il suo primo fattore. Se le n^κ funzioni $K(\mathbf{x})$ sono di classe $C^r(U)$ ($0 \leq r \leq \infty$, o $r = \omega$), ⁸ si può tuttavia dire che il campo $A_{(\kappa)}K(\mathbf{x})$ è di quella classe senza menzionare t e $\{\mathbf{f}\}$ (sebbene $A_{(\kappa)}$ ne dipenda), perché il passaggio da K a $A_{(\kappa)}K(\mathbf{x})$ perde traccia di t e di $\{\mathbf{f}\}$ per quanto riguarda la classe C^r delle funzioni $K(\mathbf{x})$.

ad esempio $\kappa = 2$ (parole di due lettere, con alfabeto di n lettere ordinate $1, \dots, n$), l'ordinamento lessicografico è 1.1, 1.2, ..., 1.n; 2.1, 2.2, ..., 2.n; ...; n.1, n.2, ..., n.n.

⁶ Le p -metriche d_p su $\mathbb{R}^{m \geq 1}$ sono definite da $d_p(x, y) = [\sum_{i=1}^m |x^i - y^i|^p]^{1/p}$ ($p < \infty$) e $d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, m} |x^i - y^i|$, $\forall x = \langle x^1, \dots, x^m \rangle$ e $\forall y = \langle y^1, \dots, y^m \rangle$ di \mathbb{R}^m . Se $p' > p''$, $d_{p'} < d_{p''}$. Oltre che topologicamente equivalenti (vedi testo), tali p -metriche sono addirittura **fortemente equivalenti**: cioè, per due qualsiasi di esse (d', d''), esistono due costanti positive (c', c'') che poste a fattore dell'una la rendono \geq dell'altra, secondo $c'd' \geq d''$ e $c''d'' \geq d'$.

⁷ Anche la (2) è compatibile con il caso $\kappa = 0$, ma diventa allora banalmente $\mathbf{x} (\in U) \mapsto K(\mathbf{x}) (\in \mathbb{R})$, cioè $K: U \rightarrow \mathbb{R}$. Lo stesso vale per la successiva (3), che si riduce ad una identità.

⁸ Ricordiamo qui che, se $D \subset \mathbb{R}^m$ è l'insieme di definizione, supposto aperto, di una funzione, $C^0 \equiv C = C(D)$ (o semplicemente C se il riferimento a D è ovvio) è la classe delle funzioni continue in D , $C^{r < \infty} = C^{r < \infty}(D)$ quella delle funzioni continue in D insieme alle derivate fino all' r -mo ordine incluso, $C^\infty = C^\infty(D)$ quella delle funzioni continue in D insieme alle derivate di qualsiasi ordine, e $C^\omega = C^\omega(D)$ quella delle funzioni (reali) analitiche in D (cioè che, $\forall x_0 \in D$, sono esprimibili come serie di potenze di $x - x_0$ in una m -sfera $\subset D$ di raggio > 0 e centro x_0). Sussistono le ovvie inclusioni tra classi: $C \supset C^{0 < r' < r} \supset C^r \supset C^\infty \supset C^\omega$. Per brevità, nel seguito converremo che r possa assumere anche il “valore” ω , e che $\omega > \infty$. Se una funzione appartiene a $C^r(D)$, di essa si può anche dire che è **di classe di continuità (CDC) r su D** . Di norma non considereremo funzioni di classe $C^{r \geq 1}(D)$ quando $D \subset \mathbb{R}^m$ sia chiuso, per evitare di introdurre derivate “unilaterali”. Diremo indifferentemente, inoltre, “di CDC r ” o “di classe C^r ”, o semplicemente “ C^r ”.

Infatti il passaggio da un tipo ad un altro di componenti (via la matrice di B o la sua inversa) è lineare, come pure lineare è il passaggio dalle componenti in una base a quelle in un'altra (via la matrice L o la sua inversa); inoltre anche $A_{(\kappa)}$ è lineare, e per definizione né $A_{(\kappa)}$, né B , né L dipendono da \mathbf{x} . Nulla vieta a questo punto di rendere operativa l'algebra tensoriale sull'insieme dei *campi* tensoriali $\{E^{(\kappa)}(\mathbf{x})\}_{\kappa=0,1,\dots}$ per ogni dato \mathbf{x} in U .

La rappresentazione del campo $\tau_{(\kappa)}(\mathbf{x})$ in U dato dalla (2), cioè:

$$(3) \quad \tau_{(\kappa)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_\kappa} \tau_{i_1 \dots i_\kappa}(\mathbf{x}),$$

$\forall \mathbf{x} \in U$, mostra che l'effetto dell'operatore $\partial/\partial \mathbf{x}^i$ ($i = 1, \dots, m$) su un prodotto tensoriale (con fattori di classi $C^{r \geq 1}$), eventualmente con contrazione⁹, è quello dato dalla regola di Leibniz. Ciò si rende evidente passando attraverso le forme multilineari canonicamente corrispondenti.

Si perviene ad una nozione di campo κ -tensoriale sostanzialmente più generale di quella espressa dalla (3) se si ammette, sempre per $\kappa \geq 1$, che le basi di E (come $\{\mathbf{f}\}$) *dipendano anch'esse da* $\mathbf{x} \in U$. A questo scopo, la base $\{\mathbf{f}(\mathbf{x})\} \equiv \{\mathbf{f}\}(\mathbf{x})$ si potrà descrivere partendo da una base $\{\mathbf{F}\}$ di E *indipendente da* \mathbf{x} , e assegnando una matrice di transizione $L = L(\mathbf{x} \in U)$ che porta da tale $\{\mathbf{F}\}$ alla $\{\mathbf{f}(\mathbf{x} \in U)\}$, cioè:

$$(4) \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = L_i^j(\mathbf{x}) \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{f}^i(\mathbf{x}) = {}^c L_j^i(\mathbf{x}) \mathbf{F}^j,$$

ove ${}^c L$ è la matrice controgradiente di L (vedi S.sez. 3.1.1, 7 e 10bis), $i = 1, \dots, n$, somma su j da 1 a n . Ciò permette di dire che $\{\mathbf{f}\}(\mathbf{x})$ è di classe $C^r(U)$, semplicemente perché lo è L . Avremo allora, in luogo della (3), la più generale

$$(5) \quad \tau_{(\kappa)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_\kappa}(\mathbf{x}) \tau_{i_1 \dots i_\kappa}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}_{-i_1}(\mathbf{x}) \otimes \dots \otimes \mathbf{f}_{-i_\kappa}(\mathbf{x}) \tau_{i_1 \dots i_\kappa}(\mathbf{x}),$$

ove la dipendenza di $\{\mathbf{f}\}$ da \mathbf{x} è da intendere nel senso delle (4). Infine si dirà che $\tau_{(\kappa)}$ è di classe C^r (\equiv di CdC r) in U se ciò vale, nella (5), sia per (la base) $\{\mathbf{f}\}$ che per le $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$. Nel seguito, converrà denotare con corrispondenti lettere latine *maiuscole* gli elementi di una base di E indipendente da \mathbf{x} (lo abbiamo già fatto più sopra), nonché le componenti $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ che figurano a loro fattore nella (3). Allora la (3) sarà riscritta come (con $\mathbf{F}_{-i_1 \dots -i_\kappa} \equiv \mathbf{F}_{-i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_{-i_\kappa}$):

$$(3bis) \quad \tau_{(\kappa)}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_{-i_1 \dots -i_\kappa} T_{i_1 \dots i_\kappa}(\mathbf{x}),$$

riservando le lettere minuscole, e rispettivamente le lettere greche, al caso generale della (5). Diremo **base locale** e **componenti locali** (di $\tau_{(\kappa)}$) quelle che figurano nel 2° membro della (5); e **base cartesiana**, e rispettivamente **componenti cartesiane** (sempre di $\tau_{(\kappa)}$), quelle nel 2° membro della (3bis), in caratteri maiuscoli latini.

⁹ In questo caso l'ordine delle due operazioni – derivazione, contrazione – è manifestamente senza influenza sul risultato. Ad esempio (scrivendo semplicemente δ in luogo di $\partial/\partial \mathbf{x}$), abbiamo $\delta(\tau_{ik} \sigma^j) = \delta \tau_{ik} \sigma^j + \tau_{ik} \delta \sigma^j \rightarrow \delta \tau_{ik} \sigma^j + \tau_{ik} \delta \sigma^j$ e $\delta(\tau_{ik} \sigma^j) \rightarrow \delta(\tau_{ik} \sigma^j) = \delta \tau_{ik} \sigma^j + \tau_{ik} \delta \sigma^j$. In particolare con riferimento al prodotto interno di due vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} , $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv u_i v^i \equiv u^i v_i$, risulta $\delta B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \delta \mathbf{v})$.

La definizione generale appena data di campo κ -tensoriale definito e di classe C^r in $\emptyset \neq U \subset \subset \mathbb{R}^m$ si presta a fondamentali sviluppi se, avendovi fatto $m = n$, identifichiamo $\langle \mathbf{x}^i \rangle \equiv \langle \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n \rangle \in U$ con l' n -pla ordinata $\langle X^j \rangle \equiv \langle X^1, \dots, X^n \rangle$ delle componenti controvarianti del vettore $\chi =: X^i \mathbf{F}_i \in E$. Nel seguito converrà denotare come U_+ , piuttosto che come U , il dominio delle $\langle X^j \rangle$. Con un semplice cambio di notazione scriveremo dunque la (3bis) nella forma:

$$(3ter) \quad \tau_{(\kappa)}(\chi = X^i \mathbf{F}_i) = \mathbf{F}_{-i1 \dots -i\kappa} T_{i1 \dots i\kappa}(X^{\cdot})$$

per ogni $X^{\cdot} \in U_+$. La (3ter) può essere a sua volta riscritta esprimendovi le $T_{i1 \dots i\kappa}$ come funzioni delle componenti covarianti di χ , $X_h = B_{hj} X^j$, diciamo come $T^*_{i1 \dots i\kappa}(X) \equiv T_{i1 \dots i\kappa}(X^{\cdot})$, secondo la

$$(3quater) \quad \tau_{(\kappa)}(\chi = X_i \mathbf{F}^i) = \mathbf{F}_{-i1 \dots -i\kappa} T^*_{i1 \dots i\kappa}(X),$$

per ogni $X_{\cdot} \in U_- \equiv$ immagine (aperta) di U_+ attraverso la matrice $\{B_{hj}\}$. Quanto al dominio di χ , esso è l'aperto (di E) $U =: \{\chi \mid \chi = X^j \mathbf{F}_j \text{ per cui } X^{\cdot} \in U_+ \equiv \chi = X_h \mathbf{F}^h \text{ per cui } X_{\cdot} \in U_-\}$.¹⁰ Si noti infine che quanto precede conserva senso anche per $\kappa = 0$, quando le (3ter, 3quater) si riducono a $\tau(\chi) = T(X^{\cdot})$ e rispettivamente a $\tau(\chi) = T^*(X_{\cdot})$.

Per $\kappa \geq 0$, supposta $T_{i1 \dots i\kappa} \in C^{r \geq 1}(U_+)$ prendiamo ora la $\partial/\partial X^h$ del 2° membro della (3ter) e moltiplichiamola tensorialmente a destra¹¹ per \mathbf{F}^h sommando poi su h . Il risultato è $\mathbf{F}_{-i1 \dots -i\kappa} \otimes \mathbf{F}^h \partial T_{i1 \dots i\kappa} / \partial X^h$. È facile verificare che questa espressione rappresenta un campo $(\kappa+1)$ -tensoriale definito in U_+ e ivi di classe C^{r-1} , perché l'operatore $\partial/\partial X^h$ è automaticamente *covariante* a fronte di una trasformazione biettiva lineare-affine $X^{\cdot} \leftrightarrow X^{\cdot}$. Poiché infatti $X^i \mathbf{F}'_i = X^i \mathbf{F}_i$, abbiamo $\partial/\partial X^j (X^i \mathbf{F}'_i) = \mathbf{F}'_j = \partial/\partial X^j (X^i \mathbf{F}_i) = \partial X^i / \partial X^j \mathbf{F}_i$. Confrontata con la $\mathbf{F}'_j = L_j^i \mathbf{F}_i$ (ove le L_j^i sono costanti), per l'indipendenza lineare delle \mathbf{F}_i questa equivale a $\partial X^i / \partial X^j = L_j^i$. Ma $\partial/\partial X^j \equiv \partial X^i / \partial X^j \partial/\partial X^i = L_j^i \partial/\partial X^i$, qed. Questo campo $(\kappa+1)$ -tensoriale, che si dice **derivato** (o **gradiente**) del campo $\tau_{(\kappa)}$ e si denota $\nabla \tau_{(\kappa)}$,¹² è dunque dato dalla:

$$(6) \quad \nabla \tau_{(\kappa)} = \mathbf{F}_{-i1 \dots -i\kappa} \otimes \mathbf{F}^h \partial T_{i1 \dots i\kappa} / \partial X^h;$$

la sua componente $\partial T_{i1 \dots i\kappa} / \partial X^h$ ha dunque un indice di covarianza in più rispetto a $T_{i1 \dots i\kappa}$. Possiamo anche porre la (6) in una forma equivalente e complementare in termini delle componenti covarianti di $\chi = X_h \mathbf{F}^h$. Poiché $\partial/\partial X^h = B_{hj} \partial/\partial X_j$ e $\mathbf{F}^h = B^{hj} \mathbf{F}_j$, risulta $\mathbf{F}^h \partial/\partial X^h = \mathbf{F}_j \partial/\partial X_j$, e quindi la controparte della (6) è

$$(6bis) \quad \nabla \tau_{(\kappa)} = \mathbf{F}_{-i1 \dots -i\kappa} \otimes \mathbf{F}_j \partial T^*_{i1 \dots i\kappa} / \partial X_j.$$

¹⁰ Si potrebbe anche scrivere $\pi^j \chi$ [$\pi_h \chi$] in luogo di X^j [di X_h] nell'indicare gli argomenti della componente $T_{i1 \dots i\kappa}$ nel 2° membro della (3ter) [della (3quater)]. L'operatore lineare $\pi^j: E \rightarrow \mathbb{R}$ [$\pi_h: E \rightarrow \mathbb{R}$], con $j, h = 1, \dots, n$, che trasforma χ in X^j [in X_h] si dice **proiettore canonico** di indice controvariante j [covariante h].

¹¹ Questa è soltanto una convenzione universalmente seguita, ma che potrebbe banalmente scambiarsi con un'altra, ad es. quella che la moltiplicazione venga fatta a sinistra (o in qualche altra posizione convenuta se disponibile).

¹² Come abbiamo appena visto, ∇ ha di per sé carattere vettoriale, e quindi sarebbe da scrivere in grassetto; ma ci risparmieremo questa pedanteria, non potendo nascere occasioni di equivoco.

Si ricordi che nella (6bis) $T^*_{i_1 \dots i_\kappa}$ è la funzione delle X_h pari a $T_{i_1 \dots i_\kappa}(\langle B^{jh} X_h \rangle)$. In particolare per $\kappa = 0$, le (6,6bis) danno concordemente il **campo (vettoriale) gradiente dello scalare** $\tau \equiv \tau_{(0)}$:

$$(6ter) \quad \nabla \tau = \mathbf{F}^h \partial T / \partial X^h = \mathbf{F}_j \partial T^* / \partial X_j.$$

È immediato verificare che l'operatore ∇ , oltre che lineare, è leibniziano rispetto a prodotti tensoriali, possibilmente contratti: ad esempio, $\nabla(\sigma_{(i)} \otimes \tau_{(\kappa)}) = \nabla \sigma_{(i)} \otimes \tau_{(\kappa)} + \sigma_{(i)} \otimes \nabla \tau_{(\kappa)}$, oppure $(\nabla \equiv \mathbf{F}^h \partial / \partial X_h) B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}^h [B(\partial \mathbf{u} / \partial X^h, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \partial \mathbf{v} / \partial X^h)] = B(\nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ per arbitrari elementi \mathbf{u}, \mathbf{v} di E . Se $T_{i_1 \dots i_\kappa} \in C^{r \geq 2}(U_+)$, in modo analogo si definisce il campo $(\kappa+2)$ -tensoriale **derivato secondo del campo** $\tau_{(\kappa)}$, che si scrive $\nabla \nabla \tau_{(\kappa)}$; e così via. Si noti che per $\chi = X^j \mathbf{F}_j = X_h \mathbf{F}^h$, che è un particolare campo vettoriale definito $\forall \langle X \cdot \rangle$ (o $\forall \langle X \cdot \rangle$) in R^n e ivi di classe C^ω , risulta $\nabla \chi = \mathbf{F}^i \otimes \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{F}^i$ ¹³ (e dunque $\nabla \nabla \chi \equiv 0$).

Tornando alla rappresentazione (5) del campo $\tau_{(\kappa)}(\chi \in U)$ nelle più specifiche variabili $\langle X^j \rangle$, scriveremo:

$$(7) \quad \tau_{(\kappa)}(\chi) = \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_\kappa}(\chi) \tau_{i_1 \dots i_\kappa}(X^i).$$

Il problema è ora quello di esprimere il campo derivato $\nabla \tau_{(\kappa)}$ nella base locale $\{\mathbf{f}\}(\chi)$. Riferendoci per semplicità al caso di un campo vettoriale $\tau_{(1)}(\chi) = \mathbf{f}^i(\chi) \tau_i(X^i)$, e supponendo le \mathbf{f}^i e le τ_i di classe $C^{r \geq 1}$, avremo:

$$(8) \quad \nabla \tau_{(1)} = \mathbf{f}^i \otimes \mathbf{F}^h \partial \tau_i / \partial X^h + \tau_i \nabla \mathbf{f}^i,$$

ove il secondo addendo a 2° membro rende conto della dipendenza da χ della base, e l'uso della regola di Leibniz è corretto in base alle definizioni. Alla luce della (6) e della (4), è poi:

$$(9) \quad \nabla \mathbf{f}^i = \mathbf{F}^{jh} \partial^c L_j^i / \partial X^h,$$

dove \mathbf{F}^{jh} sta ovviamente per $\mathbf{F}^j \otimes \mathbf{F}^h$.

3.3.2) DERIVAZIONE DI UN CAMPO TENSORIALE IN UNA BASE LOCALE

Classe di continuità a parte, fino a questo punto non si sono fatte ipotesi restrittive sulla natura della dipendenza di $\{\mathbf{f}\}$ da χ (cioè di L da X^i); ma limiteremo ora questa generalità come appresso descritto. Tornando a denotare con U l'aperto di R^n (possibilmente coincidente con R^n stesso) cui appartiene $X \equiv X^i \equiv \langle X^1, \dots, X^n \rangle$, sia $\lambda: U \rightarrow R^n$ un r -diffeomorfismo ($1 \leq r \leq \infty$, o $r = \omega$)¹⁴ di U su $\lambda(U) \subset R^n$. Scrivendo $x \equiv x^i \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle$ per $\lambda(X)$, e dunque X per $\lambda^{-1}(x)$, le

¹³ L'elementare verifica è data, ad esempio mediante la (6), da $\mathbf{F}_i \otimes \mathbf{F}^h \partial X^i / \partial X^h = \mathbf{F}_i \otimes \mathbf{F}^i$; o con analogha procedura mediante la (6bis).

¹⁴ Il contenuto di questa nota, come pure della nota (¹) della prossima Sez. 3.4, è inteso a ricordare in modo sintetico alcune fondamentali nozioni di Analisi e di Topologia di diretta pertinenza al testo presente. (Per la topologia in

$x = \lambda(X \in U)$ e $X = \lambda^{-1}(x \in \lambda(U))$ descrivono una biiezione di classe $C^{r \geq 1}$ (di U su $\lambda(U)$ e viceversa), per la quale il determinante jacobiano di λ , $\det\{\partial(x)/\partial(X)\}$, nonché quello di λ^{-1} , $\det\{\partial(X)/\partial(x)\}$, di classe C^{r-1} in U e rispettivamente in $\lambda(U)$, sono entrambi diversi da zero e l'uno reciproco dell'altro nei rispettivi domini. Identifichiamo ora la matrice jacobiana $\{\partial X^j/\partial x^i\}(x=\lambda(X))$ (dove j è indice di colonna) con la matrice $\{L_i^j\}(X)$ della prima delle (3.3.1, 4). Questa scelta si riduce alla precedente $\partial X^i/\partial X^j = L_j^i$ per L costante e $\mathbf{f} \equiv \mathbf{F}'$. Le

$$(1) \quad \mathbf{f}_i(x) = \mathbf{F}_j \partial X^j / \partial x^i, \quad \mathbf{f}^i(X) = \mathbf{F}^j \partial x^i / \partial X^j$$

sono quindi elementi di certe basi *locali* (cioè generalmente dipendenti da $x \leftrightarrow X$), covariante e rispettivamente controvariante (cobase della prima ¹⁵) rispetto a $\{\mathbf{F}\}$. È evidente che le basi locali definite dalle (1) sono di tipo *meno* generale di quelle che si ottengono ponendo nella (3.3.1, 4) una *generica* matrice L non singolare di classe C^{r-1} in X . ¹⁶

Dalla definizione (1) delle basi locali, e dal confronto delle (3.3.1, 3ter e 7), si trae:

$$(2) \quad \tau_{i1 \dots ik} = \prod_{t(p)=+} \partial X^{ip} / \partial X^{jp} T_{j1 \dots jk} \prod_{t(q)=-} \partial X^{jq} / \partial X^{iq},$$

ove valgono le stesse convenzioni/notazioni introdotte nella Sez. 3.1.

Si considerino adesso due r -diffeomorfismi dell'aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, diciamo λ e λ' , su $\lambda(U) \subset \mathbb{R}^n$ e rispettivamente su $\lambda'(U) \subset \mathbb{R}^n$. Posto $x = \lambda(X)$ e $x' = \lambda'(X)$ (ove $X \in U$), scrivendo per entrambi le (2) ed *eliminando le X* , si ottiene:

generale, il lettore può anche ricorrere al Glossario di Topologia, App. Gen. B) Per cominciare, siano T ed S spazi topologici (ST): l'applicazione $\varphi: T \rightarrow S$ si dice un **omeomorfismo di T su S** se i) è una biiezione (quindi $S = \varphi(T)$ e $T = \varphi^{-1}(S)$) e ii) sia φ che φ^{-1} sono continue. ($\varphi: T \rightarrow S$ si dice talvolta **moneomorfismo di T in S** se è un omeomorfismo di T su $\varphi(T) \subset S$, ove $\varphi(T)$ è ST con la topologia indotta da S .) Un omeomorfismo di T su T si dice **omeomorfismo di T** . Per $1 \leq r \leq \omega$, un omeomorfismo φ di \mathbb{R}^n (rispetto alla topologia standard) si dice un **r -diffeomorfismo di \mathbb{R}^n** , se φ e φ^{-1} (cioè le $2n$ funzioni con dominio \mathbb{R}^n e valori in \mathbb{R}^n di cui φ e φ^{-1} sono costituite) sono di classe C^r . Queste definizioni si estendono in modo ovvio al caso in cui a \mathbb{R}^n si sostituiscano aperti U e V di \mathbb{R}^n . Un omeomorfismo [un $(1 \leq r \leq \omega)$ -diffeomorfismo] di $U \subset T$ su $V \subset T$ [di $U \subset \mathbb{R}^n$ su $V \subset \mathbb{R}^n$] si usa anche dire un **omeomorfismo in T** [un **r -diffeomorfismo in \mathbb{R}^n**]. Se si ammettesse, come spesso si fa, anche $r = 0$, allora un "0-diffeomorfismo" non sarebbe altro che un omeomorfismo; ma preferiamo riferirci agli omeomorfismi in modo esplicito, convenendo che $r \geq 1$. Per un dato r -diffeomorfismo φ di \mathbb{R}^n (o, con ovvie modifiche, in \mathbb{R}^n), se $J\varphi(x)$ denota il determinante jacobiano della trasformazione φ nel punto x , si prova che $J\varphi(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Il viceversa è assicurato dal **teorema della funzione inversa**, secondo il quale, se $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe $C^{r \geq 1}$, e $J\varphi(x^0) \neq 0$ (con $x^0 \in \mathbb{R}^n$), allora esiste un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ contenente x^0 tale che $\varphi|_U$ (restrizione di φ a U) è un r -diffeomorfismo di U sull'aperto $\varphi(U) = V \subset \mathbb{R}^n$ contenente $y^0 = \varphi(x^0)$. Se φ e ψ sono r -diffeomorfismi di \mathbb{R}^n , l'applicazione composta $\psi \circ \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un r -diffeomorfismo di \mathbb{R}^n . Ciò dà accesso in modo naturale alla nozione di **gruppo degli r -diffeomorfismi di \mathbb{R}^n** . Analoghi asseriti valgono se φ, ψ sono omeomorfismi di T (ST). Con riferimento agli r -diffeomorfismi di \mathbb{R}^n , sussiste la **regola della catena** per i determinanti jacobiani, cioè $J(\psi \circ \varphi)(x) = J\psi(\varphi(x))J\varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (questa dà il legame di reciprocità tra jacobiani di diffeomorfismi inversi se $\psi = \varphi^{-1}$). Sono ovvie le estensioni di quanto precede al caso di r -diffeomorfismi del tipo $\varphi: U \rightarrow V$, $\psi: V \rightarrow W$, ove U, V, W sono aperti di \mathbb{R}^n . in mutua corrispondenza biunivoca, e alla loro composizione $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$. Se, essendo $\varphi: U(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow V(\subset \mathbb{R}^n)$ un r -diffeomorfismo in \mathbb{R}^n , $J\varphi(x) > 0$ [< 0] in U , φ si dice **equiverso** [**antiverso**], e l'immagine $\varphi(U)$ si dice **equiversa** [**antiversa**] a U . (Se φ è equiverso aut antiverso in un x^0 di U , allora lo è in un intero intorno aperto di x^0 .)

¹⁵ Infatti $\partial\{\partial X^j/\partial x^i\} = (\partial\{\partial X^j/\partial x^i\})^{-1} = \{\partial x^i/\partial X^j\}$.

¹⁶ Precisamente, la condizione che deve essere soddisfatta è che la L sia la jacobiana di un r -diffeomorfismo. Questa condizione si può scrivere nella forma $\partial L_i^j/\partial x^k = \partial L_k^j/\partial x^i$, con $L = L(X(x))$.

$$(3) \quad \tau'_{i_1 \dots i_\kappa} = \prod_{t(p)=+} \partial X'^{ip} / \partial X^{jp} \tau_{j_1 \dots j_\kappa} \prod_{t(q)=-} \partial X^{jq} / \partial X'^{iq};$$

questa si inverte semplicemente scambiando gli oggetti senza apice con quelli con apice. Le (2) si possono allora vedere come un caso particolare delle (3), con $\mathbf{1}_U$ al posto di λ e λ al posto di λ' . Il numero totale di derivate presenti nelle due produttorie a 2° membro delle (2,3) è evidentemente κ . Le (3) si dicono **trasformazioni per cogredienza** (delle componenti senza apice in quelle con apice) rispetto agli indici di covarianza ($t(q) = -$) e **per controgredienza** rispetto agli indici di controvarianza ($t(p) = +$). Ad esempio per un campo vettoriale $\tau_{(1)} = \mathbf{v}$, le

$$(3bis_1) \quad v'_i = v_k \partial X^k / \partial X'^i$$

sono trasformazioni per cogredienza, e le

$$(3bis_2) \quad v'^i = v^k \partial X'^i / \partial X^k$$

sono trasformazioni per controgredienza. La trasformazione $x \mapsto x'$ corrisponde a $\lambda' \circ \lambda$; essa porta r -diffeomorficamente da x a x' passando per X . Il principio di invarianza vale evidentemente anche per queste trasformazioni, che nel loro insieme costituiscono un gruppo sotto composizione (gruppo degli ($r \geq 1$)-diffeomorfismi “attraverso U ”). Si noti infine che l'algebra in base locale (in un dato $X \in U$) $\leftrightarrow x \in \lambda(U) \leftrightarrow x' \in \lambda'(U)$ su $\{E^{(\kappa)}\}$ non ha niente di diverso da quella in base cartesiana.¹⁷

Utilizziamo ora le (2) per valutare le componenti covarianti trasformate per (doppia) cogredienza di quelle del tensore doppio simmetrico non singolare $B_{(2)}$, o **tensore fondamentale**, corrispondente canonico della forma B associata ad $E_{n,\pi}$. Queste componenti si denotano universalmente come g_{ik} in un contesto relativistico.¹⁸ Uniformandoci a questa notazione, d'ora in avanti scriveremo quindi $G [G]$ in luogo di $B [B]$. Risulta, $\forall x \in \lambda(U)$:

$$(4) \quad g_{ik} = \partial X^j / \partial X'^i G_{jh} \partial X^h / \partial X'^k,$$

e quindi $\text{signdet}\{g_{ik}\} = \text{signdet}\{G_{jh}\} = (-1)^v$ (ove al solito, $v = n - \pi$). Se poi la base cartesiana è p -ortogonale, cioè se $G_{jh} = \varepsilon(j)\delta_{jh}$, abbiamo $g_{ik} = \sum_{j \in (j)} \partial X^j / \partial X'^i \partial X^j / \partial X'^k$. Si noti che g_{ik} è anche il valore di $G(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_k)$, come era da attendersi. Le componenti controvarianti si ottengono similmente, per controgredienza, da G^{jh} ; cioè, $\forall X \in U$,

$$(4bis) \quad g^{ik} = \partial X'^i / \partial X^j G^{jh} \partial X'^k / \partial X^h;$$

e ancora, risulta $g^{ik} = G(\mathbf{f}^i, \mathbf{f}^k)$. Infine, poiché $G_j^h = \delta_i^h$, le componenti miste sono:

$$(4ter) \quad g_i^k = \partial X^j / \partial X'^i \delta_j^h \partial X^k / \partial X^h = \partial X^k / \partial X'^i = \delta_i^k,$$

come nel caso cartesiano.

¹⁷ Si noti infine che le (2,3) si riducono a $\tau = T$, e risp. $\tau' = \tau$ per $\kappa = 0$.

¹⁸ Congetturalmente a conoscenza di chi scrive, la lettera g di g_{ik} potrebbe essere ispirata alla iniziale di “gravitazione” (Gravitation in tedesco), perché il tensore fondamentale è denotato così da Einstein, (forse per la prima volta?) nel già citato “Die Grundlagentheorie der allgemeinen Relativitätstheorie” (Annalen der Physik, **49**, 1916).

Le (g_{ik}, g^{ik}, g_i^k) sono le **componenti (covarianti, controvarianti, miste)** del tensore fondamentale nella base locale (1).

Per il principio di invarianza, contraendo con g_{ik} [con g^{ik}], potremo spostare in basso [in alto] un indice di controvarianza [di covarianza] della componente (locale) di un tensore. Per esempio per lo stesso tensore fondamentale, $g_{ik}g^{kj} = g_i^j = \delta_i^j$; ciò prova che $g^{ik} = (g^{-1})_{ik}$ (ove con $(g^{-1})_{ik}$ si denota al solito l'elemento (ik) della matrice reciproca), ancora come nel caso cartesiano. Nel seguito, sarà qui utile denotare con g [con G] il $\det\{g_{ik}\}$ [il $\det\{G_{ik}\}$].

Torniamo adesso all'eq. (3.3.1, 8) per determinare le componenti (diciamo, covarianti), in base locale, del derivato ∇v di un vettore $v = f^i v_i = F^i V_i$. Supposto $r \geq 2$, in forza della (3.3.1, 9) e della seconda delle (1) la (3.3.1, 8) diventa:

(5) $\nabla v = F^{jh} (\partial v_p / \partial X^h \partial X^p / \partial X^j + v_p \partial^2 X^p / \partial X^j \partial X^h)$; e quindi, eliminando le F^{jh} mediante la cobase locale,

$$(6) \quad \nabla v = f^{id} (\partial v_i / \partial X^d - v_p \Gamma_i^p d),$$

dove si è posto

$$(7) \quad \Gamma_i^p d =: -\partial^2 X^p / \partial X^j \partial X^h \partial X^i / \partial X^j \partial X^h / \partial X^d \equiv \partial^2 X^s / \partial X^i \partial X^d \partial X^s$$

(l'identità tra secondo e terzo membro della (7) si ricava derivando rispetto a x^d la $(\partial X^s / \partial x^i)(\partial x^j / \partial X^s) \equiv \delta_i^j$). I segni meno nelle (6) e (7) sono stati introdotti per miglior convenienza.

Notiamo esplicitamente che l'oggetto a 3 indici $\Gamma_i^p d$, *simmetrico rispetto ai due indici inferiori* (posti qui convenzionalmente in prima e terza posizione), non è una componente mista di un 3-tensore, e quindi il suo prodotto contratto con v_p non è una componente di un 2-tensore simmetrico. Similmente, non è una componente di un 2-tensore la $\partial v_i / \partial X^d$:¹⁹ lo è, invece, e precisamente del 2-tensore ∇v (per costruzione), la differenza dei due termini nella parentesi della (6), che denoteremo $v_{i/d}$ (talvolta si usa ; in luogo di /):

$$(8) \quad v_{i/d} =: \partial v_i / \partial X^d - v_p \Gamma_i^p d.$$

In modo analogo si ottiene la componente mista $v^i_{/d}$ (avendo posto $\nabla v =: f_i^d v^i_{/d}$), ossia:

$$(8bis) \quad v^i_{/d} =: \partial v^i / \partial X^d + v^p \Gamma_p^i d,$$

simile alla, ma diversa dalla, (8). È facile rendersi conto che a 1° membro delle (8) e (8bis) ci sono i trasformati per doppia cogredienza, e rispettivamente per cogredienza/controgredienza, dei corrispondenti oggetti cartesiani $(\partial V_j / \partial X^h)$ e rispettivamente $\partial V^j / \partial X_h$; $v_{i/d}$ e $v^i_{/d}$ sono cioè componenti covarianti e miste, nella base $\{f\}$, del tensore doppio ∇v .

¹⁹ Per convincersene, basta esaminare come si trasforma $\partial v_i / \partial X^d$ nel passaggio da x a $x' = \lambda' \cdot \lambda^{-1}(x)$. Partendo dalla (3) con $\kappa = 1$, abbiamo $v'_i = v_k \partial x^k / \partial x'^i$, e quindi $\partial v'_i / \partial x'^d = \partial v_j / \partial x^d \partial x^j / \partial x'^i + v_j \partial^2 x^j / \partial x'^i \partial x'^d$. Qui il primo termine a 2° membro (che può scriversi come $\partial v_j / \partial x^h \partial x^h / \partial x'^i \partial x^j / \partial x'^i$) corrisponde ad una trasformazione per 2-cogredienza di $\partial v_j / \partial x^h$, e quindi rientrerebbe nella regola generale (se $\partial v_j / \partial x^h$ fosse componente covariante di un 2-tensore); il secondo termine è invece ad essa estraneo, e la sua presenza denuncia la tesi in oggetto.

Le (8,8bis) si generalizzano al caso di un κ -tensore in forma mista (cfr. eq (3.3.1, 7)), secondo la seguente (indici delle componenti tensoriali con segno):

$$(9) \quad \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}/d} = \partial \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}} / \partial X^d - \sum_{t(p)=-} \tau_{i_1 \dots i_{(p-1)} s i_{(p+1)} \dots i_{\kappa}} \Gamma_{ip}^s \delta^d + \sum_{t(q)=+} \tau_{i_1 \dots i_{(q-1)} s i_{(q+1)} \dots i_{\kappa}} \Gamma_s^{iq} \delta^d,$$

dove la prima [la seconda] somma è estesa ai p per cui i_p è indice di covarianza [ai q per cui i_q è indice di controvarianza] (la somma essendo ovviamente omessa se l'insieme di tali p [di tali q] è vuoto) e l'indice s senza segno ne prende il posto. Il numero totale di addendi contratti, nelle due somme, è κ . In particolare se $\kappa = 0$, $\tau_{/d} = \partial \tau / \partial X^d$. Quando λ è lineare, tutti i coefficienti Γ sono identicamente nulli, e si è ricondotti al caso cartesiano in cui $\tau \equiv T$ e $_{/d} \equiv \partial / \partial X^d$.²⁰

Vi è ancora da considerare un'altra rappresentazione di $\nabla \tau_{(\kappa)}$. Sappiamo che $\partial / \partial X_h = G^{jh} \partial / \partial X^j$. Applicando questo operatore ad una componente cartesiana di tipo qualunque di $\tau_{(\kappa)}$, $T_{j_1 \dots j_{\kappa}}$, otteniamo la componente cartesiana di un $(\kappa+1)$ -tensore, con il $(\kappa+1)$ -mo indice controvariante. Alla luce del principio di invarianza, se $\tau_{i_1 \dots i_{\kappa}}^{/d}$ sono le corrispondenti componenti in base locale (controvarianti rispetto all'indice d) di $\nabla \tau_{(\kappa)}$, deve quindi essere:

$$(10) \quad \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}}^{/d} = g^{jd} \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}/j};$$

$$\text{e per } \kappa = 0, \tau^{/d} = g^{jd} \partial \tau / \partial X^j.$$

È immediato verificare direttamente che gli operatori $_{/d}$ e $^{/d}$ sono lineari, e leibniziani rispetto a prodotti (possibilmente contratti) di componenti tensoriali (in particolare, rispetto a prodotti interni tra vettori).

Nei limiti che ci siamo per il momento imposti, il quadro è così completo.²¹ La (9) dà le componenti, covarianti rispetto all'indice $(_{/d})$, del $\nabla \tau_{(\kappa)}$ espresso da:

$$(11) \quad \nabla \tau_{(\kappa)} = \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_{\kappa}} \otimes \mathbf{f}^p \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}/p};$$

e la (10), ancora attraverso la (9), dà le componenti controvarianti, rispetto all'indice $^{/d}$, dello stesso tensore espresso da:

$$(11\text{bis}) \quad \nabla \tau_{(\kappa)} = \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_{\kappa}} \otimes \mathbf{f}_q \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}}^{/q}.$$

L'equivalenza delle (11) e (11bis) è evidente alla luce della (10).

²⁰ La giustificazione della (9) è completamente analoga a quella delle (8,8bis), e quindi si ottiene partendo dalle due rappresentazioni (3.3.1, 3ter e 7) di $\tau_{(\kappa)}$, nonché dalle (1) e loro inverse; oppure, equivalentemente, trasformando per cogredienza/controgredienza i corrispondenti oggetti cartesiani. Va da sé che a 1° membro della (9) ci sono le componenti, nella base $\{\mathbf{f}\}$, del $(\kappa+1)$ -tensore $\nabla \tau_{(\kappa)}$, covarianti rispetto all'indice d .

²¹ Resterebbe da chiarire perché le coordinate cartesiane X^i o le coordinate generali x^i sono state scelte "controvarianti", e non si sono introdotte ipotetiche coordinate, cartesiane o generali, covarianti. La ragione è che i differenziali dX^j , dx^j delle coordinate sono "naturalmente" controvarianti, secondo la $dx^i = \partial X^i / \partial x^j dx^j$ (legge di trasformazione controgrediente). Se definissimo dx_i come $g_{ik} dx^k$, per passare a differenziali di coordinate covarianti x_i , dovrebbe essere soddisfatta la condizione di integrabilità $\partial g_{ik} / \partial x^s = \partial g_{is} / \partial x^k$. Sviluppando quest'ultima, si trova $\partial^2 X^j / \partial x^i \partial x^s \partial x^k - \partial X^j / \partial x^k \partial x^s = \partial^2 X^j / \partial x^i \partial x^k \partial x^s - \partial X^j / \partial x^s \partial x^k = \partial^2 X^j / \partial x^i \partial x^k \partial x^s - \partial X^j / \partial x^s \partial x^k$, che è soddisfatta sse le derivate seconde sono nulle, cioè se λ^{-1} (e quindi λ) è lineare. Si ricade così nel caso cartesiano, indefinitamente integrabile secondo le $X_i = G_{ik} X^k$. In ultima analisi, non è difficile verificare che la $^{/d}$ della (10) non è altro che la derivata tensoriale rispetto alla coordinata generale covariante x_d . Riferendoci per semplicità al caso di un vettore, si ha infatti $v_i^{/d} = g^{dk} v_{i/k} = g^{dk} (\partial v_i / \partial x^k - v_p \Gamma_i^{pk}) \equiv \partial v_i / \partial x_d - v_p \Gamma_i^{pd}$, ove $\partial / \partial x_d =: g^{dk} \partial / \partial x^k$ (alla luce della precedente definizione di dx_i) e $\Gamma_i^{pd} =: \partial^2 X^s / \partial x^i \partial x_d \partial x^p \partial x^s \equiv g^{dk} \Gamma_i^{pk}$.

Applichiamo ora la (9), in particolare, al calcolo di $g_{ik/d}$. Si ha:

$$(12) \quad g_{ik/d} = \partial g_{ik} / \partial x^d - g_{pk} \Gamma_i^p{}_d - g_{ip} \Gamma_k^p{}_d.$$

Sostituendo qui la (4) e la (7), qualche passaggio porta a

$$(13) \quad g_{ik/d} \equiv 0.$$

Questo risultato (detto spesso **teorema di Ricci**) era facilmente prevedibile anche senza far calcoli, perché $g_{ik/d}$ è il trasformato per 3-cogredienza di $\partial G_{jh} / \partial X^s \equiv 0$. Quindi $\nabla g_{(2)} \equiv 0$; e con ciò, insieme con la (13) valgono le

$$(13bis) \quad g^{ik}{}_{/d} \equiv 0,$$

$$(13ter) \quad g_i^k{}_{/d} \equiv 0,$$

nonché (in forza della (10)) le stesse con d al posto di ${}_{/d}$.²² Le (12,13) possono inoltre scriversi nella forma:

$$(12bis) \quad g_{ik/d} = \partial g_{ik} / \partial x^d - (\Gamma_{ikd} + \Gamma_{kid}) \equiv 0,$$

avendo posto:

$$(14) \quad \Gamma_{ikd} =: g_{pk} \Gamma_i^p{}_d. \quad {}^{23}$$

Le (12bis) si possono facilmente risolvere rispetto alle Γ_{ikd} . Infatti permutandone ciclicamente i tre indici si ottengono due altre equazioni simili; e combinando linearmente le tre equazioni così ottenute si trova:

$$(12ter) \quad 2\Gamma_{ikd} = \partial g_{ik} / \partial x^d + \partial g_{dk} / \partial x^i - \partial g_{id} / \partial x^k,$$

che esprime i Γ_{ikd} (e quindi i $\Gamma_i^p{}_d$) direttamente in termini del tensore fondamentale senza passare attraverso le coordinate cartesiane. Una espressione diretta di Γ_{ikd} , controparte della (7), è:

$$(15) \quad \Gamma_{ikd} = \partial^2 X^p / \partial x^i \partial x^d \partial x_p / \partial x^k.$$

Naturalmente nemmeno questi altri oggetti a 3 indici, simmetrici rispetto al primo e al terzo indice, sono componenti covarianti di un 3-tensore. Γ_{ikd} e $\Gamma_i^k{}_d$ si dicono **simboli di Christoffel** (Elwin, 1829-1900) **di 1^a specie**, e rispettivamente **simboli di Christoffel di 2^a specie** (nel seguito, Chr1 e Chr2). Dalle (14,15) si desume facilmente una legge di trasformazione dei Chr2 a fronte del passaggio r-diffeomorfico da x a $x' = \lambda' \circ \lambda^{-1}(x)$:

$$(16_1) \quad \Gamma'_{kr}{}^i = \Gamma_{jp}{}^t \partial x^j / \partial x'^k \partial x'^r / \partial x^t \partial x^p / \partial x'^r + \partial^2 x^j / \partial x'^k \partial x'^r \partial x'^i / \partial x^j,$$

o equivalentemente, ma con il vantaggio formale di avere esplicitamente in gioco soltanto derivate delle x' rispetto alle x ,

$$(16_2) \quad \Gamma'_{kr}{}^i \partial x'^k / \partial x^p \partial x'^r / \partial x^q = \Gamma_{p q}{}^t \partial x'^i / \partial x^t - \partial^2 x'^i / \partial x^p \partial x^q.$$

²² Anche le (13bis, 13ter, ecc.) possono ottenersi con un calcolo diretto a partire dalla (9) e dalle (4bis, 4ter). In particolare la verifica della (13ter) è immediata, e avrebbe potuto usarsi sin dal principio come la più semplice dimostrazione della $\nabla g_{(2)} \equiv 0$.

²³ La notazione corrente delle Γ_{ikd} è “ $\Gamma_{id,k}$ ”; ma chi scrive ha sempre preferito la prima (trovandola più logica, e quindi più facile da ricordare). Segnaliamo inoltre la notazione $\{i^k{}_d\}$ per $\Gamma_i^k{}_d$ e rispettivamente $\{id,k\}$ per la nostra Γ_{ikd} .

Similmente si ottiene una legge di trasformazione dei Chr1:

$$(17) \quad \Gamma'_{ikj} = \partial x^p / \partial x'^i \partial x^q / \partial x'^j \partial x^r / \partial x'^k \Gamma_{prq} + \partial^2 x^p / \partial x'^i \partial x'^j \partial x^q / \partial x'^k g_{pq},$$

in cui interviene anche il tensore fondamentale. Giova qui tener presente l'identità $\partial^2 x'^i / \partial x^s \partial x^v = -\partial^2 x^j / \partial x'^k \partial x'^r \partial x'^k / \partial x^s \partial x'^r / \partial x^v \partial x'^i / \partial x^j$. Le (16₁) permettono una conferma diretta del carattere di componenti di 2-tensore (covarianti rispetto all'indice dopo la *i*) delle $v_{i/k}$ [$v^i_{/k}$]; nel senso che $v'_{j/h}$ [$v'^j_{/h}$] sono trasformate per doppia cogredienza [per controgradienza/cogredienza] di $v_{i/k}$ [$v^i_{/k}$] (vedi la (3)), dove $v'_{j/h}$ [$v'^j_{/h}$] è il 2° membro della (8) [(8bis)] con v' , x' , Γ' in luogo dei corrispondenti v , x e Γ . Più in generale, le (16₁) permettono un'analogia verifica diretta a carico degli oggetti a 1° membro della (9).

Una formula di uso corrente, che lega i Chr2 al determinante $g \equiv \det\{g_{ik}\}$, è la

$$(18) \quad \Gamma_p^p{}_d \equiv (\partial g / \partial x^d) / (2g).$$

Oltre a $g_{(2)}$, ha derivato nullo ogni tensore funzione polinomiale di $g_{(2)}$, come ad esempio quello che, in coordinate cartesiane, abbiamo scritto come $\varepsilon_{(n)}$ (v.S.sez. 3.2.2), e che adesso denoteremo coerentemente con $E_{(n)}$ (*greco* maiuscolo), riservando $\varepsilon_{(n)}$ al suo trasformato in coordinate generali. Le relazioni (3.2.2, 9) cui soddisfa $E_{(n)}$, e tutte le loro conseguenze, continuano a valere per $\varepsilon_{(n)}$ nel suo nuovo significato, sostituendo $g_{(2)}$ a $B_{(2)} \equiv G_{(2)}$. Quindi $\nabla \varepsilon_{(n)} \equiv 0$, ovvero $\varepsilon_{i_1 \dots i_n/d} \equiv 0$ e $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}{}^d \equiv 0$ (qui gli indici i_1, \dots, i_n si possono pensare con segno); sostituita nella (9), in particolare la seconda di queste dà $\partial \varepsilon_{i_1 \dots i_n} / \partial x^d$ come combinazione lineare delle $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$, ecc. In conclusione, tensori come $g_{(2)}$ e $\varepsilon_{(n)}$ possono “attraversare” nei due sensi l'operatore ∇ , ad esempio come in $\nabla(\varepsilon_{(n)} \otimes \tau_{(k)}) \equiv \varepsilon_{(n)} \otimes \nabla \tau_{(k)}$.

3.4) ANALISI TENSORIALE LOCALE IN SPAZI PSEUDOEUCCLIDEI E IN LORO VARIETÀ

IMMERSE II

I contenuti di questa sezione si riferiscono a “sottovarietà” immerse (o embedded) in uno spazio pseudoeuclideo; ma con questa locuzione non si esclude il caso che la dimensione n della sottovarietà eguagli la dimensione m dello spazio sommergente. In caso contrario, per maggior chiarezza e con locuzione ormai familiare, si può parlare di “sottovarietà proprie” di quello spazio.

3.4.1) DERIVAZIONE DI CAMPI TENSORIALI INTERNA A VARIETÀ IMMERSE

Allargheremo ora alquanto la nostra ottica, passando a considerare applicazioni di U (aperto di \mathbb{R}^n , e tipicamente \mathbb{R}^n stesso) più generali degli r -diffeomorfismi di U su $\lambda(U) \subset \mathbb{R}^n$. Precisamente, sia $\iota: U \rightarrow E_{m,\pi}$, $m \geq n$, una “ r -immersione”¹ di U in $E_{m,\pi}$ pseudoeuclideo con forma fondamentale G . Dette X^μ ($\mu = 1, \dots, m$) coordinate cartesiane controvarianti in $E_{m,\pi}$ rispetto alla base $\{\mathbf{F}_\mu\}_{1 \div m}$, introduciamo le $\mathbf{f}_i(x) =: \partial X^\mu / \partial x^i(x) \mathbf{F}_\mu$ (cfr. la prima delle (3.3.2, 1)).² Essendo queste $\mathbf{f}_i(x)$ linearmente indipendenti per la definizione di immersione, il loro insieme è una base $\{\mathbf{f}_i\}_{1 \div n}$, di classe di continuità (CdC) $r-1$, del sottospazio n -dimensionale $\Pi_n = \Pi_n(x) =: \text{vect}\{\mathbf{f}_i\}_{1 \div n}(x)$ di $E_{m,\pi}$. Trascurando di rendere esplicita la dipendenza da x (variabile in U), risulta:

¹ Per un'applicazione f di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m di classe C^r ($1 \leq r \leq \omega$), e per un dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si definisce come **rango di f in x_0** e si denota $\text{rng}(f, x_0)$, il rango della matrice jacobiana (o derivata) $Df =: (\partial y^j / \partial x^i)_{j=1 \dots m, i=1 \dots n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$, $x^i =: \pi^i x$, $y^j =: \pi^j y$, in x_0 . Ovviamente $\text{rng}(f, x_0) \leq \min(n, m)$; un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ per cui $\text{rng}(f, x_0) = \min(n, m)$ si dice **regolare per f** , e in caso contrario **singolare** (o **critico**) **per f** . Un'applicazione $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \geq n}$ è una **r -immersione** ($1 \leq r \leq \omega$), o semplicemente una **immersione** se $r = 1$, se i) è di classe C^r e ii) $\text{rng}(\iota, x) = n \forall x \in \mathbb{R}^n$. Questa definizione ci assicura che la trasformazione lineare $Y = (D\iota)_0 X$, **tangente a ι in $x_0 \in \mathbb{R}^n$** , genera un sottospazio n -dim di \mathbb{R}^m (**spazio tangente a $\iota(\mathbb{R}^n)$ in $x = x_0$**), e ciò per ogni x_0 di \mathbb{R}^n . Si noti che se $m = n$, una r -immersione non è necessariamente un r -diffeomorfismo di \mathbb{R}^n su $\iota(\mathbb{R}^n)$, perché non si è richiesto che sia iniettiva (in generale, ι è soltanto *localmente* iniettiva). Ad un tale r -diffeomorfismo si avvicina di più un **r -incastonamento** (più comunemente, **r -embedding** (amer. **r -imbedding**), anche in italiano; in francese, “ r -plongement”, ecc.) $\eta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \geq n}$, cioè una r -immersione (di \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m) che sia anche un omeomorfismo di \mathbb{R}^n su $\eta(\mathbb{R}^n)$ (con la topologia indotta da \mathbb{R}^m) quindi dotata di inversa continua $\eta^{-1}: \eta(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si noti che la condizione $\text{rng}(\iota, x) = n$ garantisce soltanto la biiettività *locale* di ι , cioè in un intorno di x . In base alla definizione, per un r -embedding si escludono autointersezioni di $\eta(\mathbb{R}^n)$, ed anche (in forza della bicontinuità) “l'avvicinamento arbitrario” – per esprimerci informalmente – alla autointersezione. Il quadro si completa definendo una **r -sommersione** $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \leq n}$ esattamente come si è definita una r -immersione, ma per $m \leq n$ anziché $m \geq n$, e richiedendo che $\text{rng}(\sigma, x) = m \forall x \in \mathbb{R}^n$. È evidente che, per $n = m$, r -immersioni e r -sommersioni sono la stessa cosa. Le definizioni si generalizzano in modo ovvio sostituendo a \mathbb{R}^n (spazio di partenza) un suo aperto U , e similmente a \mathbb{R}^m (spazio di arrivo) un suo aperto V . Un'altra generalizzazione che qui interessa si ottiene sostituendo a \mathbb{R}^m (spazio di arrivo) uno spazio pseudoeuclideo m -dimensionale $E_{m,\pi}$. In questo caso la classe C^r di ι (o di σ) si riferisce alle m funzioni X^μ delle n variabili x^i (per cui la matrice jacobiana $D\iota$ ($n \leq m$) o $D\sigma$ ($n \geq m$) diventa $\{\partial X^\mu / \partial x^i\}_{\mu=1 \div m, i=1 \div n}$), ove X^μ sono le m componenti controvarianti del vettore $\chi = X^\mu \mathbf{F}_\mu$ in una base $\{\mathbf{F}_\mu\}_{1 \div m}$ di $E_{m,\pi}$.

² Qui e nel seguito indici greci vanno da 1 a m , indici latini da 1 a n .

$$(1) \quad G(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_k) = \partial X^\mu / \partial x^i \partial X^\nu / \partial x^k G_{\mu\nu} \equiv g_{ik}$$

(dove la somma su μ e ν va da 1 a m , e dove al solito si è scritto $G_{\mu\nu}$ per $G(\mathbf{F}_\mu, \mathbf{F}_\nu)$). Per definizione, le X^μ sono controvarianti, e le $G_{\mu\nu}$ doppiamente covarianti, rispetto a trasformazioni della base $\{\mathbf{F}\}$, e similmente le g_{ik} (simmetriche, di CdC $r-1$) sono doppiamente covarianti rispetto a trasformazioni della base $\{\mathbf{f}\}$. Vale a dire, considerando una trasformazione r -diffeomorfa $x \mapsto x'$ (di U in U'), risulta:

$$(2) \quad g'_{ik} =: G(\mathbf{f}'_i, \mathbf{f}'_k) = \partial x^j / \partial x'^i g_{jh} \partial x^h / \partial x'^k,$$

ove si è inteso che $\mathbf{f}'_i =: \partial X^\mu / \partial x'^i \mathbf{F}_\mu$, e quindi che $\mathbf{f}'_i = \partial x^j / \partial x'^i \mathbf{f}_j$.

Per la definizione di immersione, il rango della matrice $\{\partial X^\mu / \partial x^i\}$ è n ; e quindi, per la (1), $\det\{g_{ik}\}_{i,k=1 \rightarrow n}$ è ovunque $\neq 0$, e Π_n è ovunque regolare. Ovviamente non possiamo ora far ricorso a formule del tipo delle (3.3.2, 1) per introdurre la cobase $\{\mathbf{f}'\}$ di $\{\mathbf{f}\}$ in Π_n ; ma ci soccorre allo scopo la richiesta non-singularità della matrice $\{g_{ik}\}$, in virtù della quale possiamo scrivere:

$$(3) \quad \mathbf{f}'^j =: g^{jh} \mathbf{f}_h,$$

ove g^{jh} è ora *definito* come l'elemento (j^h) della matrice inversa, cioè $(g^{-1})_{jh}$. Per tali \mathbf{f}'^j , che sono controvarianti rispetto ai soliti r -diffeomorfismi, e tali g^{jh} , risulta:

$$(4) \quad g^{jh} = (g^{-1})_{ji} (g^{-1})_{hk} g_{ik} = G(\mathbf{f}'^j, \mathbf{f}'^h),$$

per cui oltre a quello delle $\{\mathbf{f}\}$, anche il gramiano delle $\{\mathbf{f}'\}$ è diverso da zero in U . In conclusione il sottospazio $\Pi_n = \text{vect}\{\mathbf{f}\} \equiv \text{vect}\{\mathbf{f}'\}$, con forma bilineare di matrice non singolare g_{ik} nella base $\{\mathbf{f}\}$, è pseudoeuclideo per x in U , e potrebbe essere denotato $(\Pi_n, g)(x)$. Sottolineiamo che mentre la segnatura di $E_{m,\pi}$ è data, di quella del sottospazio $(\Pi_n, g)(x)$, che è unicamente determinata dalla immersione ι , non si può dir nulla in generale, salvo che nei casi banali in cui $E_{m,\pi}$ è euclideo o antieuclideo, allorché $(\Pi_n, g)(x)$ è ugualmente euclideo o rispettivamente antieuclideo. ^{3, 4}

L'immagine di U in $E_{m,\pi}$ attraverso ι , $\iota(U)$, è un aperto di varietà pseudoriemanniana n -dim immerso (o embedded ⁵) in $E_{m,\pi}$, con forma bilineare locale non singolare $g(x)$. A questo $\iota(U)$ potrà

³ Diamo una dimostrazione di questo fatto intuitivamente evidente. Se lo spazio sommergente è euclideo [antieuclideo], e la base $\{\mathbf{F}_\mu\}$ è ortonormale [antiortonormale], scrivendo brevemente $\mathbf{f}_i = M_i^\mu \mathbf{F}_\mu$, dove $\{M_i^\mu\}$ è di rango n , risulta $g(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = \sum_\mu (M_i^\mu)^2 > 0$ [$g(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = -\sum_\mu (M_i^\mu)^2 < 0$] $\forall i$, qed. Se lo stesso spazio sommergente è propriamente pseudoeuclideo con segnatura $\varepsilon(\mu)$, allora $g(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i) = \sum_\mu \varepsilon(\mu) (M_i^\mu)^2$; e questo numero è unicamente determinato dalla segnatura e dalla matrice $\{M_i^\mu\}$.

⁴ Può essere di interesse verificare che la matrice $\{g_{ik}\}$ (nella fattispecie ridotta al singolo elemento g_{11}) della retta totalmente non isotropa di E^2_1 considerata nella S.sez. 3.2.4 è nulla (\equiv singolare). Riferendo E^2_1 a coordinate cartesiane p.ortogonali standard X^1 e X^2 per le quali è $G_{11} = 1$, $G_{22} = -1$, $G_{12} = G_{21} = 0$, l'equazione della retta in questione è $X^1 = X^2 = x^1$, e quindi $g_{11} = \partial X^\mu / \partial x^1 G_{\mu\nu} \partial X^\nu / \partial x^1$ (somma su $\mu, \nu = 1, 2$) = $1 - 1 = 0$.

⁵ Vi sono essenzialmente due modi per evitare la possibilità che $\iota(U)$ si autointersechi. Il primo è legato all'approccio "localistico" alla geometria differenziale, e consiste nel ridurre quanto basta (se possibile) U , passando ad un aperto "più piccolo" incluso in esso. Il secondo è radicale, e consiste semplicemente nel sostituire all'immersione l'embedding. Delle due opzioni, la seconda è la più praticata. Nel seguito ci riferiremo per lo più a varietà immerse piuttosto che

infine assegnarsi la topologia indotta da $E_{m,\pi}$, a sua volta dotato di topologia standard (pitagorica), oppure i suoi aperti potranno definirsi come immagini, attraverso ι , di aperti di U . Le due possibilità, si intuisce e si dimostra, sono equivalenti. Le $(g_{ik}, g^{ik}, g_i^k = \delta_i^k)$ sono le componenti del tensore fondamentale in base locale $\{\mathbf{f}_i\}$, di $\iota(U)$.

È di notevole interesse il seguente problema inverso: “se $g_{ik} = g_{ik}(x)$ è una assegnata $n \times n$ -matrice simmetrica non singolare e di classe C^{r-1} in U , aperto di \mathbb{R}^n , ricercare sotto quali condizioni generali può eventualmente esistere un (E_m, G) e una r -immersione $\iota: U \rightarrow E_m$ per cui la seconda (1) valga in U ”. In altre parole, si tratta di stabilire sotto quali condizioni un dato aperto U di varietà pseudoriemanniana n -dim può essere immerso in uno spazio pseudocartesiano di sufficiente dim m . La questione è di pertinenza della Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali (EDP): si tratta infatti di stabilire un teorema di esistenza per soluzioni X^μ di classe C^r del sistema bilineare omogeneo di EDP in oggetto, dove $G_{\mu\nu}$ è una $m \times m$ -matrice simmetrica ⁶ non singolare *costante* da determinare. Non affronteremo qui questo problema inverso, limitandoci ad osservare che, in via presuntiva, l’esistenza di sue soluzioni richiede che $m \geq n(n+1)/2 \equiv m_{\min}(n) \geq n$, perché in caso contrario vi sarebbero più equazioni che incognite. Una semplice conseguenza delle richieste fatte è che una delle $\binom{m}{n}$ $(n \times m)$ -jacobiane $\partial(X)/\partial(x)$ abbia rango massimale.⁷ Se un tale teorema di esistenza sussiste, allora esso sussiste certamente per il problema “più forte” in cui si richieda a priori che $G_{\mu\nu} = \varepsilon(\mu)\delta_{\mu\nu}$ per certi m *convenienti* segni $\varepsilon(\mu) = \pm 1$. Infatti l’esistenza di una soluzione del secondo problema è assicurata da quella di una soluzione del primo, bastando effettuare su quest’ultima una conveniente trasformazione lineare che sappiamo esistere. D’altra parte, se $m \geq m_{\min}$, ancora l’intuizione suggerisce che manchi un teorema di unicità senza imporre ulteriori convenienti restrizioni alle incognite.

Oltre che di per sé, i problemi inversi cui abbiamo accennato sono importanti in relatività generale, in cui si può partire dall’idea che, in presenza di fenomeni gravitazionali, lo spazio-tempo sia una varietà 4-dim connessa abbastanza regolare (in pratica, di CdC $r \geq 3$) immersa in uno spazio $E_{m,\pi}$ a $m \geq (4 \cdot 5)/2 = 10$ dimensioni, e con tensore fondamentale g_{ik} (che ha CdC $r-1$) non singolare e di indice (costante ⁸) 3 (o 1 con l’opposta convenzione metrica), o **varietà lorentziana**. L’idea è del tutto ammissibile dal punto di vista della modellazione *locale*: il modello funziona, e come vedremo fornisce notevoli servizi nello studio della geometria differenziale (locale) dello spazio-tempo

embedded, almeno fino a che la distinzione tra le due proprietà sia inessenziale. Inoltre sostituirò spesso la locuzione “aperti di varietà” semplicemente con “varietà”, ove il senso sia chiaro dal contesto.

⁶ Come è facile constatare, questa richiesta non è essenzialmente restrittiva.

⁷ Questo problema è stato risolto positivamente in tempi relativamente recenti, provando la tesi sopradescritta sotto opportune condizioni, e in senso locale: si veda ad esempio, per il caso euclideo, É. Cartan, “Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques”, Hermann (1945).

⁸ Vedi (Sez. 8.2, nota ⁽⁶⁾).

(presuntivamente) immerso. Bisogna tuttavia ammettere che nulla di fisicamente concreto sembra corrispondere in questo caso allo spazio sommergente propriamente pseudoeuclideo $E_{m \geq 10, \pi}$, almeno per quanto se ne sa finora; e questo fatto ha certamente contribuito, a partire dal tardo secondo decennio del secolo scorso, ad accelerare la messa a punto di una teoria delle varietà lorentziane, e in generale pseudoriemanniane, **astratte** (cioè non necessariamente immerse in convenienti spazi pseudoeuclidei), delle quali cominceremo ad occuparci nel Cap 4.⁹

Per $n \geq 1$, e riferendoci alla situazione “diretta” (per così esprimerci) in cui si *parte* da una r -immersione propria ι di U (aperto di \mathbb{R}^n) in $E_{m > n, \pi}$ che genera sottospazi $\Pi_n = \Pi_n(x)$ regolari in U , istituiremo ora un calcolo differenziale tensoriale su $\iota(U)$ (ricordiamo che disponiamo già dell'algebra tensoriale in ogni punto $\iota(x)$ di $\iota(U)$). Un **campo** ($\kappa \geq 1$)-**tensoriale** in $\iota(U)$ è semplicemente un elemento scelto in $\Pi_n^{(\kappa)}(x) \equiv \Pi^{(\kappa)}(x)$ dove $\Pi(x)$ è il sottospazio di $E_{m, \pi}$ tangente a $\iota(U)$ in x , supposto regolare $\forall x \in U$, e quindi di segnatura costante in $\iota(U)$.¹⁰ Scriveremo dunque, in analogia con la (3.3.1, 7):

$$(5) \quad \tau_{(\kappa)}(x) = \mathbf{f}_{-i_1 \dots -i_\kappa}(x) \tau_{i_1 \dots i_\kappa}(x),$$

ove per consistenza le $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}(x)$ verranno assunte di CdC $h \leq r-1$. Quando il senso sia chiaro dal contesto, nel seguito ci riferiremo spesso a “campi κ -tensoriali” semplicemente come a “ κ -tensori”. Come al solito, per cominciare ci riferiremo ad un campo vettoriale \mathbf{v} ($\kappa = 1$) di $\Pi^{(1)}(x)$, per il quale

$$(6) \quad \mathbf{v}(x) = \mathbf{f}_i(x) v^i(x) = \mathbf{f}^i(x) v_i(x).$$

Al variare di x in U , questo campo $\mathbf{v}(x)$ varia restando tangente a $\iota(U)$, cioè nel sottospazio tangente $\Pi(x)$. Va da sé che l'operazione “combinazione lineare” di vettori tangenti a $\iota(U)$ (o brevemente “di $\iota(U)$ ”) perde senso se i vettori coinvolti non sono tutti riferiti allo stesso punto x : la loro combinazione, infatti, è in generale un vettore dello spazio sommergente $E_{m, \pi}$, e non di un suo unico sottospazio qualchessia. Ciò avviene in particolare con la differenziazione di un campo $\mathbf{v}(x)$ (avendo supposto $r \geq 2$): $\mathbf{v}(x+dx)$ e $\mathbf{v}(x)$ appartengono a due diversi sottospazi, $\Pi(x+dx)$ e $\Pi(x)$, e $\partial \mathbf{v} / \partial x^d$ ($d = 1, \dots, n$) appartiene ad $E_{m, \pi}$. Possiamo tuttavia candidare al ruolo di derivato “interno” (a

⁹ I matematici coltivavano da tempo questa idea indipendentemente dalla Relatività Generale. Anche a non risalire a Riemann, basterà citare l'importante lavoro di H. Weyl “Die Idee der Riemannschen Fläche”, che è del 1913, in cui l'autore dà una precisa definizione di varietà definita da “carte di coordinate”, creando così una nuova branca della matematica ed aprendo una moderna prospettiva sinottica su analisi, geometria e topologia. La prima definizione di varietà differenziabile “astratta” che sia riportata in un trattato sembra essere quella in “Foundations of Differential Geometry” di Veblen e Whitehead (1932). Della teoria delle varietà differenziabili astratte (che è strumento fondamentale nello studio di problemi di geometria differenziale *globale*) si tratterà a partire dal Cap. 4.

¹⁰ L'unione disgiunta $\cup_{x \in U} \Pi^{(\kappa)}(x)$ si dice **fibrato (bundle) dei** ($\kappa \geq 1$)-**tensori** su $\iota(U)$. Talvolta di questi ($\kappa \geq 1$)-tensori si specifica il tipo, per cui la precedente unione si scrive con $\Pi^{(\kappa, l)}$ in luogo di $\Pi^{(\kappa)}$. Tuttavia questo concetto si sviluppa di solito con riferimento a varietà astratte (\equiv non immerse in alcun spazio pseudoeuclideo) e in quel caso il tipo dello spazio κ -tensoriale si denota in altro modo, vedi Cap 4.

$\iota(U)$), rispetto a x^d , la proiezione su $\Pi(x)$ di questo oggetto, $\wp_{\Pi(x)}(\partial\mathbf{v}/\partial x^d)(x)$. Poiché $v_i = G(\mathbf{v}, \mathbf{f}_i)$, derivando rispetto a x^d troviamo, scrivendo per brevità \wp in luogo di $\wp_{\Pi(x)}$ e supponendo $h \geq 1$,

$$(7) \quad \partial v_i / \partial x^d = G(\partial \mathbf{v} / \partial x^d, \mathbf{f}_i) + G(\mathbf{v}, \partial \mathbf{f}_i / \partial x^d) \equiv G(\wp \partial \mathbf{v} / \partial x^d, \mathbf{f}_i) + G(\mathbf{v}, \wp \partial \mathbf{f}_i / \partial x^d),$$

(avendo anche tenuto conto della tangenzialità di \mathbf{v} e delle \mathbf{f}_i). Se scriviamo $\wp \partial \mathbf{v} / \partial x^d$ come $v_{k/d} \mathbf{f}^k$, il primo addendo nella (7) contribuisce $v_{k/d} \delta_i^k = v_{i/d}$. Quanto al secondo addendo, è facile verificare che

$$(8) \quad \wp \partial \mathbf{f}_i / \partial x^d = \partial^2 X^\mu / \partial x^i \partial x^d \partial X_\mu / \partial x^k \mathbf{f}^k,$$

dove le somme su indici greci vanno come sempre da 1 a m e quelle su indici latini da 1 a n . Una rapida ispezione mostra che a 2° membro della (8) c'è il prodotto di \mathbf{f}^k per l'analogo del 2° membro della (3.3.2, 15) con la sola differenza che la somma su p da 1 a n della (3.3.2, 15) è ora sostituita con la somma su μ da 1 a m . Denotando il fattore di \mathbf{f}^k nella (8) come Γ_{ikd} *anche in questo caso più generale*, quindi ponendo:

$$(9) \quad \Gamma_{ikd} =: \partial^2 X^\mu / \partial x^i \partial x^d \partial X_\mu / \partial x^k,$$

e scrivendo \mathbf{v} come $v_p \mathbf{f}^p$, si ottiene $G(\mathbf{v}, \wp \partial \mathbf{f}_i / \partial x^d) = v_p \Gamma_{ikd} G(\mathbf{f}^k, \mathbf{f}^p) = v_p \Gamma_i^p{}_d$, dove si è ancora posto $\Gamma_i^p{}_d =: \Gamma_{ikd} g^{pk}$. In definitiva, ricordando che $v_{i/d} \mathbf{f}^i = \wp \partial \mathbf{v} / \partial x^d$, otteniamo

$$(10) \quad v_{i/d} = \partial v_i / \partial x^d - v_p \Gamma_i^p{}_d,$$

formalmente identica alla (3.3.2, 8). I coefficienti Γ_{ikd} e $\Gamma_i^p{}_d$, nella loro nuova presente accezione, continuano a chiamarsi **simboli di Christoffel, di 1ª specie** e rispettivamente **di 2ª specie**. Si tenga presente che $v_{i/d}$ è per definizione la componente covariante (i) di $\wp \partial \mathbf{v} / \partial x^d$, il derivato interno a $\iota(U)$, rispetto a x^d , di \mathbf{v} , e quindi doppiamente covariante. In generale, invece, né $\partial v_i / \partial x^d$ né $v_p \Gamma_i^p{}_d$ sono (doppiamente) covarianti per loro conto.

In modo analogo, per la componente controvariante (i) di $\wp \partial \mathbf{v} / \partial x^d$, che denoteremo $v^i{}_d$, si trova:

$$(11) \quad v^i{}_d = \partial v^i / \partial x^d + v^p \Gamma_p^i{}_d,$$

formalmente identica alla (3.3.2, 8bis). In questo caso $v^i{}_d$ è controvariante rispetto all'indice (i) e covariante rispetto all'indice (d) ; mentre nessuno dei due termini a 2° membro ha per suo conto la stessa proprietà. La CdC di $v_{i/d}$ e di $v^i{}_d$ è comunque $h - 1$, perché quella dei Chr2 è $r - 2$, e $\min(h, r-2) \geq h - 1$ per ogni $r \geq 2$ e ogni h con $1 \leq h \leq r - 1$. Le (10), (3.3.2, 11) e le (11), (3.3.2, 11bis) definiscono (equivalentemente) un 2-tensore di $\Pi^{(2)}$ che denoteremo $\delta \mathbf{v}$ (come ∇ , nonostante il suo carattere vettoriale δ non viene scritto in grassetto).

Questi risultati si generalizzano senza difficoltà alle derivate ${}_{/d}$ di componenti miste di un campo κ -tensoriale, pervenendo ad una formula identica alla (3.3.2, 9), diciamo (3.3.2, 9bis), con la sola differenza di reinterpretarvi i coefficienti Γ nel senso che abbiamo appena illustrato. Si

continuerà inoltre a definire una derivazione controvariante ${}^d/d$ mediante la regola ${}^d/d = {}^k/d g^{kd}$. La CdC delle v_i^d e delle $v^{i/d}$ è ancora $h - 1$, perché $\min(h-1, r-1) = h - 1$ nelle solite condizioni $r \geq 2$, $1 \leq h \leq r - 1$. Gli operatori ${}^d/d$ e ${}^d/d$ sono ovviamente lineari e leibniziani rispetto a prodotti (possibilmente contratti); e ancora, le (3.3.2, 11, 11bis) danno un $(\kappa+1)$ -tensore, per costruzione in $\Pi^{(\kappa+1)}$, che denoteremo $\delta\tau_{(\kappa)}$. Infine le (3.3.2, 16) consentono una conferma diretta del carattere di componenti di un $(\kappa+1)$ -tensore (covarianti rispetto all'indice d) degli oggetti a 1° membro della (3.3.2, 9bis).

Valutiamo ora $\delta g_{(2)}$, che ci attendiamo identicamente nullo. Partendo dalla $g_i^k = \delta_i^k$ e applicando la (3.3.2, 9bis), si ha infatti $\delta_i^k/d = 0 - \delta_p^k \Gamma_i^p/d + \delta_i^p \Gamma_p^k/d \equiv 0$. A $g_{(2)}$ e alle combinazioni lineari di sue potenze, come $\varepsilon_{(n)}$, è dunque ancora permesso di attraversare l'operatore (lineare e leibniziano) δ .¹¹ Per concludere, l'intero macchinario del calcolo differenziale assoluto (cioè indipendente da trasformazioni diffeomorfe dalle x alle x'), che avevamo istituito in uno spazio pseudoeuclideo, è trasferito tale e quale su (aperti di) varietà n -dimensionali *immerse* in uno spazio pseudoeuclideo $E_{m>n, \pi}$, dotati di spazi tangenti Π uniformemente regolari ($\det\{g_{ik}\} \neq 0$). In particolare restano valide le osservazioni a proposito del carattere non tensoriale dei Chr1, Chr2, e le loro leggi di trasformazione (v. S.sez. 3.3.2), evidentemente consistenti anche con riguardo alle classi di continuità dei loro termini, che è $r - 2$.¹²

È ormai possibile una veloce rassegna dei cosiddetti **operatori differenziali lineari del 1° ordine in varietà pseudoriemanniane immerse** ($n \geq 1$)-dim, estensioni piuttosto ovvie dei corrispondenti e ben noti operatori in spazi euclidei: il **gradiente** (grad), la **divergenza** (div) e il **rotore** (rot), tra loro strettamente collegati, di un campo tensoriale di CdC 1.

§a) Il gradiente di un $(\kappa \geq 0)$ -tensore (\equiv campo κ -tensoriale) è l'operatore che fa passare da quel κ -tensore al $(\kappa+1)$ -tensore derivato; ad esempio supponendo la derivazione covariante, che fa passare da $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ a $\tau_{i_1 \dots i_\kappa j}$ (indici $i_1 \dots i_\kappa$ generalmente con segno); §

§b) Le divergenze di un $(\kappa \geq 1)$ -tensore si ottengono prendendone il gradiente e contraendo l'indice di derivazione con uno dei κ indici del tensore di partenza. Si ottengono così κ $(\kappa-1)$ -tensori generalmente diversi tra loro, passando da $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ a $\tau_{i_1 \dots i_{\kappa-1} j}$ \equiv $\tau_{i_1 \dots j \dots i_\kappa}^j$, dove j occupa la p -ma

¹¹ Utilizzando questa $\delta g_{(2)} = 0$, si verifica che $v^i/d = g^{ik} v_{k/d}$.

¹² Ci si può chiedere se il calcolo differenziale assoluto su tali (aperti di) varietà immerse sia una genuina generalizzazione di quello su spazi pseudoeuclidei. Di fatto, siamo pervenuti al primo facendo uso di una nozione *più debole*, quella di immersione, di quella (di r -diffeomorfismo) che giocava analogo ruolo nel secondo. Facendo ora $m = n$, si ottiene un calcolo su un aperto di varietà n -dimensionale immerso in E_n , e quindi su un aperto dello stesso E_n , *senza* aver richiesto il carattere diffeomorfo della immersione. La risposta ha due aspetti. In primo luogo, si è conservato il carattere assoluto del calcolo a fronte delle trasformazioni diffeomorfe da x a x' . In secondo luogo, nel calcolo "vecchia maniera" la simmetria $x \leftrightarrow X$ derivava dalla opportunità di esprimere le g^{ik} secondo le (3.3.2, 4bis), e quindi di avere i Chr2 espressi mediante le (3.3.2, 7). Nella formulazione basata sulla semplice immersione, le g^{ik} sono state definite come elementi della matrice inversa di g_{ik} , e i Chr2 sono dati da una generalizzazione della (3.3.2, 15) (somma su μ da 1 a m invece che su p da 1 a n), nella quale non sono presenti le derivate delle x rispetto alle X .

posizione ($1 \leq p \leq \kappa$), ed è da considerare senza segno. Se in particolare $\tau_{(\kappa)}$ è totalmente simmetrico [antisimmetrico], allora si ha una sola divergenza [una sola divergenza a meno del segno]. Nel caso di un vettore v la sua (unica) divergenza può scriversi come $v^i_{;i} = v_i{}^i = (\sqrt{|g|})^{-1} \partial(v^i \sqrt{|g|}) / \partial x^i$, in forza della (3.3.2, 17). Quest'ultima ha l'inconveniente di non evidenziarne il carattere invariante, ma si presta utilmente alle applicazioni. Un $(\kappa \geq 1)$ -tensore avente tutte le sue divergenze nulle si dice **solenoidale**; §

§c) Si distinguono rotori **incompleti** e rotori **completi** di un $(\kappa \geq 1)$ -tensore di una varietà n -dimensionale. Per ottenere un rotore incompleto, si passa al suo gradiente e si contrae l'indice di derivazione, nonché un numero t (con $1 \leq t < \kappa$ e $2t \leq n - 1 + \kappa$) di indici del tensore, con indici dell' n -tensore antisimmetrico di Ricci $\varepsilon_{(n)}$, ottenendo così un $(n-2t-1+\kappa)$ -tensore. Se poi $t = \kappa \leq n - 1$ ($n \geq 2$), si ha invece un (unico a meno del segno) rotore completo, che è un $(n-\kappa-1)$ -tensore. Ovviamente se il campo tensoriale di partenza è simmetrico rispetto ad una o più coppie di indici il suo rotore completo è nullo. Se $\kappa = 1$ (caso di un vettore) e $n \geq 2$, si ha come unico rotore (che è completo), un $(n-2)$ -tensore, cioè un altro vettore se $n = 3$. Quest'ultimo caso sta dunque un po' a sé, ma è proprio quello da cui ha avuto origine la nozione di rotore. Per $n \geq 2$, un rotore di vettore non contiene simboli di Christoffel (perché la parte $v_p \Gamma_{k r}^p$ di $v_{k/r}$ che si contrae rispetto a (k,r) con il tensore di Ricci non dà contributi) e quindi si esprime in termini di derivate parziali standard delle componenti del vettore. Quando il rotore completo di un $(\kappa \geq 1)$ -tensore è nullo, quel tensore si dice **irrotazionale**. Un gradiente è automaticamente irrotazionale, e un rotore completo è automaticamente solenoidale. §¹³

Supponendo il tensore “operando” di congrua classe di continuità, gli operatori differenziali considerati possono essere applicati più volte (lo abbiamo appena fatto considerando rotgrad e divrot), dando luogo ad operatori di ordine superiore al 1°. Tra questi è ben noto ed estremamente importante l'operatore differenziale (invariante, del 2° ordine) divgrad o **laplaciano**, che si denota ∇^2 o talvolta anche Δ . Per definizione è dunque $\nabla^2 =: \cdot_{;i}{}^i$. Un $(\kappa \geq 0)$ -tensore con laplaciano nullo in una varietà si dice ivi **armonico**; e **biarmonico** se ne è nullo il laplaciano del laplaciano. Naturalmente gli aspetti più interessanti dei campi a gradiente nullo, divergenze nulle, rotore

¹³ Evidentemente, le definizioni in (a), b), c)) hanno senso se le derivate che vi sono coinvolte esistono: ad esempio, per parlare di gradiente di uno scalare f occorre che le sue derivate prime esistano (in un dato aperto di definizione). Questo non è tuttavia sufficiente per affermare che il rotore (completo) di quel gradiente sia nullo; occorre anche che le sue derivate seconde *miste esistano e siano simmetriche rispetto agli indici di derivazione*, $f_{;ik} = f_{;ki} \forall (i \neq k)$. Questo è certamente vero, in \mathbb{R}^n , se le derivate $\partial^2 f / \partial x^i \partial x^k$ esistono continue $\forall (i \neq k)$; ma sarebbe ridondante richiedere allo scopo che *tutte* le derivate seconde di f esistano continue, come si fa di norma. Una situazione analoga si verifica riguardo all'identità $\text{divrot} v \equiv 0$ per un campo vettoriale v di classe C^1 in un aperto di \mathbb{R}^3 : essa è assicurata se le derivate del tipo $\partial^2 v_j / \partial x^i \partial x^k$ esistono continue $\forall (i,j,k)$ con i,j,k diversi tra loro, mentre sarebbe ridondante richiedere che *tutte* le derivate seconde di v esistano continue. Benché un po' pedantesche, precisazioni di questo tipo (che potrebbero estendersi ad alcuni casi analoghi) hanno, come meglio vedremo, una loro funzione.

completo nullo, laplaciano nullo, ecc., nascono dallo studio delle equazioni differenzialparziali di cui essi sono soluzioni; ma sono rari i casi in cui le soluzioni di tali equazioni si possono ottenere con mezzi semplici o addirittura banali. Ad esempio, si dimostra che in un aperto di varietà riemanniana 2-dimensionale (per semplicità ci limitiamo qui a questo caso) non esistono tensori di ordine dispari a gradiente nullo che non siano a loro volta nulli, mentre ne esistono di ordine κ pari. Se l'aperto è connesso e $\kappa = 0$, la soluzione è (banalmente) una costante, mentre se $\kappa = 2$, la soluzione è una combinazione lineare del tensore fondamentale e del tensore di Ricci. Conclusioni più generali, ma analoghe, valgono per κ pari > 2 .

3.4.2) IL TENSORE DI RIEMANN IN VARIETÀ IMMERSE

Uno sviluppo di interesse centrale, con il quale entriamo nel calcolo tensoriale differenziale del 2° ordine sugli aperti di varietà immerse, è il seguente. Supponendo $r \geq 3$ e h (CdC di v_i) ≥ 2 , iterando la (3.4.1, 10) otteniamo

$$(1) \quad v_{i/kr} =: (v_{i/k})_{/r} = \partial v_{i/k} / \partial X^r - v_{h/k} \Gamma_{i \ r}^h - v_{i/h} \Gamma_{k \ r}^h = \partial^2 v_i / \partial X^k \partial X^r - \partial v_p / \partial X^r \Gamma_{i \ k}^p - v_p \partial \Gamma_{i \ k}^p / \partial X^r - \\ - (\partial v_h / \partial v^k - v_p \Gamma_{h \ k}^p) \Gamma_{i \ r}^h - (\partial v_h / \partial v^k - v_p \Gamma_{h \ k}^p) \Gamma_{k \ r}^h.$$

Sulla base della (1), possiamo calcolare il “commutatore” di $v_{i/kr}$ rispetto agli indici di derivazione (k,r) , $v_{i/kr} - v_{i/rk}$, o due volte la parte antisimmetrica del 3-tensore $v_{i/kr}$, $v_{i/[kr]}$. Dei quattordici termini di cui esso consta, dieci si elidono l'un l'altro per varie ragioni, e *in particolare quattro di essi in forza della simmetria dei Γ : rispetto agli indici inferiori*. Abbiamo così soltanto quattro termini residui, e possiamo scrivere il risultato nella forma:

$$(2) \quad v_{i/kr} - v_{i/rk} \equiv 2v_{i/[kr]} = -v_j \rho_{i \ kr}^j,$$

avendo posto

$$(3) \quad \rho_{i \ kr}^j =: (\partial \Gamma_{i \ k}^j / \partial X^r + \Gamma_{h \ r}^j \Gamma_{i \ k}^h) - \text{alt}(k,r) \equiv (\partial \Gamma_{i \ k}^j / \partial X^r - \Gamma_{h \ k}^j \Gamma_{i \ r}^h) - \text{alt}(k,r) \equiv 2(\partial \Gamma_{i \ [k}^j / \partial X^{r]} + \Gamma_{i \ [k}^h \Gamma_{h \ r]}^j)$$

dove al solito $\text{alt}(k,r)$ sta per i termini che lo precedono con gli indici (k,r) intercambiati. Poiché a 1° membro della (2) ci sono componenti covarianti di un 3-tensore, $\rho_{i \ kr}^j$ è un 4-tensore in forma mista (tre indici, il primo, terzo e quarto covarianti, e il secondo controvariante), antisimmetrico rispetto ai suoi ultimi due indici. Ovviamente la (2) può scriversi in molte forme equivalenti, ad esempio come

$$(2\text{bis}) \quad v_{i/kr} - v_{i/rk} = -v^j \rho_{ijkr}$$

avendo posto $\rho_{ijkr} =: g_{jh} \rho_{i \ kr}^h$ (dislocazione verticale di un indice tensoriale).

Se $\iota(U)$ è un aperto di spazio pseudoeuclideo, le $\rho_{i'kr}^j$ (e quindi le componenti dello stesso 4-tensore, che noteremo $\rho_{(4)}$, di qualunque altro tipo) sono ivi identicamente nulle; e di ciò si può esser certi anche senza fare verifiche dirette (comunque possibili). Infatti, le componenti del 3-tensore a 1° membro della (2) si ottengono trasformando per 3-cogredienza le corrispondenti componenti cartesiane $\partial^2 V_i / \partial X^k \partial X^r - \text{alt}(k,r)$, che sono identicamente nulle. Questa circostanza viene generalmente meno in una varietà immersa, anche se lo spazio sommergente è euclideo e quindi i suoi sottospazi tangenti alla varietà sono automaticamente regolari ed euclidei. Il 4-tensore $\rho_{(4)}$ si dice **tensore di Riemann** (ρ è stato scelto per questa ragione), o di **Riemann-Christoffel** (o talvolta, ma a rischio di equivoci, “tensore di curvatura”). L’annullarsi di $\rho_{(4)}$ in un aperto di varietà immersa in uno spazio pseudoeuclideo si traduce intuitivamente dicendo che un tale aperto è “piatto”.

Tornando al caso generale di una varietà propriamente immersa in cui $\rho_{(4)}$ è generalmente $\neq 0$, notiamo che la componente ρ_{ipkr} può anche esprimersi in vari altri modi in termini dei Chr1, Chr2 e loro derivate prime, nonché di $g_{(2)}$, ad esempio secondo:

$$(4) \quad \rho_{ipkr} = (g_{jp} \partial \Gamma_{i'k}^j / \partial X^r + \Gamma_{hpr} \Gamma_{i'k}^h) - \text{alt}(k,r),$$

ecc. Le (4) o espressioni equivalenti del tensore di Riemann in termini di coefficienti di Christoffel, loro derivate prime e $g_{(2)}$ sono note come **formule di Gauss**, e mostrano concordemente che il $\rho_{(4)}$ ha CdC $r - 3$.

Poiché i Chr1 sono a loro volta esprimibili attraverso le derivate delle componenti covarianti di $g_{(2)}$ (cfr. la (3.3.2, 17), immediatamente estendibile alla presente situazione), si conclude che ρ_{ipkr} può scriversi in termini di tali componenti (infatti, $g^{jh} = (g^{-1})_{jh}$) e delle loro derivate prime e seconde. Lo sviluppo in questo senso del *primo* termine a 2° membro della (4) porta a

$$(5) \quad \rho_{ipkr} = [(\partial^2 g_{kp} / \partial X^i \partial X^r - \partial^2 g_{ik} / \partial X^p \partial X^r) / 2 + g^{jh} \Gamma_{pjk} \Gamma_{ihr}] - \text{alt}(k,r),$$

dove ci siamo limitati a porre in evidenza le derivate seconde di $g_{(2)}$ (le derivate prime sono nei Chr1).

Le (2) si generalizzano facilmente al caso di un κ -tensore, nella forma

$$(6) \quad \tau_{i_1 \dots i_k / j_h} - \text{alt}(j,h) = \sum_{i(p)=+} \tau_{i_1 \dots i_{(p-1)}^s i_{(p+1)} \dots i_k} \rho_s^{(ip)} j_h - \sum_{i(q)=-} \tau_{i_1 \dots i_{(q-1)}^s i_{(q+1)} \dots i_k} \rho^{(iq)} j_h,$$

con il solito significato delle notazioni (per maggior chiarezza, si è scritto (ip) [(iq)] in luogo di i_p , [i_q], che sta comunque al solito per i_p [i_q]). Per $\kappa = 0$, la (6) dà $\tau_{[ik]} = 0$; ed è proprio così, come mostra una semplicissima verifica diretta, cioè $\tau_{[ik]} = \partial^2 \tau / \partial X^{[i} \partial X^{k]} - \partial \tau / \partial X^p \Gamma_{[i}^p k] \equiv 0$.

L’annullarsi identico del tensore di Riemann è dunque condizione necessaria e sufficiente per l’intercambiabilità dell’ordine di derivazione in derivate 2° di tipo ${}_{/kr}$ di (componenti di qualunque tipo di) tensori arbitrari, e si configura come una possibile importante proprietà

dell'aperto di varietà $\iota(U)$. Ci si aspetta che tale proprietà consista nella identificazione, a meno di isometrie, di $\iota(U)$ con un aperto di spazio pseudoeuclideo.

Per ogni $x \in U$, ricaveremo ora una relazione tra $\rho_{(4)}$ e una famiglia di certi $n(n+1)/2$ vettori a 2 indici $i, k = 1, \dots, n$, simmetrici rispetto a questi indici e *ortogonali* al piano tangente Π ; una relazione a prima vista un po' sorprendente, dal momento che $\rho_{(4)}$ si costruisce in termini della sola metrica g_{ik} (afferendo dunque alla cosiddetta **geometria intrinseca** di $\iota(U)$), mentre un vettore ortogonale a Π è per definizione esterno a $\iota(U)$, e dunque legato alla sua configurazione nello spazio sommergente, ovvero alla **geometria estrinseca** dello stesso $\iota(U)$. Considerando l'elemento i -mo \mathbf{f}_i della base $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1}^n$ di Π alla stregua di un generico vettore di $\iota(U)$, prendiamone la derivata rispetto a x^k . Questa derivata $\partial \mathbf{f}_i / \partial x^k$ non è più, in generale, in Π , ma la sua proiezione su Π lo è per definizione, e quindi $(1 - \wp) \partial \mathbf{f}_i / \partial x^k$ è ortogonale a Π . Ma sappiamo che $\wp \partial \mathbf{f}_i / \partial x^k = \mathbf{f}_p \Gamma_i^p{}_k$ (cfr. la (3.4.1, 8)); per cui, se scriviamo $\mathbf{f}_{i/k}$ per il sopraddetto vettore ortogonale a Π , otteniamo:

$$(7) \quad \mathbf{f}_{i/k} = \partial \mathbf{f}_i / \partial x^k - \mathbf{f}_p \Gamma_i^p{}_k,$$

formalmente identica alla (3.4.1, 10) (anche se qui abbiamo un'uguaglianza tra vettori, e non tra loro componenti, come testimonia il carattere grassetto).¹⁴ Dalla $\partial \mathbf{f}_i / \partial x^k = \mathbf{F}_\mu \partial^2 X^\mu / \partial x^i \partial x^k$ si desume anche che $\mathbf{f}_{i/k}$ è simmetrico rispetto ai suoi due indici: $\{\mathbf{f}_{i/k}\}_{i,k=1,\dots,n}$ è insomma la preannunciata famiglia di vettori ortogonali a Π , simmetrici rispetto ai loro due indici. Si ha poi, tenendo conto della prima delle (3.3.2, 1):

$$(8) \quad G(\mathbf{f}_{i/k}, \mathbf{f}_{j/h}) = \partial^2 X^\mu / \partial x^i \partial x^k (\partial^2 X_\mu / \partial x^j \partial x^h - \partial X_\mu / \partial x^p \Gamma_j^p{}_h).$$

D'altra parte, se tornando alla (4) vi sostituiamo a 2° membro la 2ª (3.4.1, 1), facendo i calcoli (occorre un po' di pazienza) troviamo che gli otto addendi lineari nelle derivate terze delle X rispetto alle x che provengono dai primi due termini a 2° membro delle (4), continue per ipotesi e quindi commutabili per il teorema di Schwarz, si elidono due a due. Qualche ulteriore semplice passaggio porta infine alla:

$$(9) \quad G(\mathbf{f}_{i/k}, \mathbf{f}_{j/h}) - \text{alt}(k,h) = \rho_{ijkh},$$

che è la preannunciata relazione tra il tensore di Riemann e la famiglia $\{\mathbf{f}_{i/k}\}$ di vettori ortogonali a Π .¹⁵

Tenendo conto della simmetria $\mathbf{f}_{i/k} = \mathbf{f}_{k/i}$, la (9) permette nel modo più semplice di accertare le seguenti proprietà algebriche di $\rho_{(4)}$ (che potrebbero comunque dedursi anche direttamente dalle

¹⁴ Si intuisce e si dimostra facilmente che le $\mathbf{f}_{i/k}$ si comportano formalmente come le componenti covarianti di un tensore doppio simmetrico a fronte delle solite trasformazioni da x a x' , nel senso che $\mathbf{f}'_{i/k} = \partial x^j / \partial x'^i \mathbf{f}_{j/h} \partial x^h / \partial x'^k$, se $\mathbf{f}_{j/h}$ è data dalla (5) e $\mathbf{f}'_{i/k}$ dalla stessa con \mathbf{f}' , x' e Γ' in luogo di \mathbf{f} , x e Γ .

¹⁵ La (7) sottolinea una circostanza che converrà tenere presente nel seguito, e cioè che mentre una ragionevole definizione di $\rho_{(4)}$ presuppone che le X siano di CdC $r \geq 3$, di fatto poi le derivate terze, che devono comunque esistere ed essere continue, non figurano nello stesso $\rho_{(4)}$. Del resto il 1° membro della (7) è evidentemente di CdC $r-2$.

definizioni). Indicando come al solito con $(\)$ e $[\]$ gli operatori di simmetrizzazione e rispettivamente di antisimmetrizzazione, abbiamo:

$$(10_1) \quad \rho_{(ip)kr} \equiv 0, \text{ ovvero } \rho_{ipkr} \equiv \rho_{[ip]kr} \text{ (antisimmetria rispetto ai primi due indici);}$$

$$(10_2) \quad \rho_{ip(kr)} \equiv 0, \text{ ovvero } \rho_{ipkr} \equiv \rho_{ip[kr]} \text{ (antisimmetria rispetto agli ultimi due indici);}$$

$$(10_3) \quad \rho_{ipkr} + \rho_{ikrp} + \rho_{irpk}, \text{ ovvero } (\rho_{ipkr} + \text{permutazione ciclica sugli ultimi 3 indici}) \equiv 0 \text{ ("ciclicità")}$$

¹⁶ ;

$$(10_4) \quad \rho_{ipkr} \equiv \rho_{krip} \text{ (simmetria rispetto alle coppie del primo/terzo e secondo/quarto indice).}$$

Le (10) non sono tutte indipendenti: ad esempio, le (10₄) discendono dalle prime tre (10). Un calcolo combinatorico che lasciamo al lettore porta alla conclusione che, in forza delle (10), soltanto $n^2(n^2-1)/12$ delle n^4 componenti di $\rho_{(4)}$ sono algebricamente indipendenti: cioè una per $n = 2$, sei per $n = 3$, venti per $n = 4$, ecc.

Le (10) sono anche un buon punto di partenza per dimostrare le importanti **identità di Bianchi** (tout court), che coinvolgono il 5-tensore derivato del tensore di Riemann, $\nabla\rho_{(4)}$, e cioè:

$$(11) \quad \rho_{ipkr/h} + \rho_{iprh/k} + \rho_{iphk/r} = \rho_{ipkr/h} + \text{cicl}(k,r,h) \equiv 0,$$

ove ${}_{krh} + \text{cicl}(k,r,h) \equiv {}_{krh} + {}_{rhk} + {}_{hkr}$. Per dimostrarle, supposte ancora le $X(x)$ di CdC $r \geq 3$, cominceremo con l'applicare alle $\mathbf{f}_{i/k}$ una derivazione covariante rispetto a x^h ; vale a dire, secondo la (3.3.2,18),

$$(12) \quad (\mathbf{f}_{i/k})_{/h} \equiv \mathbf{f}_{i/kh} =: \partial\mathbf{f}_{i/k}/\partial x^h - \mathbf{f}_{p/k}\Gamma_i^p{}_h - \mathbf{f}_{i/p}\Gamma_k^p{}_h.$$

Questi vettori sono ben definiti, risultando precisamente:

$$(13) \quad \mathbf{f}_{i/kh} = \mathbf{F}_\mu [\partial^3 X^\mu / \partial x^i \partial x^k \partial x^h - (\partial^2 X^\mu / \partial x^p \partial x^h \Gamma_i^p{}_k + \text{cicl}(h,i,k)) + \partial X^\mu / \partial x^p (\Gamma_j^p{}_k \Gamma_i^j{}_h + \Gamma_j^p{}_i \Gamma_k^j{}_h - \partial \Gamma_i^p{}_k / \partial x^h)].$$

Da queste si trae quasi immediatamente:

$$(14) \quad \mathbf{f}_{i/kh} - \mathbf{f}_{i/hk} \equiv \mathbf{f}_p \rho_i^p{}_{hk} \text{ }^{17};$$

e questa prova tra l'altro che le differenze a 1° membro *non* contengono derivate terze delle X (come è vero per $\rho_{(4)}$) e sono in Π . Se a questo punto si costruisce il 1° membro delle identità di Bianchi partendo dalle (9), tale 1° membro risulta uguale alla somma di sei prodotti $G(\cdot, \cdot)$ tra un vettore *ortogonale* (del tipo $\mathbf{f}_{i/k}$) ed un vettore *tangenziale* (del tipo $2\mathbf{f}_{p/[jh]}$), per cui si ottiene identicamente zero, qed ¹⁸. Quando non sono già delle identità sulla sola base delle (10) (e dunque

¹⁶ Le (10₃) sono anche note come identità cicliche o anche come **prime identità di Bianchi**. Se si usa la seconda denominazione, quelle che saranno introdotte come "identità di Bianchi" tout court (vedi eq. (11)) si diranno **seconde identità di Bianchi**.

¹⁷ Anche in questo caso, il 1° membro della (14) è a priori di CdC $r-3$, ma di fatto $r-2$, come il 2° membro. La richiesta continuità delle derivate terze delle X , nel 1° membro delle (13), è nondimeno necessaria per ottenere da essa la (14) facendo uso del teorema (di Schwarz) della invertibilità dell'ordine delle derivazioni.

¹⁸ Esistono dimostrazioni meno laboriose delle identità di Bianchi, la più nota delle quali consiste nel far uso di coordinate cosiddette (in relatività generale) **localmente inerziali**, o più in generale **localmente geodetiche**, nel punto

prescindendo dalla effettiva espressione delle componenti di $\rho_{(4)}$ in termini di g_{ik} , le identità di Bianchi riflettono il fatto che le componenti *algebricamente* indipendenti di $\rho_{(4)}$, che sono $n^2(n^2-1)/12$, si esprimono, come funzioni di x , in termini dei soli campi $g_{ik}(x)$, che sono $n(n+1)/2$. Si noti in particolare che l'equazione $n^2(n^2-1)/12 = n(n+1)/2$ è soddisfatta da, e solo da, $n = 3$.

Da un generico ($\kappa \geq 2$)-tensore si possono ricavare $\binom{\kappa}{2}$ ($\kappa-2$)-tensori per contrazione rispetto a una coppia di indici, e da ciascuno di questi, se $\kappa \geq 4$, $\binom{\kappa-2}{2}$ ($\kappa-4$)-tensori, .. e così via. Questi ($\kappa-2$)-tensori, ($\kappa-4$)-tensori .., scalari (κ pari) o vettori (κ dispari), si dicono **tracce** del tensore originale. Se κ è pari, gli scalari sono $\binom{\kappa}{2} \binom{\kappa-2}{2} \dots \binom{2}{2}$. Per $\kappa = 2$ abbiamo un unico scalare, mentre per $\kappa = 4$ abbiamo sei 2-tensori e sei scalari in tutto. Se ci riferiamo a $\rho_{(4)}$, si vede subito che vi sono solo due tracce (un 2-tensore simmetrico e uno scalare) algebricamente indipendenti. Esse sono

$$(15_1) \quad \rho_{ik} =: \rho_i^j{}_{jk},^{19} \text{ e}$$

$$(15_2) \quad \rho =: \rho_i^i.$$

La prima traccia è il cosiddetto **2-tensore simmetrico di Ricci**,²⁰ e la seconda è lo **scalare di curvatura** (o più tradizionalmente **curvatura scalare**²¹). Entrambe hanno grande importanza, anche nelle applicazioni relativistiche.

Tornando alle identità di Bianchi (11), e contraendole rispetto al secondo e terzo (o alternativamente primo e quarto) indice, otteniamo $0 \equiv \rho_{ik/r} + \rho_i^j{}_{kr/j} - \rho_{ir/k}$; e contraendo ancora rispetto a i e k , $0 \equiv 2\rho^j{}_{r/j} - \rho_r$; ossia, posto $S_r^j =: \rho_r^j - g_r^j \rho/2$,

$$(16) \quad S_r^j \equiv 0.$$

Si vede così che il tensore simmetrico S_r^j (di traccia $S_j^j = \rho(1-n/2)$), detto **2-tensore di Einstein** per $n = 4$, ha le sue n divergenze identicamente nulle.²²

di interesse x . In queste coordinate, che si dimostrano esistere comunque, tutti i simboli di Christoffel sono nulli in quel punto x , e quindi le derivate covarianti vi coincidono con la derivate ordinarie. Poiché il 2° termine a 2° membro delle (4) è bilineare nelle Γ , si resta soltanto col 1° termine quando di quel 2° membro si prende la $\partial/\partial x^h$, e si hanno subito le (11) con derivate ordinarie al posto delle covarianti; scrivendo in queste ${}_{jh}$ al posto di $\partial/\partial x^h$, come è lecito in coordinate localmente geodetiche, e passando infine a coordinate generali, le (11) seguono per il principio di invarianza. Ancora un'altra possibilità è quella di partire dalla (6) per generiche componenti di tipo $v_{i/k}$. Si ha così: $v_{i/kjh} - v_{i/khj} \equiv v_{p/k} \rho_i^p{}_{hj} + v_{i/p} \rho_k^p{}_{hj}$. Da queste identità se ne ricavano altre due analoghe per permutazione ciclica dei tre indici (k,j,h) ; sommando le tre identità risultanti, e tenendo conto delle (10₃), si trova $v_j \rho_i^j{}_{kr/h} + \text{cicl. } (k,r,h) \equiv 0$, che a sua volta implica le (11) per l'arbitrarietà di v_j .

¹⁹ Alcuni autori preferiscono riferirsi all'opposto ρ_{ijk}^j .

²⁰ È questo uno dei due "tensori di Ricci" (oltre all' n -tensore totalmente antisimmetrico $\varepsilon_{(n)}$) cui si è accennato nella precedente Sez. 3.3. L'altro è un 2-tensore simmetrico definito soltanto su una 3-varietà secondo $\alpha_{ik} =: \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{krs} \rho^{pqrs}/4$, ed è legato al tensore di Riemann contratto dalla $\rho_{ik} = \alpha_{ik} - \alpha g_{ik}$, dove α denota l'invariante lineare α_i^i . Prendendo l'invariante lineare della precedente uguaglianza si ha $\rho = -2\alpha$, che evidenzia un semplicissimo legame tra i due invarianti.

²¹ Tale seconda denominazione non è molto felice, perché una "curvatura" è tipicamente pensata come reciproco di una lunghezza (il corrispondente "raggio di curvatura"), mentre ρ è dimensionalmente il reciproco di un'area. Vi sono parecchi casi come quello menzionato nella nota precedente, in cui una venerabile tradizione impone il nome di "curvatura" al reciproco di una lunghezza al quadrato, o addirittura ad una potenza $p > 2$, vedi la prossima Sez. 3.5. Un accettabile rimedio può essere quello di nominare queste (curvature)^p come **p-curvature**.

È assai naturale, a questo punto, cercare di decomporre $\rho_{(4)}$ nella somma di un 4-tensore $\chi_{(4)}$ con tutte le sue tracce nulle, e di un 4-tensore con le stesse due tracce di $\rho_{(4)}$. Questa decomposizione è stata indicata da H. Weyl²³ secondo la seguente (valida per $n > 2$)

$$(17) \quad \rho_{ipkr} = \chi_{ipkr} + (g_{ir}\rho_{pk} + g_{pk}\rho_{ir} - g_{pr}\rho_{ik} - g_{ik}\rho_{pr})(n-2)^{-1} + \rho(g_{ik}g_{pr} - g_{ir}g_{pk})(n-1)^{-1}(n-2)^{-1}.$$

Il **4-tensore di Weyl** $\chi_{(4)}$ è soggetto agli stessi vincoli algebrici di $\rho_{(4)}$ (vedi eq. (10)), e in più a $\chi_{i^p pr} \equiv \chi_{ir} = 0$. Si verifica subito che $\chi_{(4)}$ è effettivamente privo di traccia $\chi_{(2)}$ (e quindi di traccia $\chi_{(0)}$), e che è identicamente nullo per $n = 3$. Poiché $\chi_{(2)}$ è simmetrico, i vincoli algebrici in più (rispetto a $\rho_{(4)}$) su $\chi_{(4)}$ sono $n(n+1)/2$, per cui le componenti algebricamente indipendenti di $\chi_{(4)}$ sono $n(n+1)(n+2)(n-3)/12$ (dieci per $n = 4$).

Da quanto se ne è detto, si comprende che il tensore di Riemann gioca un ruolo chiave nella geometria differenziale di una varietà immersa (ma anche astratta, vedi oltre). Va tuttavia osservato che le sue $n^2(n^2-1)/12$ componenti algebricamente indipendenti non hanno un significato intrinseco, perché dipendono anche dalle coordinate prescelte. Hanno invece significato intrinseco quegli invarianti (**invarianti di curvatura**) che si possono costruire partendo da $\rho_{(4)}$ e $g_{(2)}$ (ed eventualmente da $\varepsilon_{(n)}$). La completa ricognizione di questi invarianti non è un problema semplice, ma la loro enumerazione può essere facilmente discussa. Supposto $n > 2$,²⁴ si deve considerare che, dal totale di $n^2(n^2-1)/12 + n(n+1)/2$ componenti indipendenti di $\rho_{(4)}$ e di $g_{(2)}$, bisogna sottrarre il numero degli n^2 elementi (arbitrari e indipendenti) della matrice jacobiana della generica trasformazione $x \mapsto x'$ che ne affettano artificialmente i valori in un dato punto x .²⁵ Un conteggio effettivo mostra allora che gli invarianti in oggetto sono in tutto $n(n-1)(n-2)(n+3)/12$, quindi tre per $n = 3$ e quattordici per $n = 4$. Si noterà anche che la differenza tra questo numero e quello delle componenti indipendenti del tensore di Weyl è n ; e ciò suggerisce che n invarianti di curvatura possano essere gli autovalori (che sono ovviamente reali) del tensore di Ricci, supposti non degeneri, e che il saldo al totale dianzi indicato venga dato dalle componenti del tensore di Weyl in un particolare riferimento specificabile “intrinsecamente”. Questo è appunto quanto una completa discussione del problema dimostra²⁶.

²² Questo fatto gioca un ruolo centrale nella induzione delle equazioni gravitazionali. Infatti, considerandolo come operatore differenziale agente sulle g_{jh} (che sono 10 per $n = 4$), S_{ik} è esattamente l'operatore così denominato e denotato nella Sez. 9.1, ossia il 1° membro delle equazioni einsteiniane. Un po' paradossalmente, per un certo tempo Einstein non si rese conto della solenoidalità del “suo” 2-tensore.

²³ H. Weyl, *Math. Zeit.* **2**, 384 (1918).

²⁴ Il ragionamento che segue decade infatti se $n = 2$, perché vi è allora un sottogruppo ad un parametro di trasformazioni che non hanno effetto né su $\rho_{(4)}$ né su $g_{(2)}$. Il numero degli invarianti di curvatura è allora uno e non zero, ossia l'unica componente non-banale del tensore di Riemann.

²⁵ Si noterà che $n^2 - n(n+1)/2$ è anche il numero delle rotazioni possibili in uno spazio n -dimensionale, il che porta alle stesse conclusioni circa il numero degli invarianti di curvatura.

²⁶ A.Z. Petrov, “Einstein Spaces”, Pergamon Press 1969.

Abbiamo visto che $\rho_{(4)}$ è identicamente nullo in un aperto pseudoeuclideo. Vale anche il fondamentale **teorema inverso di Riemann** enunciato e dimostrato qui appresso.

T1. «Si consideri un aperto di varietà n-dimensionale semplicemente connesso immerso in uno spazio pseudoeuclideo m-dim e descritto dalle $X^\mu = X^\mu(x)$ (ove $\mu = 1 \dots, m \geq n$) di CdC $r \geq 3$ per x in U (aperto) $\subset \mathbb{R}^n$, sotto la condizione che il relativo $\rho_{(4)}(x)$ (che è ivi di CdC $r-2$) sia identicamente nullo in U . Allora esiste un $(r-2)$ -diffeomorfismo $x \mapsto x'$ per il quale le corrispondenti g'_{ik} sono costanti in U ».

Dim. Ricordiamo che $g_{(2)}(x)$ è non singolare e di CdC $r-1$ (cfr. eq. (1)), mentre la CdC dei Chr2 è $r-2$. Ricerchiamo, se esiste, un campo vettoriale $\mathbf{t} = t_j \mathbf{f}^j = t^j \mathbf{f}_j = \mathbf{t}(x)$ definito nell'aperto di varietà considerato, e che sia ivi "costante" nel senso che

$$(18) \quad t_{j/k} = 0, \text{ ovvero } \partial t_j / \partial x^k = \Gamma_{jk}^p t_p,$$

$\forall x$ in U . L'Analisi insegna che in U esiste una e una sola soluzione t_j (per costruzione di CdC $r-1$) del sistema differenziale lineare di n equazioni in n incognite (18), avente prescritti valori t_{j_0} in un punto x_0 di U , se in U sono soddisfatte le condizioni di integrabilità $\partial(\Gamma_{jk}^p t_p) / \partial x^h - \text{alt}(k,h) = 0$ $\forall (j,h,k)$; cioè, come si verifica agevolmente, se $t_p \rho_{j^p}^{hk} = 0$ in U , come è vero per ipotesi. Dunque \mathbf{t} esiste unico in U sotto le condizioni iniziali in x_0 . Questo campo vettoriale può scriversi come gradiente di un potenziale $\varphi = \varphi(x)$ se in U valgono le condizioni di integrabilità $\partial t_j / \partial x^h = \partial t_h / \partial x^j$; ma tali condizioni sono effettivamente soddisfatte per costruzione in forza delle (18) e della simmetria delle Γ rispetto ai due indici inferiori. Poiché l'aperto di varietà considerato è semplicemente connesso per ipotesi, anche φ esiste unica in U sotto la condizione iniziale $\varphi(x_0) = \varphi_0$ (ad es. $\varphi_0 = 0$). Esistono poi esattamente n vettori costanti in U come \mathbf{t} e ivi linearmente indipendenti (l.i.), diciamo $\mathbf{t}_{(z)}$, per $z = 1, \dots, n$: basterà scegliere, come è certamente possibile, n vettori iniziali $\mathbf{t}_{(z)0}$ (in x_0) linearmente indipendenti, cioè tali che $\det\{\mathbf{t}_{(z)0}\} \neq 0$. Infatti in questo caso $\text{Gr}(\{\mathbf{t}_{(z)}\}) \equiv \det G(\mathbf{t}_{(z)}, \mathbf{t}_{(w)}) = g(\det\{\mathbf{t}_{(z)j}\})^2 \neq 0$ in x_0 ; e d'altra parte $\partial / \partial x^h G(\mathbf{t}_{(z)}, \mathbf{t}_{(w)}) = \partial / \partial x^h (t_{(z)j} t_{(w)j}) = t_{(z)j/h} t_{(w)j} + t_{(z)j} t_{(w)j/h} \equiv 0$. Quindi $G(\mathbf{t}_{(z)}, \mathbf{t}_{(w)})$ conserva in U il valore che ha in x_0 , e lo stesso vale per il suo determinante (che è diverso da 0 in x_0 per costruzione). In definitiva gli n vettori si conservano l.i. in U . Le corrispondenti n funzioni potenziali $x'^z = \varphi_{(z)}(x)$, di CdC $r-2$ in U , costituiscono l' $(r-2)$ -diffeomorfismo cercato. Infatti il relativo jacobiano $\det\{\partial x'^z / \partial x^h\}$ coincide con $\det\{\mathbf{t}_{(z)j}\}$, che è a sua volta uguale a $+o-$ la radice quadrata del rapporto tra una costante $\neq 0$ e con lo stesso segno di g (cioè $\text{Gr}(\{\mathbf{t}_{(z)}\})$ e g stesso, e quindi $\neq 0$ in U . La (3.3.2, 16₂), riferita alle coordinate $x'^z = \varphi_{(z)}(x)$, ha ora il suo 2° membro nullo in U (perché $\Gamma_{p^u}^q t_{(i)u} - \partial t_{(i)p} / \partial x^q = 0$ in U $\forall (i,p,q)$), e dunque anche i Chr2 del 1° membro sono nulli in U . Si conclude che tutte le derivate

parziali di g'_{ik} sono nulle in U (perché lo sono anche i corrispondenti Chr1), in forza della (3.3.2, 12bis); qed. #

In accordo con quanto si suggeriva più sopra, un aperto di varietà immersa nel quale $\rho_{(4)}$ sia identicamente nullo si dice **piatto**, e può essere identificato con un aperto di spazio pseudoeuclideo. La scelta di questo attributo, nonché del suo opposto **curvo** quando valga la negazione della precedente proprietà (come del resto del già introdotto termine “curvatura”), sarà lumeggiata nella prossima Sez. 3.5, che contiene una rassegna della cosiddetta “Teoria della Curvatura” per (sotto)varietà immerse (o embedded) in uno spazio *euclideo*.

3.5) TEORIA DELLA CURVATURA PER VARIETÀ EMBEDDED IN UNO SPAZIO EUCLIDEO

3.5.1) INTRODUZIONE

Questa ultima sezione del capitolo è dedicata alla geometria differenziale locale di ordine $p \geq 2$ di (aperti di) una varietà n -dimensionale M^n (propriamente) embedded¹ in uno spazio euclideo E_m ($m > n$)-dim $\equiv \mathbb{R}^m$ (quindi automaticamente una varietà riemanniana, con metrica *indotta* definita positiva), possibilmente orientato. Come si vedrà, ci spingeremo fino a $p = m$ per $n = 1$ (caso delle curve), mentre ci limiteremo a $p = 2$ per $1 < n < m$. Particolare attenzione sarà riservata al caso $m = n + 1$, quando cioè M^n sia una **ipersuperficie** (o semplicemente **superficie** se $m = 3$). Nel loro insieme, questi aspetti della geometria differenziale locale presentano grandissimo interesse concettuale e storico (si può infatti dire che l'intero corpo della disciplina prese sostanzialmente avvio dal loro studio, nel primo Ottocento e soprattutto per opera di Gauss, almeno per $n = 2$ e $m = 3$), ed hanno una fondamentale funzione propedeutica ai nostri fini a seguire.

Buona parte dei problemi geometrico-differenziali di ordine $p \geq 2$ afferiscono alla cosiddetta “Teoria generale della Curvatura”. La condizione, alla quale ci atterremo, che lo spazio sommergente E_m sia euclideo² è essenziale se si vuole evitare che la sua forma quadratica Q si annulli per qualche vettore non nullo. La teoria della curvatura può allora svilupparsi nel modo tradizionale evitando le difficoltà derivanti dalla esistenza di vettori non nulli ma di pseudomodulo nullo. Nel seguito, converrà denotare con $q \equiv \langle q^{1 \leq i \leq n} \rangle$ le n coordinate (di \mathbb{R}^n , o di un suo aperto) alle quali viene riferita M^n , e con \mathbf{x} il punto di $\mathbb{R}^{m \geq n}$; per brevità, inoltre, in questa sezione scriveremo (\cdot, \cdot) per il prodotto interno, in luogo di $G(\cdot, \cdot)$.

La situazione più elementare si ha per $n = 1$ ed $m = 2$ (curve del piano euclideo \mathbb{R}^2 , che converrà supporre orientato), che ricordiamo qui appresso. Sia dunque $q \in I \mapsto \mathbf{x} \in E_2$, dove $I =: (0,1)$, un 2-embedding (quindi per definizione $|d_q \mathbf{x}| > 0$ in I) di I in \mathbb{R}^2 orientato, $\mathbb{R}^{2^{\wedge}}$; sia poi

$$(1) \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}(q) =: (d_q \mathbf{x} / |d_q \mathbf{x}|)(q)$$

¹ Qui e nel seguito della sezione, per evitare possibili autointersezioni ci si potrebbe limitare a considerare r -immersioni di un aperto *abbastanza piccolo* di \mathbb{R}^n ; ma per semplicità, noi faremo di norma la più forte richiesta che quelle r -immersioni siano in effetti r -embeddings. Eviteremo anche di ricordare il carattere locale della teoria, dicendo semplicemente “varietà” per “aperto di varietà”, ecc.

² O possibilmente antieuclideo. Quest'ultimo caso richiede alcuni banali aggiustamenti rispetto a quello euclideo, e sarà tralasciato.

il versore tangente all'arco piano aperto $\mathbf{x}(I)$, diretto nel verso della q crescente, in $\mathbf{x}(q)$, e $\alpha = \alpha(q)$ ($\in C^1(I)$) l'angolo (con segno) che $\mathbf{t}(q)$ fa con una prefissata direzione orientata di $\mathbb{R}^{2^{\wedge}}$. Allora, $\forall q \in I$,

$$(2) \quad \kappa = \kappa(q) =: (d_q \alpha / |d_q \mathbf{x}|)(q)$$

si definisce come **curvatura con segno** dell'arco $\mathbf{x}(I)$ nel punto $\mathbf{x}(q)$. Si noti che κ riceve un segno solo in quanto $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^{2^{\wedge}}$ sia orientato (cioè vi sia prescritto un senso di rotazione). Se si pone $s = s(q) =: \int_{q'=0}^q |d_{q'} \mathbf{x}|(q') dq'$, la funzione $s(q)$ è $C^2(I)$, con valori in $I_1 =: (0, s(1))$ e ivi monotona crescente, è quindi unicamente invertibile in $q = q(s)$, anch'essa $C^2(I_1)$. Le definizioni (1,2) possono allora semplificarsi in

$$(1\text{bis}) \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}(s) =: d_s \mathbf{x}(s),$$

e rispettivamente in

$$(2\text{bis}) \quad \kappa = \kappa(s) =: d_s \alpha(s),$$

dove $\mathbf{x}(q(s))$, $\mathbf{t}(q(s))$, ecc., si sono riscritti come $\mathbf{x}(s)$, $\mathbf{t}(s)$, ecc.

Se $\kappa(s_0) = 0$ per un valore s_0 isolato di I_1 , $\mathbf{x}(s_0)$ si dice un **punto di flesso** di $\mathbf{x}(I_1)$. $\mathbf{x}(I_1)$ è poi un segmento rettilineo (aperto, e orientato secondo la q crescente) sse $\kappa(s) \equiv 0$ in I_1 . Supposto > 0 , $|\kappa(s)|$ eguaglia il reciproco del raggio del cerchio (di $\mathbb{R}^{2^{\wedge}}$) che ha un contatto del 2° ordine con $\mathbf{x}(I_1)$ (**cerchio osculatore** di $\mathbf{x}(I_1)$ nel punto $\mathbf{x}(s)$, e che giace, rispetto a $\mathbf{x}(I_1)$, dalla parte della sua concavità). Dicendo x, y le coordinate cartesiane ortogonali standard di $\mathbb{R}^{2^{\wedge}}$, e dando all'angolo $d\alpha$ l'usuale segnatura sinistrorsa, l'arco $\mathbf{x}(I_1)$ si descriverà nella forma $y = y(x)$. Si trova così che $\kappa = y'' / (1 + y'^2)^{3/2}$, ove l'apice denota la derivata d_x . Se poi $\kappa(s) \equiv \text{cost} > 0$ in I_1 , $\mathbf{x}(I_1)$ è un arco (aperto) di cerchio di raggio $1/\text{cost}$.

La teoria della curvatura nasce da questi elementari concetti, per poi svilupparsi nelle loro molte possibili ramificazioni e generalizzazioni, a diversi e crescenti livelli di astrazione. Si considerano così: (i) le $m - 1$ **curvature** ($m \geq 2$) di un arco di classe di continuità (CdC) m embedded in \mathbb{R}^m ; (ii) le infinite **2-curvature** di una ipersuperficie ($n \geq 2$)-dim di CdC 3 embedded in \mathbb{R}^{n+1} , o (iii) di una varietà di CdC 3 embedded in $\mathbb{R}^{m > (n+1)}$ o (iv) in $E_{m \geq (n+1), \pi}$ pseudoeuclideo; (v) le **curvature** di una varietà differenziabile astratta (di CdC 3, ($n \geq 2$)-dim) a metrica generalmente indefinita, .. e via dicendo. Nella loro accezioni più avanzate, le curvature possono addirittura non essere numeri, ma applicazioni, o gruppi, ecc. Nel resto di questa sezione, ci limiteremo a considerare aspetti della teoria relativa ai casi (i), (ii) e (iii).

3.5.2) CASO DELLE CURVE, $n = 1$

Il caso $m = 3$ di (i) è ancora elementare e ben noto. Partendo da un 3-embedding $q (\in I) \mapsto \mathbf{x} (\in \mathbb{R}^3)$, (quindi per definizione $|d_q \mathbf{x}| > 0$ in I), sia ancora $\mathbf{t} =: d_s \mathbf{x}$ (versore tangente, di CdC 2), e

$$(1) \quad \kappa = \kappa(s) =: |d_s \mathbf{t}|(s) \geq 0.$$

Nel seguito riferiremo la curva alla sua coordinata naturale s , che converrà pensare in I piuttosto che in I_1 , dividendo per $s(1)$ l'originale coordinata q . Per definizione, la **curvatura assoluta** (o anche **1^a curvatura**) dell'arco spaziale $\mathbf{x}(I)$, nel punto $\mathbf{x}(s)$, è adesso questa funzione $\kappa(s)$, evidentemente ≥ 0 e $C^1(I)$; vale a dire, la nuova curvatura è "assoluta" a differenza di quella di un arco piano dianzi introdotta. Distingueremo due possibilità, e cioè (a) $d_s \mathbf{t} \neq 0$ in tutto I , e (b) \equiv la negazione di (a).

Cominciando con (a), sia

$$(2) \quad \kappa \mathbf{n} =: d_s \mathbf{t};$$

questa definisce un vettore $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$, evidentemente unitario, $C^1(I)$ e ortogonale a \mathbf{t} ($1 = (\mathbf{t}, \mathbf{t}) \Rightarrow (d_s \mathbf{t}, \mathbf{t}) = 0$), che si dice **versore normale principale**, dell'arco $\mathbf{x}(I)$, in $\mathbf{x}(s)$. Il piano di $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{t}(s)$ o **piano osculatore** della curva in $\mathbf{x}(s)$, si definisce come il piano con cui essa ha un contatto del 2° ordine. Infine,

$$(3) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(s) =: (\mathbf{t} \times \mathbf{n})(s),$$

che è a sua volta unitario e $C^1(I)$ (nonché ovviamente normale a \mathbf{t} e a \mathbf{n} , quindi al piano osculatore), si dice **versore binormale** (di $\mathbf{x}(I)$, in $\mathbf{x}(s)$). Per l'unitarietà di \mathbf{b} , $(d_s \mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$; e per l'ortogonalità di \mathbf{b} a \mathbf{t} e a \mathbf{n} , tenuto conto della (2), $(d_s \mathbf{b}, \mathbf{t}) = 0$. Dunque $d_s \mathbf{b}$ (che è $C(I)$) è ortogonale a \mathbf{b} e a \mathbf{t} , ossia parallelo a \mathbf{n} . Potremo pertanto scrivere:

$$(4) \quad d_s \mathbf{b} = \tau \mathbf{n},$$

ove $\tau = \tau(s)$ è una conveniente funzione di s in I , di classe $C(I)$, che si dice **torsione** (o anche **2^a curvatura**) dell'arco, in $\mathbf{x}(s)$. Resta da esprimere $d_s \mathbf{n}$, ciò che si ottiene subito derivando la $-\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}$. Il risultato è:

$$(5) \quad d_s \mathbf{n} = -\tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t},$$

di classe $C(I)$.³ Le (2,4,5) sono tradizionalmente note come **formule di Frénet-Serret**⁴; alcune loro ovvie conseguenze sono $\tau^2 = |d_s \mathbf{b}|^2$ (oltre all'analogo $\kappa^2 = |d_s \mathbf{t}|^2$), $\kappa^2 + \tau^2 = |d_s \mathbf{n}|^2$ (quindi, $|d_s \mathbf{n}|^2 =$

³ Si verifica senza difficoltà che, in forza delle (2,4,5) sono soddisfatte tutte le relazioni che derivano dalla unitarietà di \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} e dalla loro mutua ortogonalità secondo la (3). Ad esempio, da $(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = 0$ segue $(d_s \mathbf{n}, \mathbf{t}) + (\mathbf{n}, d_s \mathbf{t}) = 0$, e il 1° membro di questa vale effettivamente $-\kappa + \kappa$ per le (2,5); oppure $d_s \mathbf{t} = d_s \mathbf{n} \times \mathbf{b} + \mathbf{n} \times d_s \mathbf{b} = (-\kappa \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}) \times \mathbf{b} + \mathbf{n} \times \tau \mathbf{n} = \kappa \mathbf{n}$, .. e così via. Le (2,4,5) costituiscono cioè un insieme coerente di vincoli tra \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} e loro s -derivate, che definiscono i due scalari $\kappa \geq 0$ e τ .

$= |d_s \mathbf{t}|^2 + |d_s \mathbf{b}|^2$), e $(\mathbf{t}, d_s \mathbf{t} \times d_s^2 \mathbf{t}) = -\kappa^2 \tau$. Si vede subito, infine, che l'alternativa (a) equivale a alla indipendenza lineare di \mathbf{t} e di $d_s \mathbf{t}$ (in I). Per concludere, notiamo che (sotto a)) \mathbf{n} è pari rispetto a q , mentre \mathbf{t} e \mathbf{b} sono dispari; quindi $d_q \mathbf{b}$ è pari, τ è pari e $d_q \mathbf{n}$ è dispari.

Venendo all'alternativa (b), è ovvio che le definizioni (salvo la (3)) e i risultati di cui sopra perdono senso quando $d_s \mathbf{t} = 0$, perché \mathbf{n} , e quindi anche il piano osculatore e \mathbf{b} , non sono più definiti. Se ciò avviene per un valore isolato di s , per definizione abbiamo ivi un punto di flesso dell'arco, mentre se avviene nell'intero I (o in un suo aperto), $\mathbf{x}(I)$ è un segmento rettilineo aperto e orientato.

Se $\kappa > 0$ e $\tau \equiv 0$ in I , \mathbf{b} è costante, quindi \mathbf{n} e \mathbf{t} appartengono sempre allo stesso piano, e lo stesso arco $\mathbf{x}(I)$ è in questo piano. Ci si aspetta dunque una ricaduta nel precedente caso dell'arco in \mathbb{R}^2 . In effetti, riferendo il piano a coordinate cartesiane standard (x, y) con il conseguente orientamento standard del piano stesso, e prendendo come direzione di riferimento l'asse x , abbiamo $t_y = t_x \operatorname{tg} \alpha$, da cui $d_s t_y = t_x (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) d_s \alpha + d_s t_x \operatorname{tg} \alpha = n_y \kappa$, e similmente $d_s t_x = n_x \kappa$; ovvero, essendo $n_x = -n_y \operatorname{tg} \alpha$,

$$(6_1) \quad t_x d_s \alpha = n_y \kappa,$$

e

$$(6_2) \quad t_y d_s \alpha = -n_x \kappa.$$

Quadrando e sommando le (6) troviamo $|d_s \alpha|^2 = \kappa^2$, compatibilmente con la (3.5.1, 2bis). Più specificamente, poiché almeno una delle due componenti di \mathbf{t} è $\neq 0$, almeno una delle (6) definisce $d_s \alpha$ in valore e segno; $d_s \alpha$ ha dunque il segno di n_y/t_x e/o di $-n_x/t_y$, e la coerenza con il caso piano è così completa.

Il caso dell'arco embedded in $\mathbb{R}^{m>3}$ è naturalmente più complicato, ma la relativa teoria estende elegantemente quella, come abbiamo visto elementare, dell'arco embedded in \mathbb{R}^3 . Partiremo cioè dall' m -embedding (di CdC m) $q (\in I/s(1)) \mapsto \mathbf{x} (\in \mathbb{R}^m)$, (per cui $|d_q \mathbf{x}| > 0$ in $I/s(1)$). Il caso base (al quale ci limiteremo qui) è quello in cui i vettori $d_s \mathbf{x}$, $d_s^2 \mathbf{x}$, ... $d_s^m \mathbf{x}$ (pensati come funzioni di s) sono supposti linearmente indipendenti in I ; quindi essi sono una base di \mathbb{R}^m . Questi m vettori si possono ortonormalizzare, nell'ordine in cui sono scritti, con la procedura di Gram-Schmidt (vedi S.sez. 3.2.4), generando così una base ortonormale $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_m$ di \mathbb{R}^m (con $\mathbf{t}_1 = \pm d_s \mathbf{x} = \pm \mathbf{t}$, perché $|d_s \mathbf{x}| = 1$), essendo \mathbf{t}_1 di CdC $m-1$, \mathbf{t}_2 di CdC $m-2$, ... \mathbf{t}_m di CdC 0 in I . Se $1 \leq h \leq m$ e $1 \leq k \leq m$, per costruzione è dunque:

$$(7) \quad (\mathbf{t}_h, \mathbf{t}_k) = \delta_{hk}.$$

⁴ Tuttavia una loro versione equivalente era stata pubblicata da A.L. Cauchy nel lontano 1826 ("Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie"), quando sia F.J. Frénet (1816-1900) che J.A. Serret (1819-1885) erano certamente più assorbiti nei loro giochi infantili che nella matematica.

D'altra parte, ponendo mente a come funziona la procedura di GS, è facile rendersi conto che

$$(8) \quad d_s \mathbf{t}_h = \sum_{i=1}^{h+1} \mathbf{t}_i \gamma_{ih},$$

dove i coefficienti γ_{ih} (che dimensionalmente sono reciproci di una lunghezza) sono forniti dalla procedura stessa. La (8) può allora risciversi, diciamo come (8bis), ponendo uguale a m il limite superiore della sommatoria, ma con l'intesa che

$$(9) \quad \text{“}\gamma_{ih} = 0 \text{ se } i > h+1\text{”}.$$

Moltiplicando internamente la (8bis) per \mathbf{t}_k e tenendo conto della (7), si ottiene subito:

$$(10) \quad \gamma_{kh} = (\mathbf{t}_k, d_s \mathbf{t}_h);$$

sommando questa alla stessa avendovi scambiato tra loro h e k , e tenendo ancora conto della (7), si vede che $\gamma_{kh} + \gamma_{hk} = 0$, e in particolare $\gamma_{hh} = 0$; ed anche, in forza della (9), che:

$$(9\text{bis}) \quad \text{“}\gamma_{ih} = 0 \text{ se } i > h - 1\text{”}.$$

In conclusione, la $m \times m$ -matrice $\{\gamma_{hk}\}$ è antisimmetrica ed ha soltanto le due paradiagonali $(h, i=h+1)$ e $(h, i=h-1)$ diverse da zero. Posto $\kappa_h =: \gamma_{h+1, h}$ per $1 \leq h \leq m$, questo risultato mostra che la (8bis) è in realtà

$$(11_1) \quad d_s \mathbf{t}_h = -\mathbf{t}_{h-1} \kappa_{h-1} + \mathbf{t}_{h+1} \kappa_h,$$

per $2 \leq h \leq m-1$, mentre

$$(11_2) \quad d_s \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \kappa_1$$

per $h = 1$, e

$$(11_3) \quad d_s \mathbf{t}_m = -\mathbf{t}_{m-1} \kappa_{m-1}$$

per $h = m$. Le κ_h , per $1 \leq h \leq m-1$, sono $m-1$ **curvature di ordine** $2 \leq h+1 \leq m$, funzioni di s , tutte $\neq 0$ per la supposta indipendenza lineare delle $d_s \mathbf{x}$, $d_s^2 \mathbf{x}$, ..., $d_s^m \mathbf{x}$, e che possono essere tutte assunte positive, senza limitazioni di generalità, mediante una congrua scelta degli orientamenti di \mathbf{t}_2 , \mathbf{t}_3 , ..., \mathbf{t}_m (come sappiamo, la procedura di GS ci lascia questa libertà). Alla luce della (10), si vede anche che la CdC di $\kappa_{1 \leq h \leq m-1}$ è $m - (h+1)$; in particolare quella di κ_1 è $m - 2$ e quella di κ_{m-1} è 0. Il piano di \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 ha un contatto del 2° ordine con l'arco $q \mapsto \mathbf{x}$, il 3-piano di \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 e \mathbf{t}_3 un contatto del 3° ordine, e così via. È immediato ridursi al caso $m = 3$ facendo $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{n}$ (con il che $\kappa_1 = \kappa > 0$) e $\mathbf{t}_3 = \pm \mathbf{b}$ a seconda che $\tau < 0$ o $\tau > 0$ (con il che κ_2 è sempre positivo). Anche più semplice è ridursi al caso $m = 2$, perché allora ci sono soltanto due equazioni da considerare.

Le (11) possono dirsi **formule di Frénet-Serret generalizzate**. La richiesta di indipendenza lineare delle $d_s \mathbf{x}$, ..., $d_s^m \mathbf{x}$ in I ha un semplice significato intuitivo: nessun pezzo d'arco (di lunghezza strettamente positiva) può essere contenuto in un sottospazio proprio di \mathbb{R}^m , o come anche si dice, ogni tale pezzo d'arco è **propriamente sghembo in \mathbb{R}^m** . Che in queste condizioni

tutte le curvatures generalizzate siano $\neq 0$ si trae anche dalla espressione del quadrato di $\kappa_{1 \leq q \leq m-1}$ che, si può verificare, è la seguente:

$$(12) \quad \kappa_h^2 = \text{Gr}\{d_s \mathbf{x}, \dots, d_s^{h-1} \mathbf{x}\} \text{Gr}\{d_s \mathbf{x}, \dots, d_s^{h+1} \mathbf{x}\} / \text{Gr}^2\{d_s \mathbf{x}, \dots, d_s^h \mathbf{x}\}$$

per $2 \leq h \leq m-1$, e

$$(12\text{bis}) \quad \kappa_1^2 = \text{Gr}\{d_s \mathbf{x}, d_s^2 \mathbf{x}\}$$

per $h = 1$. La tesi è allora ovvia, perché nessuno dei gramiani tra quelli che figurano nelle (12,12bis) può essere zero. Le (12) confermano tra l'altro che la CdC di κ_h è $m - (h+1)$. Notiamo infine che tutte le curvatures fin qui definite, a partire dalle (3.5.1, 1), hanno dimensione lunghezza⁻¹.

3.5.3) CASO DELLE (IPER)SUPERFICIE, $2 \leq n = m - 1$

Passiamo ora a considerare il punto (ii) del nostro programma (v. S.sez. 3.5.1), quello cioè delle superficie ($n = 2$) e delle ipersuperficie ($n > 2$) embedded in \mathbb{R}^{n+1} (per brevità, nel seguito non continueremo a distinguere tra superficie e ipersuperficie). Lo studio di questo caso, ove M^n è assunta di CdC $r \geq 3$, è facilitato dal fatto che esiste esattamente un vettore (definito a meno di un fattore $\neq 0$), diciamo $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 \lambda$, ortogonale a M^n , cioè al suo piano tangente n -dim ${}_n \Pi \equiv \Pi$, per ipotesi munito della base locale $\{\mathbf{f}_i\}_{i=1 \rightarrow n}$ ⁵.

È chiaro che le proprietà di M^n connesse al campo normale, fin qui non necessariamente unitario $\mathbf{n} = \mathbf{n}(q)$ (ove q è in \mathbb{R}^n , o in un suo aperto) dipendono dalla configurazione di M^n in \mathbb{R}^{n+1} ; ma esistono legami tra quel campo normale ed il tensore di curvatura di M^n che ne sono indipendenti. Ciò è ben rappresentato dalla (3.4.2, 9): infatti essa può scriversi

$$(1) \quad (h_{ik} h_{jh} - h_{ih} h_{jk}) Q(\mathbf{n}) = \rho_{ijkh},$$

ove gli h_{ik} sono opportuni coefficienti a due indici (con dimensione lunghezza/coordinata² se \mathbf{n} è adimensionale), simmetrici in quegli indici e definiti dalla

$$(2) \quad \mathbf{n} h_{ik} = \mathbf{f}_{i/k} = \mathbf{f}_{k/i};$$

cioè di tipo doppiamente covariante rispetto alle solite trasformazioni r -diffeomorfe $q \mapsto q'$. Questi coefficienti sono quindi componenti covarianti di un (campo di) 2-tensore simmetrico $h_{(2)}$ di M^n che

⁵ Posto infatti $\mathbf{f}_i = C_i^{\mu} \mathbf{F}_{\mu}$ (indici latini variabili su $1, \dots, n$; indici greci, salvo il ν' che segue in questa nota, su $1, \dots, n+1$), $\mathbf{n} = n_{\nu} \mathbf{F}^{\nu}$, le n condizioni di ortogonalità sono $0 = (\mathbf{f}_i, \mathbf{n}) = C_i^{\mu} n_{\nu} \delta_{\mu}^{\nu} = C_i^{\nu} n_{\nu}$. Queste sono n equazioni lineari nelle $n+1$ incognite n_{ν} , e possono sempre scriversi, con una rinominazione degli indici, come $C_i^{\nu'} n_{\nu'} = -C_i^{n+1} \lambda$, dove $\nu' = 1, \dots, n$ e $\det(C_i^{\nu'}) \neq 0$ per ipotesi, e dove si è scritto λ per n_{n+1} . Il sistema è unicamente risolvibile, e dà $n_{\nu'} = \lambda n_{0\nu'}$ (ove gli $n_{0\nu'}$ sono ormai noti), e $n_{n+1} = \lambda$; cioè $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}_0$ avendo posto $n_{0, n+1} = 1$. Quanto sopra si applica anche al caso già considerato $n = 1, m = 2$. Si noti anche che, se lo spazio sommergente fosse propriamente pseudoeuclideo (contrariamente alla nostra effettiva ipotesi), il fattore λ non potrebbe definirsi (comunque a meno del segno) prescrivendo una condizione di normalizzazione $Q(\mathbf{n}) = \lambda^2 Q(\mathbf{n}_0) = 1$, a meno di non escludere la possibilità $Q(\mathbf{n}_0) = 0$, come sarebbe sempre vero sse lo spazio fosse euclideo o antieuclideo.

si dice suo **2° tensore fondamentale** (intendendosi allora che $g_{(2)}$ ne è il 1°). Normalizzando \mathbf{n} secondo

$$(3) \quad Q(\mathbf{n}) = 1,$$

non si ottiene ancora il segno del fattore λ , ma le conseguenze pratiche di questa ambiguità, comunque eliminabile, sono limitate. La (1) diventa così:

$$(4) \quad h_{ik}h_{jh} - h_{ih}h_{jk} = \rho_{ijkh},^6$$

importante ed inatteso legame tra il 2° tensore fondamentale di M^n e il tensore di curvatura (costruito in termini del solo 1° tensore fondamentale), dovuto a Gauss per $n = 2$ (il Theorema egregium⁷ di cui alla S.sez. 9.1.1). Per $n = 2$, $\rho_{1212} = \det\{h_{ik}\}_{i,k=1,2}$.

Eliminando ρ_{ijkh} tra le (4) e le (3.4.2, 1) (o espressioni equivalenti), si verifica anche, in forza della simmetria dei simboli di Christoffel rispetto al 1° e 3° indice, che $\partial\Gamma_i^s/\partial q^j + \Gamma_p^s\Gamma_i^p - h_{ik}h_j^s$ è simmetrico rispetto allo scambio di j con k . Queste simmetrie, che investono il rapporto tra i coefficienti di Christoffel e il 2° tensore fondamentale – quindi tra il 1° e il 2° tensore fondamentale – si dicono **simmetrie di Gauss**.

In forza della (3), derivando rispetto a q^i abbiamo

$$(5) \quad 0 = \partial Q(\mathbf{n})/\partial q^i = 2(\mathbf{n}, \mathbf{n}_{/i}),$$

secondo la quale gli n vettori $\mathbf{n}_{/i}$ sono tangenti alla varietà (si è scritto $\mathbf{n}_{/i}$ piuttosto che $\partial\mathbf{n}/\partial q^i$ perché le due notazioni sono equivalenti per un vettore *considerato come invariante*). La (2) può allora immediatamente risolversi rispetto alle h_{ik} moltiplicandola internamente per \mathbf{n} . Si ottiene così:

$$(6) \quad h_{ik} = (\mathbf{n}, \mathbf{f}_{i/k}),$$

ovvero anche, tenuto conto della $0 = (\mathbf{n}, \mathbf{f}_i)$, e dunque della $0 = \partial/\partial q^k (\mathbf{n}, \mathbf{f}_i) = (\mathbf{n}_{/k}, \mathbf{f}_i) + (\mathbf{n}, \mathbf{f}_{i/k})$,

$$(7) \quad -h_{ik} = (\mathbf{n}_{/k}, \mathbf{f}_i) = (\mathbf{n}_{/i}, \mathbf{f}_k).$$

Risolve rispetto alle $\mathbf{n}_{/k}$, cioè nella forma

$$(8) \quad \mathbf{n}_{/k} = -\mathbf{f}^i h_{ik},$$

le (7) diventano le **equazioni di Weingarten** (J. Weingarten, 1836-1910), e pongono in evidenza un altro significato delle h_{ik} (oltre a quello manifesto nella loro definizione (2)), cioè di componenti covarianti ($_{/i}$) del vettore tangente $-\mathbf{n}_{/k}$. Derivando $_{/h}$ le (6), si ha poi:

$$(9) \quad h_{ik/h} = (\mathbf{n}_{/h}, \mathbf{f}_{i/k}) + (\mathbf{n}, \mathbf{f}_{i/kh}) = (\mathbf{n}, \mathbf{f}_{i/kh}),$$

perché come sappiamo, $\mathbf{f}_{i/k}$ è ortogonale e $\mathbf{n}_{/h}$ è tangente alla varietà. Sottraendo dalla (9) la sua alternata rispetto a $(_{h,k})$, e ricordando la (3.4.2, 14), otteniamo infine

⁶ Si ricordi che le componenti di $\rho_{(4)}$ sono di CdC $r-2$; quindi lo sono quelle di $h_{(2)}$ sotto la normalizzazione (3), alla luce della (2) o anche delle successive (6,7), perché \mathbf{n} è di CdC $r-1$. Si noti anche che il 1° membro della (4) è il minore costruito sulle righe di indici $(i,j>i)$ e sulle colonne di indici $(k,h>k)$ della $n \times n$ -matrice $\{h_{ih}\}$.

⁷ «La curvatura K di una superficie dipende soltanto dai coefficienti g_{ik} della prima forma fondamentale e dalle loro derivate prime e seconde. Quindi K è una proprietà intrinseca della superficie.» (1827)

$$(10) \quad h_{ik/h} - h_{ih/k} = 0.$$

Queste (10), note come **equazioni di Mainardi-Codazzi**, (G. Mainardi, 1800-1879, D. Codazzi, 1824-1875⁸) affermano che il tensore triplo derivato del 2° tensore fondamentale è completamente simmetrico. Anche più manifestamente nella forma

$$(11) \quad \partial h_{ik}/\partial q^h + h_{jh}\Gamma_{ik}^j = \partial h_{ih}/\partial q^k + h_{jk}\Gamma_{ih}^j$$

esse costituiscono vincoli differenziali del 1° ordine tra il 1° e il 2° tensore fondamentale, lineari nelle h_{ik} . Infine dalle (3.4.2, 7) e dalle (2) si desumono le $n(n+1)/2$ **equazioni di Gauss**:

$$(12) \quad \partial f_i/\partial q^k = f_j\Gamma_{ik}^j + n h_{ik}.$$

È interessante la seguente interpretazione intuitiva del 2° tensore fondamentale. Sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q) = X^\nu(q)\mathbf{F}_\nu$ il generico punto di M^n , e si consideri l'ipersuperficie $M^{n'}$ spostata lungo \mathbf{n} di una piccola lunghezza $\varepsilon > 0$ rispetto alla M^n originale, quindi di equazione $\mathbf{x}'(q) = \mathbf{x}(q) + \varepsilon\mathbf{n}(q)$. Differenziando rispetto alla $\mathbf{x}(q)$, si ha $d\mathbf{x} = \mathbf{F}_\mu\partial X^\mu/\partial q^i dq^i$ (dove al solito gli indici greci vanno da 1 a $n+1$ e quelli latini da 1 a n); e differenziando $\mathbf{n}(q)$, $d\mathbf{n} = \mathbf{n}_{/k}dq^k = -h_{pk}\mathbf{f}^p dq^k$. A meno di termini di secondo ordine in ε , e ricordando che $\mathbf{f}_j = \partial X^\nu/\partial q^j \mathbf{F}_\nu \equiv \partial \mathbf{x}/\partial q^j$, otteniamo dunque:

$$(13) \quad (d\mathbf{x}', d\mathbf{x}') - (d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = 2\varepsilon(d\mathbf{x}, d\mathbf{n}) = -2\varepsilon[\partial X^\mu/\partial q^i \partial X^\nu/\partial q^j G_{\mu\nu} h_{pk} g^{pj}]dq^i dq^k = -2\varepsilon h_{ik} dq^i dq^k.$$

Questa dice che la “derivata normale” della 1ª forma differenziale (nel verso di \mathbf{n}), diciamo $\partial_n(g_{jh}dq^j dq^h)$, è uguale alla 2ª forma differenziale $h_{ik}dq^i dq^k$ moltiplicata per -2 .⁹

Quando $n = 2$ (caso della superficie), il tensore di curvatura ha essenzialmente un'unica componente, ad es. covariante, diciamo ρ_{1212} , e la (4) può scriversi:

$$(14) \quad \rho_{ikrs} = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{rs} h/g,$$

dove per brevità si sono denotati con h , e rispettivamente con g , i determinanti delle relative matrici $\{h_{ik}\}$ e $\{g_{ik}\}$, e ε_{ik} sono le componenti covarianti del 2-tensore antisimmetrico di Ricci, pari a $\sqrt{g}Y_{ik}$ (per cui $\rho_{1212} = h$). Il fattore scalare $K =: h/g$ si dice tradizionalmente **curvatura gaussiana**, o anche **curvatura totale** (benché a rigore sia una 2-curvatura) di M^2 . Esso è semplicemente legato all'invariante ρ di $\rho_{(4)}$ (l'invariante scalare di curvatura), perché per $n = 2$ si ha $\rho = g^{ik}g^{jh}\rho_{ijhk} = -2g^{-1}\rho_{1212} = -2K$. Si sottolinea che mentre il 2° tensore fondamentale è collegato a proprietà della superficie che variano quando questa viene flessa senza deformarla metricamente, come mostra la (14) ciò non può ripetersi per il suo determinante $h = \rho_{1212}$, invariante per flessione. Se si preferisce, si può dire che il tensore *estrinseco* $h_{(2)}$ ha determinante *intrinseco*: un altro modo di enunciare il Theorema egregium.

⁸ Nella letteratura russa, come **equazioni di Peterson-Codazzi**. Il contributo del matematico russo Karl M. Peterson è del 1853, quindi anteriore a quello di Mainardi.

⁹ In termini del punto \mathbf{x} si può ottenere una espressione del 2° tensore fondamentale usando l'insieme dei vettori $\{\mathbf{x}_{/i}\} = \{\partial \mathbf{x}/\partial q^i\}$ come base dello spazio tangente alla varietà. Si ha così: $h_{ik} = (\mathbf{n}, \mathbf{x}_{/ik}) = (\mathbf{n}, \partial^2_{ik}\mathbf{x})$. L'ultima uguaglianza è dovuta alla $\mathbf{x}_{/ik} = \partial_k \mathbf{x}_{/i} - \mathbf{x}_{/p}\Gamma_{ik}^p$, tenuto conto che $\mathbf{x}_{/i} \equiv \partial_i \mathbf{x}$.

Passando infine ad *ipersuperficie* immerse in uno spazio euclideo, consideriamo il $(r \geq 3)$ -embedding di $I^{n \geq 2}$ in R^{n+1}

$$(15) \quad q \equiv \langle q^{1 \leq i \leq n} \rangle (\in I^n) \mapsto \mathbf{x} (\in E_{n+1}),$$

che definisce la *ipersuperficie* $M^n \equiv \mathbf{x}(I^n)$ embedded in E_{n+1} ; e su di esso, l' r -embedding di I in I^n

$$(16) \quad \mu (\in I) \mapsto q (\in I^n).$$

Facendo il prodotto dei due r -embeddings, otteniamo l' r -embedding

$$(17) \quad \mu (\in I) \mapsto \mathbf{x} (\in M^n),$$

che descrive l'arco (aperto, orientato secondo μ crescente) $\Gamma =: \mathbf{x}(I)$ di M^n . Definiremo ora la **derivata d_μ lungo Γ rispetto al parametro μ** , di generici campi tensoriali di $CdC \geq 1$ definiti in M^n , come:

$$(18) \quad d_\mu =: {}_{/i}d_\mu q^i.$$

Porremo poi ancora $s = s(\mu) =: \int_0^\mu |d_\mu \mathbf{x}| d\mu$, ove ora $|d_\mu \mathbf{x}| =: [\sum_{i=1}^n (d_\mu q^i)^2 |\partial \mathbf{x} / \partial q^i|^2]^{1/2}$. Questa $s(\mu)$ è di $CdC r$ e monotona crescente in $I_s =: (0, s(1))$. Possiamo quindi considerare l' r -embedding

$$(19) \quad s (\in I_s) \mapsto \mathbf{x} (\in M^n),$$

che riferisce l'arco Γ alla sua lunghezza orientata. Naturalmente la derivata rispetto ad s lungo l'arco Γ , per campi tensoriali di M^n , è $d_s =: {}_{/i}d_s q^i$. Definendo al solito il versore tangente a Γ come $\mathbf{t} =: d_\mu \mathbf{x} / |d_\mu \mathbf{x}| \equiv d_s \mathbf{x}$, si riconosce subito che $\mathbf{t}^i = d_s q^i$, per cui è anche $d_s =: {}_{/i}t^i$.¹⁰

Torniamo ora al campo dei versori normali a M^n , $\mathbf{n} = \mathbf{n}(q)$, di $CdC r-1$ e orientato in base a una definita scelta del segno del fattore λ ¹¹, per il quale è $(\mathbf{t}, \mathbf{n}) \equiv 0$ su M^n . Poiché gli n vettori (di $CdC r-2$) $\mathbf{n}_{/i}$ sono tangenti, lo stesso è vero per $d_s \mathbf{n} = \mathbf{t}^i \mathbf{n}_{/i}$. Porremo:

$$(20) \quad \kappa_\Gamma =: -(\mathbf{t}, d_s \mathbf{n}) = (\mathbf{n}, d_s \mathbf{t}) \equiv \kappa_\Gamma(s),$$

scalare con segno (o possibilmente nullo), funzione di s di $CdC r-2$ e di dimensioni lunghezza⁻¹, che diremo **curvatura di M^n secondo Γ** (la seconda uguaglianza (20) consegue dalla $(\mathbf{n}, \mathbf{t}) = 0$). Si noti che κ_Γ non risente dell'orientamento di Γ , perché sia \mathbf{t} che $d_s \mathbf{n}$ sono dispari rispetto a μ ; ma come $h_{(2)}$, risente di quello (essenzialmente convenzionale) di \mathbf{n} . Poiché $d_s \mathbf{t} = \mathbf{t}^i (\mathbf{t}^j \mathbf{f}_{/j})_{/i} = \mathbf{t}^i \mathbf{t}^j \mathbf{f}_{/j/i} + d_s \mathbf{t}^i \mathbf{f}_{/j}$, moltiplicando internamente per \mathbf{n} quest'ultima, in forza della (6) si ottiene $(\mathbf{n}, d_s \mathbf{t}) = h_{ij} \mathbf{t}^i \mathbf{t}^j$, ovvero (**formula di Meusnier**, Jean, 1754 – 1793)

$$(21) \quad h_{ij} \mathbf{t}^i \mathbf{t}^j = \kappa_\Gamma, \quad ^{12}$$

¹⁰ Infatti $\mathbf{t} = d_s \mathbf{x} = \mathbf{x}_{/i} d_s q^i = \mathbf{f}_i d_s q^i$, da cui la tesi. La $g_{ik} d_s q^i d_s q^k \equiv 1$ conferma così l'unitarietà di \mathbf{t} .

¹¹ Usualmente l'orientamento di \mathbf{n} si fissa in modo che $n^v f_1^{v1} \dots f_n^{vn} \varepsilon_{v1 \dots n} > 0$, ove f_1^{v1} è la componente controvariante (\mathbf{t}_1) di \mathbf{f}_1, \dots , ecc, sia positivo. Ciò presuppone che R^{n+1} sia orientato, e stabilisce un corrispondente orientamento su M^n .

¹² Questa vale ormai per una generica direzione (non orientata) \mathbf{t} di H .

i due membri della quale sono ovviamente dispari rispetto all'orientamento di \mathbf{n} . D'altra parte, se $d_s \mathbf{t} \neq 0$, la (3.5.2, 11₂) definisce un versore \mathbf{t}_2 parallelo a $d_s \mathbf{t}$ e orientato in modo che κ_1 , 1^a curvatura di Γ , sia positiva. Segue da ciò che

$$(22) \quad \kappa_\Gamma = \kappa_1(\mathbf{n}, \mathbf{t}_2),$$

e quindi $\kappa_\Gamma^2 \leq \kappa_1^2$, perché $(\mathbf{n}, \mathbf{t}_2)^2 \leq 1$: il modulo della curvatura di M^n secondo Γ , κ_Γ , non supera la 1^a curvatura (assoluta) di Γ . La (22) è scritta usualmente nella forma

$$(22\text{bis}) \quad \kappa_\Gamma = \kappa_1 \cos \varphi,$$

dove φ è l'angolo tra \mathbf{n} e \mathbf{t}_2 . Se in particolare \mathbf{t}_2 è tangente a M^n , allora $\kappa_\Gamma = 0$; per $n = 2$, questo significa che il piano osculatore di Γ coincide con il piano tangente di M^2 . Se poi l'arco Γ è una sezione *normale* di M^n , cioè l'intersezione di M^n con un piano (bidimensionale) contenente \mathbf{n} , il suo piano osculatore è il piano normale, cioè $\mathbf{t}_2 = \pm \mathbf{n}$, e dunque $(\mathbf{t}_2, \mathbf{n})^2 = 1$: le due curvature κ_Γ e κ_1 coincidono, possibilmente a meno del segno. Ciò permette di interpretare $|\kappa_\Gamma|$ (modulo della curvatura di M^n secondo la sua sezione normale Γ) come 1^a curvatura (assoluta) κ_1 di Γ . Questa conclusione (che vale anche per $d_s \mathbf{t} = 0$, allorché $\kappa_\Gamma = \kappa_1 = 0$) rende conto della denominazione di "curvatura" adottata per κ_Γ .

Se $\kappa_\Gamma = 0$, la direzione del versore tangente all'arco Γ , diciamo $\pm \mathbf{a}$ (perché definito a meno del segno) si dice **direzione asintotica**. Per una direzione asintotica $\pm \mathbf{a}$ è dunque, in generale:

$$(23) \quad Q_h(\mathbf{a}) =: h_{ij} a^i a^j \equiv 0.$$

Certe direzioni asintotiche possono non essere reali (cioè possono non esistere); se poi la forma quadratica Q_h associata a $h_{(2)}$ è definita (positiva o negativa), non ne esistono del tutto.¹³ La (23) è banalmente soddisfatta per ogni \mathbf{a} se $h_{(2)} = 0$; ma allora è $\rho_{(4)} = 0$. Una curva Γ di M^n la cui tangente ha ovunque direzione asintotica si dice **curva asintotica**, o semplicemente **asintotica** (sost.).

Ciò stabilito, tornando al generico arco Γ di versore tangente \mathbf{t} , poniamo:

$$(24) \quad \boldsymbol{\Omega} =: d_s \mathbf{n} + \kappa_\Gamma \mathbf{t} = d_s \mathbf{n} - d_s \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \mathbf{t}.$$

Si verifica subito che il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ è ortogonale sia a \mathbf{n} (quindi è tangente a M^n) che a \mathbf{t} ; inoltre $d_s \mathbf{n} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Omega} = 0$, cioè $\boldsymbol{\Omega} \neq 0 \Rightarrow d_s \mathbf{n} \neq 0$. In questo caso $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ la (24) può scriversi:

$$(24\text{bis}) \quad d_s \mathbf{n} = -\kappa_\Gamma \mathbf{t} + \tau_\Gamma \boldsymbol{\omega},$$

dove $\boldsymbol{\omega}$, versore con la direzione di $\boldsymbol{\Omega}$, può sempre orientarsi in modo che $\tau_\Gamma > 0$. Questo scalare positivo τ_Γ , dimensionalmente omogeneo a κ_Γ , si dice **torsione di M^n secondo l'arco Γ** . $\boldsymbol{\Omega}$ è invece uguale a zero sse Γ ha direzione tangente \mathbf{p} ($|\mathbf{p}| = 1$) tale che

¹³ Ciò avviene ad esempio se Γ è sezione normale di una n -sfera di raggio R (> 0). È allora $d_s \mathbf{n} = -\mathbf{t}/R$ se \mathbf{n} è orientato come la normale principale, cioè verso l'interno della sfera, e quindi $\kappa_\Gamma = 1/R$, indipendentemente dalla direzione di \mathbf{t} . In forza della (21), la forma Q_h è definita positiva, e non esistono asintotiche, come è intuitivamente ben chiaro se $n = 2$.

$$(25) \quad p^i(n_{/i} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{x}_{/i}) \equiv d_s \mathbf{n} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{p} = 0$$

ove κ_Γ è stata scritta come $\kappa(\mathbf{p})$, e s è la lunghezza lungo Γ orientata come \mathbf{p} . Se una tale direzione tangente \mathbf{p} esiste, essa si dice **direzione principale**, e la corrispondente curvatura $\kappa(\mathbf{p})$ **curvatura principale** di M^n (ciò spiega la scelta della lettera \mathbf{p} per la direzione principale). La curvatura principale $\kappa(\mathbf{p})$ è dispari rispetto all'orientamento di \mathbf{n} , e in particolare è nulla sse $d_s \mathbf{n} = 0$; se invece $d_s \mathbf{n} \neq 0$, $d_s \mathbf{n}$ e \mathbf{p} devono essere paralleli per la (25), e $\kappa(\mathbf{p}) = -(\mathbf{p}, d_s \mathbf{n})$. La (25) è nota come **equazione di Rodriguez** (Olindo, 1794-1851); se vale lungo tutto l'arco Γ , l'arco stesso si dice **arco principale**, o **linea di curvatura** (“curva di curvatura” suonerebbe male, ma la locuzione sarebbe legittima) di M^n .

Sostituendo le equazioni di Weingarten nell'equazione di Rodriguez, otteniamo:

$$(26) \quad 0 = p^i n_{/i} + \kappa(\mathbf{p})\mathbf{p} = -p^i f^j h_{ij} + \kappa(\mathbf{p})f^j p_j \Rightarrow (h_{ij} - \kappa(\mathbf{p})g_{ij})p^j = 0;$$

vale a dire, le direzioni principali sono gli n autovettori (o combinazioni lineari di k tali autovettori appartenenti allo stesso autovalore $\kappa(\mathbf{p})$ se questo ha molteplicità $k > 1$), e le corrispondenti curvature principali gli n autovalori (non necessariamente distinti) del 2° tensore fondamentale rispetto al 1°, secondo quanto espresso dall'ultima (26). Esistono dunque n direzioni principali; e ancora per quanto abbiamo visto nella Sez. 3.2, esistono n direzioni principali mutuamente ortogonali che abbracciano il n -piano tangente $\Pi_n \equiv \Pi$, che sono valori di stazionarietà per la forma quadratica Q_h associata a $h_{(2)}$. Il loro insieme, che è una base ortonormale di Π , è *unicamente* determinato sse gli n autovalori della (26) sono tutti distinti.

Sia ora \mathbf{Q} un punto generico di Π , tangente a M^n in \mathbf{O} e distinto da \mathbf{O} , e si consideri l'equazione omogenea di 2° grado in \mathbf{Q} :

$$(27) \quad h_{ik}(\mathbf{OQ})^i(\mathbf{OQ})^k = \text{cost} \neq 0.$$

È chiaro che i soli valori di interesse di cost (che ha dimensione di lunghezza⁻¹) sono $+1$ o alternativamente -1 . Per una di queste due scelte di cost , la (27) individua una $(n-1)$ -quadrica di Π centrata in \mathbf{O} , che si dice $(n-1)$ -**quadrica indicatrice** o **di Dupin** (C. Dupin, 1784-1873). Naturalmente non è detto che, per la data scelta del detto segno dinnanzi a 1, \mathbf{Q} esista sempre al variare della direzione di \mathbf{OQ} attorno a \mathbf{O} (potrebbe anche non esistere mai). Si può modificare formalmente la (27) scrivendo \mathbf{OQ} come $r_q \mathbf{q}$ con \mathbf{q} unitario: allora la (27) diventa:

$$(27\text{bis}) \quad (r_q)^2 Q_h(\mathbf{q}) \equiv (r_q)^2 \kappa(\mathbf{q}) = \mathcal{I},$$

dove \mathcal{I} ha uno dei due valori $+1$ o -1 . Questa mostra che r_q è reale $\neq 0$ sse $\kappa(\mathbf{q})\mathcal{I} > 0$ (diremo allora convenzionalmente che “ \mathbf{q} è reale”) ed immaginario $\neq 0$ sse $\kappa(\mathbf{q})\mathcal{I} < 0$ (“ \mathbf{q} è immaginario”). Il caso $\kappa(\mathbf{q}) = 0$ è degenere, e infatti le corrispondenti direzioni \mathbf{q} sono allora asintotiche. In definitiva la generica \mathbf{q} di Π è reale, o immaginaria, o asintotica. Invertendo il segno di \mathcal{I} , le direzioni reali

diventano immaginarie e viceversa, mentre quelle asintotiche restano tali. Poiché come sappiamo $Q_h(\mathbf{q})$ è stazionaria attorno a $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ principale, anche r_p (reale o immaginario che sia) lo è; se dunque $\kappa(\mathbf{p}) \neq 0$ e r_p è reale, esso uguaglia la lunghezza del semiasse dell'indicatrice nella direzione \mathbf{p} , lunghezza il cui quadrato è uguale a $\mathcal{I}/\kappa(\mathbf{p})$, per ipotesi > 0 . Questo giustifica il nome di "indicatrice" che si dà alla $(n-1)$ -quadrica di Dupin. Va da sé che non possono esistere direzioni principali che siano anche asintotiche sse $\det\{h_{ik}\} \neq 0$; mentre ne esistono $n - r$ se r è il rango di $\{h_{ik}\}$. Un caso molto particolare è quello in cui $h_{ik} = \lambda g_{ik}$ con $\lambda > 0$: vi è allora un unico autovalore (positivo) λ dell'equazione caratteristica, e facendo $\mathcal{I} = 1$ si trova che l'indicatrice è l' $(n-1)$ -sfera di raggio $\lambda^{-1/2}$ nell'unità di lunghezza in cui $(r_q)^2 \lambda = 1$ (si tenga presente che r_q non dipende in questo caso da \mathbf{q}).

Se la direzione tangente \mathbf{v} di una sezione normale di M^n è anche direzione principale \mathbf{p} , ci si aspetta che la 1^a curvatura (assoluta) di quella sezione normale coincida con il modulo della corrispondente curvatura principale. Ciò è ovvio per $n = 2$. In effetti, dalla $\mathbf{t}_2 = \pm \mathbf{n}$ e dalla (5.3.2, 11₂) si ha, se s è la lunghezza lungo la sezione normale orientata come \mathbf{p} , $-d_s \mathbf{v} \pm \kappa_1 \mathbf{n} = 0$. Ma per ipotesi, (eq. (25)) è $d_s \mathbf{n} + \kappa(\mathbf{p}) \mathbf{v} = 0$; moltiplicando internamente la prima di queste per \mathbf{n} e la seconda per $-\mathbf{v}$, e sommando, si trova $\kappa(\mathbf{p}) = \pm \kappa_1$, ossia $|\kappa(\mathbf{p})| = \kappa_1$, qed.

La somma delle curvatures principali (non necessariamente distinte) uguaglia l'invariante lineare di $h_{(2)}$; cioè, se $\kappa(\mathbf{p}_i)$ è l' i -ma curvatura principale (in un ordine qualunque),

$$(28) \quad \sum_i \kappa(\mathbf{p}_i) = g^{ik} h_{ik}.$$

Diviso per n , questo scalare si dirà **curvatura principale media di M^n** , e si denoterà con H . Si noti che nella (28) le curvatures principali risultano positive se i relativi centri di curvatura giacciono sulla normale a M^n prescelta per la definizione (3.5.3, 6) di $h_{(2)}$. Ad esempio nel caso della sfera di raggio R occorrerà orientare tale normale verso l'interno per avere $H = +1/R$. Inoltre, secondo la (3.2.6, 5) la somma dei prodotti di coppie di curvatures principali di diverso indice i è espressa da

$$(29) \quad 2 \sum_{i < i'} \kappa(\mathbf{p}_i) \kappa(\mathbf{p}_{i'}) = g^{ik} g^{jh} (h_{ik} h_{jh} - h_{ih} h_{jk}) = -g^{ik} g^{jh} \rho_{ijhk} = -\rho,$$

ρ essendo l'invariante scalare di curvatura. Se $n = 2$, la somma a 1° membro della (29) consta di un solo addendo, e si conclude che

$$(29bis) \quad \kappa(\mathbf{p}_1) \kappa(\mathbf{p}_2) = g^{-1} \rho_{1212} = h/g = K,$$

in accordo con quanto già sappiamo. La (29) può pertanto considerarsi come una generalizzazione $(n > 2)$ -dimensionale del Theorema egregium. Essa dice anche che

$$(29ter) \quad -\rho = n(n-1)\mathcal{M},$$

ove \mathcal{M} denota il valor medio di $\kappa(\mathbf{p}_i) \kappa(\mathbf{p}_{i'})$ ($i' > i$) (ci sono $n(n-1)/2$ addendi nella somma a 1° membro della (29)). In particolare per $n = 2$, $\mathcal{M} = K$. Per una n -sfera di raggio R , ove come già

osservato $\mathbf{n}_{/i} = -\mathbf{f}_i/R$ per \mathbf{n} orientata verso l'interno della n -sfera, risulta $h_{ik} = -(\mathbf{n}_{/i}, \mathbf{f}_{/k}) = g_{ik}/R$, e dunque $\rho_{ikjh} = (g_{ij}g_{kh} - g_{ih}g_{jk})R^{-2}$, cioè $-\rho = n(n-1)R^{-2}$. Confrontando quest'ultima con la (29ter), si conclude che per tale n -sfera $\mathcal{M} = R^{-2}$. Quanto alla (28), essa dà $H = R^{-1}$.

Un altro tipo, forse più significativo, di generalizzazione del Theorema egregium trae spunto dall'ultimo teorema della S.sez 3.2.6. Sulla sua base, si ha subito:

$$(30) \quad \prod_{i=1}^n \kappa(\mathbf{p}_i) = h/g.$$

La n -curvatura a 1° membro (dimensionalmente, una lunghezza⁻ⁿ) si dice tradizionalmente **curvatura totale** e si denota K_{tot} . Per $n = 2$, essa coincide con la curvatura gaussiana K , ed è questa la ragione per cui K si dice anche curvatura totale.

Veniamo adesso ad una significativa caratterizzazione delle curve asintotiche per $n = 2$. Secondo le ipotesi fatte, M^2 è di classe C^3 ; ma ciò non impedisce di ricercare possibili sue curve \mathcal{P} attraverso le quali il tensore derivato di $h_{(2)}$ *potrebbe* avere delle discontinuità di 1ª specie (cioè, fare dei salti) compatibilmente con la prescritta metrica di M^2 (di CdC 2). Intuitivamente, ciò significa che lungo le curve \mathcal{P} , che diremo **curve di piegabilità** (\mathcal{P} come “piegare”), M^2 *potrebbe essere piegato* (localmente) *senza modificarne la metrica*. Si tratta di un tipico problema di Analisi Caratteristica per il sistema delle equazioni cui soddisfano le h_{ik} : lungo le curve caratteristiche, nel nostro caso lungo le \mathcal{P} , non è risolvibile unicamente il problema di Cauchy. Le equazioni per le h_{ik} sono le due (10), differenziali lineari del 1° ordine, e l'equazione di Gauss $h = Kg$, che è invece un vincolo finito, bilineare nelle h_{ik} . Sia $S(q^1, q^2) = \text{cost}$ l'equazione delle curve \mathcal{P} , sotto la condizione di non-degenerazione $\nabla S \neq 0$; quindi, ad esempio, sotto $S_{/1} \neq 0$. Come è consueto in casi del genere, conviene trasformare il vincolo finito (equazione di Gauss) in un'equazione differenziale (quasilineare del 1° ordine) prendendone la derivata covariante $_{/1}$:

$$(31) \quad h_{11}h_{22/1} - 2h_{12}h_{12/1} + h_{22}h_{11/1} = (gK)_{/1}.$$

Come insegna l'Analisi Caratteristica, i possibili salti delle $h_{ik/r}$, $\Delta h_{ik/r}$, devono soddisfare le cosiddette “condizioni di compatibilità” (che riflettono la continuità delle derivate delle h_{ik} *tangenziali* alla curva \mathcal{P}), cioè le $\Delta h_{ik/r} = \mu_{ik}S_{/r}$, dove le μ_{ik} sono componenti di un 2-tensore simmetrico arbitrario, uguale a zero sse non ci sono salti. Prendendo i salti Δ delle (10) e della (31) attraverso la curva \mathcal{P} , tenendo conto del fatto che i salti del 2° membro della (31) sono per ipotesi nulli, e facendo uso delle condizioni di compatibilità, si trova il sistema di equazioni lineari omogenee nelle μ_{ik} :

$$(32_1) \quad S_{/2}\mu_{11} - S_{/1}\mu_{12} = 0,$$

$$(32_2) \quad S_{/1}\mu_{22} - S_{/2}\mu_{12} = 0,$$

$$(32_3) \quad S_{/1}h_{22}\mu_{11} - 2S_{/1}h_{12}\mu_{12} + S_{/1}h_{11}\mu_{22} = 0,$$

dove le (32_{1,2}) conseguono dalle (10), e la (32₃) dalla (31). La piegabilità di M^2 lungo le curve $S = \text{cost}$ equivale dunque all'esistenza di soluzioni non banali del sistema (32) nelle μ , cioè all'annullarsi del corrispondente determinante. Tenuto conto della $S_{2/2}/S_{1/1} = -dq^1/dq^2|_{S=\text{cost}} = -t^1/t^2$ (ove \mathbf{t} è il versore tangente a $S = \text{cost}$, e $t^2 \neq 0$ sse $S_{1/1} \neq 0$), si ottiene $h_{ik}t^i t^k = 0$, che è l'equazione delle curve asintotiche. In conclusione, le curve asintotiche sono curve di piegabilità (locale), "caratteristiche" (nel senso tecnico standard del termine) del sistema delle equazioni di Peterson-Codazzi e di Gauss.

Accanto al 2° 2-tensore fondamentale $h_{(2)}$ di M^n è anche opportuno introdurre il suo quadrato (o prodotto contratto, anch'esso simmetrico), diciamo $k_{(2)}$, dato in componenti da

$$(33) \quad k_{ih} = h_{ij}h^i_h,$$

e comunemente detto **3° tensore fondamentale** di M^n . Usando le equazioni di Weingarten, si verifica subito che

$$(34) \quad (\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j) = g^{pq}h_{pi}h_{qj} = k_{ij};$$

per cui, riferendoci al solito arco Γ di versore tangente $\pm \mathbf{t}$ (il verso non ha importanza), mediante la (24bis) e la $d_s = \mathbf{t}^i$ troviamo:

$$(35) \quad (d_s \mathbf{n}, d_s \mathbf{n}) = \kappa_\Gamma^2 + \tau_\Gamma^2 = k_{ij}t^i t^j.$$

Come sappiamo, $h_{(2)}$ e $k_{(2)}$ hanno in comune gli autovettori, e gli autovalori del secondo sono i quadrati di quelli del primo. Se quindi \mathbf{p} è un versore principale appartenente all'autovalore $\kappa(\mathbf{p})$ di $h_{(2)}$, e allo stesso tempo viene considerato come versore tangente dell'arco Γ di versore \mathbf{p} , da una parte $k_{ij}p^i p^j = \kappa^2(\mathbf{p})$ (perché $(k_{ik} - \kappa^2(\mathbf{p})g_{ik})p^k = 0$), e dall'altra $k_{ij}p^i p^j = \kappa_\Gamma^2 + \tau_\Gamma^2$. Poiché $\kappa^2(\mathbf{p})$ e κ_Γ^2 sono ormai la stessa cosa, si ha $\tau_\Gamma^2 = 0$, come deve essere in base alla definizione di direzione principale.

Il 2-tensore simmetrico $\rho_{(2)}$ si esprime immediatamente in termini di $k_{(2)}$ e $h_{(2)}$ secondo la

$$(36) \quad \rho_{ik} = k_{ik} - h_{ik}h_j^j;$$

per cui, se \mathbf{u} è un arbitrario versore di Π ,

$$(37) \quad \rho_{ik}u^i u^k = (k_{ik} - h_{ik}h_j^j)u^i u^k,$$

indipendentemente, come è ovvio, dall'orientamento di \mathbf{u} .

L'opposto dello scalare a 1° membro della (37), che ha dimensione lunghezza⁻², si dice **2-curvatura di Ricci, nella direzione \mathbf{u} , di M^n** , e sarà denotata $\kappa^*(\mathbf{u})$. Scriveremo pertanto:

$$(38) \quad \kappa^*(\mathbf{u}) = -\rho_{ik}u^i u^k.$$

Se in particolare \mathbf{u} coincide con una direzione principale \mathbf{p} , si ottiene la 2-curvatura di Ricci in quella direzione in funzione della curvatura nella stessa direzione e la curvatura principale media secondo la:

$$(39) \quad \kappa^*(\mathbf{p}) = \kappa(\mathbf{p})(nH - \kappa(\mathbf{p}));$$

e quindi, se in particolare le curvatures principali sono tutte uguali ad un'unica κ ,

$$(39\text{bis}) \quad \kappa^*(\mathbf{p}) = (n-1)\kappa^2.$$

In questo caso anche le 2-curvature di Ricci principali sono uguali.

3.5.4) CASO DELLE VARIETÀ, $2 \leq n < m-1$

Veniamo finalmente al punto (iii) del nostro programma (v S.sez. 3.5.1), cioè al caso $2 \leq n < m-1$, quando lo spazio tangente Π di M^n non è più individuato da un'unica direzione (dello spazio sommergente R^m) ad esso normale. Cade con ciò sia la possibilità di introdurre un 2° tensore fondamentale di M^n attraverso la (3.5.3, 6), sia quella di definire curve di M^n come sue sezioni "normali" (cioè sezioni con un piano bidimensionale contenente la direzione normale). Restano tuttavia aperte due opzioni, come vedremo collegate tra loro, per definire ragionevoli "curvature" di M^n . La prima di esse si richiama alla 2-curvature di Ricci $\kappa^*(\mathbf{u})$, che come è evidente dalla (3.5.3, 38) non ha bisogno che M^n sia una ipersuperficie di R^m (cioè che $m = n + 1$) per essere introdotta. Non solo, ma la $\kappa^*(\mathbf{u})$ non necessita nemmeno del fatto che M^n sia immerso in uno spazio piatto qualchessia, euclideo o pseudoeuclideo. Infatti essa è completamente definita se su M^n è dato un campo 2-tensoriale simmetrico non singolare definito-positivo da usare come 1° tensore fondamentale. La 2-curvature di Ricci apre dunque la prospettiva di definire una ragionevole accezione di 2-curvature in varietà riemanniane (nel senso proposto dallo stesso Riemann, cioè non necessariamente immerse) di cui tratteremo più avanti, o addirittura pseudoriemanniane.

La seconda opzione è limitata alle varietà riemanniane: si tratta di considerare altri convenienti "invarianti di curvatura" (tipicamente di dimensione lunghezza⁻², come κ^*) a partire da $\rho_{(4)}$. Un'idea naturale è quella di contrarre $\rho_{(4)}$ due volte con lo stesso bivettore \mathbf{uv} , dove \mathbf{u} e \mathbf{v} sono vettori linearmente indipendenti di Π , ottenendo così uno scalare del tipo $\rho_{ijkl}u^i v^j u^k v^h$, indipendente dall'orientamento sia di \mathbf{u} che di \mathbf{v} ed evidentemente simmetrico in \mathbf{u} e \mathbf{v} . Il risultato non cambia se a $u^i v^j$ e $u^k v^h$ si sostituiscono le loro parti antisimmetriche, cioè i 2-tensori antisimmetrici semplici associati alla coppia ordinata $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ (o equivalentemente $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$), passando così allo scalare $\rho_{ijkl}u^{[i} v^{j]} u^{[k} v^{h]}$ (ove $[]$ ha il solito significato di antisimmetrizzatore). Il solo problema è ora quello di convenientemente "normalizzare" lo scalare così ottenuto, ciò che si ottiene dividendolo per il quadrato di una "norma" del 2-tensore antisimmetrico semplice, o bivettore, $[\mathbf{uv}]$. Questa norma è

l'area (assoluta) del parallelogramma di lati adiacenti \mathbf{u} e \mathbf{v} , cioè $|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta$ se $0 < \theta < \pi$ è l'angolo tra quei lati. Quindi il richiesto quadrato è:

$$(1) \quad 0 < (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\sin\theta)^2 = |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]}.$$

Con questa normalizzazione otteniamo un genuino invariante “intrinseco”, di dimensione lunghezza⁻² (se come al solito le g_{ik} sono supposte adimensionali), diciamo

$$(2) \quad K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =: \rho_{ijkl}u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]} / ((g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})u^{[i}v^{j]}u^{[k}v^{h]}) \equiv K(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Questo si riduce al solo numeratore se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono unitari e ortogonali, cioè se (il quadrato del)la norma del bivettore $[\mathbf{u}\mathbf{v}]$ vale 1.¹⁴ La 2-curvatura definita dalla (2), che si dice **curvatura sezionale rispetto al piano di \mathbf{u} e \mathbf{v}** , si presta ad essere esportata su una generica varietà riemanniana; ma tuttavia non pseudoriemanniana, perché su quest'ultima non sarebbe in generale assicurata la diversità da zero del denominatore a 2° membro della (2). L'attributo “sezionale” ha un chiaro significato, perché la curvatura definita dalla (1) si riferisce alla *sezione* di Π con il 2-piano di \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Se $\{\mathbf{f}_{(\alpha)}\}_{\alpha=1+n}$ è una base ortonormale di Π , potremo dunque scrivere, con notazione autoevidente,

$$(3) \quad K(\alpha, \alpha') =: \rho_{ijkl} f_{(\alpha)}^{[i} f_{(\alpha')}^{j]} f_{(\alpha)}^{[k} f_{(\alpha')}^{h]} \equiv K(\alpha', \alpha),$$

in cui α e α' sono indici compresi tra 1 e n , e $K(\alpha, \alpha) \equiv 0 \quad \forall \alpha$. La $n \times n$ -matrice $\{K(\alpha, \alpha')\}$, simmetrica e a diagonale principale nulla, si dice **matrice delle 2-curvature sezionali** (relativa alla base ortonormale $\{\mathbf{f}\}_{1+n}$ di M^n). Da essa si può riottenere la 2-curvatura sezionale $K(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ definita

dalla (2). Basta esprimere \mathbf{u} come $\sum_{\alpha} f_{(\alpha)} u^{\alpha}$ (e similmente per \mathbf{v}), per avere, mediante facili passaggi,

$$(4) \quad K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha \neq \alpha'} K(\alpha, \alpha') \{u^{\alpha} u^{\alpha'} v^{\alpha} v^{\alpha'} - u^{\alpha} v^{\alpha} u^{\alpha'} v^{\alpha'}\} / \sum_{\alpha \neq \alpha'} \{u^{\alpha} u^{\alpha'} v^{\alpha} v^{\alpha'} - u^{\alpha} v^{\alpha} u^{\alpha'} v^{\alpha'}\};$$

vale a dire, la richiesta 2-curvatura è la media pesata, con i pesi riportati tra le $\{ \}$, degli elementi $K(\alpha, \alpha')$.

La matrice $\{K(\alpha, \alpha')\}$, qui ricavata mediante una ragionevole euristica, risulta di fatto legata in modo semplice e significativo alla 2-curvatura di Ricci nella direzione di un elemento della base ortonormale $\{\mathbf{f}\}$. Denotiamo con $K(\alpha)$ la somma degli elementi della riga α -ma di $\{K(\alpha, \alpha')\}$. Ricordando le (3.5.3, 38), risulta:

$$(5) \quad K(\alpha) = \sum_{\alpha' \neq \alpha} K(\alpha, \alpha') = \rho_{ijkl} f_{(\alpha)}^i f_{(\alpha)}^k \sum_{\alpha'} f_{(\alpha')}^j f_{(\alpha')}^h = -\rho_{ik} f_{(\alpha)}^i f_{(\alpha)}^k = \kappa^*(\mathbf{f}_{(\alpha)}).$$

Tradotto in parole: la somma delle 2-curvature sezionali relative agli $n(n-1)/2$ piani coordinati di una base ortonormale di Π , contenenti un elemento fisso $\mathbf{f}_{(\alpha)}$ della base, uguaglia la 2-curvatura di Ricci nella direzione di quell'elemento.

¹⁴ Se \mathbf{u}^* e \mathbf{v}^* sono altri due vettori l.i. che abbracciano lo stesso piano di \mathbf{u} e \mathbf{v} , ossia sono trasformati lineari non-singolari dei primi, si verifica subito che, sostituendoli nella (1) al posto di \mathbf{u} e rispettivamente \mathbf{v} , numeratore e denominatore vengono moltiplicati per il quadrato del determinante della trasformazione. Ciò è come dire che K dipende soltanto dal piano in questione.

Come abbiamo già osservato, la (3.5.3, 39) vale per qualunque $2 \leq n < m$. Ponendo in essa $n = 2$, otteniamo:

$$(6) \quad \kappa^*(\mathbf{p}_1) = (\kappa(\mathbf{p}_1) + \kappa(\mathbf{p}_2))\kappa(\mathbf{p}_1) - \kappa^2(\mathbf{p}_1) \equiv \kappa(\mathbf{p}_2)\kappa(\mathbf{p}_1) = \\ = K = \kappa(\mathbf{p}_1)\kappa(\mathbf{p}_2) \equiv (\kappa(\mathbf{p}_2) + \kappa(\mathbf{p}_1))\kappa(\mathbf{p}_2) - \kappa^2(\mathbf{p}_2) = \kappa^*(\mathbf{p}_2);$$

cioè, le 2-curvature di Ricci nelle due direzioni principali sono uguali tra loro e alla curvatura gaussiana K . Inoltre, per $n = 2$ la (5) dà:

$$(7) \quad \kappa^*(\mathbf{f}_{(1)}) = K(1) = K(1,2) = K(2,1) = K(2) = \kappa^*(\mathbf{f}_{(2)});$$

cioè le 2-curvature di Ricci lungo due *qualsiasi* direzioni ortogonali sono uguali. È questo un segnale anche più forte del precedente per indurci a valutare direttamente la 2-curvatura di Ricci in una *qualsiasi* direzione \mathbf{t} di Π . Come si accerta facilmente, il 2-tensore di Ricci per $n = 2$ è $\rho_{ik} = \rho_{ijhk}g^{jh} = -\rho_{1212}g_{ik}/g = \rho g_{ik}/2 = -Kg_{ik}$,¹⁵ e quindi, per la (3.5.3, 38), $\kappa^*(\mathbf{t}) = -\rho_{ik}t^i t^k = Kg_{ik}t^i t^k = K$, *indipendente* da \mathbf{t} . Questa importante circostanza poteva essere accertata subito dopo aver introdotto le 2-curvature di Ricci attraverso la (3.5.3, 38), e spiega il carattere a prima vista inatteso di quanto affermano la (6) e (ancor più) la (7).

Concludiamo citando l'uso (ben noto anche a livello elementare) di dire “ellittici” i punti di M^2 (immersa in R^3) ove $K > 0$, “iperbolici” (o “a sella”) quelli ove $K < 0$ e “parabolici” quelli ove $K = 0$. Il senso di queste denominazioni si spiega facilmente, perché la sezione locale di M^2 con un piano parallelo al suo piano tangente e da questo *poco* discosto (e dalla parte conveniente nel caso ellittico), è al 1° ordine un'ellisse, rispettivamente un'iperbole e rispettivamente una parabola. In particolare i punti parabolici giocano un ruolo in certo senso analogo, su una superficie immersa in R^3 , a quello dei punti di flesso su una curva. (Una simile classificazione dei punti di una superficie ($n \geq 2$)-dim immersa in R^{n+1} sarà data nella S.sez. 8.1.1.) Come sappiamo, infine (cfr. 3.4.2, (T1)), l'aperto considerato di M^2 (immersa in R^3), supposto semplicemente connesso, è un aperto di piano su di esso è identicamente $K \equiv 0$.

¹⁵ In particolare, per una 2-superficie immersa in E_3 è $\rho_{1212} = h$, e $\rho_{ijhk} = h\Upsilon_{ij}\Upsilon_{hk}$: quindi $\rho_{ik} = \rho_{i11k}g^{11} + \rho_{i12k}g^{12} + \rho_{i21k}g^{21} + \rho_{i22k}g^{22}$. Sostituendo i g^{hk} e i ρ_{ijhk} si trova $\rho_{ik} = -g_{ik}h/g$, e quindi, per essere $-h/g = \rho/2 = -K$, il risultato che nel testo è ottenuto *senza* passare attraverso il secondo tensore fondamentale.

APP. SPEC. CAP. 3

APP. 3.A NOTA SUL TENSORE FONDAMENTALE IN RELATIVITÀ SPECIALE

Avendo acquisito le nozioni di κ -forma e corrispondente κ -tensore in uno spazio pseudoeuclideo, (in particolare, di 2-forma e di 2-tensore fondamentali), vale la pena di dedicare questa breve App. Spec. 3.A ad una ulteriore riflessione sulla relazione di invarianza (2.2.1, 5) a fronte di trasformazioni di Lorentz speciali (2.2.1, 2). La (2.2.1, 5) può essere riscritta in modo formalmente diverso come segue. Ponendo per brevità $t^* =: ct$ e $T^* =: cT$, e usando la più conveniente indicizzazione $(x) \equiv (X) \equiv (1)$ e $(t^*) \equiv (T^*) \equiv (2)$, scriviamo y^1 per x , y^2 per t^* e similmente Y^1 per X , Y^2 per T^* , e introduciamo gli otto coefficienti $g_{11} = G_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = G_{12} = G_{21} = 0$, $g_{22} = G_{22} = -1$. Allora il 1° membro della (2.2.1, 5) diventa $g_{ij}y^i y^j$ (somma da 1 a 2 sugli indici ripetuti) e similmente il suo 2° membro diventa $G_{ij}Y^i Y^j$; la (2.2.1, 5) afferma quindi l'uguaglianza di queste due forme quadratiche simmetriche in $y \equiv y^{1 \leq i \leq 2}$ e rispettivamente in $Y \equiv Y^{1 \leq i \leq 2}$ se y e Y sono legate dalle trasformazioni di Lorentz (2.2.1, 2). Con le presenti notazioni queste trasformazioni si scrivono:

$$(1) \quad y^1 = g(Y^1 - Y^2 Y/c), \quad y^2 = -g(Y^1 Y/c - Y^2)$$

(ove qui $g = (1 - Y^2/c^2)^{-1/2}$), e affermano che il determinante della matrice (simmetrica) delle trasformazioni stesse (che è anche matrice jacobiana, perché Y/c è una costante) vale $g^2(1 - Y^2/c^2) = 1$. Come già osservato, le (1) sono quindi unicamente invertibili.

Calcolando $g_{hk} \partial y^h / \partial Y^i \partial y^k / \partial Y^j$ per $i, j = 1, 2$, troviamo: per $i = j = 1$, $g^2 - (-gY/c)^2 = g^2(1 - Y^2/c^2) = 1$; per $i = 1, j = 2$, $-g^2 Y/c - (-g^2 Y/c) = 0$, e lo stesso per $i = 2, j = 1$; per $i = j = 2$, $(-gY/c)^2 - g^2 = g^2(Y^2/c^2 - 1) = -1$. In conclusione,

$$(2) \quad g_{hk} \partial y^h / \partial Y^i \partial y^k / \partial Y^j = G_{ij}.$$

Invertendo le (1) rispetto alle Y e calcolando le derivate delle Y rispetto alle y , in modo completamente simmetrico troviamo

$$(3) \quad G_{hk} \partial Y^h / \partial y^i \partial Y^k / \partial y^j = g_{ij},$$

cioè le stesse (2) in cui si scambiano tra loro le minuscole con le maiuscole.

Richiedendo invece che le (2) valgano per

$$(4) \quad g_{ik} = G_{ik} = \varepsilon(i) \delta_{ik}$$

dove $\varepsilon(1) = +1$ e $\varepsilon(2) = -1$, abbiamo tre equazioni nelle quattro incognite (costanti) $\partial y^1 / \partial Y^1$, $\partial y^1 / \partial Y^2$, $\partial y^2 / \partial Y^1$, $\partial y^2 / \partial Y^2$. Risolvendo questo sistema (dal quale ci si aspetta che un parametro resterà indeterminato), ritroviamo le (1) con una costante arbitraria in luogo di Y/c . Sulla

ricostruzione delle (1) partendo dalle (2) sotto le (4), si riveda l'App. Spec. 2.C, caso (ii), con le ovvie identificazioni $a = d = g$, $b = c = -gY/c$. In modo simile, partendo dalle (3) sotto le (4) si ritrovano le inverse delle (1), con la solita costante arbitraria in luogo di Y/c .

Le (2) si riconoscono subito come legge di trasformazione per cogredienza delle componenti covarianti del 2-tensore simmetrico $\{g_{hk}\}_{h,k=1,2}$ in quelle del suo omologo $\{G_{ij}\}_{i,j=1,2}$ a fronte della trasformazione di Lorentz (1). Queste componenti covarianti altro non sono che quelle della 2-forma (o 2-tensore) fondamentale B (vedi S.sez. 3.1.1), che nella base "naturale" (pseudoortonormale) $\{e_i\}_{i=1,2}$ valgono $B_{ik} = \varepsilon_i \delta_{ik}$. Come sappiamo, il segno del determinante della forma è invariante rispetto a trasformazioni lineari *arbitrarie* della base; e poiché esso è "−" nella base naturale, tale rimane in qualunque base.

Naturalmente questo permette di scrivere la (2.2.1, 5) come $g_{ik}(x)dx^i dx^k = g'_{ik}(x')dx'^i dx'^k$ per trasformazioni $x \leftrightarrow x'$ (abbastanza regolari e non singolari) *arbitrarie*, in virtù della regola di trasformazione per cogredienza delle componenti covarianti di un 2-tensore generico e di quella per controgredienza dei differenziali delle coordinate, $dx'^i = \partial x'^i / \partial x^k dx^k$. Ma come sappiamo, in relatività speciale ci si limita usualmente a trasformazioni $x \leftrightarrow_{(p)} x'$ di tipo Poincaré (questo è il significato del pedice (p)). La relazione $x \leftrightarrow_{(p)} x'$ tra x e x' , che è evidentemente una relazione di equivalenza, ripartisce l'insieme di tutte le coordinate in classi di equivalenza disgiunte; un rappresentante di una di queste classi si identifica come un "riferimento inerziale", e ci si limita a trasformazioni di Poincaré interne a quella classe. Da un punto di vista logico, questo comporta il ricorso ad un assioma del tipo "esiste un riferimento inerziale", esattamente come nella cinematica di Euclide-Newton.

APP. 3.B ALCUNI ASPETTI DELLA GEOMETRIA DIFFERENZIALE DI UNA SUPERFICIE IMMERSA IN \mathbb{R}^3

Svolgiamo qui come esercizio certe elementari applicazioni della teoria generale esposta nella S.sez. 3.5.3, in particolare per $n = 2$, $m = 3$ (superficie immersa, o meglio *embedded*, in \mathbb{R}^3). Siano x^1, x^2, x^3 coordinate cartesiane ortogonali di \mathbb{R}^3 , e supponiamo che la superficie in oggetto sia rappresentabile in forma esplicita come $x^3 \equiv z = z(x^1, x^2)$, supponendo z di classe C^2 in un aperto A del piano (x, y) . In questo caso le (x^1, x^2) si possono adottare come coordinate della superficie. Siano $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 \equiv \mathbf{k}$ i versori coordinati, e abbiano orientamento destro ($\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2$). Denotando per brevità con z_i (invece che con $z_{,i}$) la $\partial z / \partial x^i$ e con z_{ij} la $\partial^2 z / \partial x^i \partial x^j$ ($i, j = 1, 2$), abbiamo $\mathbf{f}_i = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_3 z_i$ e

$$(1) \quad g_{ij} = \delta_{ij} + z_i z_j;$$

quindi,

$$(1bis) \quad g =: \det\{g_{ij}\} = 1 + z_1^2 + z_2^2 > 0.$$

Poiché anche g_{11} (ad es.) è positivo, la forma quadratica di coefficienti g_{ij} è definita positiva. Si hanno anche subito le componenti controvarianti del tensore fondamentale, che leggendo gli indici mod2 si possono esprimere come

$$(2) \quad g^{ij} = [\delta^{ij} + (-1)^{i+j} z_{i+1} z_{j+1}] / g.$$

Conveniamo di orientare il versore normale alla superficie in modo che la sua componente su \mathbf{k} sia positiva, cioè secondo $\mathbf{n} =: (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2) / |\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_2| = (\mathbf{k} - z_1 \mathbf{k}_1 - z_2 \mathbf{k}_2) g^{-1/2}$. Vogliamo adesso calcolare il 2° tensore fondamentale usando le (3.5.3, 6), $h_{ik} = (\mathbf{n}, \mathbf{f}_i \mathbf{f}_k)$; ovvero, poiché $\mathbf{f}_{ij} = \partial_j \mathbf{f}_i - \Gamma_{ij}^k \mathbf{f}_k \equiv \mathbf{f}_{j/i}$, e $(\mathbf{n}, \mathbf{f}_i) \equiv 0$, usando le $h_{ij} = (\mathbf{n}, \partial_j \mathbf{f}_i) \equiv (\mathbf{n}, \partial_i \mathbf{f}_j)$. Nel caso presente abbiamo $\partial_j \mathbf{f}_i = z_{ij} \mathbf{k}$, e quindi

$$(3) \quad h_{ij} = z_{ij} g^{-1/2},$$

da cui

$$(3bis) \quad h =: \det\{h_{ij}\} = \det\{z_{ij}\} g^{-1}. \quad 1, 2$$

Qui $g_{(2)}$ è al solito adimensionale, mentre le z_{ij} hanno dimensione L^{-1} , quindi $\det\{z_{ij}\}$ ha dimensione L^{-2} . Calcoliamo adesso la somma delle curvature principali $\kappa(\mathbf{p}_1) + \kappa(\mathbf{p}_2) \equiv 2H$, che come sappiamo è opposto all'invariante lineare di $h_{(2)}$, $g^{ij} h_{ij}$. Avendo sia le g^{ij} che le h_{ij} , facili passaggi portano a

$$(4) \quad H = - [z_{11}(1+z_2^2) - 2z_1 z_2 z_{12} + z_{22}(1+z_1^2)] g^{-3/2}.$$

Possiamo similmente calcolare la curvatura totale, che è

$$(5) \quad K = h/g = \det\{z_{ij}\} g^{-2}.$$

La componente $(_{1212})$ del tensore di Riemann è dunque $\rho_{1212} = Kg = h = \det\{z_{ij}\} g^{-1}$. Il 2° tensore fondamentale è nullo in A sse tutte le derivate seconde di z sono ivi nulle, e quindi sse $z = z(x,y)$ è l'equazione di un piano: $z = ax_1 + bx_2 + c$, a , b , e c essendo delle costanti. Il 1° tensore fondamentale è allora costante, ed è dato da $g_{11} = 1 + a^2$, $g_{22} = 1 + b^2$, $g_{12} = ab$ e $g = 1 + a^2 + b^2$. Questo piano è parallelo al piano $z = 0$ sse $a = b = 0$, nel qual caso $g_{ij} = \delta_{ij}$, $g = 1$. Si noti che la coppia dei versori tra loro ortogonali $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ può essere fatta ruotare di un angolo arbitrario attorno all'asse \mathbf{k} senza che alcuna delle formule precedenti si invalidi. Poiché sia H che K sono invarianti, e quindi invarianti anche rispetto a tale rotazione, si conclude che le espressioni $[z_{11}(1+z_2^2) - 2z_1 z_2 z_{12} + z_{22}(1+z_1^2)] g^{-3/2}$ e $\det\{z_{ij}\} g^{-2}$ non variano sotto di essa. Questo può anche essere verificato in modo diretto.

¹ Lo stesso risultato si ottiene calcolando \mathbf{n}_i e usando direttamente le (3.5.3, 7), equivalenti alle (3.5.3, 6). Sempre leggendo gli indici mod2, si trova $\mathbf{n}_i = -(z_{ii} \mathbf{k}_i + z_{i,i+1} \mathbf{k}_{i+1}) g^{-1/2} + (\mathbf{k} - z_1 \mathbf{k}_1 - z_2 \mathbf{k}_2) \partial_i g^{-1/2}$. Moltiplicando internamente per \mathbf{f}_j , il termine in $\partial_i g^{-1/2}$ sparisce, e restiamo con $(\mathbf{n}_i, \mathbf{f}_j) = -(z_{ii} \delta_{ij} + z_{i,i+1} \delta_{i+1,j}) g^{-1/2}$. In forza delle (3.5.3, 7), ritroviamo così le (3).

² Più in generale, se la superficie è data nella forma $x^1 \equiv x = x(u,v)$, $x^2 \equiv y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, si verifica che $(h_{uu}, h_{uv}, h_{vv}) = (h'_{uu}, h'_{uv}, h'_{vv}) g^{-1/2}$, ove h'_{uu} , h'_{uv} e h'_{vv} sono i determinanti aventi per prima riga $\partial_{uu}^2 x \quad \partial_{uv}^2 y \quad \partial_{uu}^2 z$, rispettivamente $\partial_{uv}^2 x \quad \partial_{uv}^2 y \quad \partial_{uv}^2 z$, e rispettivamente $\partial_{vv}^2 x \quad \partial_{vv}^2 y \quad \partial_{vv}^2 z$, per seconda riga $\partial_{ux} \quad \partial_{uy} \quad \partial_{uz}$ e per terza riga $\partial_{vx} \quad \partial_{vy} \quad \partial_{vz}$. È immediato verificare che le precedenti espressioni di h_{uu} , h_{uv} , h_{vv} si riducono alle (3) per $u = x$, $v = y$.

Quanto precede è facilmente generalizzabile ad una superficie n-dim embedded in \mathbb{R}^{n+1} , oppure specializzabile ad una curva di \mathbb{R}^2 . In questo secondo caso, se $y = y(x)$ è l'equazione della curva, $h_{11} = d^2y/dx^2$; e quindi $h_{11} = 0$ equivale a che $y(x)$ sia una retta.

Applicheremo ora i precedenti risultati al caso della 2-semisfera di centro nell'origine dello spazio euclideo 3-dim, raggio unitario e $z > 0$; cioè, scrivendo x per x^1 e y per x^2 , per la superficie di equazione

$$(6) \quad z = [1 - (x^2 + y^2)]^{1/2}.$$

Avendo richiesto $z > 0$, è implicita la condizione $x^2 + y^2 < 1$. Denotando per brevità il radicando nella (6) con μ , troviamo $-z_x = x\mu^{-1/2}$, $-z_{xx} = (1-y^2)\mu^{-3/2}$, $-z_{xy} = xy\mu^{-3/2}$, e similmente scambiando tra loro x e y . Si ha così $g_{xx} = 1 + x^2\mu^{-1}$, $g_{xy} = xy\mu^{-1}$, e simili scambiando tra loro x e y . Quindi $g = 1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + x^2\mu^{-1} + y^2\mu^{-1} = \mu^{-1}$. Poi $\det\{z_{ij}\} = z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = [(1-y^2)(1-x^2) - x^2y^2]\mu^{-3} = \mu^{-2}$, e perciò

$$(7) \quad K = \det\{z_{ij}\}g^{-2} = \mu^{-2}\mu^2 = 1.$$

Analogamente, dalla (4) si ha:

$$(8) \quad \mu^{-3/2}H = -z_{xx}(1+z_y^2) + 2z_xz_yz_{xy} - z_{yy}(1+z_x^2).$$

Facendo le dovute sostituzioni ed eliminando un comune fattore $\mu^{-3/2}$ questa diventa

$$(9) \quad H = (1-y^2)(1+y^2\mu^{-1}) + (1-x^2)(1+x^2\mu^{-1}) - 2x^2y^2\mu^{-1} = 2.$$

Diamo anche il 2° tensore fondamentale:

$$(10) \quad h_{xx} = -(1-y^2)\mu^{-1}, \quad h_{xy} = -xy\mu^{-1},$$

e similmente scambiando x con y . Da queste si vede che

$$(10bis) \quad h_{xx} = -g_{xx}, \quad h_{xy} = -g_{xy}, \quad h_{yy} = -g_{yy},$$

cioè $h_{ij} = -g_{ij}$. Essendo una uguaglianza tra tensori, questa vale in qualunque riferimento. Segue anche che il determinante h delle componenti cartesiane (10) vale $h = \mu^{-1}$; e quindi ancora $1 = K = \mu^{-2}\mu^2 = \mu^{-1}\mu = h/g$. Inoltre K è un invariante, e quindi la $K = 1$ vale in qualsiasi riferimento. Anche H è un invariante, pari a $-h_{ij}g^{ij}$, e alla luce delle (10bis) non occorre alcun calcolo per determinarlo sulla sfera unitaria: infatti $H = g_{ij}g^{ij} = 2$.

Il passaggio dalla semisfera unitaria ad una analoga semisfera di raggio $R > 0$ è ovvio. Ferme restando le espressioni generali (1) di g_{ij} e (3) di h_{ij} , basta osservare che, passando dal raggio unitario al raggio R , le z_i (quindi le g_{ij} e g) non cambiano, mentre le z_{ij} (quindi le h_{ij}) sono moltiplicate per R^{-1} , e $\det\{z_{ij}\}$ è moltiplicato per R^{-2} . Questo discende anche da semplici considerazioni dimensionali. Avremo dunque $h_{ij} = -R^{-1}g_{ij}$ in luogo di $h_{ij} = -g_{ij}$ e quindi $h = R^{-2}g$. Attese le espressioni (4) e (5) di H e risp. di K , risulta quindi $K = R^{-2}$ e $H = 2R^{-1}$. (La seconda di queste scende anche direttamente dalla $H = -h_{ij}g^{ij} = R^{-1}g_{ij}g^{ij} = 2R^{-1}$.) Infine, nel limite in cui

$R \rightarrow \infty$, $h_{(2)} \rightarrow 0$ come R^{-1} , $H \rightarrow 0$ allo stesso modo, e $K \rightarrow 0$ come R^{-2} . Che K e H vadano a zero per $R \rightarrow \infty$ è poi naturale, perché la semisfera degenera nel piano $z = \text{cost}$ con $\text{cost} \rightarrow \infty$.

CAP. 4

STRUMENTI MATEMATICI II¹

4.1) VARIETÀ TOPOLOGICHE E DIFFERENZIABILI

4.1.1) NOZIONI DI BASE I

È ormai il momento di rimuovere una fondamentale limitazione alla quale abbiamo fin qui sottostato nella presentazione del calcolo su quella che abbiamo chiamato una varietà ($n \geq 1$)-*dim(ensionale)*, e cioè che essa sia immersa (o incastonata) in uno spazio pseudoeuclideo di *dim(ensione)* $m \geq n$. Ciò si ottiene introducendo una nuova e più generale accezione di varietà *n-dim*, quella cui abbiamo in precedenza accennato nominandola come “varietà *n-dim* astratta”. Informalmente, una tale varietà *n-dim* può definirsi come un insieme costituito da suoi “pezzi”, in generale congiunti, ciascuno dei quali in biiezione con \mathbb{R}^n (o ciò che è lo stesso, con un corrispondente aperto, nella topologia standard, di \mathbb{R}^n), e in modo che nelle possibili intersezioni di loro coppie qualsiasi siano soddisfatte certe opportune “condizioni di compatibilità”. In particolare, questa definizione prescinde dall’assegnazione, sulla varietà astratta in oggetto, di quel particolare campo 2-tensoriale simmetrico e non singolare che è il suo (1°) tensore fondamentale. Come abbiamo già accennato alla fine della Sez. 3.1, ciò comporta l’impossibilità di pensare ad un campo tensoriale dato sulla varietà (o anche soltanto ad un tensore dato in un suo punto) indipendentemente dal *tipo* delle sue componenti: le relazioni che permettono di passare da un tipo ad un altro di componenti di uno “stesso” tensore non possono infatti più scriversi in assenza di un tensore fondamentale.

Naturalmente, prima di occuparci di calcolo tensoriale su una varietà astratta (o di tensori in un suo punto) dobbiamo definire quest’ultima in modo formale. Possiamo introdurre la questione prendendo le mosse dalla S.sez. 3.3.2, dove abbiamo considerato gli ($1 \leq r \leq \omega$)-diffeomorfismi λ e λ'

¹ Più specificamente che di altri, la comprensione di questo capitolo presuppone una sufficiente familiarità con alcune nozioni topologiche di base. Come ausilio di prima necessità per chi ne avesse bisogno, un conveniente (e minimamente “ragionato”) “Glossario di Topologia” (G.T. \equiv App. Gen. B) è disponibile alla fine del libro. Diamo qui anche per presupposta una buona conoscenza della teoria intuitiva degli insiemi e delle sue notazioni (vedi App. Gen. A).

dell'aperto ² $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$, sull'aperto $\lambda(U) \subset \mathbb{R}^n$ e rispettivamente sull'aperto $\lambda'(U) \subset \mathbb{R}^n$, per i quali

$$(1_1) \quad \lambda' \circ \lambda^{-1}: \lambda(U) \rightarrow \lambda'(U) \text{ e}$$

$$(1_2) \quad \lambda \circ \lambda'^{-1}: \lambda'(U) \rightarrow \lambda(U)$$

sono a loro volta r -diffeomorfismi (di $\lambda(U)$ su $\lambda'(U)$ e viceversa), uno inverso dell'altro. Cominceremo col generalizzare questa situazione pensando gli r -diffeomorfismi $\lambda \equiv \lambda_1$ e $\lambda' \equiv \lambda_2$ (questa notazione è ora più conveniente) come aventi per insiemi di definizione (\equiv domini) gli aperti *congiunti* $\emptyset \neq U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e risp. $\emptyset \neq U_2 \subset \mathbb{R}^n$, e richiedendo che le (1) continuino ad essere r -diffeomorfismi (tra loro inversi) avendovi sostituito U con $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Una seconda generalizzazione consiste nel sostituire ad \mathbb{R}^n un arbitrario insieme $\mathcal{M} \neq \emptyset$ *a priori privo di struttura*. A causa di questa sostituzione, U_1 ($\equiv \text{dom}\lambda_1$) e U_2 ($\equiv \text{dom}\lambda_2$) si penseranno ora come semplici sottoinsiemi (SI) non vuoti di tale \mathcal{M} ; e al contempo $\lambda_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ [$\lambda_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$] come una *iniezione* di U_1 [di U_2], e quindi come una *biiezione*, di U_1 [di U_2] su $\lambda_1(U_1) \subset \mathbb{R}^n$ [su $\lambda_2(U_2) \subset \mathbb{R}^n$] (qui \mathbb{R}^n resta dunque nel gioco), tali che (i) per $U_{1,2} \equiv U_{2,1} =: U_1 \cap U_2$, $\lambda_1(U_{1,2})$ e $\lambda_2(U_{1,2})$ siano aperti, e (ii) l'applicazione $\lambda_{1,2} =: \lambda_2 \circ \lambda_1^{-1}: \lambda_1(U_{1,2}) \rightarrow \lambda_2(U_{1,2})$ sia un $(1 \leq r \leq \omega)$ -diffeomorfismo (e quindi lo sia la sua inversa $\lambda_{2,1} =: \lambda_1 \circ \lambda_2^{-1}: \lambda_2(U_{1,2}) \rightarrow \lambda_1(U_{1,2})$). Come ultimo passo, estenderemo infine la condizione (ii) anche al caso $r = 0$, riscrivendola dunque con “ $(1 \leq r \leq \omega)$ -diffeomorfismo aut omeomorfismo” in luogo di “ $(1 \leq r \leq \omega)$ -diffeomorfismo”.³

La situazione appena descritta aiuta a comprendere il senso delle prossime definizioni. Sia ancora $\mathcal{M} \neq \emptyset$ un insieme di riferimento arbitrariamente dato. Per un suo SI $U \neq \emptyset$, e per un dato naturale $n \geq 1$, sia $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ a) un' *iniezione* di U in \mathbb{R}^n , e b) $\lambda(U) \subset \mathbb{R}^n$ sia *aperto*. La condizione a) equivale a che $\lambda: U \rightarrow \lambda(U)$ sia una biiezione, ossia alla equipotenza di U e $\lambda(U)$, e la b) implica l'equipotenza di U e \mathbb{R}^n , perché un aperto di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^n stesso sono comunque equipotenti. La terna $C =: (U, \lambda, n \geq 1)$ (o semplicemente la coppia $C =: (U, \lambda)$ se n può sottintendersi) si dice **carta** di \mathcal{M} ; U è il **dominio**, λ la **mappa**, e $n \geq 1$ la **dimensione** di C .⁴ Per dato naturale $r \geq 0$, due carte con la stessa $\dim n$ $C_{1|2} =: (U_{1|2}, \lambda_{1|2}, n)$ ⁵ di \mathcal{M} si dicono **r -compatibili** se $U_{1,2} \neq \emptyset$ (quindi due carte di \mathcal{M}

² Salvo avviso in senso contrario, qui e nel seguito la topologia di \mathbb{R}^n è sempre quella standard.

³ In realtà il caso in cui $U_{1,2} = \emptyset$ sarebbe ammissibile, perché allora $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{2,1}$ si ridurrebbero entrambi alla “funzione vuota” $\emptyset = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ che ha grafo, dominio e codominio vuoti (vedi ad es. Bourbaki, *Théorie des Ensembles*, II, § 3, 1); perché a tale funzione vuota si possono attribuire proprietà arbitrarie, inclusa quella di essere un r -diffeomorfismo (di \emptyset su \emptyset). Preferendo tuttavia evitare questo tipo di sottigliezze logiche, basterà dire che $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{2,1}$ sono definiti soltanto se $U_{1,2} \neq \emptyset$ (risultando allora r -diffeomorfismi inversi).

⁴ Nella presente esposizione, tale dimensione sarà supposta ≥ 1 perché una dimensione nulla della carta darebbe infatti luogo a situazioni degeneri e sostanzialmente banali.

⁵ Qui | è un segno di congiunzione, che usiamo per evitare di ripetere proposizioni parallele.

con domini disgiunti sono r -compatibili per qualunque $r \geq 0$), aut se, essendo $U_{1,2} \neq \emptyset$, sono rispettate le condizioni (i) e (ii) (paragr. prec.), la seconda estesa come convenuto a $r = 0$. La (possibile) r -compatibilità di C_1 e C_2 è manifestamente una relazione simmetrica; inoltre, se C_1 e C_2 sono r -compatibili, esse sono r' -compatibili per ogni $r' < r$, mentre non lo sono in generale se $r' > r$. Con blando abuso di linguaggio, due carte di \mathcal{M} si diranno **carte congiunte** [**disgiunte**] se i loro domini sono congiunti [disgiunti]. Infine una carta qualsiasi di \mathcal{M} è banalmente ω -compatibile con se stessa; ma non è detto che la r -compatibilità tra due carte sia transitiva. Gli $(r \geq 0)$ -diffeomorfismi ⁶ $\lambda_{1,2}$ e $\lambda_{2,1}$ definiti per le carte congiunte $C_{1|2} = (U_{1|2}, \lambda_{1|2}, n)$ si dicono anche **mappe di transizione** relative alla coppia λ_1 e λ_2 . La parte comune dei domini di due carte equidimensionali congiunte si dice **dominio di transizione** relativo a quelle carte. Due carte possono avere lo stesso dominio, e differire per avere mappe diverse.

Il contenuto di questo paragrafo riguarda essenzialmente notazioni e denominazioni. Sia $\pi^i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n \geq 1$) il proiettore canonico di \mathbb{R}^n in \mathbb{R} , cioè l'operatore lineare che proietta $x = \langle x^1, \dots, x^n \rangle \in \mathbb{R}^n$ in $x^i \in \mathbb{R}$. Per una carta $C = (U, \lambda, n)$ di \mathcal{M} , se $p \in U$ e $x = \lambda(p) \in \lambda(U) \subset \mathbb{R}^n$, applicando π^i alla $x = \lambda(p)$ ne otteniamo la versione indiciale $x^i = \lambda^i(p)$ per $i = 1, \dots, n$. Le n funzioni λ^i , su U e con valori in \mathbb{R} , si dicono (funzioni) **coordinate della carta** C , e i loro valori in p **coordinate di p nella carta** C . Riferendoci alle due carte (di \mathcal{M}) $C_1 = (U_1, \lambda_1, n)$ e $C_2 = (U_2, \lambda_2, n)$, congiunte e $(r \geq 0)$ -compatibili, avremo allora, per ogni $x_1 \in \lambda_1(U_{1,2})$, e ogni $x_2 = \lambda_{1,2}(x_1) \in \lambda_2(U_{2,1})$ (sempre con $\lambda_{1,2} =: \lambda_2 \circ \lambda_1^{-1}$); e analogamente scambiando ovunque 1 con 2. Ancora applicando π^i , queste due uguaglianze si esplicitano nel sistema di $2n$ uguaglianze $x_2^1 = \lambda_{1,2}^1(x_1^1, \dots, x_1^n), \dots, x_2^n = \lambda_{1,2}^n(x_1^1, \dots, x_1^n)$, e analogamente col solito scambio fra 1 e 2. Le n funzioni $\lambda_{1,2}^1, \dots, \lambda_{1,2}^n$ [le funzioni inverse $\lambda_{2,1}^1, \dots, \lambda_{2,1}^n$] da $\lambda_1(U_{1,2})$ su $\lambda_2(U_{2,1})$ [da $\lambda_2(U_{2,1})$ su $\lambda_1(U_{1,2})$] si dicono **funzioni** (o **mappe**) **di transizione da C_1 a C_2** [**da C_2 a C_1**], e sono per ipotesi di classe di continuità (CdC) r . Se $r \geq 1$, la $n \times n$ -matrice jacobiana $\{\partial x_2^j / \partial x_1^i\}(x_1)$ [$\{\partial x_1^i / \partial x_2^j\}(x_2)$] si dice **matrice di transizione da C_1 a C_2** [**da C_2 a C_1**] **in** $x_1 \in \lambda_1(U_{1,2})$ [**in** $x_2 \in \lambda_2(U_{2,1})$]. Evidentemente, queste due matrici sono non singolari e l'una inversa dell'altra.

Per dati $r \geq 0$ e $n (\geq 1)$, supporremo ora che esista un insieme di carte di $\mathcal{M} \neq \emptyset$ di comune dimensione n e r -compatibili l'una con l'altra, diciamo $\{C_i = (U_i, \lambda_i, n)\}_{i \in I}$ (ove I è un insieme d'indici non vuoto arbitrario, ma per lo più finito o numerabile), l'unione dei cui domini sia un ricoprimento di \mathcal{M} , cioè per cui $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} U_i$. Questo insieme di carte si dice un **atlante** su \mathcal{M} , di **classe di continuità** (CdC) r e di **dimensione** n , e sarà nominato come un $\langle r, n \rangle$ -**atlante su \mathcal{M}** . Un

⁶ Qui e nel seguito usiamo l'espressione “ $(r \geq 0)$ -diffeomorfismo” per significare “ $(r \geq 1)$ -diffeomorfismo o omeomorfismo”.

$\langle r, n \rangle$ -atlante (su \mathcal{M}) è anche un $\langle r', n \rangle$ -atlante per $r' < r$. Un $\langle r, n \rangle$ -atlante \mathcal{A} su \mathcal{M} si dice **compatibile** con un $\langle r, n \rangle$ -atlante \mathcal{A}' su \mathcal{M} se ogni carta di \mathcal{A} è r -compatibile con ogni carta di \mathcal{A}' ; o ciò che è lo stesso, se l'unione $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ è ancora un $\langle r, n \rangle$ -atlante su \mathcal{M} . La relazione di compatibilità appena formulata (evidentemente riflessiva e simmetrica) tra due $\langle r, n \rangle$ -atlanti su \mathcal{M} è anche (si dimostra) transitiva; quindi è una relazione di equivalenza. L'insieme di tutti i $\langle r, n \rangle$ -atlanti su \mathcal{M} è dunque ripartito in classi di equivalenza disgiunte secondo la relazione in oggetto, e ciascuna classe è identificata da un suo qualsiasi elemento o rappresentante. Una tale classe di equivalenza di $\langle r, n \rangle$ -atlanti su \mathcal{M} si dice una $\langle r, n \rangle$ -**struttura su \mathcal{M}** ; in particolare una **n -struttura topologica** se $r = 0$, una $\langle r, n \rangle$ -**struttura differenziabile** se $1 \leq r < \infty$, una **n -struttura liscia** se $r = \infty$ e una **n -struttura analitica (reale)** se $r = \omega$. Il caso $r = \infty$ è in pratica quello più semplice e interessante. L'unione di tutti gli $\langle r, n \rangle$ -atlanti di una $\langle r, n \rangle$ -struttura su \mathcal{M} è a sua volta (si intuisce, e si può dimostrare) un $\langle r, n \rangle$ -atlante di \mathcal{M} che si dice **atlante massimale** (o **completo**) di quella $\langle r, n \rangle$ -struttura.

Nel seguito potremo alleggerire le notazioni eliminando da esse la dimensione n , dando per inteso che essa sia sempre la stessa. Naturalmente non è detto che per il dato \mathcal{M} esista un r -atlante \mathcal{A} ; ma se esiste, allora sono unicamente determinati sia la r -struttura di cui \mathcal{A} è un rappresentante che l'associato r -atlante massimale. Poiché \mathcal{A} determina unicamente la r -struttura, e questa determina unicamente l' r -atlante massimale, quest'ultimo potrà denotarsi come $\max(\mathcal{A})$. L'attributo "massimale" si spiega col fatto che non può esistere un r -atlante che sia al contempo massimale (cioè sia del tipo $\max(\mathcal{A}')$ per qualche r -atlante \mathcal{A}') e includa *strettamente* $\max(\mathcal{A})$. Segue da ciò che $\max(\max(\mathcal{A})) = \max(\mathcal{A})$ per qualunque r -atlante \mathcal{A} . Si verifica che $\max(\mathcal{A})$ è l'insieme di tutte le carte r -compatibili con ogni carta di \mathcal{A} ; e che la r -struttura di cui \mathcal{A} è un rappresentante, e $\max(\mathcal{A})$, sono in corrispondenza biunivoca⁷. Ovviamente r e n si dicono la CdC e la dimensione sia della r -struttura che dell' r -atlante massimale.

Se \mathcal{A} è un r -atlante su \mathcal{M} , la coppia formata da \mathcal{M} e da $\max(\mathcal{A})$, $\{\mathcal{M}, \max(\mathcal{A})\}$ (o equivalentemente da \mathcal{M} e dalla r -struttura corrispondente, di cui \mathcal{A} è un rappresentante), si definisce come $\langle r, n \rangle$ -**varietà** ${}^r\mathcal{M}^n$, di supporto \mathcal{M} , CdC r e dim n : **n -varietà topologica** se $r = 0$, **$\langle r, n \rangle$ -varietà differenziabile** se $1 \leq r < \infty$, ..., e così via come per le $\langle r, n \rangle$ -strutture. (Questa è una definizione fondamentale, e va ben assimilata.)

⁷ Infatti una r -struttura α (l'insieme di tutti gli r -atlanti compatibili con un r -atlante \mathcal{A} , e quindi anche tra loro per la transitività della relazione tra r -atlanti "essere compatibili") determina unicamente il relativo r -atlante massimale Ω come l'unione degli r -atlanti di α . Viceversa, un r -atlante massimale Ω (l'insieme di tutte le carte r -compatibili con ogni carta di un r -atlante \mathcal{A}) determina unicamente la relativa r -struttura α come l'insieme degli r -atlanti compatibili con \mathcal{A} (e quindi anche tra loro per la transitività). In conclusione α e Ω sono in corrispondenza biunivoca.

Di nuovo sottintendendo la dimensione n , una r -varietà che ammette un r -atlante \mathcal{A}° le cui carte hanno l'intero supporto \mathcal{M} come comune dominio si dice **r -varietà elementare**. Il supporto \mathcal{M} di una tale varietà elementare è dunque ricopribile da una sola carta di quell' r -atlante \mathcal{A}° . Naturalmente questo non significa che una varietà elementare non abbia carte r -compatibili con quelle di \mathcal{A}° ma con dominio (strettamente) incluso in \mathcal{M} , o r -atlanti compatibili con \mathcal{A}° ma da esso diversi, ecc. Si rimarchi che carte diverse di \mathcal{A}° differiscono soltanto perché “mappano diversamente” \mathcal{M} in \mathbb{R}^n . Le funzioni di transizione tra carte di \mathcal{A}° sono dunque r -diffeomorfismi globali tra i loro domini.

Ove il riferimento sia chiaro, trascureremo spesso di menzionare esplicitamente la CdC e/o la dim parlando di un atlante, di una struttura, di una varietà, ecc.; ma è anche comodo evidenziare la CdC (diciamo r) e/o la dim (diciamo n), della generica varietà ${}^rM^n$ scrivendo soltanto rM , o M^n , a seconda della convenienza, in luogo di ${}^rM^n$. Un atlante \mathcal{A} incluso nell'atlante massimale $\max(\mathcal{A})$ di M , o una carta di \mathcal{A} (che è comunque una carta di $\max(\mathcal{A})$), si dicono anche, brevemente, **atlante di M** , o rispettivamente **carta di M** . Una carta di M al cui dominio appartiene il punto $p \in \mathcal{M}$ si dice **carta di M in p** . Evidentemente, per ogni p di \mathcal{M} esiste una tale carta di M in p . Infine una carta di M in p si dice **centrata in p** se per la mappa λ di quella carta è $\lambda(p) = 0$.⁸

Come già detto, una $\langle r, n \rangle$ -varietà M è anche una $\langle r', n \rangle$ -varietà con lo stesso supporto e lo stesso atlante massimale, per ogni $r' < r$; e in particolare, per $r' = 0$, una n -varietà topologica. Quest'ultima denominazione è appropriata, perché il supporto \mathcal{M} di M acquista effettivamente una topologia quando si prescriva che $A \subset \mathcal{M}$ sia un suo aperto se $\lambda(U \cap A)$ è un aperto di \mathbb{R}^n per ogni carta (U, λ) dell'atlante massimale di M . Si verifica infatti che l'insieme degli aperti di \mathcal{M} così definiti soddisfa gli assiomi topologici;⁹ in particolare, che risultano aperti i domini di tutte le carte, e i domini di transizione relativi a coppie di carte congiunte. La topologia così definita su \mathcal{M} si dice **topologia indotta dalla $\langle r, n \rangle$ -struttura** in oggetto, e la biiezione $\lambda =: U \rightarrow \lambda(U)$ della generica carta è un omeomorfismo rispetto alla topologia indotta.¹⁰ Quando si parla della “topologia” di una

⁸ Alcuni definiscono “carta” la terna $\langle U, \lambda, n \rangle$ con l'intesa che λ sia una biiezione di U sull'intero \mathbb{R}^n piuttosto che su un suo generico SI proprio aperto. In realtà ci si può sempre ridurre ad un $\langle r, n \rangle$ -atlante di carte “speciali” di questo tipo. Partendo infatti da una carta “standard” (U, λ) con $\lambda(U) = \text{aperto di } \mathbb{R}^n$, $\lambda(U)$ può rappresentarsi come unione di n -dischi aperti D_α (dove α corre su un conveniente insieme d'indici) perché l'insieme degli n -dischi aperti di \mathbb{R}^n (con la topologia standard) ne è una base di aperti; l'antiimmagine U_α attraverso λ di D_α (cioè $\lambda^{-1}(D_\alpha)$) è $\subset U$, e $\cup_\alpha U_\alpha = U$. In definitiva ci si può ridurre ad un $\langle r, n \rangle$ -atlante di carte del tipo (U_α, λ) con $\lambda(U_\alpha) = D_\alpha$. Poiché esiste comunque un r -diffeomorfismo $f_\alpha: D_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \forall \alpha$, la tesi segue sostituendo alla carta (U, λ) le carte $(U_\alpha, f_\alpha \circ \lambda)$, per ciascuna delle quali è $(f_\alpha \circ \lambda)(U_\alpha) = \mathbb{R}^n$. Il passaggio da carte speciali a carte standard non costituisce cioè una vera generalizzazione, e ci si potrebbe limitare alle prime; ma in pratica l'atlante di carte standard resta un'opzione più flessibile, e ad esso ci atterremo di norma.

⁹ Sarà utile tener presente a questo scopo che, per ogni biiezione $h: U(\subset X) \rightarrow h(U)(\subset Y)$ (ove X e Y sono insiemi qualsiasi; nel caso di nostro interesse $X = \mathcal{M}$, $Y = \mathbb{R}^n$ e $h = \lambda$), e per qualunque famiglia $\{U_i\}$ di SI di X , risulta $\cup_i h(U_i \cap U) = h((\cup_i U_i) \cap U)$ e $\cap_i h(U_i \cap U) = h((\cap_i U_i) \cap U)$ (v. ad es. Bourbaki, Théorie des Ens., II, §4, 3).

¹⁰ Esiste un certo dissenso, nella corrente trattatistica, circa l'opportunità di partire da un insieme-supporto \mathcal{M} privo di struttura, come si è qui fatto, oppure già dotato di una topologia. Con questa seconda scelta, (di fatto assai più comune),

$\langle r, n \rangle$ -varietà, tacitamente ci si riferisce a questa topologia indotta dalla sua $\langle r, n \rangle$ -struttura, o **topologia canonica**. Riferendoci alla topologia canonica, un aperto non vuoto del supporto \mathcal{M} della $\langle r, n \rangle$ -varietà M può sempre pensarsi come unione dei domini di convenienti carte del corrispondente atlante massimale.

Due diverse strutture su \mathcal{M} , diciamo una $\langle r, m \rangle$ -struttura e una $\langle s, n \rangle$ -struttura non possono indurvi la stessa topologia se $m \neq n$. Supponiamo infatti che esistano due atlanti $\{(U_i, \lambda_i, m)\}$ e $\{(V_j, \mu_j, n)\}$ di \mathcal{M} , con $m \neq n$, che vi inducano la stessa topologia. Allora esisterebbero una carta (U, λ, m) del 1° atlante e una carta (V, μ, n) del 2° atlante, con U e V aperti nella comune topologia e congiunti, tali che l'applicazione $\mu \circ \lambda^{-1}: \lambda(U \cap V) \rightarrow \mu(U \cap V)$, nonché la sua inversa (che si ottiene scambiando tra loro λ e μ nella precedente), sarebbero omeomorfismi. Ma questo è impossibile, perché aperti non vuoti di \mathbb{R}^m e di $\mathbb{R}^{n \neq m}$ (quali sono $\lambda(U \cap V)$ e $\mu(U \cap V)$) *non possono essere omeomorfi* in forza di un noto teorema di Brouwer (Luitzen, 1881-1966)¹¹. Sulla base di questo teorema è evidente che due carte di \mathcal{M} con lo stesso dominio e $(r \geq 0)$ -compatibili devono avere la stessa dimensione.

Sia ora $M = \{\mathcal{M}, \max(\mathcal{A})\}$ una $\langle r, n \rangle$ -varietà e $\mathcal{K} \neq \emptyset$ un aperto (nella topologia canonica) di \mathcal{M} , $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Allora M induce in modo naturale una $\langle r, n \rangle$ -struttura su \mathcal{K} : cioè, per ogni carta $C = (U, \lambda)$ di M per cui $U \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$, $(U \cap \mathcal{K}, \lambda|_{U \cap \mathcal{K}}, n)$ è una carta di \mathcal{K} , e l'insieme delle carte di questo tipo al variare di C in un $\langle r, n \rangle$ -atlante di M è un $\langle r, n \rangle$ -atlante di \mathcal{K} . Se l'atlante di M è l'atlante massimale $\max(\mathcal{A})$, anche il corrispondente atlante di \mathcal{K} è massimale, diciamo $\max(\mathcal{A}|_{\mathcal{K}})$. La coppia $\{\mathcal{K}, \max(\mathcal{A}|_{\mathcal{K}})\}$ è una $\langle r, n \rangle$ -varietà che si dice **sottovarietà (aperta) di M associata a \mathcal{K}** . Se in particolare $r = 0$, il meccanismo descritto è quello con cui uno spazio topologico induce la struttura di sottospazio topologico su un suo SI.

Una $\langle r \geq 1, n \rangle$ -varietà si dice **orientabile in un suo punto p** se per ogni coppia di sue carte in p una delle due matrici jacobiane di transizione in p (e quindi entrambe tali matrici) ha determinante positivo; e semplicemente **orientabile** se ciò avviene per ogni p del suo supporto. Un atlante che soddisfa quest'ultima condizione si dice **atlante orientante**. Non tutte le $\langle r, n \rangle$ -varietà sono orientabili.

la biiezione λ della generica carta deve avere *per definizione* dominio aperto, ed essere *per definizione* un omeomorfismo rispetto alla topologia assunta. D'altra parte, se sul supporto S di uno spazio topologico $\langle S, \tau \rangle$ è dato un $\langle r, n \rangle$ -atlante tale che i domini U delle sue carte siano aperti e le mappe λ (di U su $\lambda(U) \subset \mathbb{R}^n$) siano omeomorfismi (con riferimento a τ), allora la topologia indotta dalla corrispondente n -struttura (topologica) definita da quell'atlante è uguale alla topologia originale τ . Delle due opzioni didattiche in oggetto, non vi è dubbio che la seconda sia metodologicamente meno felice: adattandola ad es. alla definizione di uno spazio metrico di supporto S e distanza d , si direbbe che un tale spazio è uno spazio topologico per il quale è data una funzione *continua* $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ soddisfacente agli usuali assiomi metrici e tale da indurre la topologia assunta!

¹¹ La dimostrazione del teorema di Brouwer, per la quale si rinvia a qualunque buon trattato di Analisi su \mathbb{R}^n , è comunemente ottenuta per assurdo.

Uno spazio topologico (ST) si dice **localmente** \mathbb{R}^n ¹² se ha un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ tale che ogni U_i è omeomorfo a \mathbb{R}^n . Un tale ST, si dimostra, è 1-numerabile. Per ogni carta (U, λ) di una $\langle r, n \rangle$ -varietà, pensata come ST con la topologia canonica, $\lambda =: U \rightarrow \lambda(U)$ è un omeomorfismo, essendo $\lambda(U)$ (aperto di \mathbb{R}^n) banalmente omeomorfo a \mathbb{R}^n ; per cui tale varietà è uno ST localmente \mathbb{R}^n , e quindi 1-numerabile.¹³

4.1.2) NOZIONI DI BASE II

È opportuno accennare ad una ulteriore generalizzazione del quadro fin qui considerato. Nella definizione di un $\langle r, n \rangle$ -atlante su \mathcal{M} , abbiamo premesso l'ipotesi che esso esista per i dati \mathcal{M} , $r \geq 0$ e $n \geq 1$; ma di fatto ciò non è garantito nemmeno rinunciando a prefissare r e/o n se si parte da un dato e generico \mathcal{M} . Per affrontare una situazione in tal senso più generale (cioè non dando per scontata l'esistenza di quell' $\langle r, n \rangle$ -atlante, nemmeno per n e r aggiustabili ad arbitrio) è innanzitutto necessario modificare leggermente la definizione di **r-compatibilità** (\rightarrow **r-compatibilità generalizzata, gen-r-compatibilità**) di due carte arbitrarie di \mathcal{M} , diciamo $C_{1|2} =: (U_{1|2}, \lambda_{1|2}, n_{1|2})$, con $n_{1|2} \geq 0$ e generalmente *diversi*. Cominciando dal caso $r = 0$, e scrivendo al solito $U_{1,2} \equiv U_{2,1}$ per $U_1 \cap U_2$, diremo che le due carte in oggetto sono **gen-0-compatibili** se $U_{1,2} = \emptyset$, aut se, essendo $U_{1,2} \neq \emptyset$, (i') $\lambda_{1|2}(U_{1,2})$ sono aperti di $\mathbb{R}^{n_1 n_2}$ e (ii') le applicazioni $\lambda_{1,2|1} \equiv \lambda_{2|1} \circ \lambda_{1|2}^{-1}: \lambda_{1|2}(U_{1,2}) \rightarrow \lambda_{2|1}(U_{2,1})$ sono omeomorfismi. In forza del ricordato teorema di Brouwer, la condizione (ii') implica allora che sia $n_1 = n_2$ se le carte in oggetto sono congiunte. Nulla vieta a questo punto di procedere alla definizione di uno **gen-0-atlante**, e quindi del corrispondente **gen-0-atlante massimale**, sulla falsariga di quanto si è fatto nel caso standard di carte tutte *a priori* della stessa dim. Posto allora che un tale gen-0-atlante \mathcal{A} esista (ciò implica in particolare che in ogni $p \in \mathcal{M}$ esista almeno una carta di qualche dimensione), con l'usuale definizione dei suoi aperti \mathcal{M} diventa uno ST $M \equiv \{\mathcal{M}, \max(\mathcal{A})\}$, senza tuttavia che a tale M si possa attribuire una dimensione (se non in senso locale). Precisamente, sia p un punto di \mathcal{M} ; diremo **dimensione** di M in p la (comune) dimensione delle carte con dominio contenente p (quindi congiunte), e la denoteremo $\dim_M(p)$. Per ogni q del dominio di una carta in p , $\dim_M(q) = \dim_M(p)$. È così definita un'applicazione di \mathcal{M} nell'insieme dei naturali ≥ 1 \mathbb{N}^* , diciamo $\dim_M: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{N}^*$, il cui valore in p è $\dim_M(p)$. La topologia

¹² Secondo alcuni, "localmente euclideo con dimensione n "; locuzione che preferiamo evitare, riservando noi l'attributo "euclideo" a spazi (o varietà) con metrica definita positiva. Il caso $n = 0$ è ammissibile, ma banale.

¹³ Per accertare che uno ST X sia una $\langle r, n \rangle$ -varietà, dovremo anzitutto considerare i suoi aperti U che sono omeomorfi a \mathbb{R}^n ; allora X è una $\langle r, n \rangle$ -varietà sse con carte di tipo $\langle U, \lambda, n \rangle$ si può costruire un $\langle r, n \rangle$ -atlante (cioè sse (i) quelle carte sono r -compatibili quando $r \geq 1$ – che lo siano quando $r = 0$ è ovvio – e (ii) sse con i loro domini si può ricoprire X).

standard di \mathbf{N}^* è quella discreta, che è la più fine di tutte le sue possibili topologie; quindi $\dim_{\mathcal{M}}$ è un'applicazione da uno ST ad un altro, ed ha senso chiedersi se $\dim_{\mathcal{M}}$ sia continua in p (se questo fosse il caso con la topologia standard di \mathbf{N}^* , allora $\dim_{\mathcal{M}}$ sarebbe continua in p con qualunque altra topologia di \mathbf{N}^*).

È fuor di luogo affrontare qui in termini generali questo problema, che attiene alla “Teoria della Dimensione delle Varietà”. Ci limiteremo quindi a menzionare in proposito un criterio di sufficienza, secondo il quale $\dim_{\mathcal{M}}(p)$ è *globalmente* continua (cioè continua in $p \forall p \in \mathcal{M}$) se M è metrizzabile e separabile (vedi il Glossario Topologico G.T., App. Gen B) con la topologia canonica. In questo caso, si dimostra che per ogni ricoprimento aperto di \mathcal{M} esiste un suo raffinamento aperto, numerabile e localmente finito, consistente di componenti connessi e relativamente compatti che sono domini di carte di $\max(\mathcal{A})$. Poiché un'applicazione continua di uno ST X in uno ST Y trasforma SI connessi di X in SI connessi di Y , si conclude che, se M è metrizzabile-separabile, la funzione $(\in \mathcal{M}) \mapsto \dim_{\mathcal{M}}(p)(\in \mathbf{N}^*)$ è costante in ciascuno dei suoi componenti connessi. Se \mathcal{M} consiste di un solo componente connesso, o se comunque $\dim_{\mathcal{M}}(p)$ è costante rispetto a p in tutto \mathcal{M} , M si dice (dimensionalmente) **pura**, e il valore di quella costante (un naturale ≥ 1), che è un invariante topologico (cioè lo stesso per ogni ST omeomorfo a \mathcal{M}), si dice **dimensione di M** e si denota $\dim(M)$. Si ricade così nel caso considerato inizialmente (per $r = 0$), in cui ogni carta del supporto veniva supposta *a priori* della stessa e prefissata dimensione.¹⁴ Infine nulla cambia in essenza se, negli sviluppi illustrati, si sostituisce $r \geq 0$ a $r = 0$, ottenendo così varietà r -differenziabili ecc., in generale con dimensione definita localmente. Ovviamente il caso delle varietà pure è quello di maggior importanza applicativa. Inoltre tra le varietà pure l'interesse si concentra su quelle che ammettono un atlante finito; esse sono le più facili da studiare, e in pratica le sole sulle quali si possa istituire “un calcolo” in modo accettabilmente semplice. Una r -varietà pura (non necessariamente connessa) di $\dim 1$ [2] si dice **r -arco** (aperto) [**r -superficie** (aperta)]. Il progresso sulla via della generalizzazione/astrazione, rispetto alle immagini intuitive di questi oggetti pensati come immersi in $\mathbf{R}^{n \geq 2}$ [in $\mathbf{R}^{n \geq 3}$], è evidente.

Tornando alle $\langle r, n \rangle$ -varietà, esamineremo ora un'altra generalizzazione di questa nozione, quella di “ $\langle r, n \rangle$ -varietà bordata”. Consideriamo innanzitutto il sottospazio $(n-1)$ -dim di $\mathbf{R}^{n \geq 2}$, che denoteremo \mathbf{R}^{n-1} , definito da $x^1 = 0$. Esso divide \mathbf{R}^n nei due semispazi (con lo stesso contorno $x^1 = 0$) $\mathbf{R}^n_+ =: \{x \in \mathbf{R}^n: x^1 \geq 0\}$ e $\mathbf{R}^n_- =: \{x \in \mathbf{R}^n: x^1 \leq 0\}$. Gli aperti di $\mathbf{R}^n_{+/-}$ sono definiti nel modo usuale, con il che essi diventano sottospazi topologici (SST) di \mathbf{R}^n . Sia ora $\mathcal{M} (\neq \emptyset)$ il solito insieme-supporto di riferimento, sul quale ci proponiamo, se possibile, di introdurre la struttura di

¹⁴ Esiste anche un approccio diretto al problema di attribuire una dimensione ad un spazio topologico generico, che forma l'oggetto della cosiddetta “Teoria della Dimensione Topologica”.

$\langle r, n \rangle$ -varietà bordata. Una carta di \mathcal{M} si definisce con le stesse modalità di una carta standard, salvo la sostituzione formale di \mathbb{R}^n_+ (ad esempio) a \mathbb{R}^n . Le difficoltà nascono tuttavia al momento di introdurre una r -compatibilità (per $r \geq 1$) tra carte, e precisamente dal vincolo (ii) della definizione (v. S.sez. 4.1.1) quando vi si sostituisca \mathbb{R}^n_+ a \mathbb{R}^n , perché non disponiamo della nozione di $(r \geq 1)$ -diffeomorfismo tra due aperti di \mathbb{R}^n_+ , almeno in generale¹⁵. A ciò si rimedia come segue. Se A è un generico SI (non necessariamente aperto) di \mathbb{R}^n , una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$ e in generale diversa da n , è detta **di classe** $C^{r \geq 1}$ **in** A , scrivendo per questo che $f \in C^r(A)$, se, per ogni $x \in A$, esistono un aperto U di \mathbb{R}^n contenente x e una funzione $f': U \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^r per cui $f'|_{A \cap U} = f$.¹⁶ Ciò consente di definire un $(r \geq 1)$ -diffeomorfismo φ di $A \subset \mathbb{R}^n$ su $B \subset \mathbb{R}^n$ richiedendo che 1) φ sia un omeomorfismo di A su B , e 2) $\varphi \in C^r(A)$ e $\varphi^{-1} \in C^r(B)$. La $(r \geq 0)$ -compatibilità tra due carte di \mathcal{M} può a questo punto introdursi con le modalità usuali; e ancora con le modalità usuali seguono la definizione di un $\langle r \geq 0, n \rangle$ -atlante \mathcal{A}' di \mathcal{M} (se esiste) e dei corrispondenti $(r \geq 0, n)$ -atlante massimale $\max(\mathcal{A}')$ e $\langle r \geq 0, n \rangle$ -struttura (di varietà generalmente bordata) su \mathcal{M} . La coppia $M' =: \{\mathcal{M}, \max(\mathcal{A}')\}$ si dice “ $\langle r, n \rangle$ -varietà bordata”.

Questa nozione generalizza quella di $\langle r, n \rangle$ -varietà standard (\equiv senza bordo). Per vederlo più in dettaglio, consideriamo un $\langle r, n \rangle$ -atlante così ottenuto, diciamo $\{(U_i, \lambda_i)\}_{i \in I}$, di \mathcal{M} (quindi $\mathcal{M} = \cup_{i \in I} U_i$). Le sue carte possono essere suddivise in due classi disgiunte, e cioè a) quelle per cui $\lambda_i(U_i)$ è al contempo un aperto di \mathbb{R}^n_+ e di \mathbb{R}^n , o carte del primo tipo, per le quali $i \in I_1$ (diciamo); e b) quelle per cui $\lambda_i(U_i)$ è un aperto di \mathbb{R}^n_+ *senza* esserlo anche di \mathbb{R}^n , o carte del secondo tipo, per le quali $i \in I_2$ (diciamo). Evidentemente, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, e $I_1 \cup I_2 = I$; I_1 o I_2 , ma non entrambi (perché $I \neq \emptyset$), possono essere vuoti. Per ogni $i \in I$, poniamo $W_i =: \lambda_i(U_i) \cap \mathbb{R}^{n-1}$; allora $W_i = \emptyset \forall i \in I_1$. Sia poi $\mathcal{N} =: \cup_{i \in I_2} \lambda_i^{-1}|_{W_i}(W_i)$. Allora $\mathcal{N} \cap U_i = \emptyset \forall i \in I_1$, e $\mathcal{N} \cap U_i = \lambda_i^{-1}|_{W_i}(W_i) \forall i \in I_2$. $\mathcal{N} (\subset \mathcal{M})$ si dice **bordo** di \mathcal{M} ; $\mathcal{A}^* =: \{(\mathcal{N} \cap U_i, \lambda_i|_{\mathcal{N} \cap U_i})\}_{i \in I_2}$ è un suo $\langle r, n-1 \rangle$ -atlante. Quanto a $N =: (\mathcal{N}, \mathcal{A}^*)$, essa è una r -varietà $(n-1)$ -dim (che se $n \geq 3$ può anche essere a sua volta bordata). Se in particolare $I_1 = \emptyset$, M' è “propriamente” bordata; mentre se $I_2 = \emptyset$, $M' \equiv M$ è una varietà standard. Si potrebbero anche considerare varietà generalmente bordate a dimensione locale, ecc.

Siano ora $M_{1|2}$ due $\langle r, n_{1|2} \rangle$ -varietà standard di supporti $\mathcal{M}_{1|2}$, $\mathcal{A}_{1|2}$ loro $\langle r, n_{1|2} \rangle$ -atlanti, e $C_{1|2} = (U_{1|2}, \lambda_{1|2}, n_{1|2})$ carte di questi atlanti. Allora $C =: (U_1 \times U_2, \lambda_1 \times \lambda_2, n_1 + n_2)$ – ove \times denota prodotto cartesiano, e $\lambda_1 \times \lambda_2$ è la biiezione di $U_1 \times U_2$ su $\lambda_1(U_1) \times \lambda_2(U_2)$ che porta la coppia ordinata $\langle p_{1|2} \in U_{1|2} \rangle$ nella coppia ordinata $\langle \lambda_{1|2}(p_{1|2}) \in \lambda_{1|2}(U_{1|2}) \rangle$ – è una carta di $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ che si denota $C_1 \times C_2$.

¹⁵ La nozione di omeomorfismo tra due SI, e in particolare tra due aperti, di \mathbb{R}^n_+ , è invece evidentemente disponibile.

¹⁶ Applicato al caso di nostro interesse, questo stratagemma permette di evitare l'introduzione di derivate “unilateri” normali a \mathbb{R}^{n-1} in \mathbb{R}^{n-1} (cioè derivate rispetto a x^1 in $x^1 = 0$).

Al variare delle $C_{1|2}$ nei rispettivi atlanti $\mathcal{A}_{1|2}$, l'insieme dei domini $U_1 \times U_2$ ricopre $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$; inoltre, se $C_{1|2}$ e $C'_{1|2}$ sono r -compatibili, anche $C_1 \times C_2$ e $C'_1 \times C'_2$ lo sono. In conclusione l'insieme delle carte di $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ di tipo $C_1 \times C_2$ è un $\langle r, n_1+n_2 \rangle$ -atlante di $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, che si denota $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. La coppia $\{\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \max(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)\}$ è una $\langle r, n_1+n_2 \rangle$ -varietà che si dice **prodotto diretto** (ordinato) di M_1 per M_2 , e si denota $M_1 \times M_2$. In particolare per $r = 0$ si ottiene una (n_1+n_2) -varietà topologica; la topologia indotta su $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ dalla corrispondente (n_1+n_2) -struttura topologica coincide con quella dello spazio topologico prodotto $M_1 \times M_2$ (vedi G.T.) quando le $\mathcal{M}_{1|2}$ ricevano le topologie $\tau_{1|2}$ indotte dalle relative $n_{1|2}$ -strutture topologiche. Come il prodotto cartesiano di due insiemi o quello topologico di due spazi topologici, il prodotto diretto di due varietà è *associativo*.

Quanto segue in quest'ultimo paragrafo presuppone una buona familiarità con la Topologia, o almeno con l'App. Gen. B (\equiv Glossario Topologico). È spesso desiderabile che la topologia τ indotta su \mathcal{M} da una $(0 \leq r \leq \omega, n)$ -struttura sia arricchita da qualche altra proprietà più specifica: tipicamente, che lo ST $\langle \mathcal{M}, \tau \rangle$ sia Hausdorff, o 2- o 1-numerabile, o separabile, o metrizzabile (vedi G.T.), .. e via dicendo. Queste proprietà devono richiedersi separatamente, perché non sono necessariamente godute da una generica varietà (cioè esistono varietà non-Hausdorff, ecc.).^{17, 18}. Da certe combinazioni di proprietà addizionali scendono infatti teoremi di notevole interesse pratico. Ad esempio, se una $\langle r, n \rangle$ -varietà è Hausdorff e 2-numerabile è possibile provare che è localmente compatta e paracompatta. Similmente, se essa è Hausdorff e 1-numerabile, è σ -compatta e paracompatta, ed ha una famiglia numerabile di componenti connessi.

¹⁷ Nella maggior parte dei trattati (vedi la Bibl. Gen.), proprietà addizionali di questo tipo sono *incorporate* nella definizione di $\langle r, n \rangle$ -varietà. Ci limitiamo ad alcuni tra i molti esempi. 1) «Una varietà C^∞ è uno spazio topologico di Hausdorff e separabile, insieme a tutte le carte ∞ -compatibili con quelle di un suo $\langle \infty, n \rangle$ -atlante». (Bishop & Goldberg); 2) «Una varietà differenziabile è uno spazio topologico separabile e metrizzabile sul quale è data una classe di equivalenza di atlanti» (Dieudonné); 3) «Una $\langle r, n \rangle$ -varietà differenziabile è uno spazio topologico di Hausdorff tale che ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n , insieme con una classe di equivalenza di $\langle r, n \rangle$ -atlanti» (Choquet-Bruhat & al.). 4) «Una varietà n -dimensionale è uno spazio topologico separabile, ogni punto del quale ha un intorno omeomorfo ad una palla n -dimensionale aperta. Inoltre supporremo sempre che questo spazio ammetta una base contabile di aperti» (segue la definizione di struttura differenziabile sulla varietà) (de Rham). La ragione di queste ed altre richieste è nel fatto che, per quanto esse limitino la generalità delle definizioni, risulta in pratica proficuo lavorare con varietà che le soddisfano. In realtà non è facile raccordare tante definizioni simili ma diverse; e proprio per questo ci siamo attenuti ad una definizione minimale che, volendo, si può sempre completare con richieste addizionali.

¹⁸ In particolare si dimostra che la varietà in oggetto, di dimensione n , è Hausdorff sse per qualunque coppia di carte (U_1, λ_1) e (U_2, λ_2) del suo atlante massimale, il grafo delle relative mappe di transizione è chiuso in $\lambda_1(U_1) \times \lambda_2(U_2) \subset \mathbb{R}^{2n}$.

4.1.3) ESEMPI E COMMENTI

Avendone data una definizione sufficientemente generale¹⁹, è naturale chiedersi perché la nozione di $\langle r, n \rangle$ -varietà sia stata introdotta, in particolare per essere usata come supporto di un conveniente “calcolo”, che come vedremo può essere algebrico, differenziale o integrale, e riguardare funzioni scalari, vettoriali o tensoriali con valori in una varietà generalmente diversa dalla varietà-dominio di definizione. Mostriamo innanzitutto con qualche elementare esempio che una $\langle r, n \rangle$ -varietà non è necessariamente un oggetto così esotico come può apparire a prima vista.

§1. La terna $(\mathbb{R}^n, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}, n)$ ove $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (qui il pedice \mathbb{R}^n sta per \mathbb{R}^n) è l'identità su \mathbb{R}^n , è una carta di \mathbb{R}^n ; e il singoletto di questa carta è un $\langle \omega, n \rangle$ -atlante (a una sola carta). La corrispondente $\langle \omega, n \rangle$ -struttura si dice **struttura analitica-reale standard su \mathbb{R}^n** . La topologia indotta su \mathbb{R}^n da questa struttura standard è la topologia standard. §

§2. Lo stesso può dirsi per un arbitrario aperto $A \subset \mathbb{R}^n$ (per la topologia standard): la terna $(A, \mathbf{1}_A, n)$ è una carta il cui singoletto è un $\langle \omega, n \rangle$ -atlante, ecc. Ogni aperto di \mathbb{R}^n riceve così la sua $\langle \omega, n \rangle$ -struttura analitica-reale standard indotta da quella di \mathbb{R}^n , e la topologia indotta da tale struttura coincide con quella di A come SST di \mathbb{R}^n . §

§3. Una situazione meno banale è quella, spesso citata nella trattatistica, del sistema delle due carte C e C' su \mathbb{R} definite da $C =: (\mathbb{R}, \lambda, 1)$, con $\lambda(t \in \mathbb{R}) =: t^3$, e $C' =: (\mathbb{R}, \mathbf{I}_{\mathbb{R}}, 1)$. Esse *non* formano un $\langle 1, 1 \rangle$ -atlante: infatti le mappe di transizione $\lambda \circ \mathbf{I}_{\mathbb{R}}^{-1} = \lambda$, e $\mathbf{I}_{\mathbb{R}} \circ \lambda^{-1} = \lambda^{-1}$, l'una inversa dell'altra, non sono 1-compatibili, perché λ^{-1} non è di classe C^1 (la derivata di $t^{1/3}$ diverge per $t = 0$). Quindi la struttura indotta su \mathbb{R} dalla carta C è diversa da quella (standard) indotta dalla carta C' . §

§4. L'applicazione $\alpha_0: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (ove $I =:$ intervallo unitario aperto), in cui α_0 è per ipotesi iniettivo, $C^1(I)$ e con derivata $\alpha_0' \neq 0$ in I , descrive un arco (aperto) $\Gamma = \alpha_0(I)$ (in \mathbb{R}^n) semplice e regolare. α_0 si dice **parametrizzazione di riferimento di Γ** . Se α è una parametrizzazione generica di Γ (cioè se α ha le stesse proprietà richieste ad α_0 e $\alpha(I) = \alpha_0(I)$), la terna $(\Gamma, \alpha^{-1}, 1)$ è una carta di Γ , e carte di questo tipo sono tra loro 1-compatibili, formando così automaticamente un $\langle 1, 1 \rangle$ -**atlante canonico di Γ** . Un dato arco aperto semplice e regolare $\Gamma = \alpha_0(I) \subset \mathbb{R}^n$ può quindi considerarsi come supporto della $\langle 1, 1 \rangle$ -varietà associata al suo $\langle 1, 1 \rangle$ -atlante canonico (associato a α_0). §

§5. Per avere il più semplice esempio di varietà non elementare (priva di un atlante ad una sola carta), si consideri il cerchio unitario centrato nell'origine del piano \mathbb{R}^2 (con le usuali coordinate

¹⁹ Esistono definizioni sostanzialmente più ampie di varietà (sotto vari profili), vedi ad es. Bourbaki, “Variétés différentielles et analytiques”, Éléments de Math. XXXIII (Fasc. de Rés., § 5), soprattutto per quanto riguarda la loro dimensione (possibilmente non-finita).

cartesiane (x,y) , C . Una possibile carta di C è la sua proiezione stereografica dal polo $(x=0,y=1)$ sulla retta $y = -1$, che pone in corrispondenza biunivoca $C \setminus (0,1)$ con \mathbb{R} . Ovviamente un'altra carta di C è l'analoga sua proiezione stereografica dal polo $(0,-1)$ sulla retta $y = 1$, che pone in corrispondenza biunivoca $C \setminus (0,-1)$ con \mathbb{R} . Si prova facilmente che le due carte sono ω -compatibili; e poiché l'unione dei loro domini evidentemente ricopre C , esse costituiscono un $\langle \omega,1 \rangle$ -atlante (**canonico**) di C . Altri possibili $\langle r,1 \rangle$ -atlanti di C hanno comunque almeno due carte. La coppia di C e del suo atlante massimale canonico è la $\langle \omega,1 \rangle$ -varietà **cerchio** (canonico) C . Similmente si argomenterebbe partendo con l' $(n \geq 2)$ -sfera di raggio unitario e centrata nell'origine di \mathbb{R}^{n+1} : occorrono comunque almeno due carte, e se queste sono scelte generalizzando il ragionamento utilizzato per C e ottenendo un relativo atlante "canonico", la struttura risultante è di tipo $\langle \omega,n \rangle$. §

§6. Il prodotto diretto $C \times C$ è il **2-toro**, i cui atlanti constano di (almeno) 4 carte, e che ha struttura $\langle \omega,2 \rangle$ con una loro conveniente (e ovvia) scelta. Similmente occorrono almeno $2n$ carte per il $(t \geq 3)$ -**toro** $\times_i C_i$, con i che va da 1 a t , la cui struttura canonica è ancora di tipo $\langle \omega,t \rangle$. §

Anche dai semplici esempi illustrati, ci si può fare agevolmente un'idea della duttilità e della generalità della nozione di $\langle r,n \rangle$ -varietà. Una proprietà attraente di questa nozione fondamentale dell'Analisi moderna, e in pratica il risultato più importante che con essa si attinge, resta il fatto che non è più necessario limitarsi alle varietà immerse in un \mathbb{R}^k con k abbastanza grande.²⁰ È poi vantaggioso, nell'istituire un "calcolo" su (o tra) tali varietà, richiedere $r = \infty$, perché non vi sono allora limitazioni *provenienti dalla CdC delle varietà* nel considerare funzioni di CdC arbitraria tra varietà. D'altra parte, un potente teorema della topologia differenziale (ancora dovuto a Whitney) afferma che se esiste una $\langle r \geq 1, n \rangle$ -struttura su \mathcal{M} per cui esso è Hausdorff e 2-numerabile, allora vi esiste anche una $\langle \infty, n \rangle$ -struttura, e che un $\langle \infty, n \rangle$ -atlante di \mathcal{M} può essere estratto dal suo $\langle r, n \rangle$ -atlante massimale. Questo vale per ogni $n (\geq 1)$. Non si può invece affermare qualcosa di simile se *sotto le stesse condizioni* si parte da una n -struttura topologica ($r = 0$) su \mathcal{M} : non è detto cioè che esista una $\langle 1, n \rangle$ -struttura, e quindi una $\langle \infty, n \rangle$ -struttura (Whitney), per ogni n . Tuttavia si sa che questo è vero per $n \leq 4$, e che d'altra parte ci sono varietà topologiche (sempre Hausdorff e 2-numerabili) di dimensione $n \geq 10$ per le quali non esiste una $\langle 1, n \rangle$ -struttura sullo stesso supporto.

²⁰ Ciò resta vero anche se un famoso teorema di Whitney (Hassler, 1907-1989), il cosiddetto **embedding theorem** (1935-36), ha in certo senso ridimensionato il problema con l'affermare che per ogni r finito, ogni $\langle r, n \rangle$ -varietà Hausdorff e 2-numerabile è r -incastonabile in (e quindi r -diffeomorfa a) una sottovarietà di \mathbb{R}^{2n+1} . In altre parole, per r finito la nozione di $\langle r, n \rangle$ -varietà astratta (così come descritta nella presente sezione) *non* è più generale di quella di $\langle r, n \rangle$ -sottovarietà dello spazio \mathbb{R}^N per $N \geq 2n + 1$. Non sempre, tuttavia, questo è realmente un vantaggio: molti problemi legati alle varietà possono essere trattati e risolti con metodi sostanzialmente più semplici rinunciando a considerarle come sottovarietà incastonate in uno spazio \mathbb{R}^N per N abbastanza grande.

Un ultimo commento di natura generale è il seguente. Qualsiasi struttura di cui sia dotato un insieme X in biiezione su un insieme Y , diciamo secondo la $f: X \rightarrow Y$, viene indotta in modo naturale su Y . Questo si applica anche al caso in cui X sia una $\langle r, n \rangle$ -varietà: sotto la biiezione f , Y diventa a sua volta una $\langle r, n \rangle$ -varietà r -diffeomorfa alla prima. Ad esempio, il lettore può verificare che se (U, λ) è una carta di $X \equiv {}^r M^n$, $(f(U), \lambda \circ (f|_U)^{-1})$ è la corrispondente carta di Y , che a carte r -compatibili di X corrispondono carte r -compatibili di Y , ecc. In particolare nei precedenti esempi §1) ÷ §6), si è liberi di sostituire il supporto della varietà con un qualsiasi altro insieme in biiezione su di esso: basterà modificare nel modo anzidetto le mappe delle relative carte per ottenere un'altra varietà con la stessa struttura, che si presterà allo sviluppo di un "calcolo" a tutti gli effetti equivalente.²¹ In questo senso, se il generico insieme \mathcal{M} ammette una carta del tipo $(\mathcal{M}, \lambda, n)$, allora \mathcal{M} è in biiezione su $\lambda(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^n$, e quindi su \mathbb{R}^n stesso, e può riceverne la $\langle \omega, n \rangle$ -struttura standard per biiezione.

Chiudiamo la sottosezione con una semplice considerazione. Vale a dire, quanto precede mostra che l'elemento-chiave dal quale ha origine la teoria delle varietà astratte è quello di permettere che \mathcal{M} (\equiv supporto di M^n) possa *non* avere atlanti ad una sola carta; debba cioè essere ricoperto da un genuino *insieme* di pezzi U_i (con $i \in I$, insieme di almeno due indici), $\cup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$, ciascuno dei quali in biiezione "compatibile" (nel senso che abbiamo illustrato) con \mathbb{R}^n . Se al contrario fosse $I = \{1\}$ si avrebbe il caso delle varietà elementari, in cui esistono atlanti ad una sola carta. "A cose fatte", questa idea appare quasi banale.

²¹ Il fatto che esista una biiezione f di X su Y è una relazione di equivalenza tra X e Y che si denota con $X \sim_{1:1} Y$, o anche con $X \sim Y$ se questa notazione è abbastanza chiara. In generale, se $X \sim Y$ e X induce su Y una sua struttura qualsiasi, X (con la sua struttura) e Y (con la struttura indotta) si dicono **isomorfi** (in senso lato) **rispetto a quella struttura**. Se la struttura è algebrica, l'attributo specifico da usare è **isomorfi** (in senso stretto); se è topologica, l'attributo specifico è **omeomorfi**; se è di $(r \geq 1)$ -varietà, è **r-diffeomorfi**, ecc. Gli insiemi X e Y si qualificano poi con gli stessi attributi se sono in biiezione ed hanno entrambi strutture preassegnate tali che l'una coincida con quella indotta dall'altra per biiezione.

4.2) CALCOLO DIFFERENZIALE SU VARIETÀ

4.2.1) APPLICAZIONI DI UNA VARIETÀ IN UNA VARIETÀ

Se \mathcal{M} ed \mathcal{N} sono insiemi qualsiasi, la nozione di applicazione φ di \mathcal{M} in \mathcal{N} appartiene alla teoria degli insiemi *senza struttura*: vale a dire, non è possibile attribuire a φ alcuna proprietà che esuli da quella teoria finché agli insiemi \mathcal{M} e \mathcal{N} non siano assegnate convenienti strutture. Ad esempio, soltanto se ad \mathcal{M} e \mathcal{N} sono assegnate delle topologie ha senso dire che φ è (o non è) continua in \mathcal{M} , o continua in un punto di \mathcal{M} .

Per $0 \leq r, s \leq \omega$, $m, n \geq 1$,¹ sia $\varphi: {}^r\mathcal{M}^m (\equiv \mathcal{M}) \rightarrow {}^s\mathcal{N}^n (\equiv \mathcal{N})$ un'applicazione della $\langle r, m \rangle$ -varietà ${}^r\mathcal{M}^m$ (di supporto \mathcal{M}) nella $\langle s, n \rangle$ -varietà ${}^s\mathcal{N}^n$ (di supporto \mathcal{N}). Poiché \mathcal{M} e \mathcal{N} sono comunque topologiche, ha senso richiedere che φ sia continua (vedi Glossario Topologico, G.T. \equiv App. Gen. B) e aperta (cioè trasformi gli aperti di \mathcal{M} in aperti di \mathcal{N}). Sotto questa richiesta, siano (U, λ) una carta di \mathcal{M} , e (V, μ) una carta di \mathcal{N} , tali che $\varphi(U) \subset V$. Allora è definita l'applicazione di $\lambda(U) \subset \mathbb{R}^m$ in $\mu(V) \subset \mathbb{R}^n$

$$(1) \quad \varphi^\circ =: (\mu \circ \varphi \circ \lambda^{-1}): \lambda(U) \rightarrow \mu(V). \quad ^2$$

Varrà la definizione: (α) “ φ è di CdC $0 \leq h \leq \min(r, s)$ ” \equiv “ φ° è (aperta e)³ di CdC $0 \leq h \leq \min(r, s)$ ” per ogni coppia di carte (U, λ) di \mathcal{M} e (V, μ) di \mathcal{N} tali che $\varphi(U) \subset V$.” In particolare se le carte considerate sono in $\underline{p} \in U$ la prima e in $\underline{q} = \varphi(\underline{p})$ la seconda, φ° è definita in un intorno $\lambda(U)$ di $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$, e il suo valore in \underline{x} , $\underline{y} =: \varphi^\circ(\underline{x})$, appartiene a $\mu(\varphi(U))$.

In una forma più familiare (cioè senza usare il segno \circ), l'applicazione φ° può scriversi come

$$(2) \quad y = \varphi^\circ(x) =: \mu(\varphi(\lambda^{-1}(x))) \equiv y(x),$$

¹ Nella precedente sezione abbiamo escluso che la dimensione di una varietà fosse nulla. Infatti lo spazio lineare \mathbb{R}^0 consiste soltanto del reale 0, cioè $\mathbb{R}^0 = \{0\}$; quindi \mathbb{R}^0 ha la sola topologia “banale” (o “indiscreta”) in cui soltanto \emptyset e \mathbb{R}^0 sono aperti. Per ogni $p \in \mathcal{M}$, vi è dunque esattamente una carta di dominio $\{p\}$; carte distinte sono disgiunte, e non ha senso dire che una carta è r -compatibile con se stessa se non per $r = 0$. Esiste un unico $\langle 0, 0 \rangle$ -atlante, ed ogni $p \in \mathcal{M}$ è aperto nella topologia indotta; quindi con questa topologia \mathcal{M} è per definizione uno spazio topologico “discreto”, e la sua topologia è la topologia discreta $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Uno spazio topologico discreto è metrizzabile con la distanza che vale 1 per punti distinti qualsiasi, e si presta quindi ad essere visualizzato come insieme di punti isolati. Si comprende bene, in conclusione, perché varietà topologiche “discrete” abbiano qui scarso interesse, e non vengano considerate. Quindi se nel seguito parleremo di dimensione di una varietà, la supporremo tacitamente ≥ 1 .

² È chiaro che φ° dipende da λ e μ oltre che da φ , e quindi dovrebbe denotarsi in modo congruo a questo fatto. Lo abbiamo evitato per non appesantire troppo la simbolica. Il \circ nella (1) denota la composizione di funzioni (che, si ricordi, è associativa).

³ Abbiamo dichiarato questa proprietà di φ° perché essa non consegue necessariamente dalla continuità. Ad esempio l'applicazione che porta x di \mathbb{R} in $(x, 0)$ di \mathbb{R}^2 è analitica ($s = \omega$), ma non è aperta. Tuttavia non occorrerà menzionarla esplicitamente.

ove $x =: \lambda(p)$ per p in U e $y =: \mu(q)$ per q in $\varphi(U)$. Al variare di x in $\lambda(U)$, $\lambda^{-1}(x)$ varia in U , $\varphi(\lambda^{-1}(x))$ varia in $\varphi(U)$, e $\mu(\varphi(\lambda^{-1}(x))) \equiv \varphi^\circ(x)$ varia in $\mu(\varphi(U)) \subset \mu(V)$. La definizione (α) significa che le n funzioni $y^j =: \pi^j \varphi^\circ(x) \equiv \varphi^{\circ j}(x)$, $j = 1 \div n$, delle m variabili $x^i =: \pi^i x$, $i = 1 \div m$, ove $\{\pi^i\}_{i=1 \div m}$ e $\{\pi^j\}_{j=1 \div n}$ sono gli usuali proiettori canonici su \mathbb{R}^m e rispettivamente su \mathbb{R}^n , ossia

$$(3) \quad y^j = \varphi^{\circ j}(x) \equiv y^j(x),$$

hanno CdC h in $\underline{x}^i =: \pi^i \lambda(\underline{p})$ (oltre a trasformare gli aperti di M in aperti di N). In questo caso è immediato verificare che, se (U', λ') e (V', μ') sono altre carte (di M e rispettivamente di N) con le stesse proprietà delle carte (U, λ) , (V, μ) , la funzione $y' =: y'(x')$ definita come y lo è dalla (2) ponendo apici su y , μ , λ e x , cioè mediante la

$$(2') \quad y' = \varphi^{\circ'}(x') =: \mu'(\varphi(\lambda'^{-1}(x'))) \equiv y'(x'),$$

con $x' =: \lambda'(p)$, ha CdC h . La definizione (α) ha dunque significato indipendente dalle particolari carte (di M e di N) di cui si fa uso, e si può parlare **CdC h di φ** come proprietà carta-indipendente di φ . Tutto può ripetersi, con gli aggiustamenti del caso, se le carte di M sono in $\underline{p} (\in U)$ e quelle di V sono in $\underline{q} = \varphi(\underline{p})$; e da questo caso localizzato si torna al caso non localizzato intendendo il primo valido $\forall (\underline{p} \in \mathcal{M})$. Ad esempio, considerando l'iniezione $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (dove \mathbb{R}^m ha la sua $\langle \omega, m \rangle$ -struttura standard) relativa alla carta (U, λ) di M , quindi ponendo $\varphi = \lambda$, $N = \mathbb{R}^m$, e prendendo come carta (V, μ) la $(\lambda(U), \mathbf{1}|_{\lambda(U)})$ (con $\mathbf{1}|_{\lambda(U)} \equiv$ identità su $\lambda(U)$), si trova $\lambda^\circ = \mathbf{1}|_{\lambda(U)}$, che ha CdC ω per qualunque r .

Supposto ora $1 \leq \min(r, s)$ e $1 \leq h \leq \min(r, s)$, ancora significato indipendente dalle carte cui si fa riferimento ha l'asserto (β): " \underline{p} è un **punto regolare per φ** ". Come sappiamo (v. S.sez. 3.4.1, nota (¹)), questo significa che per una, e quindi per ogni, coppia di carte di M e risp. di N (in \underline{p} , e risp. in \underline{q}) la matrice jacobiana della trasformazione (2) ha rango massimale, cioè uguale a $\min(m, n)$ in $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$.

Per brevità, e come abbiamo già fatto, nel seguito scriveremo spesso $M|N$ per ${}^m M|{}^n N$, sottintendendo le relative CdC ($r|s$ di $M|N$) e \dim ($m|n$ di $M|N$). Sempre per $0 \leq \min(r, s)$ e $0 \leq h \leq \min(r, s)$, denoteremo con $\mathcal{B}^h(M, N, \underline{p})$ [$\mathcal{B}^h(M, N)$] l'insieme delle applicazioni di M in N con CdC h in \underline{p} [con CdC h in $\underline{p} \forall \underline{p} \in \mathcal{M}$]; se in particolare ${}^n N = {}^o \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, in luogo di $\mathcal{B}^h(M, \mathbb{R}, \underline{p})$ [$\mathcal{B}^h(M, \mathbb{R})$] scriveremo semplicemente $\mathcal{B}^h(M, \underline{p})$ [$\mathcal{B}^h(M)$], ove è ora ovviamente $0 \leq h \leq r$.

Passiamo a considerare la possibile invertibilità della applicazione (2). Ovviamente questo comporta che la φ sia invertibile, e che φ^{-1} sia continua (e aperta); quindi che φ sia un omeomorfismo locale, e che $m = n$ localmente. Se ci occupiamo soltanto di varietà dimensionalmente pure, ci limiteremo a richiedere che φ sia un omeomorfismo locale tra M e N , e che $m = n$. In questo caso φ è un $0 \leq h \leq \min(r, s)$ -diffeomorfismo locale se φ° lo è, cioè è un

h-diffeomorfismo per ogni coppia di carte (U, λ) e (V, μ) con $\varphi(U) \subset V$ in cui U è un intorno di \underline{p} e V è un intorno di $\underline{q} = \varphi(\underline{p})$. Se $h \geq 1$, questo implica che la jacobiana $\partial(y)/\partial(x)$ sia non singolare in $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$.⁴ (Al solito, 0-diffeomorfismo equivale a omeomorfismo.)

Due varietà di uguale dimensione M e N si dicono **h-diffeomorfe** se esiste un h-diffeomorfismo di M su N . L'essere h-diffeomorfe, per due varietà di uguale dim e di CdC non inferiore a h , è una relazione di equivalenza. Dello studio delle proprietà di una $\langle r, m \rangle$ -varietà che restano invariate quando da essa si passi ad una $\langle s, m \rangle$ -varietà attraverso un h-diffeomorfismo (e tipicamente un ∞ -diffeomorfismo, se $r = s = \infty$) si occupa la "Topologia Differenziale". Ad esempio un problema non banale in quest'ambito è quello di accertare se una data m -varietà topologica può, per dato $r \geq 1$, ricevere una $\langle r, m \rangle$ -struttura, o più $\langle r, m \rangle$ -strutture, che vi inducano la stessa topologia.

È facile a questo punto capire come, per $1 \leq \min(r, s)$, $1 \leq h \leq \min(r, s)$ e $m \leq n$, si definisca una **h-immersione** $\iota: M \rightarrow N$, e in particolare un **h-embedding** $\eta: M \rightarrow N$, di M in N ; nonché, nelle stesse ipotesi, salvo sostituire $m \geq n$ a $n \geq m$, una **h-sommersione** $\sigma: M \rightarrow N$ di M su N (si riguardino le relative definizioni in S.sez. 3.4.1).⁵

Per $m \leq n$, sia ora $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ un SI di \mathcal{N} , $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{N}$, per il quale esista un $(1 \leq h \leq \min(r, s))$ -embedding $\eta: M \rightarrow N$ tale che $\mathcal{M}^* = \eta(\mathcal{M})$. \mathcal{M}^* è dunque in biiezione con \mathcal{M} attraverso η , e può così ricevere da M una naturale $\langle h, m \rangle$ -struttura. La relazione tra la $\langle h, m \rangle$ -struttura su \mathcal{M}^* e la $\langle s, n \rangle$ -struttura su \mathcal{N} si descrive come segue. Per ogni carta $(n\text{-dim})$ $C = (V, \mu)$ di \mathcal{N} con $V \cap \mathcal{M}^* \neq \emptyset$, $C^* =: (V \cap \mathcal{M}^*, \mu|_{V \cap \mathcal{M}^*})$ è una carta m -dim di \mathcal{M}^* ; l'insieme delle carte C^* al variare di C in un $\langle s, n \rangle$ -atlante su \mathcal{N} è allora un $\langle h, m \rangle$ -atlante su \mathcal{M}^* . Se l'atlante su \mathcal{N} è quello massimale (diciamo $\max(\mathcal{A}, \mathcal{N})$) anche il corrispondente atlante di \mathcal{M}^* è massimale, diciamo $\max(\mathcal{A}, \mathcal{M}^*)$. La $\langle h, m \rangle$ -struttura su \mathcal{M}^* si dice allora **compatibile** con la $\langle s, n \rangle$ -struttura su \mathcal{N} ; la coppia $M^* =: \{\mathcal{M}^*, \max(\mathcal{A}, \mathcal{M}^*)\}$ è una $\langle h, m \rangle$ -sottovarietà di N che si dice **indotta da** M . Se $h = s$, M^* coincide con la $\langle s, m \rangle$ -sottovarietà di N associata a \mathcal{M}^* , e l' s -embedding $\eta: M \rightarrow N$ è in questo caso l'**inclusione canonica** $i: \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{N}$ specificata dall'identità $i(p) = p \forall p \in \mathcal{M}^*$, per la quale $i(\mathcal{M}^*) = \mathcal{M}^*$.⁶

⁴ Il fatto che φ sia un $(h \geq 1)$ -diffeomorfismo in \underline{p} implica che $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$ sia regolare per φ° e che la matrice jacobiana della trasformazione (2) sia quadrata.

⁵ In questi tre casi $\lambda(\underline{p})$ deve essere un punto regolare per ι° (risp. per η° , risp. per σ°) $\forall \underline{p} \in \mathcal{M}$.

⁶ Rifacendoci alle considerazioni iniziali (p. 1) e ponendovi $M = N$, $\varphi = i$, se (U, λ) e (V, μ) sono due carte di M per cui $i(U) = U \subset V$, $\mu \circ i \circ \lambda^{-1} \equiv \mu \circ \lambda^{-1}$ è ovviamente di CdC r , e i è un r -embedding di M^* in M .

4.2.2) CALCOLO DIFFERENZIALE DEL 1° ORDINE SU O TRA VARIETÀ

Alla base dell'Analisi (o Calcolo) Differenziale *del 1° ordine* di una $\langle r \geq 1, m \geq 1 \rangle$ -varietà M in se stessa (\equiv su M), o più in generale di una tale M in una analoga $\langle s \geq 1, n \geq 1 \rangle$ -varietà N , sono le nozioni di “spazio tangente” (di M in un suo ⁷ punto di riferimento \underline{p}), e quella di “differenziale” (di un'applicazione di CdC h di M in N , per $1 \leq h \leq \min(r,s)$), in \underline{p}). Come vedremo, esistono definizioni a prima vista diverse di questi oggetti, che tuttavia portano allo sviluppo di teorie equivalenti. In pratica, si tratta di cogliere certi concetti fondanti dell'analoga analisi differenziale su varietà “convenzionali” (\equiv immerse in uno spazio pseudoeuclideo affine di dimensione maggiore o uguale), o di varietà convenzionali in varietà convenzionali, che opportunamente riformulati possono esportarsi nelle varietà “astratte” (di CdC ≥ 1) introdotte nella S.sez. 4.1.1. La nuova analisi differenziale su varietà astratte, o di varietà astratte in varietà astratte, potrà allora svilupparsi a partire da quei concetti fondanti; ed è proprio la scelta di questi ultimi che dà origine ai diversi percorsi logici verso teorie equivalenti.

Un approccio all'analisi differenziale del 1° ordine su ${}^{r \geq 1}M^m \equiv M$ (o di M in ${}^{s \geq 1}N^n \equiv N$) che offre un buon compromesso tra economia ed efficacia didattica è quello cosiddetto **delle carte** (detto anche **fisico**, perché preferito dai fisici). Il punto di partenza è nella nozione di “vettore” di M in un suo punto di riferimento \underline{p} , o vettore in $\underline{p} \in M$. Sia ${}^r C_p(M)$ l'insieme delle carte del $\langle r, m \rangle$ -atlante massimale di M in \underline{p} . Nel seguito ci serviremo soltanto di ${}^1 C_p(M)$, che per brevità scriveremo $C_p(M)$, o anche soltanto C_p se abbastanza inequivoco; quindi il fatto che la CdC di M possa essere > 1 è inessenziale, e si potrà senz'altro supporre, in quanto segue e salvo avviso contrario, che r sia uguale a 1. Questo riflette il programma di fare per il momento dell'analisi differenziale del 1° ordine, e non di ordine superiore.

Si consideri l'applicazione

$$(1) \quad V: C_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

di cui denotiamo con $V_p(C)$ il valore nella carta $C = (U, \lambda)$ di C_p (un' m -pla ordinata di reali, diciamo $\langle V_p^i(C) \rangle_{i=1+m}$). Si supponga poi che V_p sia tale che il suo valore nella carta $C' = (U', \lambda')$ di C_p (ovviamente congiunta a C) sia legato a $V_p(C)$ dalla relazione lineare e invertibile

$$(2) \quad V_p(C') = \partial(x')/\partial(x)|_x \circ V_p(C).$$

Qui $x = \lambda(p \in U \cap U')$, $x' = \lambda'(p \in U \cap U')$, $\partial(x')/\partial(x)|_x$ è la jacobiana di $x' = x'(x)$ valutata in x , non singolare per $x \in \lambda(U \cap U')$ per l'ipotesi di invertibilità, \circ denota prodotto matriciale standard (righe

⁷ Useremo ormai di norma lo stesso simbolo per una varietà ed il suo supporto; e più oltre estenderemo questa convenzione ad altre coppie di supporti-strutture.

per colonne) e $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$. Si supponga inoltre che questo valga per *ogni* coppia di carte (congiunte) di C_p . La (2) è evidentemente una versione compatta della

$$(3) \quad V_p^{ij} = \partial x^{ij} / \partial x^i |_{\underline{x}} V_p^i$$

($j = 1 \div m$, somma su i da 1 a m), dove abbiamo alleggerito la notazione scrivendo V_p^i per $V_p^i(C)$ e V_p^{ij} per $V_p^{ij}(C')$.

La (2) è una relazione di equivalenza tra $V_p(C)$ e $V_p(C')$; infatti è riflessiva (vale per $C = C'$), simmetrica (rispetto allo scambio tra C e C') e transitiva (se è soddisfatta per (C, C') e per (C', C'') , è soddisfatta per (C, C'')). Nel primo caso, la jacobiana è la $(m \times m)$ -matrice unitaria; nel secondo caso la jacobiana diventa la sua inversa sotto lo scambio tra C e C' ; e nel terzo caso la jacobiana $\partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}}$ è il prodotto ordinato $\partial(x'')/\partial(x')|_{\underline{x}} \circ \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}}$. In forza della (2), o della sua versione indiciale esplicita (3), si vede subito che l'applicazione V_p è unicamente determinata se è dato il suo valore in una singola arbitraria carta di C_p . V_p si dice **vettore** \equiv **vettore_f** (dove f sta per "fisico") di M in \underline{p} . Gli elementi dell' m -pla ordinata $\langle V_p^i \rangle_{i=1 \div m}$ si dicono **componenti controvarianti** di V_p in C ; infatti la (3) è una trasformazione per controgredienza. L'insieme dei vettori di M in \underline{p} si denoterà $\mathcal{T}_p(M)$ (o in breve \mathcal{T}_p). Salvo eccezioni, nel seguito ometteremo il segno \circ di moltiplicazione matriciale.

Veniamo ora alla *esistenza* di un vettore con valore prescritto in una data carta di C_p . Per ogni data colonna $z \in R^m$ e ogni data carta C^* di C_p , possiamo *definire* un'applicazione V^* di C_p in R^m come segue: (i) è assegnato il valore z di V^* in C^* , $V^*(C^*) = z$; (ii) per ogni carta C di C_p , $(^+) V^*(C) = \partial(x)/\partial(x^*)|_{\underline{x}^*} z$ (questa seconda condizione è consistente con la prima per $C = C^*$). V^* è così univocamente definita. Proviamo ora che V^* è un vettore di M in \underline{p} , $V^* \in \mathcal{T}_p$. Basta verificare che V^* soddisfa la (2); e in effetti, se C' è una arbitraria carta di C_p , sostituendola nella $(^+)$ al posto di C otteniamo: $V^*(C') = \partial(x')/\partial(x^*)|_{\underline{x}^*} z = \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} \partial(x)/\partial(x^*)|_{\underline{x}^*} z = \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} V^*(C)$, qed. In conclusione, per un'arbitraria $z \in R^m$ ed un'arbitraria carta $C \in C_p$, esiste esattamente un vettore $V \in \mathcal{T}_p$ per cui $V(C) = z$. In generale, tale V dipende dalla scelta di z e di C ; ma se $z = 0$, V è sempre lo stesso vettore ${}^\circ V$ che ha valore $\langle 0, \dots, 0 \rangle$ in ogni carta di C_p . Scriveremo ciò come:

$$(4) \quad {}^\circ V(C) = 0$$

$\forall C \in C_p$. A \mathcal{T}_p si può assegnare una naturale struttura di spazio R -lineare come segue. Siano V_1, V_2, V vettori arbitrari di \mathcal{T}_p , e c un arbitrario reale. Definiremo un'operazione **somma** $(+)$ di V_1 e V_2 mediante la

$$(5_1) \quad \forall C \in C_p, (V_1 + V_2)(C) = V_1(C) + V_2(C);$$

e un'operazione **prodotto** (\cdot) di $c \in R$ per V (o di V per c) mediante la

$$(5_2) \quad \forall C \in \mathcal{C}_p, (c \cdot V)(C) \equiv (V \cdot c)(C) =: cV(C).$$

Queste (5) sono compatibili con la condizione (2), perché, per ogni coppia di carte C, C' di \mathcal{C}_p ,

$$(6_1) \quad (V_1 + \cdot V_2)(C') = V_1(C') + V_2(C') = \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} V_1(C) + \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} V_2(C) = \\ = \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} (V_1(C) + V_2(C)) = \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} (V_1 + \cdot V_2)(C),$$

e rispettivamente

$$(6_2) \quad (c \cdot V)(C') \equiv (V \cdot c)(C') = cV(C') = c \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} V(C) = \partial(x')/\partial(x)|_{\underline{x}} (c \cdot V)(C).$$

Dunque $V_1 + \cdot V_2$ e $c \cdot V$ esistono (in \mathcal{T}_p), e sono univocamente definiti.⁸ Dal punto di vista algebrico, \mathcal{T}_p munito di $(+ \cdot)$ è un gruppo abeliano con ${}^\circ V$ come elemento neutro; e con l'aggiunta di (\cdot) , uno spazio lineare su \mathbb{R} . Infatti sono soddisfatti tutti gli assiomi relativi (vedi S.sez. 1.3.1). Dotato di questa struttura lineare, $\mathcal{T}_p \equiv \mathcal{T}_p(M)$ si dice **spazio tangente di M in p** , e si denota $T_p(M)$ (o in breve T_p). Come abbiamo anticipato, spesso così si denota anche il supporto \mathcal{T}_p . Confidando che il contesto ne renda inequivoco il significato, in T_p si potranno usare notazioni standard, cioè $(+)$ per la somma, la semplice giustapposizione per (\cdot) e (0) per lo zero addittivo ${}^\circ V$.

La trasformazione $V_p \mapsto V_p(C)$ definisce un'applicazione *lineare* carta-dipendente

$$(7) \quad {}^C \mathcal{I}_p: T_p \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

ovvero ${}^C \mathcal{I}_p V_p = V_p(C) \in \mathbb{R}^m$, che per quanto abbiamo appena provato è al contempo iniettiva (se $V_p(C) = 0$ per una carta C , e quindi per ogni carta, allora $V_p = 0$) e suriettiva ($\forall z \in \mathbb{R}^m$ esiste un vettore di T_p che ha z come valore nella data carta C); cioè, ${}^C \mathcal{I}_p$ è un isomorfismo carta-dipendente di T_p su \mathbb{R}^m . Un ovvio corollario di questo fatto è che $\dim T_p = \dim \mathbb{R}^m = m$.

In quanto segue, transitoriamente ometteremo il pedice $_p$ in \mathcal{C}_p, T_p e ${}^C \mathcal{I}_p$, e il pedice $_{\underline{x}}$ e simili nelle jacobiane. Per $i = 1 \div m$, sia $\eta_i: C \rightarrow T$ l'applicazione definita da $C \mapsto {}^C \mathcal{I}^{-1} e_i$, dove $\{e_i\}_{i=1 \div m}$ è la base canonica di \mathbb{R}^m (e_i è cioè l' m -pla ordinata che ha 1 in posizione i -ma e 0 altrove), e della quale denoteremo con ${}^C \eta_i$ il valore in C . Poiché ${}^C \mathcal{I}^{-1}$ è un isomorfismo di \mathbb{R}^m su T , e $\{e_i\}_{i=1 \div m}$ è una base di \mathbb{R}^m , $\{{}^C \eta_i\}_{i=1 \div m}$ è a sua volta una base di $T \forall C \in \mathcal{C}$, che viene detta **base canonica covariante di T nella carta C** (sottinteso, in p). Essendo ${}^C \mathcal{I}^{-1} V(C) \equiv V$ indipendentemente dalla carta C , deve essere

$$(8) \quad V(C') = {}^C \mathcal{I} \circ {}^C \mathcal{I}^{-1} V(C)$$

per ogni vettore V di T ed ogni coppia di carte C, C' di \mathcal{C} ; e quindi, in forza della (2), segue che

$$(9) \quad {}^C \mathcal{I} \circ {}^C \mathcal{I}^{-1} = \partial(x')/\partial(x).$$

⁸ Si può così scrivere $V_1 = V_2 \Leftrightarrow V_1 + \cdot (-V_2) = {}^\circ V$, ove $(-V_2) =: ((-1) \cdot V_2)$ e ${}^\circ V$ è definito dalla (4).

Per due date carte C e C' di \mathcal{C} , siano $\{^C\eta_i\}$ e $\{^{C'}\eta_i\}$ le due basi canoniche di T corrispondenti. Gli elementi di queste due basi devono essere legati da un sistema di equazioni del tipo (*) $^{C'}\eta_i = {}^C\eta_h A^h_i$ per una certa matrice non singolare $\{A^h_i\}$ unicamente determinata. La (8) può scriversi equivalentemente come

$$(8bis) \quad V^i(C) {}^C\eta_i = V^j(C') {}^{C'}\eta_j;$$

sostituendo nel 2° membro di questa la (*) e tenendo conto della (2), si ha

$$(10) \quad [V^i(C) - \partial x'^j / \partial x^k V^k(C) A^i_j] {}^C\eta_i = 0.$$

Ma $\{^C\eta_i\}$ è una base, quindi $[\delta_k^i - \partial x'^j / \partial x^k A^i_j] V^k(C) = 0$ per ogni V , e in definitiva $A^i_j = \partial x^i / \partial x'^j$, ovvero

$$(11) \quad {}^{C'}\eta_j = {}^C\eta_i \partial x^i / \partial x'^j.$$

Gli elementi delle due basi canoniche covarianti sono dunque legati da una legge di trasformazione (per cogredienza) reciproca della (2). Per questa ragione la base canonica $\{^C\eta_i\}$ di T (nella carta C , e sempre sottinteso in \mathfrak{p}) è stata detta covariante, e $V^j(C)$ è stata detta componente controvariante di indice j di V in quella base. È immediato controllare che $V^i(C) {}^C\eta_i$ non dipende da C , come deve essere: infatti $V^j(C') {}^{C'}\eta_j = \partial x'^j / \partial x^k V^k(C) {}^C\eta_i \partial x^i / \partial x'^j = \delta^i_k V^k(C) {}^C\eta_i = V^i(C) {}^C\eta_i$. Naturalmente anche la (11) può essere scritta in forma non indiciale, secondo l'ovvia

$$(11bis) \quad {}^{C'}\eta = {}^C\eta \partial(x) / \partial(x'),$$

dove ${}^C\eta \equiv \{^C\eta_i\}$ e ${}^{C'}\eta \equiv \{^{C'}\eta_i\}$ andranno ora pensate come righe. Come vedremo, risulta naturale denotare ${}^C\eta_i \equiv {}^C\eta_{i|\mathfrak{p}}$ [${}^C\eta \equiv {}^C\eta_{\mathfrak{p}}$] come $\partial_{\mathfrak{p}} / \partial x^i$ [$\partial_{\mathfrak{p}} / \partial x$].⁹ Allora la (11) [la (11bis)] si riscrive come

$$(11*) \quad \partial_{\mathfrak{p}} / \partial x'^j = \partial x^i / \partial x'^j \Big|_{\mathfrak{x}} \partial_{\mathfrak{p}} / \partial x^i$$

[come

$$(11bis*) \quad \partial_{\mathfrak{p}} / \partial x' = \partial(x) / \partial(x') \Big|_{\mathfrak{x}} \partial_{\mathfrak{p}} / \partial x].$$

Diamo adesso qualche esempio elementare di spazio tangente secondo la precedente definizione.

§1. Per cominciare, sia $M = {}^o\mathbb{R}^m$ con la sua struttura lineare standard. Benché ${}^o\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$ (ovviamente), è importante distinguere con simboli diversi la varietà ${}^o\mathbb{R}^m$ dallo spazio \mathbb{R}^m al quale appartengono i valori della mappa di una generica carta di $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ (nei punti del suo dominio) nonché i valori di un generico vettore di $T_{\mathfrak{p}}(M) = T_{\mathfrak{p}}({}^o\mathbb{R}^m)$ nelle carte di $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$. Tra le carte di $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ c'è in particolare la carta $C =: ({}^o\mathbb{R}^m, \mathbf{1})$, $\mathbf{1}$ essendo qui l'identità su ${}^o\mathbb{R}^m$, che a $\mathfrak{p} \in {}^o\mathbb{R}^m$ intorno a \mathfrak{p} fa

⁹ La notazione comunemente adottata è $(\partial / \partial x^i)_{\mathfrak{p}}$ [$(\partial / \partial x)_{\mathfrak{p}}$]. Quella suggerita nel testo è parsa più sintetica ed ugualmente completa. Va sottolineato che, a dispetto della loro notazione "suggestiva" in senso operatoriale, i $\partial_{\mathfrak{p}} / \partial x^i$ sono per il momento da considerare semplicemente come certi ben definiti elementi, carta-dipendenti, di $T_{\mathfrak{p}}$ (linearmente indipendenti e completi su $T_{\mathfrak{p}}$). Il riferimento alla carta C , nella notazione $\partial_{\mathfrak{p}} / \partial x^i$ per ${}^C\eta_{i|\mathfrak{p}}$, è suggerito dalla $x = \lambda(\mathfrak{p})$, tenuto conto che λ è la mappa di C .

corrispondere $\lambda(\underline{p}) = \underline{x} \in \mathbb{R}^m$ intorno a \underline{x} , e che da sola ricopre tutta la ${}^{\circ}\mathbb{R}^m$ (**carta canonica di ${}^{\circ}\mathbb{R}^m$**). Per questa carta canonica, l'isomorfismo ${}^c\mathcal{I}_{\underline{p}}$ è l'identità su $T_{\underline{p}}({}^{\circ}\mathbb{R}^m)$; ovvero, nella carta canonica risulta $\partial_{\underline{p}}/\partial x^j = e_j$, $V = x^j e_j$, e $T_{\underline{p}}({}^{\circ}\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m \forall \underline{p}$. In conclusione, in questo caso particolare i tre insiemi concettualmente distinti: *varietà ${}^{\circ}\mathbb{R}^m$* , suo *spazio tangente* in \underline{p} , $T_{\underline{p}}({}^{\circ}\mathbb{R}^m)$, e \mathbb{R}^m stesso, sono il medesimo oggetto. In modo simile si tratta il caso di uno spazio lineare m -dimensionale L , di cui $\{\beta_j\}_{j=1+m}$ sia una base. Questo L è in corrispondenza 1-1 con \mathbb{R}^m attraverso la $\beta_j \pi^j x (\in L) \mapsto x (\in \mathbb{R}^m)$ e la sua inversa, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, e da \mathbb{R}^m trae la $\langle \omega, m \rangle$ -struttura standard. §

§2. Un'altra esempio è quello in cui la varietà ${}^{r \geq 1}M^m \equiv M$ è una sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^{m' \geq m}$ (considerato come spazio “di punti” o affine) del quale denotiamo con z il punto generico. Supporremo questa sottovarietà data intorno a $\underline{z} = \underline{p} \in M$ mediante l'equazione

$$(12) \quad z(\in \mathbb{R}^{m'}) = \rho(x \in \mathbb{R}^m),$$

di CdC r e centrata in \underline{p} , cioè tale che $\rho(0) = \underline{p}$. La (12) può considerarsi come mappa inversa di una carta $C = (U, \lambda)$ di M , che sarà qui supposta del tipo per cui $\lambda(U) = \mathbb{R}^m$, $\lambda^{-1}(x) \equiv \rho(x)$ (quindi C è centrata in \underline{p}). Lo spazio tangente dell'usuale geometria analitica, di M in \underline{p} , è l' m -piano (\equiv sottospazio lineare m -dim di base $\{(\partial \rho / \partial x^j)_0\}_{j=1+m}$) di $\mathbb{R}^{m'}$ dei vettori $z - \underline{p}$, diciamo $\Pi_{\underline{p}} \subset \mathbb{R}^{m'}$; ovvero $z(x) = \partial \rho / \partial x^j|_0 x^j + \underline{p}$, con $z(0) = \underline{p}$. Si vede subito che $T_{\underline{p}}(M)$ può identificarsi con $\Pi_{\underline{p}}$; basta prendere come vettori della base canonica $\{\partial_{\underline{p}} / \partial x^j\}_{j=1+m}$ di $T_{\underline{p}}(M)$ quelli della base $\{(\partial \rho / \partial x^j)_0\}_{j=1+m}$ di $\Pi_{\underline{p}}$ osservando che questi ultimi si trasformano con la stessa legge cogrediente passando dalla carta C alla carta C' ; ovvero, che $(\partial \rho / \partial x^j)_0 = (\partial \rho / \partial x^i)_0 (\partial x^i / \partial x^j)_0$. In conclusione, la familiare nozione di spazio tangente (e dei suoi vettori) di una sottovarietà m -dim di CdC $r \geq 1$ immersa nello spazio affine $\mathbb{R}^{m' \geq m}$ può trasferirsi in modo naturale nella analisi differenziale su varietà astratte. §

Torniamo adesso alla applicazione ${}^h\varphi_{\underline{p}}$, di CdC h ($0 \leq h \leq 1$) in $\underline{p} (\in M \equiv {}^1M^m)$ di M in $N \equiv {}^1N^n$, cioè al generico elemento di $\mathcal{B}^h(M, N, \underline{p})$. Se $N = {}^{\circ}\mathbb{R}^1$, e quindi ${}^h\varphi_{\underline{p}}$ è un elemento di $\mathcal{B}^h(M, \underline{p})$ con $0 \leq h \leq 1$, converrà chiamare ${}^h\varphi_{\underline{p}}$ “funzione” piuttosto che “applicazione”, e scrivere ${}^h\mathcal{F}_{\underline{p}}(M)$ (“ \mathcal{F} ” come “funzione”) in luogo di $\mathcal{B}^h(M, \underline{p})$. Per porre in evidenza che la generica applicazione ${}^h\varphi_{\underline{p}}$ ci interessa in un intorno aperto di \underline{p} ¹⁰ (intorno che per suo effetto si trasforma in un intorno aperto di $\underline{q} = {}^h\varphi_{\underline{p}}(\underline{p}) \in N$), e che ha CdC h in \underline{p} (cioè, che ${}^h\varphi_{\underline{p}} \in \mathcal{B}^h(M, N, \underline{p})$), la rappresenteremo con la notazione

$$(13) \quad {}^h\varphi_{\underline{p}}: M_{\underline{p}} \rightarrow N_{\underline{q}},$$

Per $N = {}^{\circ}\mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}$, rappresenteremo la funzione ${}^h\varphi_{\underline{p}} \equiv {}^h f_{\underline{p}} \in {}^h\mathcal{F}_{\underline{p}}(M)$ con la notazione

$$(13bis) \quad {}^h f_{\underline{p}}: M_{\underline{p}} \rightarrow \mathbb{R}_{\underline{q}},$$

¹⁰ Beninteso, qui e nel seguito un intorno aperto di $\underline{p} \in M$ è un aperto di M nella sua topologia canonica, cui \underline{p} appartiene.

ove $\underline{q} =: {}^h f_p(\underline{p})$.

Riferendoci a quanto ricordato nella S.sez. 3.4.1 (nota ⁽¹⁾) a proposito della matrice jacobiana (derivata) D in $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ di una applicazione di \mathbb{R}^m in \mathbb{R}^n di $CdC \geq 1$ in \underline{x} , e della associata trasformazione lineare “tangente” in \underline{x} , applichiamo alla $y = y(x)$ della (4.2.1, 2) sotto il presupposto $h = 1$. Otteniamo così:

$$(14) \quad Y = (Dy)_{\underline{x}} X.$$

Qui Y è una n -colonna, X una m -colonna, e $(Dy)_{\underline{x}}$ la matrice jacobiana a m righe ed n colonne della (4.2.1, 2) valutata in \underline{x} .¹¹

La trasformazione lineare (14) definisce in modo naturale un’analoga applicazione lineare *carta-indipendente* di $T_p(M)$ in $T_q(N)$, che denoteremo

$$(15) \quad d_p \varphi: T_p(M) \rightarrow T_q(N)$$

e che diremo **differenziale** (o **applicazione tangenziale**) di ${}^1 \varphi_p \equiv \varphi_p$ in p .¹² A questo scopo, riconsideriamo innanzitutto la trasformazione lineare carta-dipendente di $T_p(M)$ su \mathbb{R}^m

$$(16_1) \quad V \mapsto V(C) = {}^C \mathcal{I}_p V,$$

ove $C = (U, \lambda, m)$ è una carta di M in p , e similmente la trasformazione lineare carta-dipendente $W \mapsto W(D) = {}^D \mathcal{I}_q W$ di $T_q(N)$ su \mathbb{R}^n , ove $D = (Z, \mu, n)$ è una carta di N in q , o meglio l’inversa

$$(16_2) \quad W(D) \mapsto W = {}^D \mathcal{I}_q^{-1} W(D),$$

di \mathbb{R}^n su T_q . (Abbiamo ommesso i pedici in V e W per non appesantire troppo la notazione.)

Scrivendo più opportunamente $(Dy)_{\underline{x}}$ come $\partial(y)/\partial(x)|_{\underline{x}}$, porremo innanzitutto

$$(17) \quad W(D) = \partial(y)/\partial(x)|_{\underline{x}} V(C);$$

$d_p \varphi$ si definisce allora componendo le (16) e la (17) secondo $V \mapsto V(C) \mapsto W(D) \mapsto W$, per cui

$$(18) \quad W = d_p \varphi V =: ({}^D \mathcal{I}_q^{-1} \circ \partial(y)/\partial(x)|_{\underline{x}} \circ {}^C \mathcal{I}_p) V. \quad {}^{13}$$

Questa identifica $d_p \varphi$ per mezzo delle carte C di M in p e D di N in q . Occorre ora provare la carta-indipendenza di $d_p \varphi$, cioè che $d_p \varphi$ non dipende dalla scelta di C e di D . Siano dunque $C' = (U', \lambda', m)$ e $D' = (Z', \mu', n)$ carte arbitrarie di M in p , e rispettivamente di N in q ; la tesi è

¹¹ Se le carte di M sono centrate in p e quelle di N in q , risulta $y(0) = 0$, e quindi la (14) è a tutti gli effetti l’approssimazione lineare della (4.2.1, 2) in $x = 0$. L’idea suggerita dalla (14), e dalla successiva associata (18), che la derivata di una funzione reale n -dim e di $CdC \geq 1$ di una variabile reale m -dim, in un dato punto del suo dominio, *non sia* una $n \times m$ -matrice (o un numero reale per $n = m = 1$, la ben nota “tangente trigonometrica dell’angolo con segno <asse x , tangente geometrica orientata>”), ma piuttosto *un’applicazione lineare tangente* a quella funzione in quel punto, comincia ad essere accettata anche nella didattica elementare del Calcolo. Per una trattazione moderna di questo argomento centrale dell’Analisi Differenziale (non solo su spazi finito-dimensionali \mathbb{R}^n , ma su generici spazi di Banach), il lettore può consultare utilmente “Foundations of Modern Analysis” (il 1° volume del Treatise on Analysis) di J. Dieudonné, Chpt. VIII.

¹² La notazione standard è $(d\varphi)_p$ o anche $d\varphi_p$. Quella qui preferita fa il paio con l’alternativa $(\partial_p/\partial x^j)$ in luogo di $(\partial/\partial x^j)_p$, ed è parsa più comoda e anche più logica, sebbene si presti ad una (improbabile) interpretazione scorretta.

¹³ Si ricordi che il prodotto matriciale \circ è associativo.

$$(19) \quad {}^D\mathcal{I}_q^{-1} \circ \partial(y)/\partial(x)|_{\underline{x}} \circ {}^C\mathcal{I}_p = {}^{D'}\mathcal{I}_q^{-1} \circ \partial(y')/\partial(x')|_{\underline{x}'} \circ {}^C\mathcal{I}_p,$$

ove $x' = \lambda' \circ \lambda^{-1}(x)$ e $y' = \mu' \circ \mu^{-1}(y)$. In effetti, valendo la (9), e similmente la ${}^{D'}\mathcal{I}_q \circ {}^D\mathcal{I}_q = \partial(y')/\partial(y)|_{\underline{y}}$, la (19) segue immediatamente in virtù della $\partial(y')/\partial(x')|_{\underline{x}'} = \partial(y')/\partial(y)|_{\underline{y}} \circ \partial(y)/\partial(x)|_{\underline{x}} \circ \partial(x)/\partial(x')|_{\underline{x}'}$.

Si noterà che l'applicazione lineare (15) dipende soltanto dalla natura *locale* di φ in un intorno aperto di \underline{p} , di misura tendente a 0; vale a dire, se in un tale intorno di \underline{p} le applicazioni φ e ψ (di M in N) coincidono, allora $d_p\varphi = d_p\psi$. Se questo è il caso, le due applicazioni φ e ψ sono evidentemente in una relazione di equivalenza; la relativa classe (di equivalenza) si dice **germe** (o **seme**) **delle funzioni 1-differenziabili di M in N intorno a \underline{p}** . In conclusione il vero oggetto del differenziale di una funzione *non è quella specifica funzione*, ma piuttosto *il germe di cui essa è rappresentante*. Una volta messo in chiaro questo fatto, per semplicità nel seguito continueremo spesso a riferirci alle funzioni piuttosto che ai loro germi.

Siano ora $\varphi_p: M^m_p \rightarrow N^n_q$ e $\psi_q: N^n_q \rightarrow O^o_{\underline{u}}$ due funzioni date, e $C = (U, \lambda, m)$, $D = (V, \mu, n)$, $E = (W, \nu, o)$ carte di M^m , N^n e O^o in \underline{p} , rispett. in $\underline{q} = \varphi_p(\underline{p})$ e rispett. in $\underline{u} = \psi_q(\underline{q})$, per le quali $\varphi_p(U) \subset V$ e $\psi_q(V) \subset W$. Allora $\psi_q \circ \varphi_p: M^m_p \rightarrow O^o_{\underline{u}}$ è una funzione (di CdC 1) di M^m (intorno a \underline{p}) in O^o (intorno a \underline{u}). Il differenziale di questa funzione composta $\psi_q \circ \varphi_p$ risulta uguale, come è facile verificare:

$$(20) \quad d_p(\psi_q \circ \varphi_p) = d_q\psi \circ d_p\varphi: T_p(M) \rightarrow T_u(O). \quad {}^{14}$$

A buona ragione, la (20) continua a chiamarsi **regola della catena** anche nel presente più generale contesto.

Torniamo ora al caso generale in cui le CdC di M e di N sono $r \geq 1$ e rispettivamente $s \geq 1$. La (13) ha ancora significato per $1 \leq h \leq \min(r, s)$, ed ha senso dire che ${}^h\varphi_p$ è una h -immersione (vedi S.sez. 3.4.1, nota ⁽¹⁾, e S.sez. 4.2.1) di un intorno di $\underline{p} \in M$ in N (questo è possibile soltanto se $m \leq n$ localmente). Potremo allora dire che ${}^h\varphi_p$ è una h -immersione (in N) in \underline{p} . Una h -immersione (in N) in $\underline{p} \forall \underline{p} \in M$ è una h -immersione di M in N sse (si dimostra facilmente) è iniettiva. Passando al relativo differenziale, se ${}^h\varphi_p$ è una h -immersione in \underline{p} , il suo differenziale $d_p\varphi$ è iniettivo, e quindi è un monomorfismo di $T_p(M)$ in $T_q(N)$; e viceversa, se tale $d_p\varphi$ è un monomorfismo, allora ${}^h\varphi_p$ è una h -immersione in \underline{p} , e $m \leq n$ localmente. L'intero argomento si ripete tal quale sostituendo “sommersione” a “immersione”, “ $m \geq n$ ” a “ $m \leq n$ ”, “suriettiva/o” a “iniettiva/o”, “epimorfismo” a “monomorfismo” e “di $T_p(M)$ su $T_q(N)$ ” a “di $T_p(M)$ in $T_q(N)$ ”. Se infine i due casi considerati occorrono simultaneamente, allora si dovrà sostituire “diffeomorfismo” a “immersione e sommersione”, “ $m = n$ ” a “ $m \leq n$ e $m \geq n$ ”, ... ecc, per finire con la sostituzione di “isomorfismo” a

¹⁴ Qui la matrice $d_p\varphi$ è a n righe ed m colonne, e la $d_q\psi$ è a o righe ed n colonne, per cui il prodotto (a sinistra) della seconda per la prima è, come deve essere, a o righe ed m colonne.

“monomorfismo e epimorfismo”. In conclusione, ${}^h\varphi_{\underline{p}}$ è un h-diffeomorfismo in \underline{p} sse $d_{\underline{p}}\varphi : T_{\underline{p}}(M) \rightarrow T_{\underline{p}}(N)$ è un isomorfismo, e allora risulta $(d_{\underline{p}}\varphi)^{-1} = d_{\underline{q}}\varphi^{-1}$. Se l'applicazione ${}^h\varphi_{\underline{p}}: {}^rM^m \rightarrow {}^sN^n$ è una h-immersione [una h-sommersione] in \underline{p} , il suo rango in \underline{p} è m [il suo rango in \underline{p} è n]. Per questa ragione, immersioni e sommersioni sono dette applicazioni “di rango massimale”, compatibilmente con i valori di m e n .

Sempre riferendoci alla (13) con $1 \leq h \leq \min(r,s)$, sottintenderemo qui appresso, per brevità, il superscritto sinistro h in φ e φ° . Se φ è un h-diffeomorfismo in \underline{p} , per definizione esiste una carta (U, λ) di M in \underline{p} per la quale φ è un h-diffeomorfismo di U su $\varphi(U) \subset N$; scegliendo $(\varphi(U), \lambda \circ (\varphi|_U)^{-1}) \equiv (V, \mu)$ come carta di N in \underline{q} , segue che, per $\varphi^\circ = \mu \circ \varphi|_U \circ \lambda^{-1}: \lambda(U) \rightarrow \mu(V)$ (vedi la (4.2.1, 1), ove μ non deve ora essere ristretto a $\varphi(U)$ perché è $V = \varphi(U)$), risulta $\varphi^\circ = \lambda \circ (\varphi|_U)^{-1} \circ \varphi|_U \circ \lambda^{-1} = \mathbf{1}_{\lambda(U)}: \lambda(U) \rightarrow \mu(V) = \lambda \circ (\varphi|_U)^{-1} \circ \varphi(U) \equiv \lambda(U)$; cioè φ° è l'identità su $\lambda(U)$. Ciò significa che se la (13) è un h-diffeomorfismo in \underline{p} , esistono coordinate locali x in $U \subset M$ e y in $V = \varphi(U) \subset N$ per le quali la (4.2.1, 2) si riduce a $y = x$ intorno a $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$. Sorvoliamo sulle versioni di quest'ultimo asserto relative ai casi in cui si parta da una h-immersione, o da una h-sommersione, anziché da un h-diffeomorfismo (in \underline{p}).

Approfondiamo alcuni aspetti della (13bis) (cioè della (13) per $N = {}^oR^1 \equiv R$) per $h = r = 1$. Poiché $T_{\underline{q}}({}^oR^1)$ si identifica con R nella carta canonica $({}^oR^1, \mathbf{1})$ per la quale $y = \mu(q) =: q$ ($\forall q \in R$) (cfr. la (4.2.1, 2) con $\varphi(\underline{p}) \equiv f(\underline{p}) \equiv q$ e $\mu = \mathbf{1}$), il differenziale $d_{\underline{p}}f: T_{\underline{p}}(M) \rightarrow T_{\underline{q}}({}^oR^1)$ di $f_{\underline{p}} \in \mathcal{F}_{\underline{p}}(M)$ è un'applicazione lineare dello spazio tangente di M in \underline{p} in $T_{\underline{q}}({}^oR^1) \equiv R$, o funzionale di $T_{\underline{p}}(M)$; o ancora elemento dello spazio duale $(T_{\underline{p}}(M))^* \equiv T_{\underline{p}}^*(M)$ di $T_{\underline{p}}(M)$, che si dice **spazio cotangente di M in \underline{p}** . Usando la (18) con $\partial f^\circ / \partial x|_{\underline{x}}$ in luogo di $\partial(y) / \partial(x)|_{\underline{x}}$ si trova che, per ogni $V \in T_{\underline{p}}(M)$ e ogni carta $C = (U, \lambda)$ di $C_{\underline{p}}$

$$(21) \quad d_{\underline{p}}fV = \partial f^\circ / \partial x^j|_{\underline{x}} V^j(C),^{15}$$

ove $x = \lambda(\underline{p})$. Infatti adesso ${}^D\mathcal{I}_{\underline{q}}$ è l'identità su R , e ${}^C\mathcal{I}_{\underline{p}}V = \langle V^j(C) \rangle_{j=1 \rightarrow m}$. In virtù del suo evidente significato, il reale a 2° membro della (21) è la “derivata secondo V ” di f° in \underline{x} . Prendiamo ora come particolare funzione hf quella funzione ${}^o x^i \equiv x^i: M_{\underline{p}} \rightarrow R_{\underline{q}}$ che trasforma \underline{p} intorno a \underline{p} nel valore corrente della sua coordinata $x^i = \lambda^i(\underline{p})$ intorno a $\underline{x}^i =: \lambda^i(\underline{p})$. Allora la corrispondente $x^{oi}(\underline{x})$ è appunto x^i , e così $(\partial x^{oi} / \partial x^j)|_{\underline{x}} = \delta_j^i$. Sostituendo nella (21) questo risultato, troviamo

$$(22) \quad d_{\underline{p}}x^iV = \delta_j^i V^j(C) = V^i(C),$$

e dunque la (21) stessa diventa

$$(23) \quad d_{\underline{p}}fV = \partial f^\circ / \partial x^i|_{\underline{x}} d_{\underline{p}}x^iV;$$

¹⁵ Poiché $d_{\underline{p}}f$ è un operatore lineare su $T_{\underline{p}}(M)$, spesso si aboliscono le parentesi attorno al suo argomento.

ovvero, per l'arbitrarietà di V ,

$$(23\text{bis}) \quad d_p f = \partial f^\circ / \partial x^j|_{\underline{x}} d_p x^j,$$

che ha un aspetto quasi del tutto "classico" (basta ignorarvi i pedici $_p$ e $_{\underline{x}}$ e il $^\circ$ su f). D'altra parte, ponendo nella (22) l'elemento $\partial_p / \partial x^k$ della base canonica in luogo di V , e quindi δ_k^i al posto di $V^i(C)$, abbiamo

$$(24) \quad d_p x^i \partial_p / \partial x^k = \delta_k^i;$$

e questa prova che l'insieme $\{d_p x^i\}_{i=1 \rightarrow m}$ dei **covettori** (o **vettori duali**) $d_p x^i$ è la **cobase** (o **base duale**), in $T_p^*(M)$, della base canonica di $T_p(M)$, ovvero la **base canonica controvariante nella carta** $C \in C_p$, $\{^C \eta_{i|p}\}_{i=1 \rightarrow m}$, di $T_p^*(M)$.¹⁶ Quindi i reali $\partial f^\circ / \partial x^j|_{\underline{x}}$ a secondo membro della (23bis) sono le **componenti covarianti** di $d_p f$ nella base canonica dello spazio cotangente. E ancora, se in particolare poniamo x'^i (coordinata i -ma nella carta C') in luogo di f nella (23bis), otteniamo (essendo $x'^0 \equiv x'$):

$$(25) \quad d_p x'^i = (\partial x'^i / \partial x^j)|_{\underline{x}} d_p x^j,$$

anch'essa formalmente familiare (vi si ignorino i pedici);

ovvero, in notazione non indiciale,

$$(25\text{bis}) \quad d_p x' = \partial(x') / \partial(x)|_{\underline{x}} d_p x.$$

Nella (25), la matrice di transizione è per definizione non singolare, e quindi la (25) stessa è una legge di trasformazione per controgredienza, controparte naturale della (11*). Lo stesso vale ovviamente per la sua versione non indiciale (25bis), controparte naturale della (11bis*).

Più in generale, il generico covettore in p (elemento del relativo spazio cotangente), diciamo $K_p = K_p(C)$, si sarebbe potuto definire fin dal principio mediante formule analoghe alle (2,3), semplicemente scambiandovi le matrici jacobiane con le loro inverse; e precisamente secondo le

$$(26) \quad K_p^j = K_{p^i} \partial x^i / \partial x^j|_{\underline{x}'},$$

$\forall(C, C') \in C_p$ e $\forall j = 1, \dots, m$ (controparte della (3)); oppure, in forma non indiciale,

$$(27) \quad K_p(C') = K_p(C) \partial(x) / \partial(x')|_{\underline{x}'},$$

$\forall(C, C') \in C_p$ (controparte della (2)), ove $K_p(C)$ e $K_p(C')$ vanno ora pensate come righe. Nella (26), le K_i sono le **componenti covarianti di K_p nella carta C** . Scrivendo nella (21) $V (= V_p)$ come $V^j(C) \partial_p / \partial x^j$, abbiamo $V^j(C) d_p f \partial_p / \partial x^j = V^j(C) \partial f^\circ / \partial x^j|_{\underline{x}}$; e per l'arbitrarietà dei V^j ,

$$(28) \quad d_p f \partial_p / \partial x^j = \partial f^\circ / \partial x^j|_{\underline{x}}.$$

Insieme alle (23bis, 25, 25bis), le (28) giustificano le notazioni adottate per gli elementi delle due basi canoniche. Il differenziale in p della funzione di CdC 1 f , $d_p f$, si dice anche **gradiente di f in p** .

¹⁶ Della (24) si può dare una prova alternativa partendo dalla identità $\pi^j e_i = \delta_i^j$. Infatti $V^j = \pi^j C \mathcal{I}_p V = d_p x^j V$ (eq. 22) per qualunque V ; ponendo in questa $\partial_p / \partial x^i$ in luogo di V e ricordando che $^C \mathcal{I}_p \partial_p / \partial x^i = e_i$, abbiamo $\pi^j C \mathcal{I}_p \partial_p / \partial x^i = \pi^j e_i = \delta_i^j = d_p x^j \partial_p / \partial x^i$, qed.

Per concludere questa sottosezione, si noterà che sull'insieme ${}^h\mathcal{F}_p(M)$ delle funzioni di CdC $h \geq 1$ in p esiste un'algebra naturale (quella standard di anello commutativo) secondo la quale due elementi arbitrari di quell'insieme possono essere sommati, moltiplicati per un reale e *moltiplicati tra loro* sotto gli usuali assiomi, ${}^h\mathcal{F}_p(M)$ risultando chiuso rispetto a queste operazioni. Beninteso, “sommare due funzioni f, g (o piuttosto i loro germi) in p ” significa sommare i loro valori per p intorno a p , per cui la $(f + g)(p) =: f(p) + g(p)$ definisce la somma $f + g$; e analogamente per il prodotto cf (con c reale arbitrario) e il prodotto (commutativo) $fg = gf$. La (23bis) mostra così che $d_p(\cdot)$ è un operatore non soltanto lineare (cioè tale che $d_p(f + g) = d_p f + d_p g$ e $d_p(cf) = cd_p f$), ma anche leibniziano secondo la

$$(29) \quad d_p(fg) = \partial(fg)^\circ / \partial x^j|_x d_p x^j = [f^\circ_x \partial g^\circ / \partial x^j|_x + \partial f^\circ / \partial x^j|_x g^\circ_x] d_p x^j = f^\circ_x d_p g + d_p f g^\circ_x = f_p d_p g + d_p f g_p$$

(in quanto $f^\circ_x = f_p$ e $g^\circ_x = g_p$), in accordo con la formula del calcolo differenziale standard se al solito si ignorano i pedici p e x .¹⁷

Indubbiamente, le notazioni di questa sezione sono un po' pedantesche, e potrebbero snellirsi senza troppi rischi abolendo i pedici p, q, x , ecc. ove occorrono. Questo potrà essere fatto dal lettore una volta che si senta abbastanza sicuro di sé. Del resto il problema della migliore notazione, nella didattica dell'analisi differenziale su o tra varietà astratte, è notoriamente delicato, al punto di essere talvolta alla radice delle maggiori difficoltà di insegnamento/apprendimento.

4.2.3) APPROCCI ALTERNATIVI AL CALCOLO DIFFERENZIALE SU O TRA VARIETÀ

Il riferimento all'algebra di anello commutativo su ${}^h\mathcal{F}_p(M)$ di cui all'ultimo paragrafo della precedente sottosezione apre la possibilità di un approccio alternativo all'analisi differenziale su o tra varietà, mediante il cosiddetto **metodo dei funzionali lineari-leibniziani** (o anche **algebrico**), e che gode, assieme ad un terzo metodo cosiddetto **dei germi di curva** (o anche **geometrico**), dello stesso status teoretico di quello delle carte (o fisico).¹⁸ Data la loro importanza, a questi metodi alternativi dedichiamo la sintesi che segue.

Cominciamo con il metodo algebrico. Il punto di partenza è ancora una nozione di **vettore** \equiv **vettore_a** (ove “_a” sta per “algebrico”) di $M = {}^{r \geq 1}M^m$ in $p \in M$. Denoteremo con ${}^1F_p(M)$ (o per brevità $F_p(M)$) l'insieme ${}^1\mathcal{F}_p(M) \equiv \mathcal{F}_p(M)$ delle funzioni di CdC ${}^1f \equiv f$ di M_p in R_q , con $q = f(p)$

¹⁷ Ricordiamo che se A è un anello (non necessariamente commutativo), un'applicazione $\Omega: A \rightarrow A$ si dice leibniziana se per ogni f, g di A , $\Omega(fg) = \Omega(f)g + f\Omega(g)$. Solitamente Ω è lineare.

¹⁸ Va da sé che mentre le denominazioni dei tre metodi che abbiamo introdotto per prime (“delle carte”, “dei funzionali lineari-leibniziani” e “dei germi di curva”) fanno tutte chiaro riferimento ai contenuti delle rispettive teorie, quelle ricordate per seconde (“fisico”, “algebrico” e “geometrico”) sono “pure denominazioni” (o quasi), preferibili nell'uso corrente soltanto perché constano di una sola parola.

(cioè del tipo (4.2.2, 13bis) per $h = 1$), con la sua naturale struttura di anello commutativo. Questa struttura si dice **algebra naturale** su $\mathcal{F}_{\underline{p}}(M)$ (con $F_{\underline{p}}(M)$ si denoterà spesso anche il corrispondente supporto $\mathcal{F}_{\underline{p}}(M)$). Ricordiamo ancora che, con riferimento alla carta (U, λ) di M in \underline{p} ed alla carta canonica $(R, \mathbf{1})$ di R in \underline{q} , risulta $f^\circ(x) = f \circ \lambda^{-1}: \lambda(U) \rightarrow R_{\underline{q}}$, di CdC 1 in $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$. Per maggior chiarezza, qui abbiamo $p \in U \mapsto x = \lambda(p) \in R^m \mapsto f(\lambda^{-1}(\lambda(p))) \equiv p \in R$.

Secondo la definizione data nella S.sez. 4.2.2 (metodo “fisico”), un “vettore” \equiv “vettore_f” in \underline{p} è un’applicazione di $C_{\underline{p}}$ in R^m sotto il vincolo (4.2.2, 3). Nell’alternativa algebrica, un vettore_a (in \underline{p}) è per definizione un’applicazione

$$(1) \quad t: F_{\underline{p}}(M) \rightarrow R \quad ^{19}$$

al contempo (i) lineare e (ii) leibniziana; ossia, t è un funzionale lineare-leibniziano di $F_{\underline{p}}(M)$. Alcuni chiamano una **derivazione** un tale vettore_a, per ragioni che saranno chiare in un momento. Una qualsiasi costante (reale) c appartiene evidentemente a $F_{\underline{p}}(M)$, e in forza dei requisiti (i) e (ii) cui t soddisfa, risulta (come si verifica senza difficoltà) $t(c) = 0 \quad \forall c$ costante. ²⁰

Mediante definizioni analoghe alle (4.2.2, 4 e 5), l’insieme dei vettori_a di M in \underline{p} riceve una struttura naturale di spazio lineare. Si verifica subito che questa struttura è compatibile con (i) e (ii) (v. par. prec.): ad esempio, $t_1 + \bullet t_2$ è leibniziano in base alla $(t_1 + \bullet t_2)(fg) = t_1(fg) + t_2(fg) = ft_1(g) + t_1(f)g + ft_2(g) + t_2(f)g = f(t_1(g) + t_2(g)) + (t_1(f) + t_2(f))g = f(t_1 + \bullet t_2)(g) + (t_1 + \bullet t_2)(f)g$ ²¹. Diremo ancora **spazio tangente di M in \underline{p}** l’insieme dei vettori_a (di M in \underline{p}) con la sopravvista struttura lineare, e ancora lo denoteremo con $T_{\underline{p}}(M) \equiv T_{\underline{p}}$. ²²

In realtà l’anello che qui interessa è quello dei germi di funzioni C^1 in \underline{p} , diciamo $\delta_{\underline{p}}\mathcal{F}(M) \equiv \delta_{\underline{p}}\mathcal{F}$. Denotando con $\delta_{\underline{p}}f$ il suo generico elemento, per la linearità una combinazione lineare di vettori_a di una base di $T_{\underline{p}}$ ha per valore ($\in R$) in $\delta_{\underline{p}}f$ la corrispondente combinazione lineare dei valori in $\delta_{\underline{p}}f$ degli elementi della base. Per definizione, la base canonica di $T_{\underline{p}}$ è quella il cui elemento i -mo, che denotiamo ancora $\partial_{\underline{p}}/\partial x^i$, vale δ_i^j nel germe $\delta_{\underline{p}}x^j$, $\partial_{\underline{p}}/\partial x^i(\delta_{\underline{p}}x^j) = \delta_i^j$. Questa è la controparte della (2.4.2, 24). Posto $t = t^i \partial_{\underline{p}}/\partial x^i$, poiché $\delta_{\underline{p}}f = \delta_{\underline{p}}x^j \partial f^\circ/\partial x^j|_{\underline{x}}$, abbiamo dunque $t(\delta_{\underline{p}}f) =$

¹⁹ A rigore t dovrebbe essere munito di un pedice \underline{p} , ma potremo spesso sottintenderlo. Lo stesso vale per il vettore $\phi\tau$ più sotto definito (pedice \underline{q}). Ciò è naturale, perché nel presente contesto \underline{p} e \underline{q} sono fissi e non possono nascere equivoci.

²⁰ Qui e nel seguito alcune parentesi tra le quali è posto l’argomento di un vettore_a potrebbero essere abolite per brevità, come è usuale per le funzioni lineari; ma per maggior chiarezza le abbiamo conservate. Qualcuno usa in tal caso $(\)_L$ dove L significa “lineare”; ma questa scelta ricorda il vecchio detto veneto “peggio ‘l tason del buso”. Quanto alla $t(c) = 0 \quad \forall c$ costante, essa si giustifica elementarmente come segue. 1) $t(cf) = ct(f) \quad \forall f$ (per la linearità); 2) $t(cf) = ct(f) + ft(c) \quad \forall f$ (per la proprietà leibniziana). Confrontando, $ft(c) = 0 \quad \forall f$, da cui la tesi. Alternativamente, 1) $t(1) = t(1 \cdot 1) = 1 \cdot t(1) + t(1) \cdot 1 = 2t(1)$ (per la proprietà leibniziana) $\Rightarrow t(1) = 0$; 2) $t(c) = t(c \cdot 1) = ct(1) = 0$ (per la linearità).

²¹ Al solito, la somma $(+)$, il prodotto per un reale, e l’elemento neutro additivo (diciamo 0t , tale che ${}^0t(f) = 0 \quad \forall f \in F_{\underline{p}}(M)$) nell’uso corrente sono denotati con i simboli standard $(+)$, giustapposizione, (0) .

²² Come si vedrà, l’uso dello stesso simbolo adottato per lo spazio tangente secondo il metodo delle carte non sarà fonte di equivoci, perché i due spazi si accerteranno essere isomorfi.

$= (t^i \partial_p / \partial x^i)(\delta_p x^j \partial f^o / \partial x^j |_{\underline{x}}) = t^i \delta_i^j \partial f^o / \partial x^j |_{\underline{x}} = t^i \partial f^o / \partial x^i |_{\underline{x}}$. In forza della (2.4.2, 21) concludiamo che il valore del vettore_a t nel germe $\delta_p f$ è uguale a quello del differenziale $d_p f$ nel vettore_f t , $t(\delta_p f) = d_p f(t) = t^i \partial f^o / \partial x^i |_{\underline{x}}$. Preciseremo pertanto la definizione di vettore_a in \underline{p} dicendo che è un **funzionale** (lineare-leibniziano) **su germi** in \underline{p} . Ad esempio, un funzionale integrale (su funzioni) non può essere “su germi” perché tenderebbe a zero con la misura del dominio delle funzioni.

Torniamo ora alla applicazione ${}^h\varphi: M_p \rightarrow N_q$ con $1 \leq h \leq \min(r,s)$. Nel seguito non porremo in evidenza la classe h , sottintendendo che essa soddisfi alla precedente disuguaglianza, e ormai ometteremo i pedici ${}_p, {}_q$ nelle funzioni. Sia $g \in F_q(N)$, con $\underline{q} = \varphi(\underline{p})$, e quindi $g \circ \varphi$ (dove \circ è segno di composizione) $\in F_p(M)$. Tenendo fisso φ e facendo variare g in $F_q(N)$, $g \circ \varphi$ varia in $F_p(M)$, e quindi ha senso considerare il valore di t in $g \circ \varphi$ per il generico $t \in T_p(M)$.

$g \circ \varphi$ è un “omomorfismo d'algebra”, vale a dire:

$$(3_1) \quad (g_1 + g_2) \circ \varphi = g_1 \circ \varphi + g_2 \circ \varphi,$$

$$(3_2) \quad (cg) \circ \varphi = c(g \circ \varphi),$$

$$(3_3) \quad (g_1 g_2) \circ \varphi = (g_1 \circ \varphi)(g_2 \circ \varphi),$$

per arbitrari g_1, g_2, g di $F_q(N)$ e arbitrario reale c . Ne viene che, per il dato φ , $t(g \circ \varphi)$ risulta lineare-leibniziano rispetto a g , cioè

$$(4_1) \quad t((g_1 + g_2) \circ \varphi) = t(g_1 \circ \varphi + g_2 \circ \varphi),$$

$$(4_2) \quad t(cg \circ \varphi) = ct(g \circ \varphi),$$

$$(4_3) \quad t((g_1 g_2) \circ \varphi) (\equiv t((g_2 g_1) \circ \varphi)) = t((g_1 \circ \varphi)(g_2 \circ \varphi)) = (g_1 \circ \varphi)t(g_2 \circ \varphi) + t(g_1 \circ \varphi)(g_2 \circ \varphi).$$

In conclusione, l'applicazione ${}_\varphi\tau: F_q(N) \rightarrow R$ definita da

$$(5) \quad {}_\varphi\tau(g) =: t(g \circ \varphi)$$

$\forall g(\in F_q(N))$ è un vettore_a di $T_q(N)$. Dando a questo spazio tangente la solita struttura lineare $(+, \cdot)$, questo vettore ${}_\varphi\tau$ è lineare rispetto a t ; per il dato φ , risulta cioè $(t_1 + \bullet t_2)(g \circ \varphi) = ({}_\varphi\tau_1 + \bullet {}_\varphi\tau_2)(g)$ e $(c \cdot t)(g \circ \varphi) = (c \cdot {}_\varphi\tau)(g) \forall g \in F_q(N)$, per arbitrari $t_1, t_2, t \in T_p(M)$ e arbitrario reale c . L'applicazione di $T_p(M)$ in $T_q(N)$ descritta da $t \mapsto {}_\varphi\tau$ si dice ancora **differenziale di φ in \underline{p}** e si denota $d_p\varphi$ ²³. Se φ è un $(h \geq 1)$ -diffeomorfismo (quindi $m = n$) [un h -diffeomorfismo locale (quindi $m = n$ localmente)], φ ha una inversa [inversa locale] φ^{-1} per la quale vale l'analoga della $d_p\varphi(t) = {}_\varphi\tau$, cioè $d_q\varphi^{-1}({}_\varphi\tau) = t$; dal confronto di queste si trae $(d_q\varphi^{-1} \circ d_p\varphi)(t) = t \forall t \in T_p(M)$, concludendo che $d_q\varphi^{-1} = (d_p\varphi)^{-1}$. In questo caso $d_p\varphi$ è un isomorfismo di $T_p(M)$ su $T_q(N)$, e $d_q\varphi^{-1}$ il suo inverso.

²³ Anche in questo caso, l'adozione dello stesso simbolo già usato con il metodo delle carte non sarà fonte di equivoci.

Per la data ${}^{1 \leq h \leq \min(r,s)}\varphi \equiv \varphi: M_p \rightarrow N_q$, la trasformazione $g (\in F_q(N)) \mapsto g \circ \varphi$ definisce una applicazione $F_q(N) \rightarrow F_p(M)$ ²⁴ che trasforma g nella sua **preimmagine secondo** φ , $g \circ \varphi \equiv \varphi(|g|) \in F_p(M)$; la barra $|$ prima di g , e lo spazio prima della barra, ricordano che $\varphi(|g|)$ è una funzione di p per la data g . Per meglio spiegarci, l'applicazione φ porta $p (\in M$ intorno a $\underline{p})$ in $q (\in N$ intorno a $\underline{q})$, e la funzione $g (\in F_q(N))$ porta q in $x (\in R$ intorno a $\underline{x})$. La funzione $\varphi(|g|)$ porta *direttamente* p nello stesso x . La grafia corrente per $\varphi(|g|)$ consiste nell'aggiungere un asterisco a φ (in alto o in basso a preferenza degli autori) e scrivere di seguito (g) : ad esempio (con l'asterisco in alto), $\varphi^*(g)$. Poiché tuttavia dovremo porre l'asterisco anche in basso (vedi più avanti), e questo è problematico in Word, noi sostituiremo l'asterisco con \times , optando per la sua posizione bassa; ovvero, la nostra notazione alternativa per $\varphi(|g|)$ sarà $\varphi_\times(g)$. Si dice che φ **tira indietro (pulls back**, spesso anche in italiano) la funzione g (di $F_q(N)$) nella funzione $\varphi(|g|) \equiv \varphi_\times(g)$ (di $F_p(M)$) e φ_\times si dice esso stesso **pull-back di** φ ²⁵. Per $M \equiv {}^rM$, $N \equiv {}^sN$, $O \equiv {}^tO$, e sotto $1 \leq h \leq \min(r,s)$, $1 \leq k \leq \min(s,t)$, è ovvio che, se $\varphi (\equiv {}^h\varphi): M_p \rightarrow N_q$ (con $\underline{q} = \varphi(\underline{p})$), e $\psi (\equiv {}^k\psi): N_q \rightarrow O_{\underline{u}}$ (con $\underline{u} = \psi(\underline{q})$), allora $(\psi \circ \varphi)_\times(f) = (\varphi_\times \circ \psi_\times)(f) \forall f(\in F_{\underline{u}}(O))$. Ciò si scrive semplicemente come

$$(6) \quad (\psi \circ \varphi)_\times = \varphi_\times \circ \psi_\times.$$

In particolare se φ è l'identità su M_p , $\varphi = \mathbf{1}_{M_p}$, allora φ_\times è l'identità su $F_p(M)$, $(\mathbf{1}_{M_p})_\times = \mathbf{1}_{F_p(M)}$; quindi se φ è invertibile, $(\varphi^{-1})_\times = (\varphi_\times)^{-1}$.

Facendo uso del pull-back di φ , possiamo scrivere (vedi la (5)):

$$(7) \quad \varphi\tau(g) = (d_p\varphi(t))(g) = t(\varphi_\times(g))$$

$$\forall t \in T_p(M) \text{ e } \forall g \in F_q(N),$$

o semplicemente:

$$(7\text{bis}) \quad \varphi\tau = d_p\varphi(t) = t(\varphi_\times). \quad {}^{26}$$

È comodo utilizzare la (7bis) per ottenere:

$$(8) \quad d_p(\psi \circ \varphi)(t) = t((\psi \circ \varphi)_\times) = t(\varphi_\times \circ \psi_\times) = \varphi\tau(\psi) = d_q\psi(\varphi\tau) = (d_q\psi \circ d_p\varphi)(t),$$

$$\forall t \in T_p(M), \text{ o semplicemente:}$$

$$(8\text{bis}) \quad d_p(\psi \circ \varphi) = d_q\psi \circ d_p\varphi,$$

in completa analogia formale con la (4.2.2, 20) (regola della catena).

²⁴ Come vedremo (v. App. Sp. 4.B), si può introdurre una simile applicazione φ^\times , ovviamente di significato diverso da φ_\times . Molti autori invertono le posizioni verticali dei \times .

²⁵ In realtà quello che abbiamo introdotto è solo un esempio di pull-back.

²⁶ Se φ è invertibile (anche localmente), vi è consistenza tra la (7bis) e la regola di pull-back $(\varphi^{-1})_\times = (\varphi_\times)^{-1}$. Abbiamo infatti: $\varphi\tau = t \circ \varphi_\times$, e inversamente $t = \varphi\tau \circ (\varphi_\times)^{-1} = \varphi\tau \circ (\varphi^{-1})_\times$. Eliminando poi t $[\varphi\tau]$ tra queste uguaglianze si ottiene l'identità $\varphi\tau \equiv \varphi\tau [t \equiv t]$.

Fin qui, abbiamo visto che i due metodi esaminati (“fisico” e “algebrico”) portano a risultati *formalmente* identici. Per mostrare l’equivalenza *sostanziale* delle relative teorie dobbiamo ora mettere in relazione i due spazi tangenti (spazio tangente_f e spazio tangente_a) provandone l’isomorfismo. Cominceremo con lo studio dello spazio tangente_a di $M = {}^0R^m$. Usando la carta canonica di ${}^0R^m$, sappiamo che in essa $x (\in R^m) = \mathbf{1}(p) \equiv p (\in {}^0R^m) \forall p$ intorno al punto di riferimento $\underline{p} = \underline{x}$, e che $f^p(x) = f(p) \forall f(\in F_{\underline{p}}({}^0R^m))$. In forza di questo potremo eliminare la notazione p in favore di x , ${}^0R^m$ in favore di R^m e f^p in favore di f ; quindi lo spazio tangente_a di ${}^0R^m$ si denoterà $T_{\underline{x}}(R^m)$. Per le nostre necessità, potremo supporre $f(x)$ definita (e C^1) in un aperto $\subset R^m$ contenente \underline{x} e convesso, ad esempio in una m -palla aperta di centro \underline{x} , $B_{\underline{x}}$. Sia poi $v (\equiv \langle v^1, \dots, v^m \rangle) = v^i e_i$ un vettore cartesiano di R^m (al solito, e_i è qui l’elemento i -mo della base canonica di R^m), e consideriamo la **derivata secondo v di f in \underline{x}** , cioè la derivata $df(\underline{x} + \alpha v)/d\alpha|_0$, ove α è un parametro in un intervallo aperto $I \subset R$ contenente 0 , e $|_0$ sta per $|\alpha=0$. Questa derivata è ovviamente uguale a $v^i \partial f / \partial x^i|_{\underline{x}}$. È chiaro che, per dato v , la trasformazione $f \mapsto v^i \partial f / \partial x^i|_{\underline{x}}$ (lineare in f) individua un funzionale lineare-leibniziano di $F_{\underline{x}}(R^m)$, cioè un vettore_a, che scriveremo $v^i \partial_{\underline{x}} / \partial x^i$, di $T_{\underline{x}}(R^m)$. Qui $\partial_{\underline{x}} / \partial x^i$ è l’operatore standard di derivazione parziale rispetto a x^i , e il pedice \underline{x} in $\partial_{\underline{x}} / \partial x^i$ significa che la derivata è valutata in \underline{x} . D’altra parte la trasformazione $v \mapsto v^i \partial_{\underline{x}} / \partial x^i \equiv L_{\underline{x}} v$ individua a sua volta una applicazione lineare di R^m in $T_{\underline{x}}(R^m)$, cioè $L_{\underline{x}}: R^m \rightarrow T_{\underline{x}}(R^m)$. Proveremo ora che $L_{\underline{x}}$ è un isomorfismo di R^m su $T_{\underline{x}}(R^m)$.

§1. Che $L_{\underline{x}}$ sia iniettiva segue immediatamente da “ $\forall f(\in F_{\underline{x}}(R^m)) \{v^i \partial_{\underline{x}} / \partial x^i f = 0\} \Rightarrow v^j = 0 \forall j = 1 \div m$ ”: basta infatti porre x^j in luogo di f per avere $v^j = 0$. §

§2. Meno immediato è provare che $L_{\underline{x}}$ è suriettiva. Partiamo dalla identità

$$(9) \quad f(x) - f(\underline{x}) = (x^i - \underline{x}^i) \langle \partial f / \partial x^i \rangle_{\underline{x}}^x,$$

valida per ogni funzione di x definita e C^1 in una palla $B_{\underline{x}}$ di centro \underline{x} (possibilmente, in tutto R^m), dove con $\langle \dots \rangle_{\underline{x}}^x$ abbiamo denotato la media lineare lungo il segmento di estremi \underline{x} , x . Infatti, sia f^* la funzione di $z \in [0,1]$ data da $f^*(z) =: f(\underline{x} + z(x - \underline{x}))$ (quindi $f^*(1) = f(x)$, $f^*(0) = f(\underline{x})$). Allora il 1° membro della (9) si scrive $\int_{z=0}^1 df^*/dz dz$. L’integranda df^*/dz vale $(x^i - \underline{x}^i) (\partial f / \partial x^i)(\underline{x} + z(x - \underline{x}))$ e quindi l’integrale è uguale a $(x^i - \underline{x}^i) \int_{z=0}^1 (\partial f / \partial x^i)(\underline{x} + z(x - \underline{x})) dz \equiv (x^i - \underline{x}^i) \langle \partial f / \partial x^i \rangle_{\underline{x}}^x$, qed. Applichiamo ora il vettore_a t di $T_{\underline{x}}(R^m)$ ai due membri della (9) ricordando che t è lineare-leibniziano, e poi prendiamo il limite per $x \rightarrow \underline{x}$ del risultato. Otteniamo così, al primo passo, $t(f) = t(x^i) \langle \partial f / \partial x^i \rangle_{\underline{x}}^x + (x^i - \underline{x}^i) t(\langle \partial f / \partial x^i \rangle_{\underline{x}}^x)$; e al secondo, $t(f) = (t(x^i) \partial f / \partial x^i)|_{\underline{x}}$ (perché $\lim_{x \rightarrow \underline{x}} \langle \partial f / \partial x^i \rangle_{\underline{x}}^x = \partial f / \partial x^i|_{\underline{x}}$). Dunque $t(f)$ è la derivata del germe f secondo il vettore cartesiano di componenti $t(x^i)$, valutata in \underline{x} ; e questo vale per ogni germe di classe C^1 di $F_{\underline{x}}(R^m)$. In conclusione, alla $v (\in R^m) \mapsto L_{\underline{x}} v (\in T_{\underline{x}}(R^m))$

(iniettiva) corrisponde la $t \in T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m) \mapsto L_{\underline{x}}^{-1}t =: e_t(\underline{x})|_{\underline{x}} = \langle t(x^j)_{\underline{x}} \rangle_{j=1+m} = \langle \underline{x}^j \rangle_{j=1+m} \in \mathbb{R}^m$, e la tesi della suriezione è provata. Come corollario dell'isomorfismo tra \mathbb{R}^m e $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)$ abbiamo che $\dim T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m) = m$. Infine è chiaro che $\{\partial_{\underline{x}}/\partial x^i\}_{i=1+m}$ è una base di $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)$, la sua base canonica covariante. §²⁷

Resta ora da rimuovere la limitazione $M = {}^o\mathbb{R}^m$, passando ad una generica varietà ${}^{r \geq 1}M^m \equiv M$. È più comodo, anche se non necessario, usare una carta $C = (U, \lambda)$ di C_p del tipo “speciale”, cioè con $\lambda(U) = \mathbb{R}^m$. Abolendo per brevità le parentesi intorno agli argomenti di applicazioni lineari, abbiamo $(\dagger) \lambda\tau = d_p\lambda t \in T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)$; ed è facile controllare che questa (\dagger) equivale alla

$$(10) \quad \text{tf}|_U = \lambda\tau f^\circ$$

$\forall f \in F_p(M)$. Se infatti vale la (10), scrivendo $f|_U$ come $\lambda_{\times}(f^\circ)$ abbiamo $\lambda\tau f^\circ = t\lambda_{\times}(f^\circ) = (d_p\lambda t)f^\circ$; e poiché questa vale $\forall f^\circ \in F_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)$, si ha la (\dagger) . Se viceversa vale la (\dagger) , applicandola a f° , facendo gli stessi passaggi all'indietro e universalizzando rispetto a $f \in F_p(M)$, si ottiene la (10), qed. Manifestamente la (\dagger) si inverte nella $d_{\underline{x}}\lambda^{-1}\lambda\tau = t$. In particolare $\lambda\tau_i = \partial_{\underline{x}}/\partial x^i$, e $t_i = d_{\underline{x}}\lambda^{-1}\partial_{\underline{x}}/\partial x^i$. Poiché $\{\partial_{\underline{x}}/\partial x^i\}_{i=1+m}$ è una base (la base canonica) di $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)$, e $d_{\underline{x}}\lambda^{-1}$ è un isomorfismo, anche $\{t_i\}_{i=1+m}$ è una base di $T_p(M)$, la sua **base canonica covariante nella carta C di C_p** . Consistentemente, denoteremo con $\partial_p/\partial x^i$ gli elementi di questa base. Si ha quindi

$$(11) \quad \partial_p/\partial x^i f|_U = \partial_{\underline{x}}/\partial x^i f^\circ$$

per ogni $i = 1+m$ e ogni f di $F_p(M)$. Alternativamente, questa si verifica anche scrivendo $f|_U$ come $f^\circ(\lambda)$ e ricordando la definizione (5) di $\lambda\tau$: precisamente si ha $\partial_p/\partial x^i f|_U = t_i f^\circ(\lambda) \equiv t_i(f^\circ \circ \lambda) = \partial_{\underline{x}}/\partial x^i f^\circ$. Scrivendo infine $\partial_p/\partial x^i f^\circ(\lambda)$ come $(\partial_p/\partial x^i \lambda^j) \partial_{\underline{x}}/\partial x^j f^\circ$, la precedente mostra che deve essere $\partial_p/\partial x^i \lambda^j = \delta_i^j$, come è naturale. Riassumendo, l'isomorfismo di ${}_f T_p(M)$ (ove f sta per “fisico”) su ${}_a T_p(M)$ (ove a sta per “algebrico”) è descritto dalla catena di trasformazioni invertibili: $V \in ({}_f T_p(M)) \mapsto {}^C J_p V \equiv V(C) \in (\mathbb{R}^m) \mapsto L_{\underline{x}} V(C) \equiv \lambda\tau \in ({}_a T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)) \mapsto d_{\underline{x}}\lambda^{-1}\lambda\tau \equiv t \in ({}_a T_p(M))$, con $C = (U, \lambda)$, $\underline{x} = \lambda(p)$, e risulta carta-indipendente. L'equivalenza delle due teorie è così completamente provata. Tenuto conto del significato delle notazioni, è poi ragionevole (anche se se ne può fare a meno) scrivere $\partial_p/\partial x^i f|_U$ come $\partial_p f|_U / \partial x^i$ ($\equiv \partial f|_U / \partial x^i|_p$) e $\partial_{\underline{x}}/\partial x^i f^\circ$ come $\partial_{\underline{x}} f^\circ / \partial x^i$ ($\equiv \partial f^\circ / \partial x^i|_{\underline{x}}$), in accordo formale con la notazione classica in \mathbb{R}^m . Si ricordi che $f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda(U) = \mathbb{R}^m$, e $f^\circ = f|_U \circ \lambda^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Passiamo infine al metodo geometrico. Osserveremo per cominciare che, nel caso ${}^r M^m = {}^o\mathbb{R}^m$, esso è già sostanzialmente suggerito dalla nozione di “derivata secondo $v \in (\mathbb{R}^m)$ di $f(x)$ in \underline{x} ”, $d(f(\underline{x}+v\alpha))/d\alpha|_0$, dove α è un reale variabile intorno a $\alpha = 0$. Si tratta quindi di esportare

²⁷ L'iniettività di $L_{\underline{x}}$ equivale all'indipendenza lineare dei vettori $\partial_{\underline{x}}/\partial x^i$, e la sua suriettività alla completezza lineare dell'm-pla $\{\partial_{\underline{x}}/\partial x^i\}$ in $T_{\underline{x}}(\mathbb{R}^m)$.

questa nozione da \mathbb{R}^m in ${}^1M^m$. Facendo uso, per maggior convenienza, della solita carta “speciale” (U, λ) , $\lambda(U) = \mathbb{R}^m$, e denotando di nuovo, per brevità, con M la ${}^1M^m$, sia

$$(12) \quad \chi: I \rightarrow M,$$

ove I è un intervallo aperto di \mathbb{R} contenente 0 , una curva di classe C^1 di M per la quale $\chi(0) = \underline{p}$. Questo significa che la curva passa per \underline{p} in corrispondenza del valore 0 del suo parametro $\alpha \in I$, e che $d(\lambda \circ \chi)/d\alpha$ è continua per α in I . Per la data carta (U, λ) , a questa curva si associa il vettore (cartesiano) di \mathbb{R}^m

$$(13) \quad v =: d(\lambda \circ \chi)/d\alpha|_0.$$

Le curve di classe C^1 per \underline{p} del tipo (12) con comune v sono dette **tangenti** (tra loro) **in** \underline{p} , perché le loro trasformate attraverso λ lo sono in $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$. Questa circostanza, si dimostra facilmente, *non* dipende dalla carta in \underline{p} prescelta. L'essere tangenti in \underline{p} , per due curve di M del tipo (12), è quindi una relazione di equivalenza, la cui classe si dice un **germe di curve C^1 per \underline{p}** e sarà denotata con $[\chi]_{\underline{p}}$ se χ è un rappresentante della classe. I **vettori** \equiv **vettori_g** (ove _g sta per geometrico) in \underline{p} si definiscono come i germi di curve C^1 per \underline{p} . Vi è dunque una biiezione (carta-dipendente) tra i vettori $v \in \mathbb{R}^m$ in \underline{p} e i germi di curve per \underline{p} . Il principio di uguaglianza sull'insieme dei germi per \underline{p} , insieme che denoteremo $\mathcal{T}_{\underline{p}}(M)$ (o brevemente $\mathcal{T}_{\underline{p}}$), è ora espresso dalla seguente equivalenza carta-indipendente (risparmiandoci i pedici \underline{p} nella notazione dei germi di curve per \underline{p} nelle (14,15) che seguono):

$$(14) \quad [\chi_1] = [\chi_2] \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

ove $[\chi_1] \leftrightarrow v_1$ e $[\chi_2] \leftrightarrow v_2$, e \leftrightarrow denota la sopraddetta biiezione carta-dipendente. $\mathcal{T}_{\underline{p}}$ riceve infine una naturale struttura di spazio lineare tale che la biiezione stessa diventi un isomorfismo. Se $[\chi_1]$, $[\chi_2]$, $[\chi]$ sono arbitrari germi di $\mathcal{T}_{\underline{p}}$ e c un arbitrario reale, basterà allo scopo definire la **somma +. di germi**, il **prodotto (\cdot) di c per un germe**, e il **germe zero** (additivo) $[\circ\chi]$ di $\mathcal{T}_{\underline{p}}$ secondo le ovvie

$$(15_1) \quad [\chi_1] +. [\chi_2] \leftrightarrow v_1 + v_2,$$

$$(15_2) \quad c \cdot [\chi] \leftrightarrow cv,$$

$$(15_3) \quad [\circ\chi] \leftrightarrow v = 0.$$

Munito di questa struttura lineare, $\mathcal{T}_{\underline{p}}(M)$ diventa lo **spazio tangente_g** $T_{\underline{p}}(M)$. (Al solito, nell'uso corrente le notazioni $(+)$, (\cdot) , $[\circ\chi]$ sono sostituite da quelle standard.)

Tra le curve per \underline{p} del germe $[\chi]_{\underline{p}} \leftrightarrow v$, ce n'è una (e una sola), diciamola $\chi_{\underline{p}}$, che si trasforma attraverso λ nel segmento rettilineo aperto passante per \underline{x} di \mathbb{R}^m di equazione $x = \underline{x} + \alpha v$, cioè $\lambda(\chi_{\underline{p}}(\alpha)) = \underline{x} + \alpha v$, per α intorno a 0 . Questo fatto stabilisce il punto di contatto tra il metodo geometrico e il metodo algebrico. Se $f: M_{\underline{p}} \rightarrow \mathbb{R}$ è la solita funzione C^1 , $f \circ \chi_{\underline{p}}$ è un'applicazione C^1

di I in \mathbb{R} , cioè $f \circ \chi_p: I \rightarrow \mathbb{R}$. Allora la **derivata lungo** $[\chi]_p$ di f in p è per definizione $d(f \circ \chi_p)/d\alpha|_0$. Sempre con riferimento alla carta (U, λ) di M in p , questa derivata si scrive anche $d(f|_{U \circ \lambda^{-1} \circ \lambda \circ \chi_p})/d\alpha|_0 \equiv d(f^\circ(\underline{x} + \alpha v))/d\alpha|_0$, e il contatto tra i due metodi è stabilito. Lasciamo al lettore l'ormai facile esercizio di completare la dimostrazione dell'equivalenza tra la teoria geometrica e quella algebrica.

Concludendo: i tre metodi alternativi descritti conducono a teorie equivalenti. Ciascuno a suo modo, ma con gli stessi risultati sostanziali, essi sono in grado di trasferire, dai familiari spazi cartesiani reali finito-dimensionali ²⁸ a certe loro immagini “localmente biiettive” (appunto, le varietà con $CdC \geq 1$ di uguale dimensione), sia la struttura differenziale che il calcolo differenziale. Di questo calcolo abbiamo illustrato quello del 1° ordine (è per questa ragione che ci siamo limitati a richiedere che r , classe di continuità delle varietà considerate, fosse ≥ 1) relativo ad applicazioni di una varietà $r \geq 1 M^m \equiv M$ in una varietà $s \geq 1 N^n \equiv N$; e in particolare, avendo posto $N = {}^o R^1 \equiv \mathbb{R}$, di funzioni reali, o “campi scalari” di $CdC h \leq r$ (carta-indipendente) definite in M (o in un aperto $A \subset M$ unione di domini di carte di M), nonché la loro algebra di anello in un punto $p \in M$; e infine, l'algebra lineare dei vettori [covettori] dello spazio tangente [cotangente] $T_p(M)$ [$T_p^*(M)$].

Quanto qui di seguito è riferito ad M può sempre limitarsi, volendo, all'aperto $A \subset M$. La nozione di **campo vettoriale in** M è ovvia: si tratta di scegliere un particolare vettore di $T_p \forall p$ di M . L'insieme degli spazi tangenti $T_p(M) \forall p \in M$, $\cup_{p \in M} T_p(M)$, cioè l'insieme dei loro vettori, è il **fibrato (bundle) vettoriale di** M , e si denota $B(M)$. ²⁹ Un campo vettoriale è dunque un'applicazione $V: M \rightarrow B(M)$ sotto la condizione che $V(p) \in T_p(M) \forall p \in M$. La $CdC h$ (carta-indipendente) di un tale campo è $\leq r-1$. Infatti, scrivendo (con riferimento alla solita carta $C = (U, \lambda)$ in p) $V(\lambda^{-1}(x))$ come $V(C|x)$ per $x \in \lambda(U)$, questo significa che gli elementi $V^j(C|x)$, per $j = 1 \div m$, della m -colonna $V(C|x)$ sono di $CdC h$ per $x \in \lambda(U)$; ma poiché essi si trasformano secondo la (4.2.2, 3) al passaggio da C ad altra carta in p $C' = (U', \lambda')$, possiamo ormai scrivere, in luogo della (4.2.2, 3) stessa,

$$(16) \quad V^j(C'|x') \equiv V^j(x') = \partial x'^j / \partial x^i(x) V^i(C|x) \equiv \partial x'^j / \partial x^i(x) V^i(x),$$

per $x \in \lambda(U \cap U')$ e $x' \in \lambda'(U \cap U')$, quando x' sia espresso come $\lambda' \circ \lambda^{-1}(x)$ e x sia espresso come $\lambda \circ \lambda'^{-1}(x')$. Poiché le derivate $\partial x'^j / \partial x^i$ sono di $CdC r-1$, la $CdC h$ dei campi vettoriali su M deve

²⁸ Va peraltro segnalato che questa limitazione è stata da tempo superata, passando a generici spazi di Banach. Il trattato di riferimento, in proposito, è probabilmente S. Lang, “Fundamentals of Differential Geometry”, Springer (1999).

²⁹ Non ci si faccia ingannare dalla ovvia intuizione visiva nel caso di varietà immerse in uno spazio cartesiano: $B(M)$ va pensata come unione di insiemi *disgiunti*.

essere $\leq r-1$, e quindi $h \geq 1 \Rightarrow r \geq 2$.³⁰ Questi campi vettoriali su M si possono combinare linearmente “punto per punto” restando campi vettoriali su M della stessa CdC , e in questo senso formano uno spazio lineare (esattamente come, ad es., le funzioni continue su R). Con ovvie modifiche, in modo simile si definiscono i **campi covettoriali** su M e il **fibrato covettoriale di M** , $B^*(M)$: precisamente, in luogo delle (16) avremo

$$(17) \quad K_j(C'|x') \equiv K'_j(x') = K_i(C|x) \partial x^i / \partial x'^j(x') \equiv K_i(x) \partial x^i / \partial x'^j(x').$$

Nella prossima sezione generalizzeremo questi concetti agli “ $\langle a, b \rangle$ -tensori in \underline{p} ” ($\in M$), con a, b interi ≥ 0 (di fatto i casi con $a + b \leq 1$ sono già stati trattati), e ai corrispondenti “campi e fibrati $\langle a, b \rangle$ -tensoriali” (su M e rispettivamente di M).³¹

³⁰ Il fatto che r debba essere ≥ 2 se le derivate prime dei campi sono richieste essere continue, è confermato, nel caso di varietà immerse, dalla struttura dei coefficienti di Christoffel.

³¹ A commento dei contenuti di questo capitolo (prossime sezioni incluse), e della vicenda matematica della quale si tratta, ci permettiamo ancora di proporre la seguente favoletta dello pseudo-Gadda: «Per lungo esercizio, l'atleta era pervenuto correre destramente su solida terra; ma talun malizioso lo provocò farlo sur una mera parvenza di quella. Corri pur anco, corri, lo pungolava. L'atleta colse la sfida.»

4.3) ALGEBRA E CALCOLO DIFFER. DI CAMPI $\langle a, b \rangle$ -TENSORIALI SU VARIETÀ ASTRATTE

La presente sezione è dedicata ad una sintetica rassegna dei fondamenti dell'algebra tensoriale (S.sez. 4.3.1) e dell'analisi differenziale (S.sez. 4.3.2) su varietà n-dim astratte dotate di una metrica generalmente pseudoeuclidea (varietà pseudoriemanniane), oppure di una semplice connessione affine (varietà affinementemente connesse). I suoi contenuti saranno in parte ripresi più avanti, approfonditi e giustificati anche lungo linee logiche diverse.

4.3.1) ALGEBRA DEI $\langle a, b \rangle$ -TENSORI

La definizione di un campo κ -tensoriale a componenti controvarianti [covarianti] in (un aperto di) una varietà astratta $r \geq 1, M^{n \geq 1} \equiv M$ si ottiene mediante una ovvia generalizzazione della (4.2.2, 3) [della (4.2.2, 26)], passando dall'applicazione $V: C_p \rightarrow R^n$ [$K: C_p \rightarrow R^n$] del caso vettoriale [covettoriale] ad una corrispondente applicazione di C_p in $R^{n \times \kappa}$ soddisfacente ad una legge κ volte controgrediente [cogrediente]. Altrettanto ovvia è la definizione di un campo κ -tensoriale a componenti genericamente miste.

Si immagini ora che sia dato un campo 2-tensoriale simmetrico non singolare e continuo, diciamo di componenti covarianti ${}^C g_{ik}(x=\lambda(p))$ nella carta C , in un aperto connesso $A \subset M$. Simmetria, non-singularità ed indice (o segnatura) di questo campo sono carta-indipendenti; inoltre l'indice permane invariato in A sotto l'assunta continuità.¹ Si può dimostrare che gli elementi della matrice reciproca della $\{{}^C g_{..}\}_{1 \rightarrow n}$ si trasformano per 2-controgredienza al passaggio tra carte congiunte. Denotandoli con ${}^C g^{jh}$, evidentemente il prodotto contratto ${}^C g_{ik} {}^C g^{kh}$ è uguale a δ_i^h . Una dimostrazione formale del fatto che le ${}^C g^{jh}$ si comportano come componenti controvarianti di un 2-tensore (simmetrico non singolare) a fronte di cambiamenti di carta sarà data più avanti; per il momento ci limitiamo ad affermarlo. Se $\{e_i\}_{1 \rightarrow n}$ è una base dello spazio tangente di M , mediante le ${}^C g^{kh}$ si può definire una cobase $\{e^j\}_{1 \rightarrow n}$ secondo le $e^j = {}^C g^{ji} e_i$ (cfr. (3.1.1, 9)). L'intera algebra dei κ -tensori come descritta nella Sez. 3.1 può essere così istituita in A . Naturalmente in questo caso lo spazio tangente e lo spazio cotangente coincidono nello stesso spazio pseudoeuclideo n-dim, con

¹ La non-singularità di ${}^C g_{ik}$ significa che per ogni $p \in A$ e ogni carta di C_p $\det({}^C g_{ik}(\lambda(p))) \neq 0$. Passando ad altra carta C' di C_p , si ha che $\det({}^{C'} g_{ik}(\lambda'(p))) = \det^2(\partial x^i / \partial x'^j)_{\lambda'(p)} \det({}^C g_{ik}(\lambda(p)))$, da cui la tesi essendo lo jacobiano $\det(\partial x^i / \partial x'^j)_{\lambda'(p)}$ diverso da 0 nel suo dominio $U \cap U'$. (La precedente relazione mostra che *anche il segno* del sopraddetto determinante è carta-indipendente.) Inoltre se la 2-forma $\{{}^C g_{ik}\}$ ha un dato indice in un punto di A , questo indice deve essere uniforme in tutto A perché, sotto la condizione di continuità delle g_{ik} , il contrario comporterebbe l'annullarsi del determinante in qualche punto di A , contro l'ipotesi che esso sia ovunque diverso da zero.

l'indice determinato dalle ${}^C g_{ik}$ e uniforme in A . Inoltre anche il calcolo differenziale su campi tensoriali è operativo in A , perché i Chr1 sono definiti dalle (3.3.2, 17), e i Chr2 sono definiti dalle (3.3.2, 14) invertite (purché sia $r \geq 2$ e le ${}^C g_{ik}$ abbiano CdC $r-1$). Infine un tensore di curvatura è definito mediante le (3.4.2, 3) (per $r \geq 3$). Una geometria differenziale pseudoriemanniana è così fondata nell'aperto A della varietà differenziabile astratta M , prescindendo dal fatto che essa sia o non sia immersa in uno spazio pseudoeuclideo di sufficiente dimensione.

Nella Sez. 4.2 abbiamo tuttavia visto come campi vettoriali e covettoriali possano introdursi in una varietà astratta ${}^{r \geq 1} M^{n \geq 1}$ anche in assenza di un campo 2-tensoriale (simmetrico non singolare) "fondamentale". Questa possibilità si estende a campi tensoriali più generali, al prezzo di rinunciare alla nozione di campo κ -tensoriale come l'abbiamo fin qui definita, e di sostituirla con quella di campo cosiddetto $\langle a \geq 0, b \geq 0 \rangle$ -tensoriale, secondo quanto accennato alla fine della S.sez. 4.2.2. È opportuno cominciare con un esame dell'algebra $\langle a, b \rangle$ -tensoriale "basata" su un generico spazio R -lineare (\equiv lineare su R^2), come sempre finito-dim. Sia dunque E un tale spazio, E^* il suo duale, $n \geq 1$ la loro comune dimensione, χ il generico elemento di E , ξ quello di E^* , $\{e_i\}$ una base di E e $\{e^j\}$ la base di E^* definita dalle $e^j(e_i) = \delta_i^j$, o base duale di E .³ In forza dell'isomorfismo canonico tra E e E^{**} menzionato nella nota (⁸) della S.sez. (3.1.2)⁴, ad ogni proprietà valida per la coppia ordinata (CO) $\langle E, E^* \rangle$, e quindi per la CO $\langle E^*, E^{**} \rangle$, corrisponde un'analogia proprietà valida per la CO $\langle E^*, E \rangle$, e viceversa. In particolare, la precedente $e^j(e_i) = \delta_i^j$ equivale alla $e_i(e^j) = \delta_i^j$, per cui $e^j(e_i) = e_i(e^j) \forall i, j = 1, \dots, n$; il che è come dire che $\xi(\chi) = \chi(\xi) \forall \chi \in E$ e $\forall \xi \in E^*$. Vi è quindi completa simmetria tra i ruoli di E ed E^* .

Se a e b sono due interi non negativi, la definizione di $\langle a, b \rangle$ -**forma** $\tau_{(a,b)}$ **basata su** E procede da una generalizzazione elementare, ma sostanziale, dell'analogia nozione introdotta all'inizio della Sez. 3.1 di $(\kappa \geq 0)$ -forma basata su $E_{m,\pi}$ (spazio *pseudoeuclideo* munito di forma bilineare simmetrica non singolare B). Precisamente, se $a \geq 1$ e $b \geq 1$, $\tau_{(a,b)}$ è un funzionale su $E^a \times E^{*b}$, cioè ad a

² Salvo rare eccezioni, nel presente contesto l'attributo "lineare" sottintende sempre "su R ". Il caso di dimensione nulla è privo di interesse, e verrà ignorato.

³ Non essendovi ormai rischio di confusione con elementi della cobase di E , nel seguito useremo e^j in luogo del simbolo e^{*j} di Sez. 3.1.

⁴ Diamo qui una traccia della prova di tale isomorfismo tra E e E^{**} . Innanzitutto ricordiamo che l'insieme dei funzionali lineari su E diventa lo spazio duale E^* quando le operazioni lineari vi si definiscano secondo le $(\xi_1 + \xi_2)(\chi) =: \xi_1(\chi) + \xi_2(\chi)$ e $(c\xi)(\chi) =: c\xi(\chi) \forall \chi \in E$. L'applicazione $\xi \mapsto \xi(\chi)$ di E^* in R è dunque un funzionale lineare ($\in E^{**}$) su E^* , che denoteremo χ° . L'applicazione $\chi \mapsto \chi^\circ$ di E in E^{**} , diciamo $J: E \rightarrow E^{**}$ con $J(\chi) =: \chi^\circ$, evidentemente lineare, si dice **applicazione canonica di E nel suo biduale**. Tale J si dimostra essere comunque iniettiva (per questo non occorre nemmeno che $\dim(E)$ sia finita se si usa l'assioma di scelta). D'altra parte, dalla $\dim(E^*) = \dim(E) (= m)$ si trae che analogamente $\dim(E^{**}) = \dim(E^*)$. Inoltre, se $\dim(E)$ è finita e F è uno spazio lineare qualsiasi, (si dimostra che) per la generica applicazione lineare $f: E \rightarrow F$ il rango $\text{rng}(f) (\equiv \dim(f(E)))$ è $\leq \min(\dim(E), \dim(F))$; quindi $\text{rng}(f)$ è finito. Valgono poi le due equivalenze simmetriche "rng(f) = dim E" \Leftrightarrow "f è iniettiva" e "rng(f) = dim(F)" \Leftrightarrow "f è suriettiva". Poiché l'applicazione canonica J è iniettiva, $\text{rng}(J) = \dim(E) = \dim(E^{**})$, e quindi (facendo $F = E^{**}$) si conclude che J è anche suriettiva; cioè biiettiva, da cui l'isomorfismo in oggetto.

indeterminate χ_1, \dots, χ_a in E e b indeterminate ξ^1, \dots, ξ^b in E^* , lineare in ciascuna di esse presa separatamente; se poi $a \geq 1$ e $b = 0$ [$a = 0$ e $b \geq 1$], allora non ci sono indeterminate in E [in E^*], e quindi il funzionale $\tau_{(a,0)}$ [$\tau_{(0,b)}$], lineare in ciascuna delle χ_1, \dots, χ_a [ξ^1, \dots, ξ^b], è su E^a [su E^{*b}]; se infine $a = b = 0$, $\tau_{(0,0)}$ è semplicemente un numero reale. In analogia con quanto convenuto per una κ -forma, denoteremo i valori di questi funzionali con $\tau\chi_1 \dots \chi_a | \xi^1 \dots \xi^b$ (o se opportuno con $\tau(\chi_1, \dots, \chi_a | \xi^1, \dots, \xi^b)$), dove $|$ è un segno di separazione; e similmente, restando a $a + b > 0$, con $\tau\chi_1 \dots \chi_a$ se $b = 0$ e con $\tau\xi^1 \dots \xi^b$ se $a = 0$. Di conseguenza, se $a \geq 1$ e $b \geq 1$, posto $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} =: \tau_{i_1} \dots e_{i_a} | e^{j_1} \dots e^{j_b}$, $\chi_1 = \chi_1^i e_i, \dots, \chi_a = \chi_a^i e_i, \xi^1 = \xi^1_j e^j, \dots, \xi^b = \xi^b_j e^j$, avremo $\tau\chi_1 \dots \chi_a | \xi^1 \dots \xi^b = \chi_1^{i_1} \dots \chi_a^{i_a} \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_b}^b$ ⁵; e similmente, $\tau\chi_1 \dots \chi_a = \tau_{i_1 \dots i_a} \chi_1^{i_1} \dots \chi_a^{i_a}$ se $a \geq 1$ e $b = 0$, e $\tau\xi^1 \dots \xi^b = \tau^{j_1 \dots j_b} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_b}^b$ se $a = 0$ e $b \geq 1$. Infine scriveremo $\tau_{(0,0)} = \tau$, ove τ è il valore di $\tau_{(0,0)}$, se $a = b = 0$. Come già a proposito delle κ -forme della Sez. 3.1, i numeri reali $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ (e simili nei casi $a = 0$ e/o $b = 0$) si dicono **componenti di indici** $_{i_1 \dots i_a}$ (della sequenza bassa), e indici $^{j_1 \dots j_b}$ (della sequenza alta), della forma $\tau_{(a,b)}$.⁶

L'invarianza di $\tau\chi_1 \dots \chi_a | \xi^1 \dots \xi^b$ rispetto a cambiamenti della base del tipo $e'_i = L_i^j e_j$ (e quindi della base duale del tipo $e^j = L_k^j e'^k$), implica che

$$(1) \quad \tau'_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = {}^c L_{i_1}^{h_1} \dots {}^c L_{i_a}^{h_a} \tau_{h_1 \dots h_a}^{k_1 \dots k_b} L_{k_1}^{j_1} \dots L_{k_b}^{j_b}$$

ove $\tau'_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ sta per $\tau'_{i_1} \dots e'_{i_a} | e'^{j_1} \dots e'^{j_b}$. La struttura di questa legge di trasformazione (a volte cogrediente e b volte controgrediente), con le ovvie specializzazioni relative ai casi $b = 0$ e/o $a = 0$, è diversa da quella dell'analogia legge di trasformazione per componenti di κ -forme soltanto nel senso che in quella vi era *un'unica* sequenza ordinata di indici (con segno) in τ' e in τ , mentre nella (1) vi sono *due* distinte sequenze ordinate di indici (senza segno) negli stessi τ' e τ , la sequenza bassa e la sequenza alta. In virtù della (1), eventuali simmetrie/antisimmetrie di $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ rispetto a coppie di indici *della stessa sequenza*, alta o bassa che sia, sono base-indipendenti.

Sulle $\langle a,b \rangle$ -forme si istituisce senza difficoltà un'algebra analoga a quella a suo tempo introdotta per le κ -forme. Le operazioni lineari tra o su $\langle a,b \rangle$ -forme, e il prodotto algebrico ordinato (distributivo a sinistra e a destra rispetto alle operazioni lineari sui fattori) di una $\langle a,b \rangle$ -forma per una $\langle c,d \rangle$ -forma, si definiscono essenzialmente con le stesse procedure. Queste operazioni si possono introdurre in termini di componenti (in una data base e base duale associata). La **somma** delle $\langle a,b \rangle$ -forme di componenti $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ e di componenti $\sigma_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ è la $\langle a,b \rangle$ -forma di componenti

⁵ In realtà non v'è qui ragione di sfalsare verticalmente (come si è fatto a causa di limitazioni tipografiche) le due sequenze di indici di τ , e tanto meno di far precedere la sequenza degli i .

⁶ Si noterà che mentre le permutazioni degli indici con segno (delle componenti) di un κ -tensore sono ovviamente $\kappa!$, quelle degli indici senza segno (delle componenti) di un $\langle a,b \rangle$ -tensore sono $a!b!$. Se il numero totale degli indici è lo stesso nei due casi, cioè $\kappa = a + b$, risulta $\kappa! \geq a!b!$, ove il segno di uguaglianza vale sse $a = 0$ e/o $b = 0$.

(nella stessa base/base duale) $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} + \sigma_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ (si accerta immediatamente che queste sono componenti di una $\langle a, b \rangle$ -forma); e similmente si ragiona per il **prodotto** del reale c per l' $\langle a, b \rangle$ -forma $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ ($c \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ essendo banalmente componente di una $\langle a, b \rangle$ -forma). Venendo al **prodotto** (ordinato) dell' $\langle a, b \rangle$ -forma di componenti $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ per la $\langle c, d \rangle$ -forma di componenti $\sigma_{h_1 \dots h_c}^{k_1 \dots k_d}$, esso è la $\langle a+c, b+d \rangle$ -forma di componenti $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \sigma_{h_1 \dots h_c}^{k_1 \dots k_d}$ (il lettore potrà agevolmente accertare che queste sono effettivamente componenti di una $\langle a+c, b+d \rangle$ -forma).

Vi è invece una leggera diversità nella definizione dell'operazione (lineare, unaria) di $\langle 1 \leq p \leq a, 1 \leq q \leq b \rangle$ -contrazione di una $\langle a \geq 1, b \geq 1 \rangle$ -forma. Tale $\langle p, q \rangle$ -**contrazione** di $\tau_{(a,b)}$ consiste nel porvi e_i nella p -ma posizione della prima sequenza di indeterminate e e^i nella q -ma posizione della seconda sequenza sommando poi rispetto a i da 1 a n : il risultato è ovviamente una $\langle a-1, b-1 \rangle$ -forma. Procedendo per componenti, e partendo dalla $\langle a, b \rangle$ -forma di componenti $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$, si dovrà cioè prima prendere la componente $\tau_{i_1 \dots s \dots i_a}^{j_1 \dots t \dots j_b}$ in cui s ha rimpiazzato i_p e t ha rimpiazzato j_q , identificare s con t , e infine sommare rispetto a $s = t$ da 1 a n . Il risultato, si verifica, è appunto la componente di una $\langle a-1, b-1 \rangle$ -forma.

Va da sé che tutte le operazioni descritte sono base-indipendenti: operando cioè con componenti riferite ad una diversa base, si ottengono le corrispondenti componenti trasformate delle forme risultanti. È anche evidente che una eventuale simmetria/antisimmetria rispetto ad una coppia di indici *dello stesso tipo* (ciò presuppone $a \geq 2$ o $b \geq 2$) è base-indipendente, ed equivale alla simmetria/antisimmetria della forma rispetto alle corrispondenti indeterminate. Dotato della struttura lineare standard, l'insieme delle $\langle a, b \rangle$ -forme "basate su E " si denoterà $E^{(a,b)}$ (con $E^{(0,0)} = \mathbb{R}$); e similmente si denoterà con $\{E^{(a,b)}\}_{a=0,1,\dots; b=0,1,\dots}$ la famiglia degli spazi lineari $E^{(a,b)}$ sulla quale è istituita l'algebra descritta.

Venendo ai $\langle a, b \rangle$ -tensori "basati su E ", l'obiettivo è ancora quello di definirli in corrispondenza 1-1 (canonica) con le $\langle a, b \rangle$ -forme, e in modo che le algebre associate siano isomorfe. Per introdurre il generico spazio lineare $E^{(a,b)}$ dei $\langle a, b \rangle$ -tensori si procede in stretta e facilmente immaginabile analogia con la definizione del generico $E^{(k)}$: si tratta cioè di sostituire ovunque la cobase di E con la sua base duale. Come abbiamo già fatto presente, cade con ciò la possibilità di considerare *componenti di tipo diverso di "uno stesso" $\langle a, b \rangle$ -tensore*, perché per definizione le componenti di un tale tensore hanno comunque a indici di covarianza e b indici di controvarianza.

⁷ Una notazione più suggestiva (e più praticata) per questo spazio è E_a^b , o anche $\mathbf{T}_a^b(E)$ (ove \mathbf{T} sta per tensore), con i due indici allineati verticalmente. Lo stesso potrebbe dirsi per gli spazi $E^{(a,b)}$. Altri autori scrivono E_a^b in luogo di E_a^b (sempre con gli indici allineati verticalmente), ecc.

Diamo le prime tre definizioni, cioè quelle di $E^{(0,0)}$, di $E^{(0,1)}$ e di $E^{(1,0)}$. Un $\langle 0,0 \rangle$ -tensore basato su E è semplicemente uno specifico reale τ (e quindi $E^{(0,0)} = \mathbb{R}$); la corrispondenza canonica (\leftrightarrow) tra tale $\langle 0,0 \rangle$ -tensore e la associata $\langle 0,0 \rangle$ -forma ($\in E^{(0,0)}$) si stabilisce uguagliando i due reali τ e τ . Un $\langle 0,1 \rangle$ -tensore $\tau_{(0,1)}$ [Un $\langle 1,0 \rangle$ -tensore $\tau_{(1,0)}$] basato su E , di cui $\langle e_i \rangle$ è assunta essere una base, è un oggetto del tipo $\tau^i e_i$ [del tipo $\tau_j e^j$], dove τ^i [τ_j] sono n reali unicamente determinati, e la corrispondenza canonica (\leftrightarrow) con l'associata $\langle 0,1 \rangle$ -forma $\tau_{(0,1)}$ [$\langle 1,0 \rangle$ -forma $\tau_{(1,0)}$] è stabilita ponendo ancora $\tau^i = \tau^j$ [$\tau_j = \tau_j$], quindi $E^{(0,1)} = E$, [$E^{(1,0)} = E^*$]. In conclusione un $\langle 1,0 \rangle$ -tensore è un vettore di E , mentre un $\langle 0,1 \rangle$ -tensore è un vettore del duale E^* , o **covettore** di E .

Non riproporremo qui la discussione che porta alla definizione degli spazi lineari $E^{(a,b)}$ con $a + b > 1$, in quanto strettamente simile a quella già illustrata nella Sez. 3.1 per la definizione degli $E^{(\kappa)}$ con $\kappa > 1$. Ci limitiamo quindi ai cenni che seguono. Se $a = 0$ e $b \geq 2$, $\tau_{(0,b)}$ è per definizione un elemento di

$$(2_1) \quad E^{(b)} =: E \otimes \dots \otimes E \text{ (con } E \text{ ripetuto } b \text{ volte, da cui } \dim(E^{(b)}) = n^b);$$

e analogamente, se $a \geq 2$ e $b = 0$, $\tau_{(a,0)}$ è per definizione un elemento di

$$(2_2) \quad E^{*(a)} =: E^* \otimes \dots \otimes E^* \text{ (con } E^* \text{ ripetuto } a \text{ volte, da cui } \dim(E^{*(a)}) = n^a).$$

$\tau_{(0,b \geq 2)}$ [$\tau_{(a \geq 2, b)}$] si rappresenta dunque come $\tau^{j^1 \dots j^b} e_{j^1 \dots j^b}$ [$\tau_{i^1 \dots i^a} e^{i^1 \dots i^a}$], dove $\tau^{j^1 \dots j^b}$ [$\tau_{i^1 \dots i^a}$] sono n^b [n^a] reali unicamente determinati, e

$$(3_1) \quad e_{j^1 \dots j^b} =: e_{j^1} \otimes \dots \otimes e_{j^b},$$

$$(3_2) \quad e^{i^1 \dots i^a} =: e^{i^1} \otimes \dots \otimes e^{i^a}.$$

Le n^b -ple $\{e_{j^1 \dots j^b}\}_{j^1, \dots, j^b=1, \dots, n}$ e le n^a -ple $\{e^{i^1 \dots i^a}\}_{i^1, \dots, i^a=1, \dots, n}$ sono basi di $E^{(b)}$ e rispettivamente di $E^{*(a)}$ **canonicamente duali**. Se infine $a \geq 1$ e $b \geq 1$, $\tau_{(a,b)}$ è un elemento di $E^{(a,b)} =: E^{*(a)} \otimes E^{(b)}$ e si rappresenta come $\tau_{i^1 \dots i^a}^{j^1 \dots j^b} e^{i^1 \dots i^a} \otimes e_{j^1 \dots j^b}$, dove i $\tau_{i^1 \dots i^a}^{j^1 \dots j^b}$ sono $n^{(a+b)}$ reali unicamente determinati. In tutti i nuovi casi definiti (con $a + b > 1$), la corrispondenza canonica (\leftrightarrow) tra $\tau_{(a,b)}$ e $\tau_{(a,b)}$ si traduce al solito modo, eguagliando le componenti τ della forma alle corrispondenti componenti τ del tensore, e garantisce l'isomorfismo delle due algebre. Di norma, d'ora innanzi aboliremo quindi il corsivo per le componenti di una $\langle a,b \rangle$ -forma (e a maggior ragione di una κ -forma). In conclusione, avremo

$$(4) \quad \tau_{(a,b)} =: \tau_{i^1 \dots i^a}^{j^1 \dots j^b} e^{i^1 \dots i^a} \otimes e_{j^1 \dots j^b} \quad ^8$$

come l'espressione *intrinseca* dell' $\langle a,b \rangle$ -tensore in oggetto, che si considererà valida per $a \geq 0$ e $b \geq 0$ qualsiasi sotto le ovvie semplificazioni quando $a = 0$ e/o $b = 0$. Si noti ancora che la (4), che

⁸ In linea con analoghi precedenti commenti, notiamo che sarebbe ugualmente legittimo porre $E^{(a,b)} = E^{(b)} \otimes E^{*(a)}$, e quindi $\tau_{(a,b)} =: \tau^{j^1 \dots j^b} e_{i^1 \dots i^a} e_{j^1 \dots j^b} \otimes e^{i^1 \dots i^a}$, come del resto è altrettanto comune. Sappiamo però che $E^{*(a)} \otimes E^{(b)}$ e $E^{(b)} \otimes E^{*(a)}$ sono canonicamente isomorfi (Sez. 3.1, T₄), e quindi siamo liberi di scegliere una delle due possibilità una volta per tutte.

discende da una scelta convenzionale rispetto ad ordinamenti alternativi dei fattori in $e^{i1} \otimes \dots \otimes e^{ia} \otimes e_{j1} \dots \otimes e_{jb}$, equivale a che $(e^{i1} \otimes \dots \otimes e^{ia} \otimes e_{j1} \dots \otimes e_{jb})_{h1 \dots ha}^{k1 \dots kb}$ sia uguale a $\delta_{h1}^{i1} \dots \delta_{ha}^{ia} \delta_{j1}^{k1} \dots \delta_{jb}^{kb}$.

Possiamo così passare alla definizione di una $\langle a,b \rangle$ -forma $\tau_{\langle a,b \rangle}(\underline{p})$, o di un corrispondente $\langle a,b \rangle$ -tensore $\tau_{\langle a,b \rangle}(\underline{p})$, nel punto \underline{p} della varietà ${}^{r \geq 1}M^{n \geq 1} \equiv M$. Ciò è immediato: basta identificare lo spazio tangente $T_{\underline{p}} \equiv T_{\underline{p}}(M)$ con lo spazio lineare n -dim E fin qui considerato, e applicare le relative definizioni. Se in particolare usiamo per $\{e_i\}$ la base *canonica* di $T_{\underline{p}}$ nella carta $C = \langle U, \lambda \rangle$ in \underline{p} , cioè $\{{}^C \eta_{i|\underline{p}}\}$, e per $\{e^j\}$ la duale $\{{}^C \eta^j_{|\underline{p}}\}$ avremo la seguente rappresentazione (canonica) intrinseca del $\langle a,b \rangle$ -tensore in oggetto:

$$(5) \quad \tau_{\langle a,b \rangle}(\underline{p}) = \tau(\underline{p})({}^C \eta_{i1|\underline{p}}, \dots, {}^C \eta_{ia|\underline{p}}, {}^C \eta^j_{|\underline{p}}, \dots, {}^C \eta^j_{|\underline{p}}) {}^C \eta^{i1}_{|\underline{p}} \otimes \dots \otimes {}^C \eta^{ia}_{|\underline{p}} \otimes {}^C \eta_{j1|\underline{p}} \otimes \dots \otimes {}^C \eta_{jb|\underline{p}},$$

dove per maggior chiarezza abbiamo posto tra parentesi gli $a+b$ argomenti della associata $(a+b)$ -forma τ (scritta ormai tonda); ovvero, usando le componenti della forma nella carta C ,

$$(5bis) \quad \tau_{\langle a,b \rangle}(\underline{p}) = {}^C \tau_{i1 \dots ia}^{j1 \dots jb}(\underline{x} = \lambda(\underline{p})) {}^C \eta^{i1}_{|\underline{p}} \otimes \dots \otimes {}^C \eta^{ia}_{|\underline{p}} \otimes {}^C \eta_{j1|\underline{p}} \otimes \dots \otimes {}^C \eta_{jb|\underline{p}},$$

dove abbiamo scritto ${}^C \tau_{i1 \dots ia}^{j1 \dots jb}(\underline{p})$ come ${}^C \tau_{i1 \dots ia}^{j1 \dots jb}(\underline{x})$, per $\underline{x} = \lambda(\underline{p})$. Lo spazio lineare dei tensori $\tau_{\langle a,b \rangle}$ a 1° membro della (5) è dunque $T_{\underline{p}}^{\langle a,b \rangle} \equiv T_{\underline{p}}^{*(a)} \otimes T_{\underline{p}}^{(b)}$.

Le nozioni di **fibrato (bundle)** e di **campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale** (di, e rispettivamente su, M o un suo aperto), il primo da denotare con $B^{\langle a,b \rangle}(M) \equiv \cup_{\underline{p} \in M} T_{\underline{p}}^{\langle a,b \rangle}$, seguono per ovvia estensione dalle analoghe nozioni introdotte nella Sez. 4.2 in relazione ai vettori e ai covettori. In particolare un campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale è un'applicazione $\tau_{\langle a,b \rangle}: M \rightarrow B^{\langle a,b \rangle}(M)$ sotto la condizione che $\tau_{\langle a,b \rangle}(\underline{p}) \in T_{\underline{p}}^{\langle a,b \rangle}$, $\forall \underline{p} \in M$. I campi $\langle a,b \rangle$ -tensoriali si possono combinare linearmente "punto per punto", formando così uno spazio lineare; e similmente punto per punto essi si possono moltiplicare (tensorialmente) e contrarre. L'algebra sulla famiglia $\{T_{\underline{p}}^{\langle a,b \rangle}\}_{a=0, \dots; b=0, \dots}$ è così naturalmente importata sull'insieme dei corrispondenti campi tensoriali su M . Ancora, e per le stesse ragioni, un campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale (su ${}^r M^n$) con $a + b > 0$ ha CdC $0 \leq h \leq r-1$, il che presuppone $r \geq 1$ (e $0 \leq h \leq r$ per $a = b = 0$). Nell'analisi differenziale del 1° ordine che svilupperemo appresso per campi tensoriali su M , occorrerà richiedere $h \geq 1$, quindi $r \geq 1$ per i campi scalari e $r \geq 2$ negli altri casi. È importante porre in evidenza che esattamente le stesse disuguaglianze valgono per le varietà *immerse* delle Sez. 3.3 e 3.4, r essendo ivi la CdC delle funzioni $X = X(x)$ che descrivono la varietà.

A questo punto la legge di cogredienza/controgrredienza (1) si trascriverà come

$$(6) \quad {}^C \tau_{i1 \dots ia}^{j1 \dots jb}(\lambda'(\underline{p})) = \partial x^{j1} / \partial x^{k1}(\lambda(\underline{p})) \dots \partial x^{jb} / \partial x^{kb}(\lambda(\underline{p})) {}^C \tau_{h1 \dots ha}^{k1 \dots kb}(\lambda(\underline{p})) \cdot \partial x^{h1} / \partial x^{i1}(\lambda'(\underline{p})) \dots \partial x^{ha} / \partial x^{ia}(\lambda'(\underline{p})),$$

per un'arbitraria coppia C, C' di carte di C_p , e per ogni $\underline{p} \in U \cap U'$. La (6) si può universalizzare sulla coppia di carte $\{C, C'\}$, e poi sulla \underline{p} di M (il quantificatore sarà allora

$\forall(p \in M) \forall(C \in C_p, C' \in C_p)$. Congelandovi p in \underline{p} e universalizzando soltanto rispetto alla coppia di carte $\{C, C'\}$, si ottiene una versione della (6), che diremo (6bis), in tutto analoga alle (4.2.2, 3), (4.2.2, 26). Precisamente, facendovi $a = 0, b = 1$ [$a = 1, b = 0$] la (6bis) si riduce alla (4.2.2, 3) [alla (4.2.2, 26)] mediante alcune ovvie modifiche di notazione.

Una versione diversa ma equivalente della (6) si ottiene riscrivendola con x in luogo di $\lambda(p)$, x' in luogo di $\lambda'(p) \equiv \lambda' \circ \lambda^{-1}(x)$ e trattando x come variabile indipendente corrente in $\lambda(U \cap U')$. Il risultato si universalizza sulla x di $\lambda(U \cap U')$ e poi sulla coppia $\{C, C'\}$ di carte congiunte dell'atlante massimale $\max(\mathcal{A})$ di M . Detto \mathcal{G} l'insieme delle coppie di carte congiunte di $\max(\mathcal{A})$, il quantificatore è in questo caso $\forall(\{C, C'\} \in \mathcal{G}) \forall(x \in \lambda(U \cap U'))$. Alternativamente, si può usare x' come variabile indipendente corrente in $\lambda'(U \cap U')$ e universalizzare rispetto a x' , ecc.

La (6bis) si presta ad una definizione leggermente diversa di $\langle a, b \rangle$ -tensore in \underline{p} (metodo delle carte "esteso"). Scrivendo I_n per l'insieme d'indici variabili su $\{1, \dots, n\}$, e sottintendendo per brevità \underline{p} ovunque occorra, secondo questa definizione un $\langle a, b \rangle$ -tensore (in \underline{p}) è un'applicazione $\tau^+_{\langle a, b \rangle}: I_n^a \times I_n^b \times C \rightarrow R$, di cui denotiamo con ${}^C \tau^+_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b}$ il valore in $i_1 \in I_n, \dots, j_b \in I_n$ e $C \in C$, sotto la condizione che i suoi valori soddisfino la (6bis) (con τ^+ al posto di τ ed ignorandovi \underline{p} ove appaia) per ogni coppia di carte C, C' di C . Viceversa, se $\{z_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b}\}_{i_1, \dots, i_a, j_1, \dots, j_b}$ è un arbitrario sistema di $n^{(a+b)}$ reali ad $a + b$ indici correnti in I_n ⁹, allora esiste un (unico) $\langle a, b \rangle$ -tensore $\tau^+_{\langle a, b \rangle}$ definito come sopra, per il quale, per una carta $C = (U, \lambda) \in C$ assegnata ad arbitrio, ${}^C \tau^+_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b} = z_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b}$ per ogni i_1, \dots, j_b in I_n .¹⁰ La ${}^C \tau^+_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b} = {}^C \tau_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b}$ per una singola carta C stabilisce allora l'uguaglianza dei "valori" dei tensori delle due definizioni per qualunque altra carta di C . In conclusione gli $\langle a, b \rangle$ -tensori in $\underline{p} \in {}^{\mathbb{R}^1} M^n \equiv M$ sono stati definiti in due modi equivalenti: come elementi di $T_{\underline{p}}^{*(a)} \otimes T_{\underline{p}}^{(b)}$ in naturale corrispondenza (canonica) con le $\langle a, b \rangle$ -forme basate su $T_{\underline{p}}$, e come funzioni su $I_n^a \times I_n^b \times C_p$ con valori soggetti alla (6bis). Mutatis mutandis, si potrà similmente definire un campo $\langle a, b \rangle$ -tensoriale su M (o su un suo aperto). Queste definizioni alternative ma equivalenti di tensore in \underline{p} e di campo tensoriale su M si incontrano comunemente nella trattatistica.

¹¹ Nel seguito, continueremo a riferirci alla definizione precedente il presente paragrafo.

⁹ Questi sistemi di reali sono stati detti "matrici a κ (che corrisponde all'attuale $a + b$) indici" nella Sez 3.1. Di fatto, abbiamo una $n \times n$ -matrice (reale) se $a = b = 1$, una n -colonna [n -riga] per $a = 0, b = 1$ [$a = 1, b = 0$], .. e via dicendo. Qualcuno chiama le matrici ad un numero arbitrario di indici "matrici generalizzate" (una matrice standard non è altro, allora, che una matrice generalizzata a 2 indici). Banalmente, convenendo di ordinare in qualche modo gli elementi di una matrice generalizzata, la si può sempre porre in corrispondenza 1-1 con una $n^{(\kappa=a+b)}$ -pla ordinata di quegli elementi.

¹⁰ Per la giustificazione di questo asserto, basta estendere il ragionamento costruttivo di cui alla S.sez. 4.2.2 nel caso vettoriale.

¹¹ Ne citiamo un esempio, tradotto nelle nostre notazioni: «Un insieme di $n^{(a+b)}$ quantità $\tau_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b}$ è detto costituire le componenti di un tensore di tipo $\langle a, b \rangle$ in un punto di una varietà differenziabile se, sotto una trasformazione di coordinate $x' = x'(x)$, quelle quantità si trasformano secondo la legge: $\tau'_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b} = (\partial x'^{j_1} / \partial x^{k_1}) \dots$

Concludiamo questa sottosezione segnalando un problema di notazione. Nella (6), ${}^C\tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(\lambda(p))$ sta evidentemente per ${}^C\tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(p)$. Ora, a differenza di quanto accade per un campo scalare ($a=b=0$), la considerazione della *componente* di un campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale con $a+b > 0$ implica necessariamente il riferimento ad una carta, e quindi la notazione ${}^C\tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(p)$, ove $p = \lambda^{-1}(x)$ e λ è la mappa di C , è parzialmente ridondante. Se si rinuncia ad indicare il dominio U di C , basterebbe quindi scrivere $\tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(\lambda^{-1}(x))$; e se inoltre si conviene di continuare a denotare questa funzione di x come $\tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(x)$, tanto vale abolire i soprascritti C e ${}^\circ$ in ${}^C\tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(\lambda(p))$, scrivendo direttamente x in luogo dell'argomento $\lambda(p)$. D'altra parte $\lambda'(p) = \lambda'(\lambda^{-1}(x)) \equiv x'(x)$, e nello stesso ordine di idee il 1° membro della (6) si può scrivere $\tau'_{i_1\dots i_a}{}^{j_1\dots j_b}(x')$, dove l'apice su τ ricorda che ci si riferisce alla carta C' . In definitiva la (6) diventa

$$(6') \quad \tau'_{i_1\dots i_a}{}^{j_1\dots j_b}(x') = \partial x'^{j_1}/\partial x^{k_1}(x) \dots \partial x'^{j_b}/\partial x^{k_b}(x) \tau_{h_1\dots h_a}^{k_1\dots k_b}(x) \partial x^{h_1}/\partial x'^{i_1}(x') \dots \partial x^{h_a}/\partial x'^{i_a}(x'),$$

dove si sottintende che $x' = x'(x)$ oppure che $x = \lambda(\lambda'^{-1}(x')) \equiv x(x')$. Questa notazione semplificata della (6) è di uso comune; in essa, inoltre, spesso gli argomenti x e x' sono sottintesi. Infine molti autori trasferiscono l'apice sul τ nel 1° membro sui suoi indici, scrivendolo $\tau_{i_1' \dots i_a'}{}^{j_1' \dots j_b'}(x')$. In ogni caso, la notazione estesa usata nella (6) e simili è completa e corretta, e ad essa si farà talvolta ricorso nel seguito.

4.3.2) CAMPI TENSORIALI IN VARIETÀ A CONNESSIONE AFFINE

Il differenziale (o derivato intrinseco o derivato tout court ¹²) di un campo scalare $\tau_{(0,0)}(p) \equiv \tau(p)$ dato su ${}^rM^n \equiv M$ è già stato introdotto: supposto tale campo di CdC $1 \leq h \leq r$ ($r \geq 1$), e facendo uso delle basi canoniche associate alla carta $C = (U, \lambda)$ esso si esprime come

$$(1) \quad d_p \tau = (\partial \tau^\circ / \partial x^j)_x d_p x^j$$

(cfr. la (4.2.2, 23bis)), dove è al solito $\tau^\circ(x) =: \tau(\lambda^{-1}(x))$, ed è dunque un covettore di componenti covarianti $(\partial \tau^\circ / \partial x^d)_x$ in quel riferimento. Come sappiamo, d_p è un operatore lineare-leibniziano sull'anello dei campi scalari, e genera un campo covettoriale con componenti di CdC $h-1 \leq r-1$.

... $(\partial x'^{j_b}/\partial x^{k_b})(\partial x^{h_1}/\partial x'^{i_1}) \dots (\partial x^{h_a}/\partial x'^{i_a}) \tau_{h_1 \dots h_a}^{k_1 \dots k_b}$ ». (In questo caso, le funzioni $x' = x'(x)$ e quindi la varietà stessa erano state supposte di CdC $h = \infty$.)

¹² Esiste a ragione una certa promiscuità nell'uso dei termini "differenziale" e "derivato" di un campo tensoriale, e in particolare di un campo scalare (vedi la sottostante (1)), su una varietà astratta. Da una parte $d_p \tau$ ha infatti la struttura di un differenziale totale, o "forma pfaffiana"; dall'altra $d_p \tau$ è anche la rappresentazione intrinseca o "assoluta" (\equiv carta-indipendente) del vettore gradiente – o appunto derivato – dello scalare τ . Al di là del loro valore convenzionale, le definizioni che seguono in questa sottosezione non sono nulla di più che una proposta.

Venendo al **derivato di un campo vettoriale** $V = V(p) \in T_p$ di CdC $1 \leq h \leq r-1$ ($r \geq 2$), si incontra subito una difficoltà di principio ove ci si proponga di collegarsi in qualche modo alla (3.4.1, 11): su ${}^{r \geq 2}M^n \equiv M$ non è infatti definito un campo di simboli di Christoffel (cfr. la (3.3.2, 7)), e non lo sarebbe nemmeno invocando le (3.3.2, 12 ter), perché M è sprovvista di un (campo di) tensore fondamentale. Seguendo Levi-Civita, l'impasse si aggira supponendo che su M sia assegnato un campo di n^3 coefficienti a tre indici, di CdC $r-2$, diciamo $\Lambda_{i'k}^j = \Lambda_{i'k}^j(p)$, tali che i loro valori nella carta C in p , ${}^C\Lambda_{i'k}^j(x) =: \Lambda_{i'k}^j(\lambda^{-1}(x))$ si trasformino secondo la legge

$$(2_1) \quad {}^C\Lambda_{i'k}^j(x') = (\partial x'^j / \partial x^q)_x {}^C\Lambda_{i's}^q(x) (\partial x^t / \partial x'^i)_{x'} (\partial x^s / \partial x'^k)_{x'} + (\partial^2 x^t / \partial x'^i \partial x'^k)_{x'} (\partial x'^j / \partial x^t)_x$$

passando dalla carta C alla carta congiunta C' . A meno di dettagli di notazione, queste (2₁) coincidono con le (3.3.2, 16₁), ponendovi ${}^C\Lambda$ in luogo di Γ ; e come le (3.3.2, 16₁) possono essere scritte nella forma equivalente (3.3.2, 16₂), per le stesse ragioni le (2₁) equivalgono alle

$$2_2) \quad {}^C\Lambda_{i's}^j(x') (\partial x'^t / \partial x^i)_x (\partial x'^s / \partial x^k)_x = (\partial x'^j / \partial x^t) {}^C\Lambda_{i'k}^t(x) - (\partial^2 x'^j / \partial x^i \partial x^k)_x,^{13}$$

in cui compaiono soltanto derivate delle x' rispetto alle x . La CdC $r-2$ assunta per i coefficienti ${}^C\Lambda$ è consistente con le (2₁, 2₂). Diversamente dai simboli di Christoffel di 2^a specie $\Gamma_{i'k}^j$ (Chr2), non è detto tuttavia che i coefficienti ${}^C\Lambda_{i'k}^j$ (che alla luce delle (2) *non* sono componenti di un $\langle 2,1 \rangle$ -tensore) siano simmetrici rispetto agli indici inferiori i, k . Il sistema delle n^3 funzioni reali $\Lambda_{i'k}^j(p)$ è detto un **campo di connessioni affini** nella carta C , dato su M entro le richieste condizioni. Una varietà sulla quale è dato un campo di connessioni affini si dice **a connessione affine** (o **affinemente connessa**). Infine l'attributo "affine", riferito a una connessione, è spesso sottinteso.

Nel seguito, di norma alleggeriremo la fraseologia dicendo " $\langle a,b \rangle$ -tensore" per "campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale" (ma anche, più oltre, $\langle a,b \rangle$ -campo). Similmente, diremo "connessione (affine)" per "campo di connessioni (affini)", .. e così via. Secondo le (2), le ${}^C\Lambda$ sono trasformate *affini* delle ${}^C\Lambda$ (ed è questa la ragione per cui le Λ si dicono connessioni "affini"); quindi la *differenza* di due connessioni affini date su ${}^rM^n$ (in una carta C) è (componente di) un $\langle 2,1 \rangle$ -tensore in quella carta, diciamo ${}^C\mu_{i'k}^j$. Viceversa, un sistema di funzioni a tre indici $*\Lambda_{i'k}^j$ uguale alla somma ${}^C\Lambda_{i'k}^j + {}^C\mu_{i'k}^j$, ove ${}^C\Lambda_{i'k}^j$ è una connessione affine e ${}^C\mu_{i'k}^j$ è (componente di) un $\langle 2,1 \rangle$ -tensore di CdC $r-2$, è a sua volta una connessione affine nella stessa carta C .

Gli oggetti alternati ${}^C\sigma_{i'k}^j =: 2{}^C\Lambda_{[i'k]}^j$ (ove $2(\cdot)_{[ik]} = (\cdot)_{ik} - (\cdot)_{ki}$) sono componenti, nella carta C , di un $\langle 2,1 \rangle$ -tensore antisimmetrico rispetto agli indici inferiori, diciamo $\sigma_{\langle 2,1 \rangle}$, che si definisce come (campo del) $\langle 2,1 \rangle$ -**tensore di torsione** (della connessione). Ovviamente il tensore di torsione è nullo se la relativa connessione è simmetrica.

¹³ Si noti che il termine nelle derivate 2^e nelle (2) si annulla identicamente nel caso di trasformazioni $x \mapsto x'$ lineari o affini.

Sia adesso $V = V(p)$ il campo vettoriale (o $\langle 0,1 \rangle$ -tensoriale) di componenti ${}^C V^i(x)$ e di CdC $1 \leq h \leq r-1$ ($r \geq 2$) dianzi considerato, soggette alla (4.3.1, 1) secondo la

$$(3) \quad {}^C V^j(x') = (\partial x'^j / \partial x^i)_x {}^C V^i(x)$$

(cfr. la 4.2.2, 3). Derivando quest'ultima rispetto a x'^t , e trascurando ormai di evidenziare le x e le x' , otteniamo

$$(4) \quad \partial {}^C V^j / \partial x'^t = \partial x'^j / \partial x^i \partial {}^C V^i / \partial x^k \partial x^k / \partial x'^t + \partial^2 x'^j / \partial x^i \partial x^k \partial x^k / \partial x'^t {}^C V^i.$$

La presenza del 2° termine a 2° membro della (4) prova il carattere non tensoriale delle derivate parziali delle componenti di V . Eliminando le derivate 2° nella (4) mediante la (2), alcuni passaggi portano alla

$$(5) \quad (\partial {}^C V^j / \partial x'^q + {}^C \Lambda_t^j {}^C V^t) = \partial x'^j / \partial x^k (\partial {}^C V^k / \partial x^d + {}^C \Lambda_t^k {}^C V^t) \partial x^d / \partial x'^q,$$

la quale prova che i contenuti delle () sono componenti di un $\langle 1,1 \rangle$ -tensore (nella carta C' al 1° membro e nella carta C al 2° membro). Con riferimento ad una carta C corrente, porremo

$$(6) \quad {}^C (V^k /_d) =: \partial {}^C V^k / \partial x^d + {}^C \Lambda_t^k {}^C V^t.$$

Usando le basi canoniche in C , l'espressione intrinseca del sopradetto $\langle 1,1 \rangle$ -tensore ($\in T_p^* \otimes T_p$) è dunque ${}^C (V^k /_d)(x) d_p x^d \otimes \partial_p / \partial x^k$; pensato come campo $\langle 1,1 \rangle$ -tensoriale (con CdC $h - 1 \leq r - 2$ ¹⁴), esso si dice **derivato del vettore** $V = V(p)$, e può essere denotato $\delta V(p)$. Ovviamente, sostituendo a V una combinazione lineare (punto per punto) di campi vettoriali, il derivato della combinazione uguaglia la combinazione dei derivati: δ è quindi un operatore lineare sullo spazio lineare dei campi vettoriali di CdC h ($1 \leq h \leq r - 1$).

Fondata com'è sulle (2), la procedura seguita per definire ${}^C (V^k /_d)$ appare alquanto formale; ma diventa più intuitiva ragionando come segue. Si richieda (i): che la nuova derivata ${}^C (V^k /_d)$ che ci proponiamo di definire sia la componente k_d (in C) di un $\langle 1,1 \rangle$ -tensore, e (ii): che il saldo di $\partial {}^C V^k / \partial x^d$ a ${}^C (V^k /_d)$ sia un'espressione *lineare* nelle componenti di ${}^C V$, cioè abbia la struttura ${}^C \beta_t^k {}^C V^t$, dove ${}^C \beta_t^k = {}^C \beta_t^k(x)$ sono n^3 funzioni reali a tre indici, carta-dipendenti, di CdC $r - 2$. Si prova allora facilmente che le richieste (i), (ii) sono soddisfatte sse i ${}^C \beta_t^k(x)$ si trasformano come connessioni affini al passaggio da C a C' . In conclusione la struttura della ${}^C (V^k /_d)$ è unicamente fissata dalle richieste (i) e (ii), che sono entrambe "intuitivamente" accettabili. Naturalmente le (2) lasciano ampi margini di libertà all'assegnazione di una connessione affine su M .

È a questo punto quasi immediato definire analogamente il derivato di un covettore $K = K(p)$ di CdC h con $1 \leq h \leq r - 1$: basta partire dalla

$$(7) \quad {}^C K_k(x') = {}^C K_i(x) (\partial x^i / \partial x'^k)_{x'}$$

¹⁴ Questo è ovvio per la derivata parziale; quanto al termine in Λ , esso ha classe di continuità pari a $\min(r-2, h)$, che è $\geq h-1$ per ogni $r \geq 2$ e ogni h con $1 \leq h \leq r-1$, da cui immediatamente la tesi. Ciò era già stato osservato in Sez. 3.4 con riferimento ad una varietà pseudoriemanniana immersa.

invece che dalla (3), e procedere poi sulla precedente falsariga per eliminare le derivate 2° $\partial^2 x^i / \partial x^k \partial x^s$ mediante le (2₁). Si ottiene così:

$$(8) \quad {}^C(K_{k/d}) = \partial^C K_k / \partial x^d - {}^C \Lambda_k^t K_t;$$

l'espressione intrinseca del $\langle 2,0 \rangle$ -tensore associato, utilizzando la base duale canonica in C , è dunque ${}^C(K_{k/d})(x) d_p x^k \otimes d_p x^d$. Pensato come campo (di CdC $h-1$), esso è il **derivato del covettore** $K(p)$, e può essere denotato come $\delta K(p)$. Ancora, δ è un operatore lineare sullo spazio lineare dei campi covettoriali di CdC h . Si noti che δ è un operatore *diverso* a seconda che agisca su un vettore o su un covettore.

Se una formula non coinvolge componenti tensoriali in carte congiunte diverse, come è il caso ad es. delle successive (9) o (10), il soprascritto sinistro C potrà essere sottinteso. Consideriamo adesso l'invariante $V^i K_i$, e prendiamone la derivata $\partial / \partial x^d$. Abbiamo

$$(9) \quad \partial(V^i K_i) / \partial x^d = \partial V^i / \partial x^d K_i + V^i \partial K_i / \partial x^d = V^i /_d K_i + V^i K_{i/d},$$

perché i due termini in Λ si elidono. Se conveniamo di scrivere $\partial / \partial x^d$ come $/_d$ quando opera su un invariante, la (9) mostra che la regola di Leibniz si applica alla derivazione $/_d$ del prodotto interno, appunto invariante, $V^i K_i$.

I risultati precedenti si estendono senza difficoltà alla definizione delle componenti del **derivato di un $\langle a,b \rangle$ -tensore** di CdC $1 \leq h \leq r-1$ ($r \geq 2$). Precisamente, esse sono

$$(10) \quad \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} /_d = \partial \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} / \partial x^d - \sum_{s=1}^a \Lambda_{i_s d}^t \tau_{i_1 \dots i_{(s-1)} t i_{(s+1)} \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} + \\ + \sum_{s=1}^b \Lambda_{t d}^{j_s} \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_{(s-1)} t j_{(s+1)} \dots j_b},$$

e hanno CdC $1 \leq h \leq r$ ($r \geq 1$). Nelle (10), si sottintende che se $a = 0$ [$b = 0$], la prima [la seconda] sommatoria è omessa, e che se $a = b = 0$, sono omesse entrambe le sommatorie. Con gli opportuni aggiustamenti, la (10) coincide con la (3.3.2, 9) (dove peraltro gli indici sono con segno). L'espressione del corrispondente $\langle a+1, b \rangle$ -tensore $\delta \tau_{\langle a,b \rangle}(p)$, derivato del tensore $\tau_{\langle a,b \rangle}(p)$, è ovvia.

Sulla base delle (10) si constata che:

- (a) a 1° membro ci sono le componenti di un $\langle a+1, b \rangle$ -tensore;
- (b) la $/_d$ di una combinazione lineare di componenti di $\langle a, b \rangle$ -tensori è uguale alla stessa combinazione lineare delle $/_d$ delle componenti, cioè $/_d$ è una operazione lineare; ovvero, se A e B sono costanti reali,
$$(A \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} + B \upsilon_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}) /_d = A \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} /_d + B \upsilon_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} /_d;$$
- (c) quando opera su componenti tensoriali del tipo $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \upsilon_{h_1 \dots h_c}^{k_1 \dots k_d}$, $/_d$ è leibniziano:
$$(\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \upsilon_{h_1 \dots h_c}^{k_1 \dots k_d}) /_d = \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} /_d \upsilon_{h_1 \dots h_c}^{k_1 \dots k_d} + \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} \upsilon_{h_1 \dots h_c}^{k_1 \dots k_d} /_d;$$
- (d) agendo sulle componenti di un $\langle a, b \rangle$ -tensore, l'operatore $/_d$ e quello di una $\langle 1 \leq p \leq a, 1 \leq q \leq b \rangle$ -contrazione commutano.

Si noti che ∂_d , interpretato come operatore (lineare) agente sulle componenti di un $\langle a,b \rangle$ -tensore, cambia in funzione della coppia ordinata $\langle a,b \rangle$. Le corrispondenti proprietà dei derivati sono ovvie: ad esempio, il derivato di un $\langle a,b \rangle$ -tensore è un $\langle a+1,b \rangle$ -tensore, ...e così via. Le verifiche non comportano difficoltà.

Se per brevità denotiamo con $(\dots)_{i_1 \dots i_a d}^{j_1 \dots j_b}$ il contributo delle due sommatorie a 2° membro della (10), moltiplicando la (10) stessa per dx^d e contraendo rispetto all'indice d , possiamo scrivere il risultato nella forma

$$(11) \quad D\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} = d\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b} + (\dots)_{i_1 \dots i_a d}^{j_1 \dots j_b} dx^d,$$

ove $D(\cdot)$ sta per $(\cdot)_{/d} dx^d$. L'oggetto a 1° membro della (11) è la componente $\tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$ (nella carta corrente) di un $\langle a,b \rangle$ -tensore, e si dice **differenziale assoluto** di quella componente (laddove il 1° termine a 2° membro ne è chiaramente il differenziale ordinario); ma non sono separatamente componenti di $\langle a,b \rangle$ -tensori, in generale, i due termini a 2° membro della (11) se $a + b > 0$. Se invece $a + b = 0$, i due differenziali D e d si equivalgono perché in tal caso manca il 2° termine, e $D\tau = d\tau$.

4.3.3) CAMPI TENSORIALI RELATIVI E CAMPI PSEUDOTENSORIALI

Concludiamo questa sezione introducendo le importanti (e già anticipate, v. S.sez. 3.3.2) nozioni di campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale (o $\langle a,b \rangle$ -tensore) relativo di peso w (w come “weight”) e di campo $\langle a,b \rangle$ -pseudotensoriale (o $\langle a,b \rangle$ -pseudotensore); nonché del loro ibrido campo $\langle a,b \rangle$ -pseudotensoriale relativo di peso w . Ripartiamo dalla (4.3.1, 1), che dà la legge di trasformazione delle componenti di un campo $\langle a,b \rangle$ -tensoriale standard e *modifichiamola* premettendo al suo 2° membro il fattore J^w , dove w è un intero relativo e $J =: \det\{\partial(x)/\partial(x')\}_{x'} \neq 0$ è lo jacobiano della trasformazione da x' (carta C') a x (carta C). Come la (4.3.1, 1) dà la legge di trasformazione delle componenti di un $\langle a,b \rangle$ -tensore standard (o tensore “assoluto” \equiv tensore relativo di peso $w = 0$), similmente per $w \neq 0$ la legge di trasformazione appena introdotta è quella tra le componenti di un $\langle a,b \rangle$ -campo tensoriale relativo di peso w . La specializzazione di questo concetto al semplice caso in cui a J si sostituisce $\det\{L\}$, L essendo la matrice che trasforma la base $\{e_i\}$ nella $\{e'_i\}$, è ovvia, e porta ad un $\langle a,b \rangle$ -tensore relativo di peso w .

In particolare uno scalare relativo di peso w , diciamo f , ha una legge di trasformazione

$$(1) \quad {}^{C'}f(x') = J^w(x') {}^Cf(x),$$

ove x e x' sono legate al solito modo al passaggio da una carta all'altra. Ad esempio il determinante di una matrice i cui elementi sono le componenti di un $\langle 2,0 \rangle$ -tensore [di un $\langle 0,2 \rangle$ -tensore] è uno scalare relativo di peso $w = 2$ [$w = -2$]. L'integrale (su un certo dominio di \mathbb{R}^m) $\int f(x) \Pi_h dx^h$ di uno scalare (assoluto) f non è invariante¹⁵, ma lo è invece, se $J > 0$, quello di uno scalare relativo di peso $w = 1$. Infatti $\Pi_h dx'^h$ (assoluto) = $\Pi_h dx^h$ (assoluto) $|J^{-1}|$. Gli $\langle a,b \rangle$ -tensori relativi di peso $w = 1$ [$w = -1$] si dicono **densità** [**capacità**] $\langle a,b \rangle$ -**tensoriali**.

L'algebra dei tensori relativi si ottiene per immediata estensione di quella dei tensori assoluti. E cioè: (i): le operazioni lineari sono definite in modo ovvio su tensori dello stesso tipo e peso; (ii): il prodotto tensoriale di un $\langle a_1, b_1 \rangle$ -tensore di peso w_1 per un $\langle a_2, b_2 \rangle$ -tensore di peso w_2 è un $\langle a_1+a_2, b_1+b_2 \rangle$ -tensore di peso w_1+w_2 ; (iii): la contrazione di un $\langle a \geq 1, b \geq 1 \rangle$ -tensore di peso w è un $\langle a-1, b-1 \rangle$ -tensore dello stesso peso.

Al derivato di un $\langle a,b \rangle$ -campo (tensoriale) di peso $w \neq 0$ si richiede di essere un $\langle a+1, b \rangle$ -campo dello stesso peso. Questa richiesta è soddisfatta se la (4.3.2, 10) viene generalizzata aggiungendo al suo 2° membro un termine $-w \Lambda_d^p \tau_{i_1 \dots i_a}^{j_1 \dots j_b}$, assente nel caso di $\langle a,b \rangle$ -campo assoluto. Nel caso particolare di uno scalare relativo di peso w , diciamo f , abbiamo quindi

$$(2) \quad f_{/d} = \partial f / \partial x^d - w \Lambda_d^p f,$$

che sono componenti covarianti di un vettore relativo di peso w .

Ricordiamo che se la connessione è quella generata dal tensore $\gamma_{\langle 2,0 \rangle}$ simmetrico non singolare, risulta (cfr. la (3.3.2, 18)) $\Lambda_d^p \equiv \Gamma_d^p = (2\gamma)^{-1} \partial \gamma / \partial x^d$, con $\gamma =: \det \{\gamma_{ik}\} \neq 0$. Poiché γ è uno scalare relativo di peso 2, risulta allora, nella connessione generata da $\gamma_{\langle 2,0 \rangle}$,

$$(3) \quad \gamma_{/d} = \partial \gamma / \partial x^d - 2\gamma(2\gamma)^{-1} \partial \gamma / \partial x^d \equiv 0.$$

Un altro punto di interesse riguarda il $\langle 1,1 \rangle$ -contratto del derivato di un vettore V relativo di peso w , $V^j_{/j}$, uno scalare relativo dello stesso peso che si dice **divergenza** del campo di partenza.

Con riferimento alla generica connessione affine $\Lambda_i^j_k$, si ha:

$$(4) \quad V^j_{/d} = \partial V^j / \partial x^d + V^p \Lambda_p^j_d - w V^j \Lambda_d^p,$$

da cui si ricava per contrazione la divergenza di V (scalare relativo di peso w) secondo la

$$(5) \quad V^j_{/j} = \partial V^j / \partial x^j + (1-w) V^j \Lambda_j^p_p.$$

Se in particolare $w = 1$ (cioè se V è una densità vettoriale),

$$(6) \quad V^j_{/j} = \partial V^j / \partial x^j.$$

Se invece $w = 0$ (campo vettoriale assoluto), e la connessione è quella generata dal tensore $\gamma_{\langle 2,0 \rangle}$, risulta:

¹⁵ Nella precedente scrittura, Π è segno di produttoria (con i che va da 1 a $\dim(M)$), e i dx^i hanno il ruolo della notazione standard in un integrale multiplo.

$$(7) \quad V^j_{;j} = \partial V^j / \partial x^j + (2\gamma)^{-1} V^j \partial \gamma / \partial x^j,$$

ovvero, se $\gamma > 0$,

$$(8) \quad V^j_{;j} = 1/\sqrt{\gamma} \partial(V^j \sqrt{\gamma}) / \partial x^j.$$

Questa è una importante relazione della geometria differenziale delle varietà (riemanniane) immerse in uno spazio *euclideo* (per le quali è appunto $\gamma > 0$). Si noti che la (8) vale anche per varietà pseudoriemanniane con $\gamma < 0$ se vi si interpreta $\sqrt{\gamma}$ come $\sqrt{-\gamma}$ (basta porre $-\gamma$ in luogo di γ nella (7), il che non la altera). Ancora un'altra nozione da menzionare è quella di $\langle a, b \rangle$ -campo pseudotensoriale. Sempre rifacendoci alla (4.3.1, 1), *modifichiamola* premettendo al suo 2° membro il fattore $\text{sign}J$. L'oggetto che segue questa legge di trasformazione si dice $\langle a, b \rangle$ -**campo pseudotensoriale** (o in breve $\langle a, b \rangle$ -pseudotensore).

Combinazioni lineari di $\langle a, b \rangle$ -pseudotensori sono $\langle a, b \rangle$ -pseudotensori. Il prodotto di un pseudotensore per un tensore [per un pseudotensore] è un pseudotensore [un tensore]: vale cioè una delle tante accezioni della regola dei segni. Il derivato di un pseudotensore non pone problemi, perché $\text{sign}J$ è la costante 1 aut -1 ; quindi il derivato di un $\langle a, b \rangle$ -pseudotensore è un $\langle a+1, b \rangle$ -pseudotensore. Spesso è utile considerare oggetti ibridi le cui componenti si trasformano secondo la (4.3.2, 10) modificata per un fattore $J^w \text{sign}J$ a 2° membro, che dunque si comportano come prodotti tra tensori relativi di peso w e pseudotensori. Questi oggetti si dicono **pseudotensori relativi di peso w** , e si trasformano pertanto secondo la legge

$$(9) \quad \sigma_{i_1' \dots i_a' j_1' \dots j_b'} = J^w \text{sign}J \partial x^{i_1} / \partial x^{i_1'} \dots \partial x^{i_a} / \partial x^{i_a'} \sigma_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b} \partial x^{j_1'} / \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_b'} / \partial x^{j_b}.$$

(Nel 1° membro, $\sigma_{i_1' \dots i_a' j_1' \dots j_b'}$ sta per $\sigma'_{i_1 \dots i_a j_1 \dots j_b}$, secondo quanto osservato alla fine della S.sez. 4.3.1.) La (9) è la legge di trasformazione più generale che di norma si considera nel calcolo tensoriale su varietà.

Parecchi autori sostituiscono alla nozione di tensore relativo di peso w quella di tensore *|relativo|* dello stesso peso, definendolo come governato da una legge di trasformazione con fattore $|J|^w$ (anziché J^w come nel caso dei tensori relativi) a 2° membro.¹⁶ Il calcolo tensoriale che deriva da questa alternativa equivale tuttavia al precedente, perché per qualunque reale $\rho \neq 0$ e qualunque intero relativo k , $\rho^k = |\rho|^k \text{sign}\rho$ (quindi $|\rho|^k = \rho^k \text{sign}\rho$) se k è dispari, e $\rho^k = |\rho|^k$ se k è pari. In conclusione se w è dispari un $\langle a, b \rangle$ -tensore *|relativo|* di peso w e un $\langle a, b \rangle$ -pseudotensore dello stesso peso si trasformano con la stessa legge; e similmente con la stessa legge si trasformano un $\langle a, b \rangle$ -tensore relativo di peso w e un $\langle a, b \rangle$ -pseudotensore *|relativo|* dello stesso peso. Se poi w è pari, le qualifiche “relativo” e “*|relativo|*” si equivalgono.

¹⁶ È stato proposto di dire “pari-relativi” i tensori qui definiti come *|relativi|*, e “dispari-relativi” quelli qui definiti come relativi.

4.4) ALGEBRE DELLE FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

4.4.1) INTRODUZIONE

Nella Sez. 3.1 abbiamo introdotto la fondamentale nozione di $(\kappa \geq 0)$ -forma, e del corrispondente κ -tensore, su uno spazio lineare pseudoeuclideo di dimensione finita $n \geq 1$. In essa abbiamo anche illustrato l'idea della (p,q) -simmetria/antisimmetria, e in particolare della simmetria/antisimmetria completa, della κ -forma o κ -tensore in oggetto. Questa idea non ha tuttavia trovato sviluppi significativi per le $\langle a,b \rangle$ -forme sullo spazio lineare n -dim generico della Sez. 4.3, in quanto quelle simmetrie/antisimmetrie avrebbero avuto senso, allora, soltanto se riferite a indeterminate dello stesso tipo χ o ξ . Ciò è naturale, in quanto le χ e le ξ appartengono per definizione a spazi lineari duali, cioè a spazi *diversi* seppur di uguale dimensione, e non è quindi concepibile scambiarle tra loro. Per questa ragione l'idea di una simmetria/antisimmetria *completa* di una $\langle a,b \rangle$ -forma può applicarsi separatamente agli indici inferiori (se $a \geq 2$) e/o agli indici superiori (se $b \geq 2$) (come vedremo, essa si può estrapolare convenzionalmente, ma ragionevolmente, sia a $(0 \leq a \leq 1)$ che a $(0 \leq b \leq 1)$). Nel seguito ci riferiremo quasi soltanto a $\langle a \geq 0, b = 0 \rangle$ -forme (essendo chiaro che quanto vale per esse potrà adattarsi alle analoghe $\langle a = 0, b \geq 0 \rangle$ -forme con modifiche ovvie). Per brevità, nomineremo tali $\langle a \geq 0, 0 \rangle$ -forme come $(\kappa \equiv a \geq 0)$ -forme, denotandole con $\tau_{(\kappa)}$ ecc. Infine, salvo eccezioni *sottintenderemo* l'avverbio “completamente”, riferito alla possibile simmetria o antisimmetria di $\tau_{(\kappa \geq 2)}$.

Nella presentazione delle algebre delle forme simmetriche o antisimmetriche che segue in questa sezione, l'accento sarà spostato su quella delle seconde, non soltanto perché è più semplice, ma anche perché ha assai maggior importanza applicativa. Ciò è specialmente vero con riguardo alle cosiddette “forme differenziali esterne” e al loro impiego nel calcolo integrale su varietà, sia elementari che globali. Va anche ricordato che le forme differenziali esterne compaiono in modo naturale in parecchie teorie fisiche, ad esempio nell'elettromagnetismo classico (ne abbiamo dato un assaggio nella Sez. 2.5), nella teoria della relatività, nella meccanica analitica, nella teoria di Yang-Mills, ecc.

Per illustrare efficacemente l'algebra sulle κ -forme simmetriche o antisimmetriche, conviene innanzitutto ricordare alcune definizioni, e alcune loro conseguenze, in relazione ai cosiddetti “ $\langle m,\mu \rangle$ -indici”, ove m e μ sono due interi ≥ 1 (al secondo di essi permetteremo tuttavia, tra poco, di essere anche nullo). Un $\langle m,\mu \rangle$ -**indice** è una μ -pla *ordinata* di naturali, $\langle I_1, \dots, I_\mu \rangle \equiv \langle I \rangle$, compresi

ciascuno tra 1 e m (cioè $1 \leq I_s \leq m \quad \forall s = 1, \dots, \mu$). Per $\mu \geq 2$, un tale $\langle m, \mu \rangle$ -indice si dice **ordinato** se ciascuno dei suoi primi $\mu-1$ elementi è \leq del successivo (cioè se $I_s \leq I_{s+1} \quad \forall s = 1, \dots, \mu-1$); si dice **stretto** se i suoi μ elementi sono tutti diversi tra loro (questo implica che $\mu \leq m$, e quindi che $m \geq 2$); e infine si dice **strettamente ordinato** se è ordinato e stretto. Se invece $\mu = 1$, un $\langle m, 1 \rangle$ -indice consta di un unico intero compreso tra 1 e m , perché le precedenti definizioni degenerano non essendovi luogo a distinguere tra $\langle m, 1 \rangle$ -indici generici, ordinati, stretti, e strettamente ordinati. Farà comodo, di qui in avanti, riservare lettere *latine maiuscole* (come $\langle I \rangle$, $\langle J \rangle$, ..) ai $\langle m, \mu \rangle$ -indici generici, lettere *gotiche maiuscole* (come $\langle \mathfrak{A} \rangle$, $\langle \mathfrak{B} \rangle$, ..) a quelli ordinati, lettere *latine minuscole* (come $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$, ..) a quelli stretti, e infine lettere *greche minuscole* (come $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, ..) a quelli strettamente ordinati. Converremo di dire “uguali” due $\langle m, \mu \rangle$ -indici generici, diciamo $\langle I \rangle$ e $\langle J \rangle$, se $I_s = J_s \quad \forall s = 1, \dots, \mu$; e “distinti” in caso contrario. Sarà anche utile denotare con $S\langle m, \mu \rangle$ [$S^{(o)}\langle m, \mu \rangle$, $S^{(s)}\langle m, \mu \rangle$, $S^{(so)}\langle m, \mu \rangle$] l’insieme dei $\langle m, \mu \rangle$ -indici (distinti) generici [ordinati, stretti, strettamente ordinati], questi insiemi essendo ovviamente tutti uguali tra loro se $\mu = 1$. (In quest’ultimo caso è legittimo usare lettere di uno qualunque dei quattro tipi menzionati, e abolire le $\langle \cdot \rangle$.)

Come insegna il calcolo combinatorio, per i dati m e μ entrambi ≥ 1 , esistono:

- $m^\mu \equiv D'_m{}^\mu$ (numero delle disposizioni con ripetizione di m oggetti a μ a μ) $\langle m, \mu \rangle$ -indici generici distinti;
- $(m+\mu-1)!/((m-1)!\mu!) \equiv C'_m{}^\mu$ (numero delle combinazioni con ripetizione di m oggetti a μ a μ) $\langle m, \mu \rangle$ -indici ordinati distinti;
- se $\mu \leq m$, $m!/(m-\mu)! \equiv D_m{}^\mu$ (numero delle disposizioni di m oggetti a μ a μ) $\langle m, \mu \rangle$ -indici stretti distinti, mentre non ne esistono se $\mu > m$;
- ancora se $\mu \leq m$, $m!/((m-\mu)!\mu!) \equiv C_m{}^\mu \equiv D_m{}^\mu/\mu!$ (numero delle combinazioni di m oggetti a μ a μ , o coefficiente binomiale $\binom{m}{\mu}$) $\langle m, \mu \rangle$ -indici strettamente ordinati distinti, mentre non ne esistono se $\mu > m$.

Si noti che $C'_m{}^\mu \equiv C_{m+\mu-1}{}^\mu$, e che $C_m{}^\mu \equiv C_m{}^{m-\mu}$.

Se, derogando dalla condizione $\mu \geq 1$, supponiamo $\mu = 0$, la nozione di 0-pla ordinata, e quindi di $\langle m, 0 \rangle$ -indice, è evidentemente priva di significato; ma le formule precedenti danno concordemente, in tal caso, $D'_m{}^0 \equiv C'_m{}^0 \equiv D_m{}^0 \equiv C_m{}^0 \equiv 1$. Convenzionalmente, potremo dunque dire che vi è uno e un solo $\langle m, 0 \rangle$ -indice – una sequenza *vuota* (di interi compresi tra 1 e m) – qualunque sia m . Se poi $\mu = 1$, gli $\langle m, 1 \rangle$ -indici sono costituiti da un *unico* intero compreso tra 1 e m (sono cioè singoletti di siffatti interi): ovviamente ve ne sono m distinti, e le formule precedenti danno infatti

$D'_m{}^1 \equiv C'_m{}^1 \equiv D_m{}^1 \equiv C_m{}^1 \equiv m$. Se infine $\mu = m$, gli $\langle m, m \rangle$ -indici generici distinti sono $D'_m{}^m \equiv m^m$, quelli ordinati $C'_m{}^m \equiv C_{2m-1}{}^m \equiv (2m-1)!/((m-1)!m!)$, quelli stretti $D_m{}^m \equiv m!$, e quelli strettamente ordinati $C_m{}^m \equiv 1$ (sottintendendosi che ovunque si scriva $D_m{}^\mu$ o $C_m{}^\mu$ si assuma $\mu \leq m$). Per $\mu \geq 2$, risulta $D'_m{}^\mu > D_m{}^\mu$, $D'_m{}^\mu \geq C'_m{}^\mu$ (ove il segno $=$ vale per $m = 1$), $D_m{}^\mu > C_m{}^\mu$, e $C'_m{}^\mu > C_m{}^\mu$; come è naturale, perché le situazioni confrontate sono tutte più stringenti a destra.¹ Ricordiamo ancora che $\sum_{\mu=0}^m C_m{}^\mu = 2^m$; questo è il numero dei sottoinsiemi (SI) di $\{1, \dots, m\}$, ovvero la cardinalità dell'insieme-potenza $\mathcal{P}\{1, \dots, m\}$ (compreso il SI vuoto, che contribuisce una unità alla predetta somma).

In questo paragrafo, ogni indice (di qualunque tipo) sarà presupposto essere un $\langle m \geq 1, \mu \geq 1 \rangle$ -indice. Ad ogni indice generico $\langle I \rangle$ corrisponde un *unico* indice ordinato formato dagli *stessi* interi, che denoteremo $O\langle I \rangle$; se in particolare $\langle I \rangle \equiv \langle i \rangle$ è stretto, $O\langle i \rangle$ è strettamente ordinato. Un indice ordinato $\langle \mathfrak{A} \rangle$ può scriversi nella forma $\langle 1, \dots, 1, 2, \dots, 2, \dots, m, \dots, m \rangle$, ove 1 è ripetuto p_1 volte, 2 è ripetuto p_2 volte, ..., m è ripetuto p_m volte, con $0 \leq p_s \leq m \forall s$ compreso tra 1 e m , e $\sum_{s=1}^m p_s = \mu$. L' m -pla ordinata $\langle p_1, \dots, p_m \rangle \equiv \langle p_1(\langle \mathfrak{A} \rangle), \dots, p_m(\langle \mathfrak{A} \rangle) \rangle$ si dice **caratteristica** di $\langle \mathfrak{A} \rangle$, e per i dati m, μ , vi è corrispondenza biunivoca tra indice ordinato e sua caratteristica. Lo stesso vale per un indice strettamente ordinato $\langle \alpha \rangle$, ma con $0 \leq p_s \leq 1$ anziché $0 \leq p_s \leq m$, e sempre sotto il vincolo $\sum_{s=1}^m p_s = \mu$ (ciò che implica $\mu \leq m$); l' m -pla ordinata $\langle p_1(\langle \alpha \rangle), \dots, p_m(\langle \alpha \rangle) \rangle$ (ora una successione di 0 e di 1) si dice ancora **caratteristica** di $\langle \alpha \rangle$, ed è con esso in corrispondenza biunivoca per i dati m e μ . Se $\langle I \rangle \equiv \langle \mathfrak{A} \rangle$ è ordinato, $O\langle \mathfrak{A} \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$, e quindi $O^2\langle I \rangle = O\langle I \rangle$ per ogni $\langle I \rangle$; se $\langle i \rangle \equiv \langle \alpha \rangle$ è strettamente ordinato, $O\langle \alpha \rangle = \langle \alpha \rangle$, e quindi $O^2\langle i \rangle = O\langle i \rangle$ per ogni $\langle i \rangle$ stretto. Se $O\langle I \rangle = O\langle J \rangle$, $\langle J \rangle$ è trasformato in $\langle I \rangle$ da *almeno una* permutazione dei suoi μ elementi; se $O\langle i \rangle = O\langle j \rangle$, $\langle j \rangle$ è trasformato in $\langle i \rangle$ da *esattamente una* permutazione dei suoi μ elementi, che si denoterà $\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle)$, per cui cioè $\langle i \rangle = \pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle) \langle j \rangle$. Ovviamente $\pi(\langle j \rangle | \langle i \rangle) = \pi^{-1}(\langle i \rangle | \langle j \rangle)$. Ancora per $O\langle i \rangle = O\langle j \rangle$, il segno della permutazione $\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle)$, $\text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle)$ ($\equiv \text{sign}\pi(\langle j \rangle | \langle i \rangle)$), uguaglia il simbolo di Kronecker generalizzato $\delta_{i_1 \dots i_\mu}^{j_1 \dots j_\mu} \equiv \delta_{j_1 \dots j_\mu}^{i_1 \dots i_\mu}$ introdotto nella S.sez. 3.2.2, e che per maggior chiarezza sarà ora denotato scrivendo e in luogo di δ . $\langle \mathfrak{A} \rangle$ e $\langle \mathfrak{B} \rangle$ essendo indici ordinati qualsiasi, definiremo $\delta_{\langle \mathfrak{A} \rangle}^{\langle \mathfrak{B} \rangle} \equiv \delta_{\langle \mathfrak{B} \rangle}^{\langle \mathfrak{A} \rangle}$ come 1 se $\langle \mathfrak{A} \rangle = \langle \mathfrak{B} \rangle$ e come 0 in caso contrario; potremo allora scrivere $e_{i_1 \dots i_\mu}^{j_1 \dots j_\mu} \equiv e_{j_1 \dots j_\mu}^{i_1 \dots i_\mu} \equiv \delta_{O\langle i \rangle}^{O\langle j \rangle} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle)$, dove $\langle i \rangle$ e $\langle j \rangle$ sono indici stretti qualsiasi. Se $O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$, risulta $S(\langle I \rangle) = S(\langle \mathfrak{A} \rangle)$ per una funzione *simmetrica* S di $\langle I \rangle$ con valori in uno spazio lineare; se $O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle$,

¹ Precisamente, per $\mu \geq 2$ abbiamo $D_m{}^\mu/D'_m{}^\mu = [(m-1) \dots (m-\mu+1)]/m^{\mu-1}$; $C'_m{}^\mu/D'_m{}^\mu = [(m+\mu-1) \dots (m+1)]/[m^{\mu-1}\mu!]$; $C_m{}^\mu/D_m{}^\mu = 1/\mu!$; $C_m{}^\mu/C'_m{}^\mu = [(m-1) \dots (m-\mu+1)]/[(m+\mu-1) \dots (m+1)]$. È immediato verificare che tutti i precedenti rapporti sono < 1 , salvo il secondo che vale 1 per $m = 1$. Infine, sempre per $\mu \geq 2$, $D_m{}^\mu/C'_m{}^\mu$ vale 0 per $1 \leq m \leq \mu - 1$, è < 1 per $m = \mu$, e $\rightarrow \mu!$ per $m \rightarrow \infty$.

risulta $A(\langle i \rangle) = \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) A(\langle \alpha \rangle)$ per una funzione *antisimmetrica* A di $\langle i \rangle$. Si prova facilmente che gli indici generici $\langle I \rangle$ (a priori) distinti per cui $O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$ sono $\mu! (\prod_{t=1}^m p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1} {}^2$; e in accordo con questo, che gli indici stretti $\langle i \rangle$ (a priori) distinti per cui $O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle$ sono $\mu!$.

Per un dato $\langle m, \mu \rangle$ -indice $\langle i \rangle$ stretto, ogni $\langle m, m-\mu \rangle$ -indice formato con gli $m - \mu$ numeri compresi tra 1 e m che mancano a $\langle i \rangle$ (per cui anche tale $\langle m, m-\mu \rangle$ -indice risulta stretto) si dice ($\langle m, m-\mu \rangle$ -indice stretto) **complementare** a $\langle i \rangle$; se si richiede che questo indice complementare sia ordinato (quindi strettamente ordinato), allora esso è unicamente determinato. Sia $\langle \beta \rangle$ il $\langle m, m-\mu \rangle$ -indice strettamente ordinato complementare del $\langle m, \mu \rangle$ -indice strettamente ordinato $\langle \alpha \rangle$, e si consideri il $\langle m, m \rangle$ -indice stretto $\langle k \rangle =: \langle \alpha_1, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \dots, \beta_{m-\mu} \rangle$. Un facile conteggio mostra che il segno della permutazione che ordina $\langle k \rangle$ è la potenza di -1 di esponente $\sum_{s=1}^{\mu} \alpha_s - \mu(\mu+1)/2$.

Indici stretti e strettamente ordinati compaiono in modo naturale nell'espressione del determinante di una matrice data. Sia M una $\mu \times \mu$ -matrice ($\mu \geq 1$), i cui elementi denotiamo come è regola dotando M di due indici ordinati da sinistra a destra, il primo essendo indice di riga e il secondo di colonna, indipendentemente dalla loro posizione verticale. Supponendo che le righe di M siano numerate nel modo standard (da 1 a μ), e le sue colonne con $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$. ($\langle \alpha \rangle$ essendo un $\langle m, \mu \rangle$ -indice strettamente ordinato), risulta:

$$(1) \quad \det(M) = \sum_{O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle} e_{i_1 \dots i_\mu}^{\alpha_1 \dots \alpha_\mu} M_1^{i_1} \dots M_\mu^{i_\mu},$$

ove come indicato la somma è estesa ai $\mu!$ $\langle m, \mu \rangle$ -indici stretti $\langle i \rangle$ per cui $O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle$. Se in particolare $\langle \alpha \rangle = \langle 1, \dots, \mu \rangle$, la (1) si riduce alla formula standard per lo sviluppo di $\det(M)$ secondo gli indici di colonna. Naturalmente scambiando le righe con le colonne si ottiene una formula analoga alla (1):

$$(2) \quad \det(M) = \sum_{O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle} e_{\alpha_1 \dots \alpha_\mu}^{i_1 \dots i_\mu} M_{i_1}^1 \dots M_{i_\mu}^\mu,$$

che similmente si riduce allo sviluppo standard di $\det(M)$ secondo gli indici di riga se ancora $\langle \alpha \rangle = \langle 1, \dots, \mu \rangle$. Vale infine la formula più simmetrica:

$$(3) \quad \det(M) = (\mu!)^{-1} \sum \sum_{O\langle i \rangle = O\langle j \rangle} e_{j_1 \dots j_\mu}^{i_1 \dots i_\mu} M_{i_1}^{j_1} \dots M_{i_\mu}^{j_\mu},$$

ove la doppia somma è estesa ai $\langle m, \mu \rangle$ -indici stretti $\langle i \rangle$ e $\langle j \rangle$ (l'uno permutazione dell'altro) per cui $O\langle i \rangle = O\langle j \rangle$.

² Beninteso $\prod_{t=1}^m p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle)!$ è un prodotto di fattoriali e non il fattoriale di un prodotto.

4.4.2) FORME SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE SU UNO SPAZIO LINEARE

Veniamo finalmente, dopo questo lungo preambolo, alle ($\kappa \geq 0$)-forme simmetriche o antisimmetriche sullo spazio lineare ($n \geq 1$)-dimensionale E . (Per quanto abbiamo visto più sopra, è naturale considerare come simmetriche – o antisimmetriche, a seconda della convenienza – sia le 0-forme, che si identificheranno con specifici numeri reali, che le 1-forme). Come sappiamo, una κ -forma generica è individuata da $D'_n{}^\kappa$ reali indipendenti, ad esempio dalle sue componenti (con la nostra scelta, covarianti) in una qualunque base di E , e dunque $D'_n{}^\kappa$ è la dimensione dello spazio lineare di tali κ -forme su E , spazio che denoteremo $\otimes^\kappa(E)$. Questa dimensione si riduce in presenza di possibili simmetrie o antisimmetrie delle forme, alle quali corrispondono analoghe simmetrie o antisimmetrie delle sue componenti. Proveremo ora che la dimensione dello **spazio (lineare) delle κ -forme simmetriche [antisimmetriche] su E (n -dim)**, spazio che denoteremo $V^\kappa(E)$ [$\wedge^\kappa(E)$], è $C'_n{}^\kappa$ [$C_n{}^\kappa$].³

Anche se esamineremo soprattutto l'algebra delle forme antisimmetriche, studieremo sulla stessa base concettuale la natura degli spazi lineari $V^\kappa(E)$ e $\wedge^\kappa(E)$. Partiamo dalla rappresentazione di una ($\kappa \geq 1$)-forma generica $\tau_{(\kappa)}$ ⁴ su E^κ servendoci di una base covariante $\{e_1, \dots, e_n\} \equiv \{e.\}$ di E (lascieremo comunque da parte il caso degenere e banale $\kappa = 0$, per il quale $V^0(E) = \wedge^0(E) = \mathbb{R}$):

$$(1) \quad \tau_{x(1)\dots x(\kappa)} = \sum_{\langle I \rangle} \tau_{I_1 \dots I_\kappa} x_{(1)}^{I_1} \dots x_{(\kappa)}^{I_\kappa},$$

dove $\langle I \rangle \equiv \langle I_1, \dots, I_\kappa \rangle$ è un $\langle n, \kappa \rangle$ -indice generico, $\tau_{I_1 \dots I_\kappa}$ è la componente covariante di indice (I) della κ -forma nella base $\{e.\}$, $x_{(s)}^{I_s}$ è la componente controvariante di indice (I_s) di $x_{(s)}$ nella stessa base (cioè $x_{(s)} = \sum_{j=1}^n x_{(s)}^j e_j$), e per maggior chiarezza abbiamo rinunciato alla convenzione di Einstein, come continueremo a fare in questa sezione salvo contrario avviso. Si noti che scegliendo nella (1) le x tra gli elementi della base $\{e.\}$ secondo $x_{(1)} = e_{J_1}, \dots, x_{(\kappa)} = e_{J_\kappa}$ abbiamo $x_{(1)}^{I_1} = e_{J_1}^{I_1} = \delta_{J_1}^{I_1}, \dots, x_{(\kappa)}^{I_\kappa} = e_{J_\kappa}^{I_\kappa} = \delta_{J_\kappa}^{I_\kappa}$, e quindi

$$(1') \quad \tau_{e_{J_1} \dots e_{J_\kappa}} \equiv \tau_{J_1 \dots J_\kappa}$$

(cfr. (3.1.1, 6')).

³ Per $\kappa \geq 1$, $C'_n{}^\kappa$ [$C_n{}^\kappa$] è il massimo numero di valori distinti [non nulli e distinti a meno del segno] di una arbitraria funzione definita su $S\langle n, \kappa \rangle$ [su $S^{(s)}\langle n, \kappa \rangle$] e con valori in uno spazio lineare, sotto il vincolo di essere (completamente) simmetrica [antisimmetrica]. Per $\kappa = 2$, si è nel caso standard delle $n \times n$ -matrici simmetriche [antisimmetriche], che hanno notoriamente $C'_n{}^2 = n(n+1)/2$ [$C_n{}^2 = n(n-1)/2$] elementi indipendenti. In ultima analisi, è alla disuguaglianza $C_n{}^\kappa < C'_n{}^\kappa$ (per $\kappa \geq 2$) che almeno in parte risale la maggiore complessità dell'algebra delle forme simmetriche rispetto a quella delle forme antisimmetriche.

⁴ Come già convenuto (v. S.sez. 3.1.2), scriviamo qui in carattere tondo i simboli delle κ -forme.

Supponiamo ora che $\tau_{(\kappa)} \equiv \sigma_{(\kappa)}$ sia simmetrica, quindi che $\sigma_{I_1 \dots I_\kappa}$ sia una funzione simmetrica dei suoi κ indici. Per ogni $\langle I \rangle$, avremo:

$$(2) \quad "O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle" \Rightarrow " \sigma_{I_1 \dots I_\kappa} = \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} "$$

Sappiamo che per ogni dato $\langle n, \kappa \rangle$ -indice $\langle \mathfrak{A} \rangle$ (di cui $p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle)$ denota la caratteristica, vedi S.sez. 4.4.1) vi sono $\kappa! (\prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1}$ uguaglianze nel conseguente della (2); quindi avremo in tutto $\kappa! \sum_{\langle \mathfrak{A} \rangle} (\prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1}$ uguaglianze che descrivono il carattere simmetrico di $\sigma_{(\kappa)}$. D'altra parte è sempre vero che $\sum_{\langle I \rangle} = \sum_{\langle \mathfrak{A} \rangle} \sum_{O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle}$, e quindi la (1) diventa (in forza della (2)):

$$(3) \quad \sigma_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}} = \sum_{\langle \mathfrak{A} \rangle} \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} \Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)},$$

avendo posto

$$(4) \quad \Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} =: \sum_{O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)}^{I_1} \dots x_{(\kappa)}^{I_\kappa}.$$

Come sappiamo, la somma nella (3) consta di $C'_n{}^\kappa$, e quella nella (4) di $\kappa! (\prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1}$, addendi (a priori) distinti. Se si scelgono le x tra gli elementi della base $\{e.\}$, diciamo secondo $x_{(1)} = e_{\mathfrak{B}1}, \dots, x_{(\kappa)} = e_{\mathfrak{B}\kappa}$ (ove $\langle \mathfrak{B} \rangle$ è ordinato), si ha $\Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} e_{\mathfrak{B}1} \dots e_{\mathfrak{B}\kappa} = \sum_{O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle} \delta_{\mathfrak{B}1}^{I_1} \dots \delta_{\mathfrak{B}\kappa}^{I_\kappa}$, che è uguale a 1 se $\langle \mathfrak{A} \rangle = \langle \mathfrak{B} \rangle$ e uguale a 0 altrimenti, ovvero $\Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} e_{\mathfrak{B}1} \dots e_{\mathfrak{B}\kappa} = \delta_{\langle \mathfrak{B} \rangle}^{\langle \mathfrak{A} \rangle}$. Sostituendo questa uguaglianza nella (3), si ha $\sigma e_{\mathfrak{B}1} \dots e_{\mathfrak{B}\kappa} \equiv \sigma_{\mathfrak{B}1 \dots \mathfrak{B}\kappa}$, in accordo con la regola generale (1'). Analogo risultato si ha se in luogo di $\langle \mathfrak{B} \rangle$ c'è un generico $\langle J \rangle$: posto $\langle \mathfrak{B} \rangle =: O\langle J \rangle$, si trova $\sigma_{J1 \dots J\kappa} = \sigma e_{J1} \dots e_{J\kappa} = \sigma_{\mathfrak{B}1 \dots \mathfrak{B}\kappa}$, come deve essere in forza della simmetria. Le $C'_n{}^\kappa$ κ -forme simmetriche $\Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$ si dicono **canoniche** (agg.), e formano una base di $V^\kappa(E)$: questo spazio lineare ha dunque dimensione $C'_n{}^\kappa$, come preannunciato. Infatti, la famiglia $\{\Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}\}_{\langle \mathfrak{A} \rangle \in S^{(0)}\langle n, \kappa \rangle}$ è evidentemente completa in $V^\kappa(E)$, e inoltre i suoi elementi sono linearmente indipendenti perché " $\forall \langle x \rangle (\in E^\kappa) \{\sigma_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}} = 0\}$ " implica " $\forall \langle \mathfrak{A} \rangle (\in S^{(0)}\langle n, \kappa \rangle) \{\sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} = 0\}$ ".⁵

In forza della definizione (4), per ogni $\langle n, \kappa \rangle$ -indice generico $\langle I \rangle$ per cui $O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$ (e in particolare per $\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$) vale la seguente identità tra κ -forme simmetriche:

$$(5) \quad \Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} \equiv \kappa! (\prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1} \mathcal{S}_{(1 \dots \kappa)} x_{(1)}^{I_1} \dots x_{(\kappa)}^{I_\kappa},$$

dove $\mathcal{S}_{(1 \dots \kappa)}$ è l'operatore di simmetrizzazione (v. S.sez. 3.1.1) con la simmetrizzazione fatta rispetto agli indici $(1), \dots, (\kappa)$ delle indeterminate $x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)}$ (quindi mantenendo fisso $\langle I \rangle$). Facendo $\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle$ nella (5), si vede che anche le $C'_n{}^\kappa$ forme $\mathcal{S}_{(1 \dots \kappa)} x_{(1)}^{\mathfrak{A}1} \dots x_{(\kappa)}^{\mathfrak{A}\kappa}$ formano una base di $V^\kappa(E)$, la $\{\mathcal{S}_{(1 \dots \kappa)} x_{(1)}^{\mathfrak{A}1} \dots x_{(\kappa)}^{\mathfrak{A}\kappa}\}_{\langle \mathfrak{A} \rangle \in S^{(0)}\langle n, \kappa \rangle}$, che si dice sua **base canonica**. Abbiamo così la seguente rappresentazione di $\sigma_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}}$ alternativa alla (3):

⁵ Si sottolinea che i $C'_n{}^\kappa$ numeri $\sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa}$ nella (3) sono *liberi*, cioè non sottostanno ad alcun vincolo addizionale, come è necessario per concludere che la famiglia delle $\Xi^{\langle \mathfrak{A} \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$ è una base di $V^\kappa(E)$.

$$(6) \quad \sigma_{X(1) \dots X(\kappa)} = \sum_{\langle \mathfrak{A} \rangle} \circ \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{\mathfrak{A}1} \dots X(\kappa)^{\mathfrak{A}\kappa},$$

avendo posto

$$(7) \quad \circ \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} = : \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} \kappa! (\prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1}.$$

Si noti che le $\circ \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa}$ e le $\sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa}$ differiscono soltanto per un fattore dipendente da $\langle \mathfrak{A} \rangle$. Come la (3), evidentemente anche la (6) è una rappresentazione *univoca* di $\sigma_{X(1) \dots X(\kappa)}$, che si dice sua **1^a rappresentazione canonica**.

Tornando alla (1), e tenuto conto della assunta simmetria della κ -forma $\tau_{(\kappa)} \equiv \sigma_{(\kappa)}$, agendo sui suoi membri con $\mathcal{S}_{(1.. \kappa)}$ si ottiene (somma di $D'_n{}^\kappa$ termini a priori distinti):

$$(8) \quad \sigma_{X(1) \dots X(\kappa)} = \sum_{\langle I \rangle} \sigma_{I1 \dots I\kappa} \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa},$$

che è ancora una rappresentazione univoca di $\sigma_{X(1) \dots X(\kappa)}$ perché “ $\forall \langle X \rangle (\in E^\kappa) \{ \sigma_{X(1) \dots X(\kappa)} = 0 \} \Rightarrow \Rightarrow “\forall \langle I \rangle \{ \sigma_{I1 \dots I\kappa} = 0 \}”$. È tuttavia importante osservare che la famiglia $\{ \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa} \}_{\langle I \rangle \in S(n, \kappa)}$ non è una base di $V^\kappa(E)$ se n e κ sono entrambi > 1 , come si intuisce subito dalla $C'_n{}^\kappa < D'_n{}^\kappa$.⁶ La (8) si dice **2^a rappresentazione canonica** della κ -forma simmetrica in oggetto. Alla (8) si perviene anche partendo dalla seguente identità tra κ -forme simmetriche, valida per qualunque $\langle \mathfrak{A} \rangle$:

$$(9) \quad \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{\mathfrak{A}1} \dots X(\kappa)^{\mathfrak{A}\kappa} \equiv \prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle) / \kappa! \sum_{O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle} \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa}.$$

Sostituendola nella (6), si trova infatti $\sigma_{X(1) \dots X(\kappa)} = \sum_{\langle \mathfrak{A} \rangle} \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa} \sum_{O\langle I \rangle = \langle \mathfrak{A} \rangle} \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa} = = \sum_{\langle I \rangle} \sigma_{I1 \dots I\kappa} \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa}$, perché $\sigma_{I1 \dots I\kappa} = \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa}$ sotto $O\langle I \rangle \equiv \langle \mathfrak{A} \rangle$; vale a dire, la (8). In definitiva, abbiamo tre rappresentazioni univoche di $\sigma_{X(1) \dots X(\kappa)}$ che tengono conto della assunta simmetria della κ -forma: la (3) e la (6), sostanzialmente equivalenti, che la sviluppano in due basi di $V^\kappa(E)$ (di $C'_n{}^\kappa$ elementi) identiche a meno di un fattore (v. la (5)), e la (8), che la presenta come combinazione lineare *ridondante*, ma ancora univoca, delle $D'_n{}^\kappa$ forme $\mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa}$, delle quali soltanto $C'_n{}^\kappa$, secondo la (9), sono linearmente indipendenti. Scegliendo ancora, nella (8), le x tra gli elementi della base $\{e_i\}$, diciamo secondo $X(1) = e_{J1}$, ..., $X(\kappa) = e_{J\kappa}$, si verifica che $\sigma_{e_{J1} \dots e_{J\kappa}} \equiv \equiv \sigma_{J1 \dots J\kappa}$; come deve essere, perché, per qualunque coppia di indici $\langle I \rangle$ e $\langle J \rangle$,

$$(10) \quad \mathcal{S}_{\langle J \rangle} \delta_{J1}^{I1} \dots \delta_{J\kappa}^{I\kappa} \equiv \delta_{O\langle J \rangle}^{O\langle I \rangle} \prod_{t=1}^n p_t(O\langle I \rangle) / \kappa!,$$

dove $\mathcal{S}_{\langle J \rangle}$ significa che la simmetrizzazione è fatta rispetto all'indice $\langle J \rangle$, tenendo $\langle I \rangle$ fisso.

⁶ Infatti se la detta famiglia fosse una base, ciò significherebbe che “ $\forall \langle X \rangle (\in E^\kappa) \{ \sum_{\langle I \rangle} \hat{\sigma}_{I1 \dots I\kappa} \mathcal{S}_{(1.. \kappa)X(1)}^{I1} \dots X(\kappa)^{I\kappa} = 0 \}$ ” implichi “ $\forall \langle I \rangle \{ \hat{\sigma}_{I1 \dots I\kappa} = 0 \}$ ” per numeri $\hat{\sigma}_{I1 \dots I\kappa}$ liberi (\equiv non sottostanti ad alcun vincolo addizionale); il che è falso per n e κ entrambi > 1 , perché l'antecedente dell'implicazione è un sistema lineare omogeneo di $C'_n{}^\kappa$ equazioni in $D'_n{}^\kappa > C'_n{}^\kappa$ incognite. Invece le $\sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa}$ della (3) (o le $\circ \sigma_{\mathfrak{A}1 \dots \mathfrak{A}\kappa}$ della (6)) sono numeri liberi da vincoli, come è stato osservato nella nota precedente. Le relazioni di simmetria completa su una funzione f di $\langle n \geq 2, \kappa \geq 2 \rangle$ -indice sono $n^\kappa - (n+\kappa-1)(n+\kappa-2) \dots n/\kappa!$, cioè nessuna se $n = 1$, ed un numero uguale al saldo di $C'_n{}^\kappa$ a $D'_n{}^\kappa$, $D'_n{}^\kappa - C'_n{}^\kappa$; ad esempio una $(2^2 - 3 \cdot 2/2 = 1)$ se $n = \kappa = 2$ (la $f_{12} = f_{21}$), tre $(3^2 - 4 \cdot 3/2 = 3)$ se $n = 3$, $\kappa = 2$ (le $f_{12} = f_{21}$, $f_{23} = f_{32}$, $f_{31} = f_{13}$), diciassette $(3^3 - 5 \cdot 4 \cdot 3/6 = 17)$ se $n = \kappa = 3$, ecc.

Per ogni $\langle I \rangle$, appare sensato scrivere $\mathcal{S}_{(1..k)} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(k)}^{i_k}$ come $\bigvee_{s=1}^k x_{(s)}^{i_s}$. Con questa notazione potremo scrivere le (6,8) nella forma più compatta

$$(6bis) \quad \sigma_{x_{(1)} \dots x_{(k)}} = \sum_{\langle R \rangle} \circ \sigma_{R_1 \dots R_k} \bigvee_{s=1}^k x_{(s)}^{R_s}$$

($C'_n{}^k$ addendi), e rispettivamente

$$(8bis) \quad \sigma_{x_{(1)} \dots x_{(k)}} = \sum_{\langle I \rangle} \sigma_{I_1 \dots I_k} \bigvee_{s=1}^k x_{(s)}^{I_s}$$

($D'_n{}^k (\geq C'_n{}^k)$ addendi).

Ripercorreremo ora il precedente itinerario studiando lo spazio lineare $\Lambda^k(E)$, con E ($n \geq 1$)-dim, delle ($\kappa \geq 1$)-forme antisimmetriche. Ripartiamo a questo fine dalla (1) considerandovi la forma $\tau_{(\kappa)} \equiv v_{(\kappa)}$ come antisimmetrica. Poiché $v_{I_1 \dots I_\kappa}$ è antisimmetrica nei suoi κ indici, essa è identicamente zero se $\langle I \rangle$ non è stretto. La (1) potrà pertanto essere riscritta come

$$(11) \quad v_{x_{(1)} \dots x_{(k)}} = \sum_{\langle i \rangle} v_{i_1 \dots i_\kappa} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(k)}^{i_\kappa},$$

dove la somma è limitata agli $\langle n, \kappa \rangle$ -indici stretti ($D_n{}^k$ addendi). Questo presuppone $\kappa \leq n$.

Ovviamente, è ancora $\sum_{\langle i \rangle} \equiv \sum_{\langle \alpha \rangle} \sum_{O(i)=\langle \alpha \rangle}$, per cui, tenendo presente che per ogni $\langle i \rangle$ stretto

$$(12) \quad "O(i) = \langle \alpha \rangle" \Rightarrow "v_{i_1 \dots i_\kappa} = \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa}",$$

abbiamo:

$$(13) \quad v_{x_{(1)} \dots x_{(k)}} = \sum_{\langle \alpha \rangle} v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa} \Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(k)},$$

avendo posto

$$(14) \quad \Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(k)} =: \sum_{O(i)=\langle \alpha \rangle} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(k)}^{i_\kappa},$$

dove la somma nella (13) consta di $C_n{}^k$, e quella nella (14) di $\kappa!$, addendi (a priori) distinti. Le $C_n{}^k$ κ -forme antisimmetriche (14) si dicono **canoniche**, e formano una base di $\Lambda^k(E)$. Infatti il loro insieme è evidentemente completo in $\Lambda^k(E)$, ed esse sono linearmente indipendenti perché " $\forall \langle x \rangle (\in E^k) \{v_{x_{(1)} \dots x_{(k)}} = 0\} \Rightarrow \forall \langle \alpha \rangle (\in S^{SO}\langle n, \kappa \rangle) \{v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa} = 0\}$ ". Segue da una parte che la (13) è una rappresentazione univoca di $v_{x_{(1)} \dots x_{(k)}}$, e dall'altra che la dimensione di $\Lambda^k(E)$ è $C_n{}^k$. Si noti anche che, per la sua definizione, $\Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(k)}$ è il determinante della $\kappa \times \kappa$ -matrice il cui elemento sulla riga $1 \leq p \leq \kappa$ e sulla colonna $1 \leq q \leq \kappa$ è $x_{(p)}^{\alpha_q}$; il che conferma il suo annullarsi sse $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ non sono linearmente indipendenti. A differenza di $V^k(E)$, $\Lambda^k(E)$ si riduce a $\{0\}$ se $\kappa > n$, e quindi ci sono soltanto n spazi lineari di forme antisimmetriche su E (n -dim), non contando $\Lambda^0(E) \equiv R$. È interessante osservare che mentre le κ -forme simmetriche canoniche non sono riconoscibili come oggetti algebrici significativi, quelle antisimmetriche canoniche sono determinanti di $\kappa \times \kappa$ -matrici. Se in particolare scegliamo $x_{(1)} = e_{\beta_1}, \dots, x_{(k)} = e_{\beta_k}$, con $\langle \beta \rangle$ strettamente ordinato, per ogni $\langle \alpha \rangle$ risulta $\Delta^{\langle \alpha \rangle} e_{\beta_1} \dots e_{\beta_k} = \sum_{O(i)=\langle \alpha \rangle} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) \delta_{\beta_1}^{i_1} \dots \delta_{\beta_k}^{i_k} \equiv \delta_{\langle \beta \rangle}^{\langle \alpha \rangle}$; e con ciò, dalla (13) scende la solita

$v_{\beta_1} \dots e_{\beta_\kappa} \equiv v_{\beta_1} \dots \beta_\kappa$. Se poi la scelta è $x_{(1)} = e_{j_1}, \dots, x_{(\kappa)} = e_{j_\kappa}$ (con $\langle j \rangle$ stretto), si trova che, per ogni $\langle \alpha \rangle$, $\Delta^{\langle \alpha \rangle} e_{j_1} \dots e_{j_\kappa} = \sum_{O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_\kappa}^{i_\kappa} \equiv \delta_{O\langle j \rangle}^{\langle \alpha \rangle} \text{sign}\pi(\langle j \rangle | \langle \alpha \rangle)$; e quindi, posto $\langle \beta \rangle =: O\langle j \rangle$, dalla (14) segue $v_{j_1} \dots j_\kappa = v_{e_{j_1}} \dots e_{j_\kappa} \equiv v_{\beta_1} \dots \beta_\kappa \text{sign}\pi(\langle j \rangle | \langle \beta \rangle)$, come deve essere in forza della antisimmetria.

Se $\kappa = n$, l'unica n -forma antisimmetrica canonica è $\Delta^{\langle 1, \dots, n \rangle} x_{(1)} \dots x_{(n)}$, e la somma nella (13) si riduce ad un unico termine, proporzionale a tale n -forma canonica secondo il fattore $v_1 \dots n$. Ricordiamo che se E (n -dim) è euclideo, e la sua base è ortonormale, il valore assoluto dell'unico determinante canonico che sopravvive è l'|estensione| del n -parallelogramma costruito sui vettori $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$. Se poi la base è ordinata, diciamo come $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$, allora il valore del determinante canonico è l'*estensione con segno* di quel n -parallelogramma, essendo tale segno positivo sse le n -ple ordinate $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ e $\langle x_{(1)}, \dots, x_{(n)} \rangle$ sono orientate congruentemente (cioè sse il determinante della matrice (non singolare) di transizione dalla base $\{e_i\}$ alla base $\{x_{(i)}\}$ – supponendo i vettori $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ linearmente indipendenti – è positivo); e negativo in caso contrario. Considerando la solita trasformazione della base $\{e_i\}$ data dalla $e'_i = L_i^j e_j$, con $\{L_i^j\}$ non singolare (cfr. la (3.1.1, 7)), si ottiene la corrispondente trasformazione della componente $v_1 \dots n$ secondo la $v'_1 \dots n = \det\{L\} v_1 \dots n$, che si trasforma dunque come uno *scalare* relativo di peso 1, o una densità.

Sulla falsariga di quanto abbiamo esposto a proposito delle forme simmetriche, alla rappresentazione (13) di una generica κ -forma antisimmetrica se ne affiancano altre due. La prima, in pratica equivalente alla (13), si dice sua **1^a rappresentazione canonica**, e si basa sulla seguente relazione tra κ -forme antisimmetriche, valida per ogni indice stretto $\langle i \rangle$ per cui $O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle$ (e in particolare per $\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle$):

$$(15) \quad \Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} = \kappa! \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) \mathcal{A}_{(1.. \kappa) X_{(1)}}^{i_1} \dots x_{(\kappa)}^{i_\kappa},$$

dove $\mathcal{A}_{(1.. \kappa)}$ è l'operatore di antisimmetrizzazione (v. S.sez. 3.1.3) agente sulle $x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$, mentre l'indice $\langle i \rangle$ è fisso. Segue che le C_n^κ κ -forme $\mathcal{A}_{(1.. \kappa) X_{(1)}}^{\alpha_1} \dots x_{(\kappa)}^{\alpha_\kappa}$ formano una base di $\Lambda^\kappa(E)$, la $\{\mathcal{A}_{(1.. \kappa) X_{(1)}}^{\alpha_1} \dots x_{(\kappa)}^{\alpha_\kappa}\}_{\langle \alpha \rangle \in S(SO)(n, \kappa)}$, che si dice sua **base canonica**. Riferendoci a questa base canonica, abbiamo dunque la sopraddetta 1^a rappresentazione canonica di $v x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$ (C_n^κ addendi):

$$(16) \quad v x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} = \sum_{\langle \alpha \rangle} \circ v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa} \mathcal{A}_{(1.. \kappa) X_{(1)}}^{\alpha_1} \dots x_{(\kappa)}^{\alpha_\kappa},$$

avendo posto

$$(17) \quad \circ v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa} =: \kappa! v_{\alpha_1 \dots \alpha_\kappa}.$$

La **2^a rappresentazione canonica** di una κ -forma antisimmetrica si ottiene applicando $\mathcal{A}_{(1.. \kappa)}$ alla (11) e tenendo conto della assunta antisimmetria del 1° membro:

$$(18) \quad v x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} = \sum_{\langle i \rangle} v_{i_1 \dots i_\kappa} \mathcal{A}_{(1.. \kappa) X_{(1)}}^{i_1} \dots x_{(\kappa)}^{i_\kappa}$$

($D_n^\kappa = \kappa! C_n^\kappa$ addendi). La (18) può anche ricavarsi facendo uso della seguente identità tra κ -forme antisimmetriche:

$$(19) \quad \mathcal{A}_{(1.. \kappa)X(1)}^{\alpha 1} \dots X_{(\kappa)}^{\alpha \kappa} \equiv (\kappa!)^{-1} \sum_{O(i)=\langle \alpha \rangle} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle \alpha \rangle) \mathcal{A}_{(1.. \kappa)X(1)}^{i 1} \dots X_{(\kappa)}^{i \kappa}.$$

Sostituendola infatti nella (16), si ottiene: $v_{X(1)} \dots X_{(\kappa)} = \sum_{(i)} v_{i 1 \dots i \kappa} \mathcal{A}_{(1.. \kappa)X(1)}^{i 1} \dots X_{(\kappa)}^{i \kappa}$ in forza della (12); cioè, la (18). Con procedura ormai familiare, per mezzo della (18) si verifica che $v_{e_{j 1}} \dots e_{j \kappa} \equiv v_{j 1 \dots j \kappa}$, come deve essere. Infatti, risulta

$$(20) \quad \mathcal{A}_{(j)} \delta_{j 1}^{i 1} \dots \delta_{j \kappa}^{i \kappa} \equiv \delta_{O(j)}^{O(i)} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle) / \kappa!,$$

dove $\mathcal{A}_{(j)}$ significa che l'antisimmetrizzazione è fatta rispetto all'indice $\langle j \rangle$ tenendo $\langle i \rangle$ fisso, e a 2° membro si è scritto $\delta_{O(j)}^{O(i)} \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle)$ in luogo di $e_{j 1} \dots e_{j \kappa}^{i 1 \dots i \kappa}$ per porre in migliore evidenza l'affinità tra la (20) e la (10). La tesi segue immediatamente sostituendo la (20) nella (18), e tenendo conto della antisimmetria di $v_{i 1 \dots i \kappa}$ e di $e_{j 1} \dots e_{j \kappa}^{i 1 \dots i \kappa}$ rispetto a $\langle i \rangle$. Le (12, 13, ..., 20) sono la naturale controparte, nell'ordine, delle (2, 3, ..., 10) del caso simmetrico.

Le due rappresentazioni canoniche di una κ -forma antisimmetrica, (16) e (18), come pure quelle di una κ -forma simmetrica (6) e (8), hanno questo di diverso tra loro, che mentre i coefficienti delle 2° rappresentazioni, $v_{i 1 \dots i \kappa}$ e rispettivamente $\sigma_{i 1 \dots i \kappa}$, sono *componenti* (covarianti) delle forme, e quindi si trasformano per κ -cogredienza al cambiare della base, quelli delle 1° rappresentazioni, ${}^\circ v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$, e rispettivamente ${}^\circ \sigma_{\mathbb{R} 1 \dots \mathbb{R} \kappa}$, sottostanno ad una legge di trasformazione alquanto più complicata, anche se ovviamente lineare.⁷ Che le $\sigma_{i 1 \dots i \kappa}$ si trasformino per κ -cogredienza è ovvio ($\langle i \rangle$ essendo un indice generico), mentre lo stesso asserto riferito alle $v_{i 1 \dots i \kappa}$ merita un (poco impegnativo) approfondimento.⁸

⁷ Beninteso qui ci riferiamo ad una legge (lineare) che esprima le $v'_{\beta 1 \dots \beta \kappa}$ [le $\sigma'_{\mathbb{B} 1 \dots \mathbb{B} \kappa}$] – ove l'apice denota al solito la componente nella nuova base $\{e'\}$ – in funzione delle *sole* $v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$ [delle *sole* $\sigma_{\mathbb{R} 1 \dots \mathbb{R} \kappa}$], per la data matrice di transizione da $\{e\}$ a $\{e'\}$. Ciò si ottiene eliminando le componenti covarianti dalla legge di trasformazione per κ -cogredienza standard in favore delle $v'_{\beta 1 \dots \beta \kappa}$, $v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$ [$\sigma'_{\mathbb{B} 1 \dots \mathbb{B} \kappa}$, $\sigma_{\mathbb{R} 1 \dots \mathbb{R} \kappa}$]; ma i calcoli sono laboriosi, e le formule risultanti non semplici.

⁸ In effetti, la $(\dagger) v'_{j 1 \dots j \kappa} = L_{j 1}^{i 1} \dots L_{j \kappa}^{i \kappa} v_{i 1 \dots i \kappa}$ (somma alla Einstein), dove L è la matrice di transizione da $\{e\}$ a $\{e'\}$ e le $v'_{j 1 \dots j \kappa}$ e le $v_{i 1 \dots i \kappa}$ sono antisimmetriche, si desume dalla legge generale di trasformazione per cogredienza. Si ha infatti $v'_{J 1 \dots J \kappa} = L_{J 1}^{i 1} \dots L_{J \kappa}^{i \kappa} v_{i 1 \dots i \kappa}$, e il 2° membro di questa è identicamente nullo se $\langle J \rangle$ non è stretto; quindi, diciamo, deve essere $\langle J \rangle = \langle j \rangle$. Segue che $\langle J \rangle = \langle j \rangle$ anche nel 1° membro, e si ottiene la (\dagger) , che è dunque la legge di trasformazione per cogredienza delle κ -forme antisimmetriche. Se poi $\kappa = n$, e $\langle j \rangle = \langle 1, \dots, n \rangle$, la (\dagger) diventa $v'_{1 \dots n} = \det\{L\} v_{1 \dots n}$, come già abbiamo visto. Un ragionamento analogo porterebbe alla trasformazione per controgredienza delle κ -forme $\mathcal{A}_{(1.. \kappa)X(1)}^{i 1} \dots X_{(\kappa)}^{i \kappa}$, controparte della (\dagger) , assicurando in definitiva la necessaria invarianza dei valori $v_{X(1)} \dots X_{(\kappa)}$ della κ -forma.

4.4.3) ALGEBRE DI GRASSMANN

Il lettore avrà notato che non abbiamo fin qui proposto una notazione del tipo $\bigwedge_{s=1}^{s=\kappa} x_{(s)}$ per $\mathcal{A}_{(1.. \kappa)X(1)}^{i1} \dots x_{(\kappa)}^{i\kappa}$, in naturale analogia con quella usata nel caso simmetrico. Ciò in quanto questa notazione acquista un suo più profondo significato con l'introduzione di un "prodotto" ordinato di una prima per una seconda forma antisimmetrica tale che esso *sia ancora una forma antisimmetrica*; e quindi, con la creazione di una vera e propria algebra sulla famiglia degli spazi lineari $\{\wedge^\kappa(E)\}_{\kappa=0, \dots}$. Questo prodotto si dice **prodotto esterno**, si denota \wedge (per cui si dice anche, comunemente, **prodotto wedge** (\equiv cuneo)) e si scrive "tra".⁹ Come si vedrà in un momento, il prodotto esterno è una forma antisimmetrica di grado uguale alla somma dei gradi delle forme-fattori, e quindi questa somma non deve eccedere n se non si vuole ottenere zero.

Procediamo ora alla definizione di un tale prodotto esterno. Per cominciare, osserveremo che non c'è alcun problema se uno almeno dei due fattori è una 0-forma, perché basta allora usare la definizione del prodotto di questo tipo prevista nello spazio $\wedge^\kappa(E)$, $\kappa \geq 1$ essendo il grado dell'altro fattore. Se poi anche l'altro fattore è una 0-forma, si è ridotti al prodotto standard in R . Veniamo quindi al caso in cui *entrambe* le forme-fattori hanno grado ≥ 1 . L'idea (del tutto naturale) è quella di "chiuderne" l'algebra *antisimmettizzando* quello che abbiamo chiamato prodotto (ordinato) algebrico \bullet , e che abbiamo ormai convenuto di scrivere come \otimes , di una generica forma per un'altra. Avremo dunque, per due forme antisimmetriche $\tau_{(\kappa)}$ e $\sigma_{(l)}$ date in quest'ordine, e sotto $\kappa+l \leq n$:

$$(1) \quad \tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(l)} =: \mathcal{A}(\tau_{(\kappa)} \otimes \sigma_{(l)}),$$

dove abbiamo scritto semplicemente come \mathcal{A} quello che, nel caso presente, è in realtà $\mathcal{A}_{(1.. \kappa, \kappa+1 \dots \kappa+l)}$. È importante rimarcare che la (1) definisce una $(\kappa+l)$ -forma antisimmetrica *anche se* i fattori $\tau_{(\kappa)}$ e/o $\sigma_{(l)}$ non lo sono; come pure che $\tau_{(\kappa)} \otimes \sigma_{(l)}$ non è in generale antisimmetrica, *anche se* $\tau_{(\kappa)}$ e/o $\sigma_{(l)}$ lo sono. Poiché \mathcal{A} è lineare e \otimes è distributivo a sinistra e a destra, altrettanto distributivo (a sinistra e a destra) risulta \wedge . Ancora in forza della linearità di \mathcal{A} , le parentesi alla sua destra nella (1) potrebbero omettersi, giuste le nostre abituali convenzioni.

Partendo dalla definizione (1), e ormai definitivamente supponendo antisimmetriche le forme-fattori, si possono a questo punto enunciare e dimostrare i due teoremi fondamentali sul prodotto esterno. Essi sono il teorema della **anticommutatività graduata** (graded, graduée, graduiert) **di** \wedge , espresso dalla

$$(2) \quad \tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(l)} = (-1)^{\kappa l} \sigma_{(l)} \wedge \tau_{(\kappa)}$$

⁹ L'introduzione del prodotto esterno è la chiave della cosiddetta "algebra esterna" su $\{\wedge^\kappa(E)\}_{\kappa=0, \dots, n}$ dovuta al matematico e sanscritista H.G. Grassmann (1809-1877), e perciò anche nota come **algebra di Grassmann**.

(sotto $\kappa+\iota \leq n$, che $\Rightarrow n \geq 2$ se $\kappa, \iota \geq 1$);

e quello della **associatività di \wedge** , espresso dalla

$$(3) \quad (\tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(\iota)}) \wedge \rho_{\lambda} = \tau_{(\kappa)} \wedge (\sigma_{(\iota)} \wedge \rho_{\lambda})$$

(sotto $\kappa+\iota+\lambda \leq n$, che $\Rightarrow n \geq 3$ se $\kappa, \iota, \lambda \geq 1$).

Le dimostrazioni sono verifiche materiali. Ricordiamo innanzitutto l'espressione di $\mathcal{A}\tau_{X(1) \dots X(\kappa)}$ per una generica κ -forma $\tau_{(\kappa)}$, che scriviamo ora come:

$$(4) \quad \mathcal{A}\tau_{X(1) \dots X(\kappa)} = (\kappa!)^{-1} \sum_{\langle i \rangle} e_{1 \dots \kappa}^{i^1 \dots i^{\kappa}} \tau_{X(i_1) \dots X(i_{\kappa})},$$

dove la somma è sui $\kappa!$ indici $\langle i \rangle$ che sono permutazioni di $\langle 1, \dots, \kappa \rangle$. Cominciando con la (2), abbiamo:

$$(5) \quad (\tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(\iota)})_{X(1) \dots X(\kappa)X(\kappa+1) \dots X(\kappa+\iota)} = ((\kappa+\iota)!)^{-1} \sum_{\langle i \rangle} e_{1 \dots \kappa+\iota}^{i^1 \dots i^{(\kappa+\iota)}} \tau_{X(i_1) \dots X(i_{\kappa})} \sigma_{X(i_{\kappa+1}) \dots X(i_{\kappa+\iota})},^{10}$$

dove la somma è sui $(\kappa+\iota)!$ indici $\langle i \rangle$ che sono permutazioni di $\langle 1, \dots, \kappa+\iota \rangle$. Poiché $e_{1 \dots \kappa+\iota}^{i^1 \dots i^{(\kappa+\iota)}} = (-1)^{\kappa \iota} e_{1 \dots \kappa+\iota}^{i^{(\kappa+1)} \dots i^{(\kappa+1)} i^1 \dots i^{\kappa}}$, rinominando gli indici si conclude che il 2° membro della (5) è uguale a $(-1)^{\kappa \iota} ((\kappa+\iota)!)^{-1} \sum_{\langle i \rangle} e_{1 \dots \kappa+\iota}^{i^1 \dots i^{(\kappa+1)}} \sigma_{X(i_1) \dots X(i_{\iota})} \tau_{X(i_{(\iota+1)}) \dots X(i_{(\iota+\kappa)})} = (-1)^{\kappa \iota} (\sigma_{(\iota)} \wedge \tau_{(\kappa)})_{X(1) \dots X(\iota)X(\iota+1) \dots X(\iota+\kappa)}$, qed. Si noti che l'anticommutatività graduata di \wedge si riduce all'anticommutatività sse κ e ι sono entrambi dispari, mentre \wedge è commutativo negli altri tre casi. In particolare, $\tau_{(1)} \wedge \tau_{(1)} = -\tau_{(1)} \wedge \tau_{(1)} = 0$.

Quanto alla associatività (3), si ha che $(\tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(\iota)})_{X(1) \dots X(\kappa)X(\kappa+1) \dots X(\kappa+\iota)} \wedge \rho_{X(\kappa+\iota+1) \dots X(\kappa+\iota+\lambda)}$ è uguale alla stessa espressione con \otimes al posto del *secondo* \wedge , premettendo \mathcal{A} al tutto e tenendo conto della (5); quindi esso è uguale a $((\kappa+\iota+\lambda)!(\kappa+\iota)!)^{-1} \sum_{\langle j \rangle} e_{1 \dots \kappa+\iota+\lambda}^{j^1 \dots j^{(\kappa+\iota+\lambda)}} \sum_{\langle i \rangle} e_{j^1 \dots j^{(\kappa+\iota)}}^{i^1 \dots i^{(\kappa+\iota)}} \cdot \tau_{X(i_1) \dots X(i_{\kappa})} \sigma_{X(i_{\kappa+1}) \dots X(i_{\kappa+\iota})} \rho_{X(j_{(\kappa+\iota+1)}) \dots X(j_{(\kappa+\iota+\lambda)})}$, dove la somma esterna è sui $(\kappa+\iota+\lambda)!$ indici $\langle j \rangle$ che sono permutazioni di $\langle 1, \dots, \kappa+\iota+\lambda \rangle$. Si verifica facilmente che vi sono $(\kappa+\iota)!$ addendi uguali (infatti $\tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(\iota)}$ è una $(\kappa+\iota)$ -forma antisimmetrica), per cui il risultato finale è $((\kappa+\iota+\lambda)!)^{-1} \sum_{\langle j \rangle} e_{1 \dots \kappa+\iota+\lambda}^{j^1 \dots j^{(\kappa+\iota+\lambda)}} \tau_{X(j_1) \dots X(j_{\kappa})} \sigma_{X(j_{(\kappa+1)}) \dots X(j_{(\kappa+\iota)})} \rho_{X(j_{(\kappa+\iota+1)}) \dots X(j_{(\kappa+\iota+\lambda)})}$. La struttura di quest'ultima espressione rende evidente la tesi. In conclusione i due membri della (3) si possono scrivere senza le parentesi, e risulta (ricordando la simile associatività di \otimes):

$$(6) \quad \tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(\iota)} \wedge \rho_{\lambda} = \mathcal{A}(\tau_{(\kappa)} \otimes \sigma_{(\iota)} \otimes \rho_{\lambda}) (\equiv \mathcal{A} \tau_{(\kappa)} \otimes \sigma_{(\iota)} \otimes \rho_{\lambda}).$$

Quest'ultima si generalizza immediatamente al caso di $m > 3$ di fattori ${}_{1}\tau, \dots, {}_m\tau$ di gradi ${}_{1}\kappa, \dots, {}_m\kappa$, sotto la condizione $\sum_{s=1}^m {}_s\kappa \leq n$ (che $\Rightarrow n \geq m$ se ${}_{1}\kappa \geq 1, \dots, {}_m\kappa \geq 1$), secondo la

$$(6') \quad {}_{1}\tau \wedge \dots \wedge {}_m\tau \equiv \bigwedge_{s=1}^m {}_s\tau = \mathcal{A} {}_{1}\tau \otimes \dots \otimes {}_m\tau \equiv \mathcal{A} \otimes_{s=1}^m {}_s\tau.$$

¹⁰ Secondo la nostra abituale convenzione, non abbiamo indicato il grado $\kappa+\iota$ della forma $\tau_{(\kappa)} \wedge \sigma_{(\iota)}$ a 1° membro della (2).

Ovviamente la (6') si riduce alla (1) per $m = 2$. La possibilità che qualche forma sia di grado 0 sarà esclusa nel seguito, non in quanto non sia ammissibile, ma soltanto perché genera una situazione banale. Si noterà, infine, che quanto fin qui definito e dimostrato sul prodotto esterno resterebbe valido anche se le forme-fattori *non* fossero antisimmetriche (caso che tuttavia escludiamo qui).

Supporremo adesso che le $m \geq 2$ forme a 1° membro della (6') siano tutte di grado 1 (quindi che $m \leq n$). Utilizzando per brevità, in questo caso, la convenzione di Einstein per la loro rappresentazione (in una data base di E), cioè ${}_s\tau x = {}_s\tau_h x^h$ (somma su h da 1 a n), ove ${}_s\tau_h [x^h]$ è la componente covariante [controvariante] di ${}_s\tau$ [di x], abbiamo:

$$(7) \quad m!(\bigwedge_{s=1}^m {}_s\tau)x_{(1)} \dots x_{(m)} = {}_1\tau_{h_1} \dots {}_m\tau_{h_m} \sum_{\langle i \rangle} e_{1 \dots m}^{i_1 \dots i_m} x_{(i_1)}^{h_1} \dots x_{(i_m)}^{h_m},$$

dove la somma è sugli indici $\langle i \rangle$ che sono permutazioni di $\langle 1, \dots, m \rangle$, e si somma alla Einstein da 1 a n sugli indici ripetuti h_1, \dots, h_m . Questa vale anche per $m = 1$ se si interpreta $\bigwedge_{s=1}^1 {}_s\tau$ come ${}_1\tau \equiv \tau$, riducendosi in tal caso alla $\tau x = \tau_h x^h$. Inoltre, essa vale per reali ${}_1\tau_{h_1}, \dots, {}_m\tau_{h_m}$ arbitrari, e quindi può risciversi, fissando i valori degli indici h_1, \dots, h_m , come

$$(8) \quad m! \bigwedge_{s=1}^m x_{(s)}^{h_s} = \sum_{\langle i \rangle} e_{1 \dots m}^{i_1 \dots i_m} x_{(i_1)}^{h_1} \dots x_{(i_m)}^{h_m},^{11}$$

ove il $\langle n, m \rangle$ -indice $\langle h \rangle$ può supporre stretto senza limitazioni di generalità perché in caso contrario i due membri della precedente sarebbero nulli. Ovvero, in forma più simmetrica,

$$(8bis) \quad m! \bigwedge_{s=1}^m x_{(j_s)}^{h_s} = \sum_{O(i)=O(j)} e_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} x_{(i_1)}^{h_1} \dots x_{(i_m)}^{h_m} \equiv \\ \equiv \sum_{O(i)=O(h)} e_{i_1 \dots i_m}^{h_1 \dots h_m} x_{(j_1)}^{i_1} \dots x_{(j_m)}^{i_m}$$

(l'ultima identità si verifica agevolmente). Ponendo in particolare $x_{(j_s)} = e_{j_s}$ per $1 \leq s \leq m$, nella prima (o nella seconda) delle (8bis) abbiamo:

$$(9) \quad m! \bigwedge_{s=1}^m \delta_{j_s}^{h_s} = \sum_{O(i)=O(j)} e_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_m} \delta_{i_1}^{h_1} \dots \delta_{i_m}^{h_m} = e_{j_1 \dots j_m}^{h_1 \dots h_m}.^{12}$$

Supponendo poi $\langle h \rangle \equiv \langle \alpha \rangle$ strettamente ordinato (sempre per $m \geq 1$), troviamo

$$(10) \quad m! \bigwedge_{s=1}^m x_{(s)}^{\alpha_s} = \sum_{O(i)=\langle \alpha \rangle} e_{i_1 \dots i_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_m} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(m)}^{i_m} \equiv \Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(m)}.$$

Scrivendo ormai κ in luogo di m , si vede dunque che, per $1 \leq \kappa \leq n = \dim E$, $\kappa! \bigwedge_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{\alpha_s}$ coincide con la κ -forma antisimmetrica canonica $\Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$ dello stesso $\langle n, \kappa \rangle$ -indice $\langle \alpha \rangle$, e nella stessa base di E. Per un dato $\langle n, \kappa \rangle$ -indice stretto $\langle h \rangle$, la produttoria $\bigwedge_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{h_s}$ può anche scriversi come $\bigwedge^{(h)} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$. Allora la (10) assume l'aspetto più simmetrico

¹¹ È chiaro che x^h può considerarsi la 1-forma che assume il valore x^h (componente ${}^{(h)}$ controvariante, nella prefissata base di E, di x), in $x \in E$.

¹² La (9) si può verificare anche in modo diretto, tornando alla definizione (1) di prodotto esterno. Si ha $m! \bigwedge_{s=1}^m \delta_{j_s}^{h_s} = \sum_{\pi} \text{sign} \pi \otimes_{s=1}^m \delta_{\pi(j_s)}^{h_s} \equiv \sum_{\pi} \text{sign} \pi \prod_{s=1}^m \delta_{\pi(j_s)}^{h_s} = e_{j_1 \dots j_m}^{h_1 \dots h_m}$, qed. L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che la somma alla sua sinistra è il determinante della $m \times m$ -matrice $\{\delta_{j_p}^{h_q}\}$ (con p indice di riga e q indice di colonna, o viceversa), determinante che vale appunto $e_{j_1 \dots j_m}^{h_1 \dots h_m}$.

$$(10') \quad \kappa! \Lambda^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} \equiv \Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}.$$

Confrontando a questo punto la (10) con la (4.4.2, 15) per $\langle i \rangle \equiv \langle \alpha \rangle$, si vede che $\mathcal{A}x_{(1)}^{\alpha 1} \dots x_{(\kappa)}^{\alpha \kappa} = (\kappa!)^{-1} \Delta^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} \equiv \Lambda^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$, e quindi anche che

$$(11) \quad \mathcal{A}x_{(1)}^{i1} \dots x_{(\kappa)}^{i\kappa} = \Lambda^{\langle i \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$$

per ogni indice stretto $\langle i \rangle$.¹³ In definitiva, con l'introduzione del prodotto esterno, e sulla base della (11), le due rappresentazioni (4.4.2, 16 e 18) si possono riscrivere nella forma:

$$(12) \quad v_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}} = \sum_{\langle \alpha \rangle} \circ v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} \Lambda_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{\alpha s} \quad (\equiv \sum_{\langle \alpha \rangle} \circ v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} \Lambda^{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}),$$

e rispettivamente

$$(13) \quad v_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}} = \sum_{\langle i \rangle} v_{i1 \dots i\kappa} \Lambda_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{is} \quad (\equiv \sum_{\langle i \rangle} v_{i1 \dots i\kappa} \Lambda^{\langle i \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}),$$

controparti antisimmetriche delle (4.4.2, 6bis e 8bis). Riassumendo, abbiamo le seguenti relazioni coinvolgenti il solo simbolo di Kronecker: (a) $\Lambda_{s=1}^{\kappa} \delta_{\beta s}^{\alpha s} = \det\{\delta_{\beta p}^{\alpha q}\}/\kappa! \equiv \delta_{\langle \beta \rangle}^{\langle \alpha \rangle}/\kappa!$; (b) $\Lambda_{s=1}^{\kappa} \delta_{js}^{is} = \det\{\delta_{jp}^{iq}\}/\kappa! \equiv e_{j1 \dots j\kappa}^{i1 \dots i\kappa}/\kappa!$; (c) posto $\langle \alpha \rangle =: O\langle i \rangle$ e $\langle \beta \rangle =: O\langle j \rangle$, $\det\{\delta_{jp}^{iq}\} = \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle) \det\{\delta_{\beta p}^{\alpha q}\}$; (d) $\Lambda_{s=1}^{\kappa} \delta_{js}^{is} = \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle) \Lambda_{s=1}^{\kappa} \delta_{\beta s}^{\alpha s} \equiv \text{sign}\pi(\langle i \rangle | \langle j \rangle) \delta_{\langle \beta \rangle}^{\langle \alpha \rangle}/\kappa!$.¹⁴

Consideriamo adesso una somma del tipo $(\dagger) \sum_{\langle i \rangle} \hat{v}_{i1 \dots i\kappa} \Lambda^{\langle i \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$, dove $\langle i \rangle$ è stretto e i $\hat{v}_{i1 \dots i\kappa}$ sono D_n^{κ} coefficienti *arbitrari*. Evidentemente tale somma è ancora una κ -forma antisimmetrica. Ci si chiede come i coefficienti della sua 1^a, e rispettivamente 2^a, rappresentazione canonica – diciamo $\circ v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$ e rispettivamente $v_{i1 \dots i\kappa}$ – si esprimano in termini dei $\hat{v}_{i1 \dots i\kappa}$. Un facile calcolo prova che

$$(141) \quad \circ v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} = \sum_{O\langle i \rangle = \langle \alpha \rangle} e_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}^{i1 \dots i\kappa} \hat{v}_{i1 \dots i\kappa},$$

e rispettivamente

$$(142) \quad v_{i1 \dots i\kappa} = (\kappa!)^{-1} \sum_{O\langle j \rangle = O\langle i \rangle} e_{i1 \dots i\kappa}^{j1 \dots j\kappa} \hat{v}_{j1 \dots j\kappa},$$

ove nella (142) la somma è sugli indici $\langle j \rangle$ che sono permutazioni dell'indice $\langle i \rangle$. È chiaro che dando una κ -forma antisimmetrica mediante la (\dagger) non se ne definiscono in modo univoco i coefficienti $\hat{v}_{i1 \dots i\kappa}$; ma se si conviene in partenza che questi siano *antisimmetrici*, allora la (142) dà $v_{i1 \dots i\kappa} = \hat{v}_{i1 \dots i\kappa}$. Vale a dire, se una κ -forma antisimmetrica è data come somma del tipo (\dagger) sotto il vincolo che i coefficienti $\hat{v}_{i1 \dots i\kappa}$ siano antisimmetrici, questi sono unicamente determinati, e coincidono con quelli della sua 2^a rappresentazione canonica, cioè con le componenti $v_{i1 \dots i\kappa}$.¹⁵ È anche chiaro che richiedendo l'invarianza di una κ -forma antisimmetrica espressa secondo la (\dagger) non si potrà più

¹³ A titolo di esercizio, il lettore può provarsi a reinterpretare nella stessa chiave l'alternativa notazionale $\mathcal{S}x_{(1)}^{i1} \dots x_{(\kappa)}^{i\kappa}$ vs. $\bigvee_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{is}$, avendo introdotto nel modo ovvio un prodotto \vee tra forme simmetriche, *commutativo* ed *associativo*.

¹⁴ Le analoghe relazioni nel caso simmetrico sono, avendo posto per brevità $\langle \mathfrak{A} \rangle =: O\langle I \rangle$ e $\langle \mathfrak{B} \rangle =: O\langle J \rangle$, da una parte $\bigvee_{s=1}^{\kappa} \delta_{js}^{is} \equiv \bigvee_{s=1}^{\kappa} \delta_{\mathfrak{B}s}^{\mathfrak{A}s}$, e dall'altra $\bigvee_{s=1}^{\kappa} \delta_{js}^{is} \equiv \delta_{\langle \mathfrak{B} \rangle}^{\langle \mathfrak{A} \rangle} \prod_{t=1}^n p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle)!/\kappa!$.

¹⁵ Mutatis mutandis, conclusioni analoghe valgono nel caso delle κ -forme simmetriche.

ricavare la legge di trasformazione dei suoi coefficienti a fronte di un cambiamento di base, perché quei coefficienti non sono più unicamente determinati; si avranno soltanto $C_n^\kappa < D_n^\kappa$ “condizioni di compatibilità”, tra i D_n^κ coefficienti $v_{i_1 \dots i_\kappa}^\wedge$, che assicurano l’invarianza dei valori della forma e che diventano l’usuale legge di κ -cogredienza sse i coefficienti sono a priori antisimmetrici.

Fino a questo punto abbiamo limitato la nostra illustrazione dell’algebra di Grassmann alle $\langle a=\kappa \geq 0, b=0 \rangle$ -forme antisimmetriche sullo spazio lineare n -dim E . Nella S.sez. 4.3.1 abbiamo tuttavia accennato a come passare dall’algebra delle $\langle a \geq 0, b \geq 0 \rangle$ -forme su E , generico spazio lineare n -dim su \mathbb{R} , a quella ad essa isomorfa dei corrispondenti $\langle a, b \rangle$ -tensori, rinviando per i dettagli all’analogo passaggio dall’algebra delle κ -forme su E n -dim *pseudoeuclideo* a quella dei corrispondenti κ -tensori, che abbiamo diffusamente descritto nella Sez. 3.1. In questo senso, l’algebra sulle $\langle a, b \rangle$ -forme si riduce a una “realizzazione” – o a un modello nel linguaggio dei logici – di quella degli $\langle a, b \rangle$ -tensori, che come sappiamo esiste (teorema (T_0) della S.sez. 3.1.2) ed è unica a meno di specifici isomorfismi. Poiché le $\langle a, b \rangle$ -forme considerate nella S.sez. 4.3.1 erano generiche, è legittimo supporle antisimmetriche e del tipo $\langle a, 0 \rangle$. Si può così passare dall’algebra delle $\langle a, 0 \rangle$ -forme antisimmetriche di cui abbiamo detto fin qui in questa sezione a quella più astratta dei corrispondenti $\langle a, 0 \rangle$ -tensori antisimmetrici, sfruttando la definizione (1) (o in generale (6’)) del prodotto esterno. Vi sono tuttavia modi più diretti per istituire *assiomaticamente* un’algebra siffatta (che esiste in base al teorema (T_0) ricordato più sopra), della quale quella delle forme antisimmetriche è una realizzazione. Ne presentiamo uno qui appresso.

Sia E il solito spazio lineare su \mathbb{R} ($n \geq 1$)-dimensionale di riferimento. Per ogni $\kappa = 0, 1, \dots, n$, si introducono: (i) uno spazio lineare su \mathbb{R} $'\wedge^\kappa(E)$ ¹⁶ e (ii), per $\kappa \geq 1$, un’applicazione κ -lineare e (completamente) antisimmetrica $'\wedge^\kappa : E^{*\kappa} \rightarrow '\wedge^\kappa(E)$, dove E^* è il duale di E . Per la definizione, l’insieme $\Sigma^{(\kappa)}$ delle combinazioni lineari di oggetti del tipo $'\wedge(x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}) \equiv '\wedge x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}$, con $x^{(s)} \in E^*$ ($\forall s$ tra 1 e κ), è incluso in $'\wedge^\kappa(E)$. Uniformandoci ad una notazione usata più sopra, scriveremo $'\wedge x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}$ come $'\wedge_{s=1}^{\kappa} x^{(s)}$. Si assumono allora i seguenti assiomi:

$$(15_1): '\wedge^0(E) \equiv \mathbb{R},$$

$$\text{quindi } \dim '\wedge^0(E) = 1;$$

$$(15_2): \text{ per } \kappa \geq 1, \Sigma^{(\kappa)} \text{ genera (} \equiv \text{ è linearmente completo in) } '\wedge^\kappa(E);$$

$$(15_3): \sum_{\kappa=0}^n \dim '\wedge^\kappa(E) = 2^n.$$

¹⁶ Qui e nel seguito scriviamo $'\wedge^\kappa(E)$ e non $\wedge^\kappa(E)$ per non creare equivoci con lo spazio delle $\langle \kappa, 0 \rangle$ -forme antisimmetriche. I due spazi $'\wedge^\kappa(E)$ e $\wedge^\kappa(E)$ verranno alla fine identificati, avendo messo in luce l’isomorfismo delle algebre sulle corrispondenti famiglie di spazi.

Sia ora $\{e_i\}$ una base di E e $\{e^i\}$ la base duale di E^* . In forza della linearità e dell'antisimmetria di $'\wedge^\kappa$, nonché di (15₂), il generico elemento di $'\wedge^{\kappa \geq 1}(E)$ può essere scritto come combinazione lineare delle C_n^κ “produttorie esterne” $'\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}$ al variare di $\langle \alpha \rangle$ in $S^{(so)}\langle n, \kappa \rangle$. Segue così che (°) $\dim '\wedge^\kappa(E) \leq C_n^\kappa$, ove si ha uguaglianza sse le $'\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}$ sono linearmente indipendenti. Questo prova innanzitutto che (†) $'\wedge^1(E) = E^*$. Per quanto riguarda $'\wedge^{2 \leq \kappa \leq n}(E)$, ricordiamo che $\sum_{\kappa=0}^n C_n^\kappa = 2^n$; in forza di (15₃) e della disuguaglianza (°), segue allora che $\dim '\wedge^\kappa(E) = C_n^\kappa$ per ogni $2 \leq \kappa \leq n$ (quindi anche per ogni $0 \leq \kappa \leq n$ in forza di (15₁) e della (†)), e per ogni n . Si conclude così che, per $1 \leq \kappa \leq n$, la famiglia delle C_n^κ produttorie esterne $'\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}$ di $'\wedge^\kappa(E)$, $\{'\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}\}_{\langle \alpha \rangle \in S^{(so)}\langle n, \kappa \rangle}$, ne è una base.¹⁷ $'\wedge^{1 \leq \kappa \leq n}(E)$ è così completamente definito in termini della base $\{e^i\}$ e dell'applicazione κ -lineare antisimmetrica $'\wedge^\kappa$, mentre $'\wedge^0(E)$ è dato dalla (15₁). A questo punto la famiglia di spazi lineari $\{'\wedge^\kappa(E)\}_{\kappa=0, \dots, n}$ possiede automaticamente un “prodotto esterno”, che denoteremo $'\wedge$ e scriveremo “tra”. Per $1 \leq \kappa \leq n$, $1 \leq \iota \leq n$, $\iota + \kappa \leq n$, ricorrendo ai soli generatori $'\wedge_{s=1}^\kappa x^{(s)}$ e $'\wedge_{s=1}^\iota y^{(s)}$ per definirlo, porremo $('\wedge_{s=1}^\kappa x^{(s)}) '\wedge (' \wedge_{s=1}^\iota y^{(s)}) =: '\wedge_{p=1}^{\kappa+\iota} z^{(p)}$ con $z^{(p)} =: x^{(p)}$ per $1 \leq p \leq \kappa$ e $z^{(p)} =: y^{(p-\kappa)}$ per $\kappa+1 \leq p \leq \kappa+\iota$, dove $x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}, y^{(1)}, \dots, y^{(\iota)}$, sono elementi di E^* . Con questa definizione, $'\wedge$ risulta automaticamente distributivo (a sinistra e a destra), associativo e anticommutativo graduato. Le facili dimostrazioni sono lasciate al lettore. Abbiamo così descritto un'algebra di Grassmann “astratta”, mediante assiomi, della quale quella delle forme antisimmetriche è una realizzazione.

Come è legittimo in forza delle precedenti definizioni, possiamo ora identificare $'\wedge^\kappa(E)$ con $\wedge^\kappa(E)$, e in particolare la base $\{'\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}\}_{\langle \alpha \rangle}$ del primo con la corrispondente base $\{\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}\}_{\langle \alpha \rangle}$ del secondo. Il generico elemento di $'\wedge^\kappa(E) \equiv \wedge^\kappa(E)$, cioè il $\langle \kappa, 0 \rangle$ -tensore antisimmetrico $v_{(\kappa)}$, si esprime allora come $\sum_{\langle \alpha \rangle} v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} \wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}$ per certi C_n^κ reali indicizzati $v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$ unicamente determinati. Per avere le componenti covarianti $(\beta_1 \dots \beta_\kappa)$ (con $\langle \beta \rangle$ strettamente ordinato) di $v_{(\kappa)}$, diciamo $v_{\beta 1 \dots \beta \kappa}$, basta sostituire nella precedente espressione $\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}$ con $(\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s})_{\beta 1 \dots \beta \kappa}$, che come sappiamo vale $(\kappa!)^{-1} e_{\beta 1 \dots \beta \kappa}^{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$. Otteniamo così

$$(16) \quad v_{\beta 1 \dots \beta \kappa} = (\kappa!)^{-1} \sum_{\langle \alpha \rangle} v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} e_{\beta 1 \dots \beta \kappa}^{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} = (\kappa!)^{-1} v_{\beta 1 \dots \beta \kappa};$$

¹⁷ Si può facilmente provare che la (†) $'\wedge x^{(1)} \dots x^{(\kappa)} = 0$ implica la dipendenza lineare delle $x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}$ (l'implicazione inversa è banale). Basta rappresentare queste ultime nella base $\{e^i\}$ e sostituire nella (†); si trova (††) $\sum_{\langle \alpha \rangle} \Delta_{\langle \alpha \rangle} x^{(1)} \dots x^{(\kappa)} '\wedge_{s=1}^{\kappa} e^{\alpha s} = 0$, dove la somma è sugli $\langle \alpha \rangle \in S^{(so)}\langle n, \kappa \rangle$ e $\Delta_{\langle \alpha \rangle} x^{(1)} \dots x^{(\kappa)}$ è il determinante costruito come $\Delta_{\langle \alpha \rangle} x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$ ma utilizzando le componenti covarianti delle $x^{(1)}, \dots, x^{(\kappa)}$. Poiché le $'\wedge_{s=1}^\kappa e^{\alpha s}$ formano una base di $\wedge^\kappa(E)$, la (††) implica le $\Delta_{\langle \alpha \rangle} x^{(1)} \dots x^{(\kappa)} = 0 \forall \langle \alpha \rangle \in S^{(so)}\langle n, \kappa \rangle$, e queste implicano a loro volta la dipendenza lineare in questione.

e questa prova, come era prevedibile, che i coefficienti $'v_{\beta 1 \dots \beta \kappa}$ coincidono con quelli della 1^a rappresentazione canonica di $v_{(\kappa)}$ che abbiamo denotato ${}^{\circ}v_{\beta 1 \dots \beta \kappa}$. Quanto alle componenti covarianti di $v_{(\kappa)}$, $v_{i 1 \dots i \kappa}$ ($\langle i \rangle$ stretto), da una parte $v_{i 1 \dots i \kappa} = e_{i 1 \dots i \kappa}^{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa}$ (non sommare sugli α) = $e_{i 1 \dots i \kappa}^{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} {}^{\circ}v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} / \kappa!$, e dall'altra $'v_{i 1 \dots i \kappa} = e_{i 1 \dots i \kappa}^{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} 'v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} / \kappa!$, da cui $v_{i 1 \dots i \kappa} = 'v_{i 1 \dots i \kappa}$. Si ritrova così la corrispondenza canonica generale tra $\langle \kappa, 0 \rangle$ -forme e $\langle \kappa, 0 \rangle$ -tensori espressa dall'uguaglianza delle loro componenti covarianti.

Resta a questo punto la questione della rappresentazione *intrinseca* di una κ -forma (o corrispondente κ -tensore) simmetrica o antisimmetrica. Torniamo a questo fine alla (4.3.1, 4), e quindi, nel caso ($a \equiv \kappa \geq 1, b=0$) e con le attuali notazioni, alla

$$(17) \quad \tau_{(\kappa)} = \sum_{\langle I \rangle} \tau_{I 1 \dots I \kappa} \otimes_{s=1}^{\kappa} e^{I s},$$

ove $e^{I s} \in E^*$ per ogni s compreso tra 1 e κ , e $\tau_{I 1 \dots I \kappa} = \tau e_{I 1} \dots e_{I \kappa}$. Beninteso la (17) va interpretata come abbreviazione per (*) "per ogni $x \equiv \langle x_{(1)}, \dots, x_{(\kappa)} \rangle \in E^{\kappa}$, $\tau x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} = \sum_{\langle I \rangle} \tau_{I 1 \dots I \kappa} \otimes_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{I s}$ ", dove $x_{(s)}^{I s}$ è al solito la componente ($I s$) di $x_{(s)}$ nella base $\{e\}$, cioè il valore di $e^{I s}$ in $x_{(s)}$.

È facile capire come la (17) si specializza nel caso che $\tau_{(\kappa)}$ sia simmetrica o antisimmetrica: basta agire su di essa con l'operatore \mathcal{S} o rispettivamente \mathcal{A} (rispetto all'indice $\langle I \rangle$). Nel primo caso ($\tau_{(\kappa)} \equiv \sigma_{(\kappa)}$), con le $\sigma_{I 1 \dots I \kappa}$ simmetriche, otteniamo:

$$(18_1) \quad \sigma_{(\kappa)} = \sum_{\langle I \rangle} \sigma_{I 1 \dots I \kappa} V_{s=1}^{\kappa} e^{I s} = \kappa! \sum_{\langle \mathfrak{A} \rangle} \sigma_{\mathfrak{A} 1 \dots \mathfrak{A} \kappa} (\prod_{t=1}^{\kappa} p_t(\langle \mathfrak{A} \rangle))^{-1} V_{s=1}^{\kappa} e^{\mathfrak{A} s},$$

e nel secondo ($\tau_{(\kappa)} \equiv v_{(\kappa)}$), con le $v_{i 1 \dots i \kappa}$ antisimmetriche,

$$(18_2) \quad v_{(\kappa)} = \sum_{\langle i \rangle} v_{i 1 \dots i \kappa} \wedge_{s=1}^{\kappa} e^{i s} = \kappa! \sum_{\langle \alpha \rangle} v_{\alpha 1 \dots \alpha \kappa} \wedge_{s=1}^{\kappa} e^{\alpha s}. \quad 18$$

In realtà i 2ⁱ membri della (18₁) [della (18₂)] sono κ -forme simmetriche [antisimmetriche] anche se in luogo delle $\sigma_{I 1 \dots I \kappa}$ vi sono $D'_n{}^{\kappa}$ reali arbitrari $\hat{\sigma}_{I 1 \dots I \kappa}$ [in luogo delle $v_{i 1 \dots i \kappa}$ vi sono $D_n{}^{\kappa}$ reali arbitrari $\hat{v}_{i 1 \dots i \kappa}$], purché soggetti ad assicurare l'invarianza della forma a fronte di cambiamenti di base. Le componenti covarianti (simmetriche) [(antisimmetriche)] di queste forme simmetriche [antisimmetriche] si ottengono con le solite procedure: mediante le $\sigma_{I 1 \dots I \kappa} = (\kappa!)^{-1} \prod_{t=1}^{\kappa} p_t(O\langle I \rangle)! \cdot \sum_{O\langle J \rangle=O\langle I \rangle} \hat{\sigma}_{J 1 \dots J \kappa}$ nel caso simmetrico, e mediante le $v_{i 1 \dots i \kappa} = (\kappa!)^{-1} \sum_{O\langle j \rangle=O\langle i \rangle} e_{i 1 \dots i \kappa}^{j 1 \dots j \kappa} \hat{v}_{j 1 \dots j \kappa}$ in quello antisimmetrico. Dalla prima (18₁) si trae poi $\sigma_{J 1 \dots J \kappa} = \sum_{\langle I \rangle} \sigma_{I 1 \dots I \kappa} (V_{s=1}^{\kappa} e^{I s})_{J 1 \dots J \kappa}$, e quindi

$$(19_1) \quad (V_{s=1}^{\kappa} e^{I s})_{J 1 \dots J \kappa} = \delta_{O\langle J \rangle}^{O\langle I \rangle} \prod_{t=1}^{\kappa} p_t(O\langle I \rangle)! / \kappa! \equiv V_{s=1}^{\kappa} \delta_{J s}^{I s},$$

e similmente, dalla prima (18₂),

¹⁸ Secondo la (*) del precedente paragrafo, la (prima) (18₂) equivale alla $v x_{(1)} \dots x_{(\kappa)} \equiv \sum_{\langle i \rangle} v_{i 1 \dots i \kappa} (\wedge_{s=1}^{\kappa} e^{i s})_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}} \forall x \in E^{\kappa}$. Agendo quindi con \mathcal{A} sulla (*) in cui si ponga v in luogo di τ e $\langle i \rangle$ in luogo di $\langle I \rangle$, e tenendo conto della invarianza di $v x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}$ sotto l'azione di \mathcal{A} , si ottiene appunto la (18₂) (in quanto $\mathcal{A} \otimes_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{i s} = \wedge_{s=1}^{\kappa} x_{(s)}^{i s} \equiv (\wedge_{s=1}^{\kappa} e^{i s})_{x_{(1)} \dots x_{(\kappa)}}$). Similmente si giustifica la (prima) (18₁).

$$(19_2) \quad (\wedge_{s=1}^{\kappa} e^{is})_{j_1 \dots j_{\kappa}} = e_{j_1 \dots j_{\kappa}}^{i_1 \dots i_{\kappa}} / \kappa! \equiv \wedge_{s=1}^{\kappa} \delta_{j_s}^{i_s}.$$

Concludiamo questa breve rassegna dell'algebra delle κ -forme simmetriche e antisimmetriche introducendo una nuova operazione sulla famiglia degli spazi delle forme/tensori antisimmetrici $\{\wedge^{\kappa}(E)\}_{\kappa=1, \dots, n}$ (per fissare le idee, e per uniformarci all'uso prevalente, ci riferiremo a $\wedge^{\kappa}(E)$ come spazio di κ -*tensori* antisimmetrici). Dovremo a questo scopo presupporre che lo spazio lineare n -dim E , fin qui privo di ogni addizionale struttura, sia ora (i) *pseudoeuclideo* (cioè $E \equiv E_{n,\pi}$, dove $0 \leq \pi \leq n$ è al solito l'indice di $E_{n,\pi}$), e (ii) *orientato* (cioè ci si limiti a considerare basi equiverse, ottenute l'una dall'altra mediante una matrice a determinante positivo). Con la condizione (i), la nozione di κ -tensore (che in questa sezione ha convenzionalmente significato $\langle \kappa, 0 \rangle$ -tensore) diventa intrinseca, nel senso che ciascuno dei κ indici delle sue componenti può essere arbitrariamente spostato in su o in giù per mezzo di una opportuna contrazione con le componenti del tensore fondamentale (o 2-forma bilineare simmetrica non singolare B). Con la condizione (ii), diventa inoltre disponibile un n -tensore (non un n -pseudotensore!) antisimmetrico di Ricci $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$.

Per introdurre l'operazione in oggetto, il punto di partenza è la già ricordata identità $C_n^{\kappa} = C_n^{n-\kappa}$, secondo la quale, per la data $n = \dim E$, un κ -tensore e un $(n-\kappa)$ -tensore antisimmetrici sono identificati dallo stesso numero di parametri indipendenti; ovvero, secondo la quale gli spazi $\wedge^{\kappa}(E)$ e $\wedge^{n-\kappa}(E)$ hanno la stessa dimensione. Definiremo dunque una specifica biiezione lineare base-indipendente di $\wedge^{\kappa}(E)$ – qui di seguito, per brevità \wedge^{κ} – su $\wedge^{n-\kappa}(E) \equiv \wedge^{n-\kappa}$, diciamo $*_{n,\kappa} : \wedge^{\kappa} \rightarrow \wedge^{n-\kappa}$. Questa applicazione porta il κ -tensore $v_{(\kappa)} \in \wedge^{\kappa}$ nel $(n-\kappa)$ -tensore $\mu_{(n-\kappa)} = *_{n,\kappa} v_{(\kappa)} \in \wedge^{n-\kappa}$ secondo la regola seguente (che scriviamo sotto l'usuale convenzione di Einstein):

$$(20) \quad \mu^{j^1 \dots j^{(n-\kappa)}} =: N_{n,\kappa} v_{i^1 \dots i^{\kappa}} \varepsilon^{i^1 \dots i^{\kappa} j^1 \dots j^{(n-\kappa)}},$$

dove vale l'interpretazione standard della posizione verticale degli indici (in particolare le componenti controvarianti del tensore di Ricci sono date dalla (3.2.2, 7)), e $N_{n,\kappa}$ è un fattore di normalizzazione $\neq 0$, in generale dipendente da n e da κ , la cui scelta non ha qui molta importanza concettuale.

La linearità e la base-indipendenza (per basi equiverse) della trasformazione (20) sono evidenti. Quanto alla sua invertibilità rispetto alle $v_{i^1 \dots i^{\kappa}}$ (considerate come incognite per date $\mu^{j^1 \dots j^{(n-\kappa)}}$), tenendo conto della antisimmetria dei due tensori a 2° membro della (20) si dimostra facilmente che la sola soluzione del sistema omogeneo associato ($\mu^{j^1 \dots j^{(n-\kappa)}} = 0$) è quella banale. Quindi, se esistono per le date $\mu^{j^1 \dots j^{(n-\kappa)}}$, le $v_{i^1 \dots i^{\kappa}}$ sono uniche. A questo punto basta verificare che

$$(21) \quad v_{i^1 \dots i^{\kappa}} = M_{n,\kappa} \mu^{h^1 \dots h^{(n-\kappa)}} \varepsilon_{h^1 \dots h^{(n-\kappa)} i^1 \dots i^{\kappa}}$$

soddisfa la (20), essendone quindi l'unica soluzione, sse

$$(22) \quad M_{n,\kappa} = (N_{n,\kappa})^{-1} (-1)^{\kappa(n-\kappa)} / (\kappa!(n-\kappa)!).$$

La dimostrazione, fondata sulle formule di autocontrazione parziale (3.2.2, 9bis), è lasciata al lettore. Si conclude che $*_{n,\kappa}$ è realmente una biiezione; per brevità, essa si denota semplicemente $*_{\kappa}$ (sottintendendo il primo pedice n), e si dice κ -**stella di Hodge** (o semplicemente κ -**stella**); mentre l' $(n-\kappa)$ -tensore trasformato da $*_{\kappa}$ del κ -tensore di partenza si dice suo **duale** (o **coniugato**) di **Hodge** (o semplicemente suo duale (o coniugato)). Quanto al fattore di normalizzazione $N_{n,\kappa}$, esistono diverse convenzioni in proposito. Forse la più logica, che qui seguiremo, è quella di porre

$$(23) \quad N_{n,\kappa} =: (-1)^{\kappa(\kappa+1)/2} / (n-\kappa)!,$$

e quindi, per la (22), $M_{n,\kappa} = (-1)^{\kappa(\kappa+1)/2 + \kappa(n-\kappa)} / \kappa!$. Si verifica facilmente che, con questa convenzione, la $*_{n-\kappa} \circ *_{\kappa}: \Lambda^{\kappa} \rightarrow \Lambda^{n-(n-\kappa)} \equiv \Lambda^{\kappa}$ è uguale a $(-1)^{n(n+1)/2} \text{Id}(\Lambda^{\kappa})$ (ove $\text{Id}(\Lambda^{\kappa})$ è l'identità su Λ^{κ}), e quindi a $\text{Id}(\Lambda^{\kappa})$ a meno del fattore-segno $(-1)^{n(n+1)/2}$ indipendente da κ .¹⁹ Si noti infine che se non ci si limita a trasformazioni equiverse, il duale del κ -tensore $v_{i_1 \dots i_{\kappa}}$ è in realtà un $(n-\kappa)$ -p(seudo)tensore $\mu^{j_1 \dots j_{n-\kappa}}$; la (21) torna allora a dare un tensore, come prodotto di due p.tensori. Lo stesso avviene se l'oggetto di partenza è un κ -p.tensore, e la (21) torna a dare un p.tensore.

Diamo l'esempio più noto ed elementare della dualità di Hodge. Per $n = 3$, $\kappa = 2$ (quindi $N_{3,2} = -1$, $M_{3,2} = -1/2$), si ha $\mu^r = -v_{ik}\varepsilon^{ikr}$, che si inverte in $v_{ik} = -\varepsilon_{rik}\mu^r/2$. Considerata come operatore lineare su un generico vettore v , la 2-forma antisimmetrica $v_{(2)}$ rappresenta una **omografia assiale**, della quale il vettore di componenti $\mu^r/2$ è la **rotazione**; detto diversamente, $v_{ik}v^k = -\varepsilon_{rik}\mu^r v^k/2 = \varepsilon_{irk}\mu^r v^k/2 = (1/2)(\mu \times v)_i$, dove \times è il prodotto vettore standard in E_3 . Quindi l'assiale in oggetto può scriversi come $(1/2)\mu \times$.²⁰ Applicando di nuovo la Hodge-dualità a $\mu_{(1)} \equiv *_{2}v_{(2)}$, e scrivendo $*_{1}\mu_{(1)}$ (un 2-tensore) come $\rho_{(2)}$, si trova $\rho^{ik} = -\mu_r \varepsilon^{rik}/2 = v^{pq} \varepsilon_{pqr} \varepsilon^{rik}/2 = v^{ik}$; cioè $*_{1}*_{2}v_{(2)} = v_{(2)}$, in accordo con il fatto che $(-1)^{3(3+1)/2} = 1$.

Più in generale, per $\kappa = n - 1$, risulta

$$(24) \quad \mu^r = (-1)^{n(n-1)/2} v_{i_1 \dots i_{(n-1)}} \varepsilon^{i_1 \dots i_{(n-1)} r},$$

che si inverte nella

$$(25) \quad v_{i_1 \dots i_{(n-1)}} = (-1)^{n(n+1)/2-1} \mu^r \varepsilon_{r i_1 \dots i_{(n-1)}} / (n-1)!.$$

¹⁹ Questo fattore vale -1 per $n = 1, 2, 5, 6, 9, 10, \dots$ e $+1$ per $n = 3, 4, 7, 8, 11, 12, \dots$

²⁰ Come è ben noto, una generica omografia $\omega_{(2)}$ (\equiv 2-tensore di componenti $\omega_{(ik)}$) può decomporsi in unico modo nella somma di una "dilatazione" σ (2-tensore simmetrico di componenti $\omega_{(ik)} = (\omega_{ik} + \omega_{ki})/2$) e di un'assiale (2-tensore antisimmetrico di componenti $\omega_{[ik]} = (\omega_{ik} - \omega_{ki})/2$); per $n = 3$, quest'ultima ha rotazione di componenti $\varphi^r = -\omega_{[ik]} \varepsilon^{ikr}/2$ (quindi $\varphi^1 = \omega_{[32]}$, ecc., in componenti cartesiane standard), per cui si può scrivere $\omega_{(2)} = \sigma + \varphi \times$. Questi concetti giocano un ruolo centrale, ad esempio, nello studio della deformazione regolare di un continuo tridimensionale. Ricordiamo che fino a pochi decenni fa, e soprattutto nell'Europa continentale, il prodotto vettore \times in E_3 si denotava \wedge .

Passando da uno spazio pseudoeuclideo ad una varietà differenziabile pseudoriemanniana, la precedente definizione (20) di duale di un κ -tensore antisimmetrico resta possibile localmente, ma non, in generale, globalmente: in tal caso, si deve richiedere che la varietà sia orientabile. Torneremo più oltre su questo punto.

4.5) INTRODUZIONE AL CALCOLO DIFFERENZIALE ESTERNO

Questa Sez. 4.5 introduce all'analisi, differenziale e integrale, con le cosiddette "forme differenziali esterne (FDE) su varietà", alla quale l'algebra di Grassmann (Sez. 4.4) è propedeutica. Converrà qui limitarci a considerare $\langle r, n \rangle$ -varietà elementari, cioè varietà $\mathbb{R}^n \equiv M$ dotate (tra i possibili altri) di un $\langle r, n \rangle$ -atlante di carte aventi lo stesso dominio.¹ Nonostante i limiti che ciò comporta, il restringersi a $\langle r, n \rangle$ -varietà elementari consente di accedere in modo abbastanza semplice a buona parte di questo fondamentale capitolo dell'analisi moderna.

Come ogni teoria matematica, anche quella delle FDE su varietà trova la misura del suo successo nella capacità di riflettere una realtà idealizzata, inclusa la percezione che di tale realtà registriamo a livello intuitivo. Bisogna peraltro riconoscere che a oltre mezzo secolo dalla sua creazione,² l'analisi con le FDE su varietà non è ancora entrata a pieno titolo nella cultura matematica di base del fisico teorico (e nemmeno del fisico matematico) medio. Probabilmente ciò dipende dal fatto che in alcuni dei suoi impieghi – ad esempio nella teoria delle equazioni e dei sistemi differenziali parziali, o in una parte significativa della geometria differenziale – il suo ruolo di strumento unificante per la formulazione/risoluzione di una moltitudine di problemi sfugge ad un giudizio superficiale; in questi casi, detta analisi appare infatti come una alternativa elegante, una sorta di linguaggio nuovo ma non irrinunciabile rispetto a metodi più tradizionali. A tali riserve sembra invece meno esposto il "calcolo integrale esterno su varietà", in particolare per quanto attiene al fondamentale teorema di Poincaré-Stokes (v. Cap. 8). Qui il ricorso alle FDE è più sostanziale, se non altro perché la nozione di "estensione con segno" (di un elemento di varietà) si esprime in modo naturale come una FDE.

¹ Il dominio comune di tali carte deve evidentemente coincidere con il supporto \mathcal{M} di M ; quindi le carte in oggetto devono essere del tipo $C = (\mathcal{M}, \lambda)$, dove λ è al solito la mappa di C , sotto la condizione che $\lambda' \circ \lambda^{-1}: \lambda(\mathcal{M}) \rightarrow \lambda'(\mathcal{M})$ sia un r -diffeomorfismo (globale) per qualsiasi coppia di carte $C = (\mathcal{M}, \lambda)$, $C' = (\mathcal{M}, \lambda')$ dell' $\langle r, n \rangle$ -atlante in oggetto. Un'altra proprietà delle varietà elementari n -dim, che vale la pena di ricordare, è la seguente. Essendo entrambe idempotenti a \mathbb{R}^n , due $\langle r, n \rangle$ -varietà elementari M_1 e M_2 sono idempotenti tra loro. Dovendo poi i codomini delle carte di una $\langle r, n \rangle$ -varietà elementare essere r -diffeomorfi tra loro e a \mathbb{R}^n , «esistono una carta $C_1 = (\mathcal{M}_1, \lambda_1)$ dell'atlante della prima varietà e una carta $C_2 = (\mathcal{M}_2, \lambda_2)$ di quello della seconda tali che le coordinate $x_1 = \lambda_1(p_1)$ di $p_1 \in \mathcal{M}_1$ nella prima carta sono funzioni lineari affini e invertibili delle coordinate $x_2 = \lambda_2(p_2)$ di $p_2 \in \mathcal{M}_2$ nella seconda.» Infatti, tra le carte dell'atlante di M_1 ve ne è una la cui mappa è una biiezione di \mathcal{M}_1 su \mathbb{R}^n , e tra quelle dell'atlante di M_2 ve ne è una la cui mappa è una biiezione di \mathcal{M}_2 su \mathbb{R}^n ; ma \mathbb{R}^n è trasformabile in se stesso, in infiniti modi, da una funzione lineare affine invertibile secondo $y = Ax + y_0$, dove A è un'arbitraria $n \times n$ -matrice non singolare e y_0 è un'arbitraria n -colonna, qed.

² Vedi É. Cartan, "Les systèmes différentielles extérieures et leur applications géométriques", Hermann 1945. Quest'opera, apparsa quando l'autore aveva 76 anni, riassume molto del suo lavoro precedente sui temi in oggetto.

4.5.1) DALLE FORME DIFFERENZIALI ESTERNE AL LEMMA DI POINCARÉ INVERSO

Torniamo per cominciare alla (4.3.1, 5) riferendola ad un tensore (o forma) τ di tipo $\langle a \equiv \kappa \geq 0, b=0 \rangle$ nel punto corrente p di \mathcal{M} . Questa forma sarà al solito denotata come $\tau_{(\kappa)}(p)$, e le sue componenti covarianti nella carta $C = (\mathcal{M}, \lambda)$ saranno scritte come ${}^C \tau^{\circ}_{i_1 \dots i_{\kappa}}(\lambda(p))$. Avremo quindi:

$$(1) \quad \tau_{(\kappa)}(p) = {}^C \tau^{\circ}_{i_1 \dots i_{\kappa}}(\lambda(p)) \, {}^C \eta^{i_1}|_p \otimes \dots \otimes {}^C \eta^{i_{\kappa}}|_p,$$

dove ${}^C \eta^i|_p$ è la componente controvariante ⁽¹⁾ dell'elemento della cobase canonica (v. S.sez. 4.2.2), e al solito al solito si sottintende la somma da 1 a n sugli indici ripetuti in basso e in alto. La (1) può essere riscritta in forma più snella come

$$(1') \quad \tau_{(\kappa)}(p) = \tau_{i_1 \dots i_{\kappa}}(x) \, dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\kappa}},$$

dove ${}^C \eta^i|_p$ è stato scritto come $d_p x^i$ e per brevità sono stati omissi i pedici $_p$ nei $d_p x^i$ e i due soprascritti C e ${}^{\circ}$ nelle ${}^C \tau^{\circ}_{i_1 \dots i_{\kappa}}$. Il prezzo di questa semplificazione notazionale è che il riferimento alla carta C , cioè alla sua mappa λ , è segnalato dal fatto che la (1') è una identità rispetto a $p \in \mathcal{M}$ se vi si scrive x come $\lambda(p)$; vale a dire, la mappa λ di C è quella biiezione che porta p in $x \in \mathbb{R}^n$. Il 2° membro della (1') è una κ -**forma differenziale**, o se si preferisce un $\langle a \equiv \kappa, 0 \rangle$ -tensore (del relativo spazio tangente della varietà, in x corrente su $\lambda(\mathcal{M})$ (o in p corrente su \mathcal{M})).

Consideriamo ora il caso particolare di una κ -forma $\tau_{(\kappa)}(p) \equiv v_{(\kappa)}(p)$ (completamente) antisimmetrica: la (1') diventa ($0 \leq \kappa \leq n$):

$$(2) \quad v_{(\kappa)}(p) = v_{i_1 \dots i_{\kappa}}(x) \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{\kappa}},$$

ove $v_{i_1 \dots i_{\kappa}}$ sono i valori di $v_{(\kappa)}$ nella κ -pla di elementi $\partial_p / \partial x^{i_1}, \dots, \partial_p / \partial x^{i_{\kappa}}$ della base canonica tangente (covariante), e quindi sono *antisimmetrici* negli indici i_1, \dots, i_{κ} (cfr. la prima (4.4.3, 18₂), che dà la 2^a rappresentazione canonica di una κ -forma antisimmetrica in una base cotangente). La (2) è un caso particolare della (1'), e il suo 2° membro è una κ -forma differenziale che si dice **esterna** per distinguerla da una forma differenziale generica (come “esterna” si dice l'algebra delle forme antisimmetriche per distinguerla da quella delle forme generiche). Nel seguito, ci occuperemo esclusivamente di κ -forme differenziali esterne, che diremo semplicemente “ κ -forme” sottintendendone i due attributi.

Sia h la CdC delle componenti $v_{i_1 \dots i_{\kappa}}(x)$ (come funzioni di x) sotto le usuali condizioni $0 \leq h \leq \kappa - 1$ se $1 \leq \kappa (\leq n)$ e $0 \leq h \leq \kappa$ se $\kappa = 0$. Di fatto, avremo bisogno che h sia almeno 1 (spesso che sia 2), e da questa richiesta conseguiranno corrispondenti richieste su r .³ Sotto queste condizioni, e avendo supposto $h = 1$ e $\kappa \leq n - 1$, definiamo:

³ Molti autori preferiscono eludere ogni problema a questo riguardo restringendosi al caso $r = \infty$ (varietà lisce o addirittura analitiche).

$$(3) \quad \partial v_{(k)} =: \partial v_{i_1 \dots i_k} / \partial x^s dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

(ove abbiamo ormai trascurato di evidenziare le variabili indipendenti p o x). L'espressione a 2° membro della (3) si dice **differenziale** (o talvolta **derivata**) della κ -forma $v_{(k)}$.⁴ È chiaro che l'operatore ∂ sullo spazio delle κ -forme $\wedge^{(k)}(E)$ è lineare. I reali a $\kappa+1$ indici $\partial v_{i_1 \dots i_k} / \partial x^s$ *non* sono necessariamente antisimmetrici nei loro indici né covarianti (come i reali $v_{i_1 \dots i_k}$); ma dimostreremo qui appresso che $\partial v_{(k)}$ risulta nondimeno *invariante* a fronte di un cambiamento di carta (diciamo, un cambiamento che effettua la trasformazione $x \mapsto x'$), e quindi che essa è una $(\kappa+1)$ -forma differenziale esterna.

Ove conveniente, denoteremo per brevità i multindici servendoci delle $\langle \dots \rangle$ invece che per esteso, ad es. scrivendo $\tau_{i_1 \dots i_k}$ come $\tau_{\langle i \rangle}$ ecc.; inoltre d'ora innanzi denoteremo le componenti di una forma rispetto a una nuova base *ponendo un apice sul multindice* piuttosto che sul simbolo della forma; ad es. scrivendo $v_{\langle i' \rangle}$ piuttosto che $v'_{\langle i \rangle}$ per denotare le componenti covarianti della κ -forma $v_{(k)}$ rispetto alla nuova base canonica $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Infine, sempre per brevità denoteremo gli elementi della matrice di transizione $\partial x^i / \partial x'^j$ come $\wp_{j'}^i$, le $\partial^2 x^i / \partial x'^s \partial x'^t$ come $\wp_{s't'}^i \equiv \wp_{t's'}^i$ e i prodotti $\wp_{j_1'}^{i_1} \dots \wp_{j_k'}^{i_k}$ come $\wp_{\langle j' \rangle}^{(i)}$. Con queste notazioni, la legge di κ -cogredienza per le componenti covarianti di $v_{(k)}$ si scrive:

$$(4) \quad v_{\langle i' \rangle} = \wp_{\langle i' \rangle}^{(j)} v_{\langle j \rangle}.$$

Similmente scrivendo $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ come $\wedge dx^{(i)}$, cioè sottintendendo che $\langle i \rangle$ è un $\langle n, \kappa \rangle$ -indice, la (3) diventa

$$(3') \quad \partial v_{(k)} = \partial v_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{(i)}.$$

Procediamo ora alla dimostrazione del precedente asserto (che $\partial v_{(k)}$ è invariante), in effetti una verifica materiale. Abbiamo: $\partial v_{\langle i' \rangle} / \partial x'^s = \wp_{s'}^s \wp_{\langle i' \rangle}^{(j)} \partial v_{\langle j \rangle} / \partial x^s + [\wp_{s'i_1'}^{j_1} \wp_{2'}^{j_2} \dots \wp_{i_k'}^{j_k} + \dots \wp_{i_1'}^{j_1} \dots \wp_{i_{(k-1)'}^{j_{(k-1)}}} \wp_{s'i_k'}^{j_k}] v_{\langle j \rangle}$, e quindi

$$(5) \quad \partial v_{\langle i' \rangle} / \partial x'^s dx'^s \wedge \wedge dx^{(i')} = \partial v_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{(j)} + [\dots]^{(j)} v_{\langle j \rangle} = \partial v_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{(j)},$$

perché i contenuti delle $[\dots]^{(j)}$ sono somme di κ termini che risultano tutti nulli, includendo ciascuno (tra gli altri fattori) il prodotto di un fattore simmetrico per un fattore antisimmetrico rispetto alla stessa coppia di indici con apice (ad esempio, il primo di questi termini contiene il prodotto

⁴ Nel caso particolare di una 0-forma $v_{(0)} = f$, cioè di una funzione (di CdC $h \geq 1$) di n variabili reali, la (3) definisce il suo differenziale standard; e ciò vale più in particolare quando $f = x^i$; quindi $\partial f = df$ e $\partial x^i = dx^i$. Ciò induce parecchi autori a *non* usare un nuovo simbolo (come ∂) in luogo dell'usuale d . Indubbiamente tale scelta snellisce la notazione, ma è in conflitto con quella in uso nell'Analisi classica per i differenziali di ordine superiore al primo di una 0-forma. Infatti il differenziale secondo di f (per $h \geq 2$) è $d^2 f = \partial^2 f / \partial x^s \partial x^t dx^s dx^t$ (cioè $\partial^2 f / \partial x^s \partial x^t dx^s \otimes dx^t$ nella presente notazione per le 2-forme) mentre $\partial^2 f = \partial^2 f / \partial x^s \partial x^t dx^s \wedge dx^t$; e quest'ultimo (vedi oltre) è identicamente nullo, mentre $d^2 f$ ovviamente non lo è. Tra le due possibilità abbiamo preferito quella adottata nel testo.

$\oint_{S^{i1}} dx^{i1} \wedge dx^{i1} \equiv 0$). La (5) esprime dunque la nostra tesi, che è stata ottenuta sfruttando soltanto la (4) e il carattere completamente antisimmetrico della produttoria wedge di 1-forme.

Proveremo ora che questo risultato si conserva valido per una κ -forma (invariante a fronte di cambiamenti di carta e) espressa dalla più generale:

$$(6) \quad v_{(\kappa)}(p) = v^{\wedge}_{i_1 \dots i_{\kappa}}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{\kappa}} \equiv v^{\wedge}_{\langle i \rangle} \wedge dx^{\langle i \rangle},$$

dove $\langle i \rangle$ è stretto e i coefficienti $v^{\wedge}_{i_1 \dots i_{\kappa}}$ sono D_n^{κ} funzioni di CdC 1 e per il resto arbitrarie; cioè che $\partial v^{\wedge}_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle}$ è anch'esso invariante a fronte di un cambiamento di carta. Per dimostrarlo, riscriviamo la $v_{(\kappa)}$ nella sua 2^a rappresentazione canonica utilizzando la (4.4.3, 14₂), quindi come $v_{(\kappa)} = v_{\langle i \rangle} \wedge dx^{\langle i \rangle}$ con $v_{\langle i \rangle} \equiv v_{i_1 \dots i_{\kappa}} =: e_{i_1 \dots i_{\kappa}}^{j_1 \dots j_{\kappa}} v^{\wedge}_{j_1 \dots j_{\kappa}} / \kappa! \equiv e_{\langle i \rangle}^{\langle j \rangle} v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \kappa!$, dove la somma è sugli indici stretti $\langle j \rangle$ per cui $O\langle j \rangle = O\langle i \rangle$. In questa rappresentazione, le $v_{\langle i \rangle}$ sono antisimmetriche e covarianti, e quindi $\partial v_{(\kappa)} = \partial v_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle}$ (cfr. la (3)) è invariante rispetto a cambiamenti di carta per quanto dimostrato nel paragrafo precedente. Proviamo ora che il 2° membro di quest'ultima uguaglianza non cambia sostituendovi $v_{\langle i \rangle}$ con $v^{\wedge}_{\langle i \rangle}$, cioè che esso è uguale a $\partial v^{\wedge}_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle}$. Innanzitutto è $\partial v_{\langle i \rangle} / \partial x^s = (\kappa!)^{-1} e_{\langle i \rangle}^{\langle j \rangle} \partial v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \partial x^s$ (sempre sommando sugli $\langle j \rangle$ per cui $O\langle j \rangle = O\langle i \rangle$), per cui, riadottando i segni di sommatoria per maggior chiarezza, abbiamo:

$$(7) \quad \partial v_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle} = (\kappa!)^{-1} \sum_{\langle i \rangle} \sum_{O\langle j \rangle = O\langle i \rangle} \sum_s e_{\langle i \rangle}^{\langle j \rangle} \partial v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle}.$$

Qui la somma su $\langle j \rangle$ può risciversi come $\sum_{O\langle j \rangle = O\langle i \rangle} \sum_s \partial v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle j \rangle}$. Denotiamo per brevità $(\dots)_{\langle j \rangle}$ l'addendo di indice stretto $\langle j \rangle$ $\sum_s \partial v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle j \rangle}$ di quest'ultima somma (addendo in cui non si deve sommare su $\langle j \rangle$); esso non dipende da $\langle i \rangle$, e quindi, avendo posto $\langle \alpha \rangle =: O\langle i \rangle$,

$$(7') \quad \begin{aligned} \partial v_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle} &= \sum_{\langle i \rangle} (\kappa!)^{-1} \sum_{O\langle j \rangle = \langle \alpha \rangle} (\dots)_{\langle j \rangle} = \sum_{\langle \alpha \rangle} \sum_{O\langle j \rangle = \langle \alpha \rangle} (\dots)_{\langle j \rangle} = \sum_{\langle j \rangle} (\dots)_{\langle j \rangle} \equiv \\ &\equiv \partial v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle j \rangle}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo membro siamo tornati a sottintendere la somma sugli indici ripetuti $\langle j \rangle$ e s. Ciò è precisamente quanto volevamo dimostrare. In conclusione, il differenziale di una κ -forma $\rho_{(\kappa)} \equiv v^{\wedge}_{\langle i \rangle} \wedge dx^{\langle i \rangle}$ del tipo (6) è dato dalla

$$(3'') \quad \partial \rho_{(\kappa)} \equiv \partial (v^{\wedge}_{\langle i \rangle} \wedge dx^{\langle i \rangle}) = \partial v^{\wedge}_{\langle j \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle j \rangle},$$

restando invariante rispetto a cambiamenti di carta (e quindi è a tutti gli effetti una $(\kappa+1)$ -forma). È anche confermata la natura lineare dell'operatore ∂ agente su una κ -forma antisimmetrica nella generale rappresentazione (6). Si noti infine che il differenziale della 1-forma $dx^i \forall i = 1, \dots, n$ (formalmente antisimmetrica) è nullo, $\partial(dx^i) \equiv 0$, perché $\partial 1 / \partial x^s \equiv 0$.

Per $\kappa + \kappa' \leq n$, consideriamo una κ -forma v (scriviamo qui così in luogo di $v_{(\kappa)}$ per alleggerire la simbolica), una κ' -forma v' , e la $(\kappa+\kappa')$ -forma $v \wedge v'$, e calcoliamo il differenziale di quest'ultima avendo supposto al solito v e v' di classe C^1 . Risulta:

$$(8) \quad \partial(v \wedge v') = \partial v \wedge v' + (-1)^\kappa v \wedge \partial v'.$$

Lasciamo al lettore la facile verifica di questa (8), che si ottiene facendo uso della 1^a rappresentazione canonica delle forme-fattori.⁵ A prima vista la (8) sembra mancare di simmetria, perché vi appare soltanto il grado della prima forma-fattore v (ma il prodotto wedge non è simmetrico!). Possiamo tuttavia subito verificarne la consistenza con l'anticommutatività graduata del prodotto wedge. Abbiamo infatti $v' \wedge v = (-1)^{\kappa \kappa'} v \wedge v'$, e quindi $\partial(v' \wedge v) = (-1)^{\kappa \kappa'} [\partial v \wedge v' + (-1)^\kappa v \wedge \partial v'] = (-1)^{\kappa \kappa' + (\kappa+1)\kappa'} v' \wedge \partial v + (-1)^{\kappa \kappa' + \kappa + \kappa(\kappa'+1)} \partial v' \wedge v \equiv (-1)^{\kappa'} v' \wedge \partial v + \partial v' \wedge v$, come appunto deve essere secondo la (8) scambiandovi v con v' e κ con κ' . In particolare, ponendo nella (8) dx^i in luogo di v' e tenendo conto della $\partial(dx^i) \equiv 0 \forall i$, risulta $\partial(v \wedge dx^i) \equiv \partial v \wedge dx^i$.

A titolo di esercizio, il lettore può calcolare il differenziale di $N =: {}^1v \wedge \dots \wedge {}^m v$ (scriviamo i soprascritti a sinistra affinché non si confondano con indici) dove le ${}^{1 \leq \alpha \leq m} v$ sono 1-forme linearmente indipendenti (quindi N è una m -forma e $m \leq n$ se n è la dimensione dello spazio-base). Il risultato è $\partial N = \sum_{\alpha=1}^m (-1)^{\alpha-1} \partial^\alpha v \wedge N_{-\alpha}$, dove con $N_{-\alpha}$ abbiamo indicato la produttoria N senza il fattore ${}^\alpha v$, ${}^1v \wedge \dots \wedge {}^{\alpha-1}v \wedge {}^{\alpha+1}v \wedge \dots \wedge {}^m v$. $N_{-\alpha}$ si usa scrivere anche come ${}^1v \wedge \dots \wedge [{}^\alpha v] \wedge \dots \wedge {}^m v$, avendo introdotto il simbolo “soppressore” $[[\]]$.⁶

Vediamo ora alcuni esempi di differenziali di $(\kappa \geq 0)$ -forme. Il differenziale di una 0-forma $v_{(0)} \equiv v = v(x)$ (formalmente antisimmetrica) è

$$(9) \quad \partial v = \partial v / \partial x^s dx^s \equiv dv),$$

palesemente invariante perché i coefficienti $\partial v / \partial x^s$ sono 1-covarianti. La (9) coincide con la (4.3.2, 1), ricordando che abbiamo qui ommesso il soprascritto *destro* $^\circ$ su v nelle derivate a 2^o membro. Alla luce della (9) potremo scrivere la (3') come

$$(3''') \quad \partial v_{(\kappa)} = \partial v_{\langle i \rangle} \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle},$$

dove $\langle i \rangle$ è un $\langle n, \kappa \rangle$ -indice, e $\partial v_{\langle i \rangle}$ sta per $\partial v_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s$;

e similmente la (3'') come

$$(3''''') \quad \partial \rho_{(\kappa)} = \partial \hat{\rho}_{\langle i \rangle} \wedge \wedge dx^{\langle i \rangle},$$

dove $\partial \hat{\rho}_{\langle i \rangle}$ sta per $\partial \hat{\rho}_{\langle i \rangle} / \partial x^s dx^s$.

⁵ Suggerimento: ci si limiti al caso in cui v e v' sono entrambe monomie, diciamo $v = v_{(\kappa)} = f(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^\kappa$, $v' = v'_{(\kappa')} = g(x) dx^{\kappa+1} \wedge \dots \wedge dx^{\kappa+\kappa'}$.

⁶ Ad esempio, per $m = 2$ la precedente dà $\partial N = \partial^1 v \wedge^2 v - \partial^2 v \wedge^1 v$; ed effettivamente $\partial({}^1v \wedge^2 v) = \partial^1 v \wedge^2 v - {}^1v \wedge \partial^2 v$ in forza della (8). Da questa il risultato, perché ${}^1v \wedge \partial^2 v = \partial^2 v \wedge {}^1v$ (essendo $\partial^2 v$ una 2-forma).

Ricordando che anche una 1-forma può considerarsi formalmente antisimmetrica, il differenziale della 1-forma $v_{(1)} = v_i(x)dx^i$ (somma sugli indici ripetuti) è

$$(10) \quad \partial v_{(1)} = \partial v_i / \partial x^s dx^s \wedge dx^i \equiv \partial v_i \wedge dx^i,$$

e questa può anche scriversi come:

$$(10') \quad \partial v_{(1)} = \sum_{i < j} (\partial v_j / \partial x^i - \partial v_i / \partial x^j) dx^i \wedge dx^j,$$

dove i e j vanno da 1 a n sotto il vincolo $i < j$. Ciò si giustifica subito sostituendo a $\partial v_i / \partial x^s$ il suo componente antisimmetrico e osservando che $(1/2)\sum_{i,j} \equiv \sum_{i < j} (\equiv \sum_{j < i})$ quando gli addendi a due indici della somma sono simmetrici, e nulli se gli indici sono uguali.⁷ 1-forme differenziali del tipo $v_i(x)dx^i$ si dicono **forme pfaffiane** o **pfaffiani** (sost.).

Un altro caso di interesse è quello della $(n-1)$ -forma $v_{(n-1)} = v_{i_1 \dots i_{(n-1)}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{(n-1)}}$ in 2^a rappresentazione canonica (quindi coi coefficienti antisimmetrici). Si verifica facilmente che essa può trascriversi come

$$(11) \quad v_{(n-1)} = (n-1)! \sum_{r=1}^n v_{1 \dots \overset{r}{[r]} \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{r}{[dx^r]} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

dove $\overset{r}{[]}$ è il soppressore più sopra introdotto. Convieni scrivere $(n-1)!v_{1 \dots \overset{r}{[r]} \dots n}$ come $(-1)^{r-1}v^{*r}$, dove v^{*r} è componente covariante di una $(n-1)$ -forma. Con questo, la (11) diventa:

$$(11') \quad v_{(n-1)} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} v^{*r} dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{r}{[dx^r]} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

e quindi

$$(12) \quad \partial v_{(n-1)} = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \sum_{s=1}^{s=n} \partial v^{*r} / \partial x^s dx^s \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \overset{r}{[dx^r]} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

ove l'unico termine non nullo, nella somma rispetto a s , è quello con $s = r$. Si conclude così che:

$$(12') \quad \partial v_{(n-1)} = \left(\sum_{s=1}^n \partial v^{*s} / \partial x^s \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

perché per spostarsi nel posto “vuoto”, dx^s deve scavalcare $r-1$ 1-forme, e questo implica la comparsa di un altro fattore $(-1)^{r-1}$.

Una elementare conseguenza di quanto fin qui illustrato, già anticipata, è il cosiddetto **lemma di Poincaré**, secondo il quale (avendo supposto $h = 2$, quindi $r \geq 3$),

$$(13) \quad \partial(\partial v_{(k)}) \equiv \partial^2 v_{(k)} \equiv 0$$

$\forall k \leq n - 2$. La dimostrazione è quasi immediata servendosi della 1^a rappresentazione canonica di $v_{(k)}$. In effetti, si ha:

⁷ Evidentemente, questo corrisponde a rappresentare il 2° membro della (10) nella 2^a forma canonica usando poi la (4.4.3, 14₂). Come ci si aspetta e si verifica subito, lo stesso risultato si otterrebbe rappresentando il 2° membro della (10) nella 1^a forma canonica e usando la (4.4.3, 14₁).

⁸ Il fatto che la generica componente antisimmetrica di una $(n-1)$ -forma si possa esprimere come un reale ad un solo indice variabile tra 1 e n è ancora legato alla $C_n^{n-1} = C_n^{n-(n-1)} = C_n^1 = n$. Si noti che le v^{*r} coincidono a meno di un fattore con le componenti controvarianti μ^r della 1-forma Hodge-duale della $v_{(n-1)}$, che come sappiamo si possono definire se lo spazio E è pseudoeuclideo e orientato (vedi Sez. 4.4)).

$$(14') \quad v_{(\kappa)} = \circ v_{\langle \alpha \rangle} \wedge dx^{\langle \alpha \rangle},$$

dove la somma è sul $\langle n, \kappa \rangle$ -indice strettamente ordinato $\langle \alpha \rangle$, $\wedge dx^{\langle \alpha \rangle}$ sta per $dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_\kappa}$ e le $\circ v_{\langle \alpha \rangle}$ sono definite dalla (4.4.2, 17). Quindi:

$$(14'') \quad \partial v_{(\kappa)} = \partial \circ v_{\langle \alpha \rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle \alpha \rangle},$$

e infine:

$$(14''') \quad \partial^2 v_{(\kappa)} = \partial^2 \circ v_{\langle \alpha \rangle} / \partial x^t \partial x^s dx^t \wedge dx^s \wedge \wedge dx^{\langle \alpha \rangle} \equiv 0$$

in forza della simmetria delle derivate seconde rispetto agli indici (t, s) attesa la loro supposta continuità (teorema di Schwarz). Se poi $\kappa > n - 2$, il fatto che $\partial^2 v_{(\kappa)} = 0$ scende automaticamente dall'essere $\partial^2 v_{(\kappa)}$ una $(\kappa + 2 > n)$ -forma.

Del lemma di Poincaré esiste una versione “inversa” (locale) detta **teorema di Poincaré** (o anche **lemma di Poincaré inverso**), che si giustifica in modo assai meno immediato. Con il teorema di Poincaré, entriamo nel calcolo integrale (seppure in una accezione locale) su varietà. Esso recita:

T1. «In un aperto A (nella topologia indotta) di $M \equiv {}^r M^n$ ($\langle r, n \rangle$ -varietà elementare) sia data una $(1 \leq \kappa \leq n)$ -forma $v_{(\kappa)}$ di CdC $h \geq 1$, della quale sia *nulla* (in A) il differenziale $\partial v_{(\kappa)}$; allora ogni punto \underline{p} di A ha un intorno aperto $A'_p \subset A$ ove è definita, insieme al suo differenziale, una $(\kappa - 1)$ -forma $\theta_{(\kappa-1)}$ di CdC $h+1$, per la quale $v_{(\kappa)} = \partial \theta_{(\kappa-1)}$ in A'_p ».

((T1) non afferma l'unicità della $\theta_{(\kappa-1)}$, né dice esplicitamente quale sia l'aperto A'_p ; siamo cioè di fronte ad un puro teorema di esistenza⁹, e per giunta di esistenza *locale*.¹⁰)

Dim: Una possibile dimostrazione del teorema di Poincaré è quella che diamo qui appresso, e si ottiene per induzione sulla dimensione $n \geq 1$ di M . Nei ragionamenti che seguono, ci riferiremo ad una definita carta $C = (\mathcal{M}, \lambda)$, che manda il punto corrente p di \mathcal{M} in $x = \lambda(p)$. Posto $\underline{x} =: \lambda(\underline{p})$, potremo inoltre sempre supporre C centrata (cioè $\underline{x} = 0$). Se $n = 1$ (quindi $\kappa = 1$), la 1-forma $v_{(1)}$ è del tipo $v_1(x_1) dx^1 \equiv v(x) dx$, con $v(x)$ di CdC $h \geq 1$ intorno a \underline{x} ; per una tale v , è automaticamente $\partial v(\lambda^{-1}(x)) = (dv/dx)(x) dx \wedge dx \equiv 0$ in quell'intorno. La tesi del teorema è allora evidente in questo

⁹ I teoremi di esistenza possono essere costruttivi o (più raramente) non-costruttivi; oppure possono rinviare la loro prova di esistenza ad *altri* teoremi di esistenza, costruttivi o no. Come vedremo, la dimostrazione del teorema di Poincaré (nella sua presente versione) si appella alla costruzione di soluzioni *per quadratura* di equazioni differenziali ordinarie, e quindi ad un problema sostanzialmente banale.

¹⁰ Se $\kappa = n$, l'ipotesi del teorema è automaticamente soddisfatta. Si può anche considerare il caso (non menzionato nella formulazione del teorema di Poincaré) in cui si parte da una 0-forma (una funzione) f . Ciò che risulta dall'ipotesi che sia $df = 0$ nell'aperto A è ovvio: se A è connesso, f è ivi costante. In generale, la qualità topologica del dominio in cui una $(\kappa \geq 1)$ -forma chiusa è anche esatta varia con κ ; ad esempio, se $\kappa = 1$, il dominio deve essere semplicemente connesso, se $\kappa = 2$, le superficie sferiche devono essere continuamente deformabili in un punto, ecc. La teoria generale è dovuta principalmente a De Rham, il quale ha provato che, se la varietà è compatta, la dimensione dello spazio quoziente delle κ -forme chiuse su quello delle κ -forme esatte coincide con il cosiddetto κ -mo **numero di Betti** (Enrico, 1823-1892) della varietà stessa, un suo invariante topologico. (Vedi oltre per la definizione di κ -forma chiusa e di κ -forma esatta.)

primo caso, bastando porre $\theta_{(0)}(\lambda^{-1}(x)) \equiv \theta^\circ(x) =: \int_{t=0}^x v(t)dt + \theta^\circ(0)$: trascurando di indicare la variabile corrente, si ha $d\theta_{(0)} = (d\theta^\circ/dx)dx = vdx = v_{(1)}$. La dimostrazione è dunque costruttiva, e la soluzione $\theta^\circ(x)$, che nel seguito scriveremo semplicemente come $\theta(x)$, è di CdC $h + 1$. Essa non è unica, essendo determinata a meno della costante additiva $\theta_{(0)}(\underline{p}) \equiv \theta(0)$. Inoltre il teorema vale indipendentemente dalla scelta della carta centrata C : per un'altra carta (centrata) C' di mappa λ' , con $x' = \lambda'(p)$, si ha $dx = (dx/dx')dx'$ (ove dx/dx' e dx'/dx sono entrambe $\neq 0$ e l'una inversa dell'altra), per cui $v(x)dx = v'(x')dx'$. Segue che $d\theta/dx = v$, $d\theta'/dx' = v'$, quindi che $d(\theta' - \theta)/dx = v'dx' - vdx = 0$ e $\theta'(x'(x)) = \theta(x) + \text{cost}$. Qui $\theta'(x'(x)) =: \int_{s=0}^{x'(x)} v'(s)ds + \theta'(0) \equiv \int_{t=0}^x v'(x'(x=t))(dx'/dx)(x=t)dt + \theta'(0) \equiv \theta(x) - \theta(0) + \theta'(0)$, da cui $\text{cost} = \theta'(0) - \theta(0)$.

Passiamo ora al caso $n > 1$. L'ipotesi induttiva è che il teorema valga per la dimensione $n-1$; si tratta dunque di dimostrare che esso vale per la dimensione n . La κ -forma $v_{(\kappa \leq n-1)} \equiv v$ può comunque scriversi come

$$(15) \quad v = dx^n \wedge \alpha + \beta,$$

dove α è una $(\kappa-1)$ -forma e β è una κ -forma, entrambe non contenenti dx^n , e con coefficienti di CdC $h \geq 1$. Prendendo il differenziale della (15), abbiamo (vedi la (8)):

$$(16) \quad \partial v = -dx^n \wedge \partial \alpha + \partial \beta \equiv -dx^n \wedge \partial_o \alpha + \partial \beta,$$

ove con ∂_o intendiamo l'operatore ∂ limitato alle variabili $x^o =: \langle x^1, \dots, x^{n-1} \rangle$ (cioè, con la somma rispetto a s dei $\partial(\dots)/\partial x^s dx^s \wedge (\dots)$ estesa da $s=1$ a $s=n-1$). Denotiamo poi con $\partial(\dots)/\partial x^n$, ove (\dots) è una forma di grado arbitrario in 2^a rappresentazione canonica, quella stessa forma (\dots) con le $\partial/\partial x^n$ dei suoi coefficienti in luogo dei coefficienti originali (per ipotesi antisimmetrici). Con queste notazioni, risulta $\partial \beta = \partial_o \beta + dx^n \wedge \partial \beta / \partial x^n$, e quindi $\partial v = dx^n \wedge (\partial \beta / \partial x^n - \partial_o \alpha) + \partial_o \beta$. Qui β e $\partial_o \beta$ non contengono dx^n , per cui in forza dell'ipotesi principale del teorema ($\partial v = 0$ nell'aperto A intorno di \underline{p}), deve essere separatamente, in A ,

$$(17) \quad \partial \beta / \partial x^n - \partial_o \alpha = 0,$$

e

$$(18) \quad \partial_o \beta = 0.$$

Rappresenteremo ora l'incognita $\theta_{(\kappa-1)} \equiv \theta$ con una espressione analoga alla (15), diciamo come:

$$(19) \quad \theta = dx^n \wedge \gamma + \delta,$$

ove γ è una $(\kappa-2)$ -forma e δ è una $(\kappa-1)$ -forma, entrambe non contenenti dx^n ; per cui $\partial \theta = -dx^n \wedge \partial_o \gamma + \partial \delta$, con $\partial \delta = \partial_o \delta + dx^n \wedge \partial \delta / \partial x^n$. Dal confronto di questa $\partial \theta$ con la (15) si trae che in A dobbiamo richiedere separatamente

$$(20) \quad (\partial \delta / \partial x^n - \partial_o \gamma) = \alpha \text{ e}$$

$$(21) \quad \partial_o \delta = \beta.$$

Useremo il simbolo $(\)_o$ per significare che il contenuto delle $(\)$ deve essere ristretto all'iperpiano $x^n = 0$ (o meglio alla sua antimmagine in \mathcal{M}). Allora nell'intersezione di A con tale antimmagine risulta

$$(22) \quad (\partial_o \beta)_o = (\partial_o \partial_o \delta)_o = 0;$$

ed essendo con ogni evidenza $(\partial_o(\dots))_o \equiv \partial_o(\dots)_o$, scrivendo per brevità $(\beta)_o$ come β_o (e simili), in forza della (22) abbiamo:

$$(22') \quad \partial_o \beta_o = 0.$$

D'altra parte la (21), ristretta alla sopraddetta intersezione, ci dice che

$$(23) \quad \partial_o \delta_o = \beta_o.$$

Le (22', 23) ci riportano dunque all'ipotesi induttiva, sulla cui base δ_o esiste in un intorno aperto A'' di \underline{p} incluso nella stessa intersezione.

Quanto alla (20), essa pone un problema sottodeterminato, con meno equazioni che incognite: infatti essa equivale ad un sistema di $C_n^{\kappa-1}$ equazioni differenziali (tale è il numero delle componenti indipendenti di α), nel *maggior* numero di incognite indipendenti $C_n^{\kappa-1} + C_n^{\kappa-2}$ (somma delle componenti di δ e di quelle di γ); non solo, ma quelle equazioni contengono derivate parziali delle componenti di γ rispetto alle *sole* variabili x^o , e derivate delle componenti di δ rispetto alla *sola* x^n . Tuttavia il nostro obiettivo è quello di costruire una soluzione, e non la più generale soluzione, del problema. È quindi assai naturale porre tentativamente $\gamma \equiv 0$, ossia $\theta \equiv \delta$; il che è come ricercare a priori la soluzione θ *tra le* $(\kappa-1)$ -*forme che non contengono* dx^n . Con questa scelta di tentativo, la (20) equivale ad un sistema di $C_n^{\kappa-1}$ equazioni in *altrettante* incognite, differenziali *ordinarie* in forma normale nell'unica variabile indipendente x^n , potendosi trattare le rimanenti variabili x^o come parametri. Se scriviamo α , in 2^a rappresentazione canonica, come $\alpha_{\langle q \rangle} \wedge dx^{\langle q \rangle}$, dove $\langle q \rangle$ è il $(n-1, \kappa-1)$ -indice stretto $\langle q_1, \dots, q_{\kappa-1} \rangle$ avente elementi tutti diversi da n , e similmente facciamo con δ , il sistema differenziale in questione è

$$(24) \quad (d\delta_{\langle q \rangle} / dx^n)(x^n | x^o) = \alpha_{\langle q \rangle}(x^n | x^o),$$

dove abbiamo ormai usato il simbolo di derivazione ordinaria, e separato la variabile d'integrazione x^n dai parametri x^o . Le (24) sono integrabili per quadratura l'una indipendentemente dall'altra nel "cilindro" $C \subset A'$ di "base" A'' e generatrici antimmagini delle $x^o = \text{cost}$, con la condizione iniziale sulla sua base $\delta_{\langle q \rangle}(x^n=0 | x^o) = \delta_{\langle q \rangle o}(x^o)$. Qui la funzione $\delta_{\langle q \rangle o}(x^o)$ è nota dal passo precedente, e così δ è costruita in C , incluso in A' e quindi in A , e contenente \underline{p} . Dobbiamo tuttavia ancora dimostrare che la $\theta \equiv \delta$ è effettivamente soluzione del problema $\partial\theta = v$ in C , ossia che anche la (21) è ivi soddisfatta. Poniamo allora $\psi =: \partial\theta - v = \partial\delta - dx^n \wedge \partial\delta / \partial x^n - \beta = \partial_o \delta - \beta$. ψ è dunque una κ -forma

che non contiene dx^n e il cui differenziale $\partial\psi = \partial^2\theta - \partial v = 0$ in C per ipotesi. Si verifica facilmente che i coefficienti della 1^a rappresentazione canonica, e quindi anche quelli della 2^a, di una forma che come ψ non contiene dx^n e ha differenziale nullo in un aperto sono ivi *indipendenti* da x^n .¹¹ D'altra parte, secondo la (23) $\psi_0 = \partial_0\delta_0 - \beta_0 = 0$ sulla base di C ; ma $\psi \equiv \psi_0$ in C in forza di quanto appena affermato (e dimostrato nella precedente nota), e dunque $\psi \equiv 0$ in C stesso; ovvero la (21) è ivi soddisfatta, qed. Notando ancora, infine, che sia l'ipotesi che la tesi della parte induttiva ($n-1 \rightarrow n$) della dimostrazione sono espresse da relazioni invarianti rispetto a cambiamenti di carta, concludiamo che il teorema vale *intrinsecamente*, non dipendendo quanto da esso affermato dalla particolare carta di cui ci siamo serviti per dimostrarlo. #

Del teorema di Poincaré esiste anche una versione più debole, e di dimostrazione meno laboriosa, la quale richiede che l'aperto A intorno a \underline{p} della versione precedente sia di tipo "stellare" con centro \underline{p} rispetto a qualche carta, che potremo sempre supporre centrata in \underline{p} ; vale a dire, sia tale che, $\forall p \in A$, insieme a p di coordinate x (in quella carta), A contenga i punti con coordinate tx $\forall t \in [0,1]$ (va da sé che il punto in oggetto è p per $t = 1$, e \underline{p} per $t = 0$). Questa più restrittiva condizione ha il vantaggio di assicurare che l'intorno aperto di \underline{p} $A' \subset A$, ove varrebbe il teorema della precedente versione, è lo stesso A . In questo caso si è in grado di costruire un operatore *lineare* O che trasforma la generica κ -forma differenziale $v_{(\kappa)}$ (di CdC h in A) in una $(\kappa-1)$ -forma $Ov_{(\kappa)}$ (di CdC $h+1$ in A), e similmente, trasforma il corrispondente differenziale $\partial v_{(\kappa)}$ (di CdC $h-1$ in A) in una κ -forma $O\partial v_{(\kappa)}$ (di CdC h in A), tali che la somma del differenziale della prima ($\partial Ov_{(\kappa)}$) e della seconda ($O\partial v_{(\kappa)}$) sia uguale alla κ -forma di partenza $v_{(\kappa)}$, cioè che $\partial Ov_{(\kappa)} + O\partial v_{(\kappa)} = v_{(\kappa)}$. Se dunque $\partial v_{(\kappa)} = 0$ in A , l'esistenza in A di $\theta_{(\kappa-1)} =: Ov_{(\kappa)}$ è provata costruttivamente. Rimarchiamo che in ogni caso la $\theta_{(\kappa-1)}$ non è unica. Per vederlo nel modo più semplice, basta aggiungere ad essa il differenziale di una $(\kappa-2)$ -forma arbitraria (se $\kappa \geq 2$) di CdC $h+2$: ciò modifica $\theta_{(\kappa-1)}$ ma non $\partial\theta_{(\kappa-1)}$ (lemma di Poincaré).

Se il differenziale di una κ -forma è nullo in un punto p del suo aperto di definizione, essa si dice **chiusa** (agg.) in p ; se una κ -forma è uguale al differenziale di una $(\kappa-1)$ -forma in un aperto A , essa si dice **esatta** (agg.) in A . Quindi, secondo il *lemma* di Poincaré una κ -forma esatta in A è ivi chiusa; mentre secondo il *teorema* di Poincaré, una κ -forma chiusa in un aperto A di M è esatta in un intorno aperto A'_p di $p \in A$, $A'_p \subset A$, $\forall p \in A$. Quest'ultima tesi si esprime dicendo che la

¹¹ Sia ω una tale forma di grado $\eta \geq 1$ e sia $\omega = \sum_{\langle\alpha\rangle} \omega_{\langle\alpha\rangle} \wedge dx^{\langle\alpha\rangle}$ la sua 1^a rappresentazione canonica, ove $\langle\alpha\rangle$ è un $\langle n, \eta \rangle$ -indice i cui elementi sono tutti diversi da n , quindi $\partial\omega = \sum_{\langle\alpha\rangle} \sum_s \partial \omega_{\langle\alpha\rangle} / \partial x^s dx^s \wedge \wedge dx^{\langle\alpha\rangle} = \sum_{\langle\alpha\rangle} \sum_s \partial \omega_{\langle\alpha\rangle} / \partial x^n dx^n \wedge \wedge dx^{\langle\alpha\rangle} + (\dots)$, dove (\dots) è una $(\eta+1)$ -forma che non contiene dx^n . L'annullarsi di $\partial\omega$ in un aperto implica separatamente l'annullarsi del primo e del secondo addendo a 2° membro dell'ultima uguaglianza, e quindi in particolare l'annullarsi delle $\partial \omega_{\langle\alpha\rangle} / \partial x^n \forall \langle\alpha\rangle$ in quell'aperto, qed.

κ -forma chiusa in A è **localmente esatta** in A . Se $v_{(\kappa)}$ è chiusa in A , una κ -forma $\theta_{(\kappa-1)}$ per cui $v_{(\kappa)} = \partial\theta_{(\kappa-1)}$ in un $A' \subset A$, si dice una **primitiva** di $v_{(\kappa)}$ in A' .

Diamo adesso una serie di esempi canonici, ordinata secondo il grado κ della forma a partire da $\kappa = 1$, ad illustrazione del teorema di Poincaré (o per brevità qui di seguito “P-teorema”). Considereremo dapprima in dettaglio i casi $\kappa = 1$ e $\kappa = 2$, per poi passare a quello generale $\kappa > 2$. Per cominciare ($\kappa = 1$), sia data in A (aperto di M) la forma pfaffiana $v_{(1)} =: v_i dx^i$ (somma sugli indici ripetuti da 1 a n), con i v_i di CdC $h \geq 1$. Allora $\partial v_{(1)} = -(1/2)(\partial v_j / \partial x^h - \partial v_h / \partial x^j) dx^j \wedge dx^h$. Dalla ipotesi $\partial v_{(1)} = 0$, mediante il P-teorema si inferisce l'esistenza, in un $A' \subset A$, di una 0-forma primitiva $\theta_{(0)} = \theta$ di CdC $h+1$, per la quale è $v_j = \partial\theta / \partial x^j$. Poiché $\partial v_{(1)}$ è già in 2^a rappresentazione canonica, il suo annullarsi equivale alle $\partial v_j / \partial x^h - \partial v_h / \partial x^j = 0$. Se $M = \mathbb{R}^n$, questo significa che il rotore del vettore v di componenti v_j è nullo: cioè il rotore di un gradiente è nullo ($\text{rotgrad} \equiv 0$), come è ben noto a livello elementare.

Passando al caso $\kappa = 2$, è chiaro che se la 2-forma $v_{(2)} = (1/2)A_{jh} dx^j \wedge dx^h$, con le A_{jh} antisimmetriche e di CdC $h \geq 1$, è chiusa, allora $e_{jkh}^{\text{rst}} \partial A_{rs} / \partial x^t = 0$. Tenuto conto della antisimmetria dei A_{jh} , questa equivale a

$$(25) \quad \partial A_{jh} / \partial x^k + \text{cicl}(jkh) = 0.$$

Per il P-teorema, deve essere allora:

$$(26) \quad -A_{jh} = \partial\theta_j / \partial x^h - \partial\theta_h / \partial x^j$$

per uno pfaffiano $\theta_{(1)} = \theta_i dx^i$ di CdC $h + 1$. Ad esempio per $n = 3$, posto $V^i = -A_{i+1, i+2}$ ¹² risulta:

$$(27) \quad \partial V^i / \partial x^i = 0.$$

In \mathbb{R}^3 con orientamento standard, V^i è la componente ($\dot{\quad}$) del rotore del vettore θ di componenti θ_i ; quindi la (27) esprime la ben nota $\text{divrot} \equiv 0$. Se a questo punto riconsideriamo la $(n-1)$ -forma della (11') per $n = 3$, cioè $v_{(2)}$, e la identifichiamo con la $A_{jh} dx^j \wedge dx^h / 2$, troviamo subito che $v^{*i} = A_{i+1, i+2}$ (vedi la (11')), cioè che ($^\circ$) $v^{*i} = -V^i$; quindi ritroviamo la (27), attraverso la (12'), come conseguenza della $\partial v_{(2)} = 0$. Si noti anche che, in \mathbb{R}^3 , V^i è Hodge-duale di A_{jh} ; applicando il risultato generale al presente caso, ritroviamo la ($^\circ$). Possiamo ripetere questo ragionamento per qualunque $n \geq 2$ partendo dalle (11, 12). Ad esempio per $n = 4$, posto $v_{(3)} = (1/3!)A_{ijh} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^h$ (sempre con gli A_{ijh} antisimmetrici) si trova $v^{*1} = A_{234}$, $v^{*2} = -A_{341}$, $v^{*3} = A_{412}$, $v^{*4} = -A_{123}$. D'altra parte, in \mathbb{R}^4 con orientamento standard è (cfr. (4.4.3, 20)) $\mu^1 = -A_{234} = -v^{*1}$, $\mu^2 = A_{341} = -v^{*2}$, $\mu^3 = -A_{412} = -v^{*3}$, $\mu^4 = A_{123} = -v^{*4}$, cioè $\mu^i = -v^{*i}$ per $i = 1, 2, 3, 4$, come previsto dalla formula generale. Ancora, la $\partial v_{(3)} = 0$ equivale a $\partial v^{*i} / \partial x^i = 0 = \partial \mu^i / \partial x^i$ (somma da 1 a 4). Concludendo, mediante le

¹² In \mathbb{R}^3 orientato, V^i è il duale di Hodge di A_{jh} .

(11, 12) (o le loro versioni equivalenti (11', 12')) il caso che abbiamo esaminato in modo diretto per $n = 3$ si estende a qualunque $n \geq 2$, fornendo la versione $\partial v^{*i}/\partial x^i = 0$ della $\text{divrot} \equiv 0$ in R^n .

Sappiamo che sia l'ipotesi che la tesi del P-teorema sono carta-indipendenti. Possiamo verificare questi asserti per $n = 3$ e $\kappa = 2$ in modo più diretto sotto l'ipotesi aggiuntiva che la varietà $M^{n=3}$ sia pseudoriemanniana e orientata, e ci si limiti a carte equiverse. Ponendo in tal caso $V^i =: - (1/2)\varepsilon^{ihk} A_{hk}$ (Hodge), si trova $V^i_{/i} = - |g|^{-1/2} (A_{12/3} + \text{cycl}(123))$ (dove g è al solito il determinante del tensore metrico), perché il derivato del tensore di Ricci è nullo. In questo caso la (25) e il 2° membro della (26) possono risciversi equivalentemente con le derivate covarianti in luogo di quelle standard¹³, e si conclude con la $V^i_{/i} = 0$ in luogo della (27). Quindi le (25, 26, 27) possono scriversi in forma tensoriale: come $\varepsilon^{ikr} A_{ik/r} = 0$ la (25), come $A_{jh} + \theta_{j/h} - \theta_{h/j} = 0$ la (26), e secondo quanto appena visto, come $V^i_{/i} = 0$ la (27). In particolare la (25) dice che la 2-forma $A_{jh} dx^j \wedge dx^h$ è chiusa (ipotesi del P-teorema), e la (26) che essa è esatta con primitiva $2\theta_{(1)}$ (tesi del P-teorema). Questi asserti sono espressi entrambi in forma covariante, il che ci assicura la loro carta-indipendenza. Come vedremo, la possibilità di scrivere in forma tensoriale (ad es. covariante) sia l'ipotesi che la tesi del P-teorema, nel caso di M pseudoriemanniana-orientata, è del tutto generale, e vale per qualunque n e qualunque $\kappa \leq n$.

Passiamo ora al caso di una 2-forma differenziale $v_{(2)} = v_{ik} dx^i \wedge dx^k$ data in A , con le v_{ik} di C^h , ma non necessariamente antisimmetriche, quindi $\partial v_{(2)} = \partial v_{ik}/\partial x^s dx^s \wedge dx^i \wedge dx^k$. Se $\partial v_{(2)} = 0$ in A , il P-teorema afferma l'esistenza in $A' \subset A$ di uno pfaffiano $\theta_{(1)} = \theta_h dx^h$ di classe $h+1$, per il quale

$$(28) \quad e_{ik}{}^{rs} (v_{rs} - \partial\theta_s/\partial x^r) = 0.$$

D'altra parte la $\partial v_{(2)} = 0$ equivale alla

$$(29) \quad e_{jkh}{}^{rst} \partial v_{rs}/\partial x^t = 0.$$

Se in particolare i v_{ik} sono antisimmetrici (cioè la $v_{(2)}$ è data in 2ª rappresentazione canonica) la (28) diventa:

$$(28\text{bis}) \quad v_{ik} = - (\partial\theta_i/\partial x^k - \partial\theta_k/\partial x^i)/2,$$

(si noti che anche il 2° membro è così antisimmetrico) e la (26) diventa

$$(29\text{bis}) \quad \partial v_{jh}/\partial x^k + \text{cycl}(jhk) = 0.$$

Il 1° termine della somma a 1° membro della (29bis) è per ipotesi antisimmetrico rispetto a j, h ; quindi anche $\text{cycl}(jhk)$, cioè $\partial v_{hk}/\partial x^j + \partial v_{kj}/\partial x^h$, deve esserlo, come si verifica immediatamente. Anche in questo caso, se M è pseudoriemanniana-orientata, le (28bis, 29bis) possono risciversi con derivate covarianti in luogo di quelle standard. La semplice dimostrazione è lasciata al lettore.

¹³ Si ricordi che $A_{12/3} = \partial A_{12}/\partial x^3 - A_{1t} \Gamma_{32}^t - A_{t2} \Gamma_{13}^t$. Prendendo la somma ciclica di questa uguaglianza, e tenendo conto dell'antisimmetria delle A_{jh} e della simmetria delle Γ_{ik}^t rispetto agli indici inferiori, si trova $A_{12/3} + \text{cycl}(123) = \partial A_{12}/\partial x^3 + \text{cycl}(123)$, qed.

Il passaggio al caso generale di un generico $2 < \kappa \leq n$ non è difficile. Si parte da una κ -forma differenziale $v_{(\kappa)} = v_{i_1 \dots i_\kappa} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\kappa}$ (con i $v_{i_1 \dots i_\kappa}$ dati in A , di CdC h e non necessariamente antisimmetrici). Per il P-teorema, la $\partial v_{(\kappa)} = 0$ in A , cioè la

$$(30) \quad e_{j_1 \dots j_{(\kappa+1)}}^{r_1 \dots r_{(\kappa+1)}} \partial v_{r_1 \dots r_\kappa} / \partial x^{r_{(\kappa+1)}} = 0,$$

implica che esista in un $A' \subset A$ una $(\kappa-1)$ -forma $\theta_{(\kappa-1)} =: \theta_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{(\kappa-1)}}$ (con le $\theta_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)}}$ di CdC $h+1$ e non necessariamente antisimmetriche) per la quale

$$(31) \quad e_{i_1 \dots i_\kappa}^{r_1 \dots r_\kappa} \{v_{r_1 \dots r_\kappa} - (-1)^{\kappa-1} \partial \theta_{r_1 \dots r_{(\kappa-1)}} / \partial x^{r_\kappa}\} = 0.$$

Le somme nelle (30, 31) si possono riorganizzare come è appresso descritto se le $v_{i_1 \dots i_\kappa}$ (per $\kappa \geq 2$) e le $\theta_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)}}$ (per $\kappa \geq 3$) sono supposte antisimmetriche. Siano $H_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)} i_\kappa}$ numeri a κ indici, antisimmetrici rispetto ai primi $\kappa-1$ indici (se $\kappa > 2$), e consideriamo la somma (di $\kappa!$ termini) $e_{j_1 \dots j_\kappa}^{i_1 \dots i_\kappa} H_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)} i_\kappa}$. Se $\kappa = 2$, essa vale manifestamente $H_{j_1 j_2} - H_{j_2 j_1}$; e se $\kappa > 2$, vale $\sum_{j=1}^{\kappa} \pi(j_1 \dots [j] \dots j_\kappa) H_{j_1 \dots [j] \dots j_\kappa}$, dove al solito l'indice tra $[..]$ si intende soppresso, e π è la parità della permutazione in considerata. Tenuto conto dell'antisimmetria delle H rispetto ai primi $\kappa-1$ indici, l'ultima somma è uguale a $(\kappa-1)! \{H_{j_1 \dots j_{(\kappa-1)} j_\kappa} + \text{cicl}(j_1 \dots j_\kappa)\}$. Allora la (31) coincide con la (28bis) per $\kappa = 2$, e diventa

$$(32) \quad \kappa v_{i_1 \dots i_\kappa} = (-1)^{\kappa-1} \{ \partial \theta_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)}} / \partial x^{i_\kappa} + \text{cicl}(i_1 \dots i_\kappa) \}$$

per $\kappa > 2$. Quest'ultima equazione pone un problema, perché mentre il 1° membro è completamente antisimmetrico, il 2° non lo è in generale (rispetto agli ultimi due indici). Ciò impone dei vincoli ai κ addendi dentro le $\{..\}^{14}$, ed autorizza a sostituire ciascuno di essi con la sua parte antisimmetrica rispetto agli ultimi due indici. A questo punto la (32) si riscrive come

$$(32\text{bis}) \quad 2\kappa v_{i_1 \dots i_\kappa} = (-1)^{\kappa-1} \{ \partial \theta_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)}} / \partial x^{i_\kappa} - \partial \theta_{i_1 \dots i_{(\kappa-1)} i_\kappa} / \partial x^{i_{(\kappa-1)}} + \text{cicl}(i_1 \dots i_\kappa) \}.$$

Evidentemente anche la (30) si può riscrivere come

$$(30\text{bis}) \quad \partial v_{i_1 \dots i_\kappa} / \partial x^{i_{(\kappa+1)}} + \text{cicl}(i_1 \dots i_\kappa | i_{(\kappa+1)}) = 0,$$

che esprime la **condizione di integrabilità** della equazione $v_{(\kappa)} = \partial \theta_{(\kappa-1)}$.

La (32bis) è utile per dimostrare che, nel solito caso di M pseudoriemanniana-orientata, le derivate standard nel suo 2° membro possono essere sostituite con derivate covarianti. La dimostrazione è per induzione sul valore di κ partendo da $\kappa = 2$, in cui la tesi è evidente attraverso la (28bis). Una verifica *diretta* di questo fatto è peraltro ancora abbastanza agevole per $\kappa = 3$, portando alla constatazione che il saldo del 2° membro della (32bis) con le derivate standard rispetto a quello con le derivate covarianti è somma di 12 termini a due a due uguali ed opposti. In

¹⁴ Precisamente, questi vincoli esprimono l'annullarsi della parte simmetrica (rispetto agli ultimi due indici) di ogni termine della somma a 2° membro delle (32_κ).

generale, per $\kappa \geq 3$ la stessa verifica diretta condurrebbe ad una somma di $2(\kappa-1)\kappa$ termini che risultano a due a due uguali ed opposti.

La sostituzione delle derivate standard con le derivate covarianti è lecita anche nei confronti della (30bis) (di ciò già conosciamo il caso $\kappa = 2$). La conclusione è che in varietà elementari pseudoriemanniane le equazioni (28bis) [(29bis)] per $\kappa = 2$, e le (30bis) [le (32)] per $\kappa > 2$, che esprimono l'ipotesi [la tesi] del P-teorema, si possono tutte trascrivere in forma tensoriale.

4.5.2) TEOREMI “DEL TIPO FROBENIUS”

Per $i = 1, 2$, siano $\varphi_i = \varphi_i(x, z)$ funzioni reali date per $x \equiv \langle x^1, x^2 \rangle \in U$, aperto connesso di \mathbb{R}^2 , e $z \in V$, intervallo aperto di \mathbb{R} , e ivi di CdC 1. Senza limitare la generalità di quanto segue, potremo supporre che U contenga l'origine di \mathbb{R}^2 , $x = 0$, e V quella di \mathbb{R} , $z = 0$. Si pone il problema di stabilire sotto quali condizioni esistano un aperto connesso $0 \in U' \subset U$ e una funzione di x ivi definita/derivabile e con valori in V , $y = y(x)$, per la quale

$$(1) \quad \partial y / \partial x^i(x) = \varphi_i(x, z=y(x))$$

per $i = 1, 2$ e identicamente in U' ; e inoltre, se tale $y(x)$ esiste, essa sia unica quando le si impongano convenienti ulteriori condizioni.

La versione 1-dim di questo problema – cioè quella che da esso si ottiene sostituendo \mathbb{R}^2 con \mathbb{R} – pone le stesse questioni per l'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine, quasi-lineare in forma normale

$$(2) \quad dy/dx(x) = \varphi(x, z=y(x)),$$

ove $\varphi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (U, V essendo intervalli reali aperti, entrambi contenenti 0), e y è una funzione definita/derivabile in U' , $0 \in U' \subset U$ con valori in V . La diversità tra le (1) e la (2) è peraltro sostanziale, perché le (1) sono equazioni differenziali parziali (EDP) mentre la (2) è una equazione differenziale ordinaria (EDO). Un fondamentale teorema relativo alla (2) afferma che «se $\varphi(x, z)$ è continua insieme alla $\partial\varphi/\partial z(x, z)$ in $U \times V$, una soluzione $y = y(x)$ definita/derivabile in un conveniente intervallo aperto U' , $0 \in U' \subset U$, esiste, ed è unica (possibilmente in un sotto-intervallo aperto U'' di U' , anch'esso $\ni 0$), sotto la condizione iniziale

$$(2') \quad y(0) = 0 \text{ »}.$$
¹⁵

¹⁵ L'essere la richiesta “le φ_i sono di CdC 1” (a proposito delle (1)) più forte della naturale generalizzazione della richiesta “la φ e la $\partial_z\varphi$ sono continue” (a proposito della (2)) può indurre il sospetto che la prima sia stata formulata in quel modo per ragioni di semplicità enunciativa. Come vedremo, non è così.

La dimostrazione dell'esistenza è costruttiva: vale a dire, una funzione come richiesta *si costruisce* (ad es. con il classico metodo di Cauchy-Lipschitz, oppure con quello delle "approssimazioni successive", ecc.) in un $U' \subset U$ contenente 0; essa è ivi continua/derivabile e soddisfa alla (2) e alla (2'). L'unicità si dimostra invece per assurdo (cioè supponendo che esistano due soluzioni distinte sotto le sopravviste richieste, e provando che esse sono identiche), e sussiste in generale nel sotto-intervallo U'' di cui all'enunciato del teorema.¹⁶

Tornando al SDP (1), lo stesso ragionamento presentato in relazione alla (2) prova che, se una sua soluzione $y = y(x)$ esiste *continua* nell'aperto connesso $0 \in U' \subset U$, essa è ivi di CdC 2. Che y sia di CdC 1 in U' è ovvio in forza della ipotesi $\varphi_i \in C^1(U \times V)$ e delle (1). Quanto alle derivate seconde, derivando le (1) rispetto a x^j si ha

$$(3) \quad \partial^2 y / \partial x^j \partial x^i(x) = (\partial \varphi_i / \partial x^j + \varphi_j \partial \varphi_i / \partial z)(x, z=y(x)) \equiv Q_{ij}(x, z=y(x))$$

in U' , e il 2° membro di questa è manifestamente continuo se $y(x)$ è continua, da cui la tesi. In particolare, in forza del teorema di Schwarz abbiamo $\partial^2 y / \partial x^j \partial x^i(x) = \partial^2 y / \partial x^i \partial x^j(x)$ in U' . Quindi risulta:

$$(4) \quad (Q_{ij} - Q_{ji})(x, y(x)) = 0$$

in U' (per $i, j = 1, 2$); ovvero, equivalentemente,

$$(4bis) \quad (Q_{12} - Q_{21})(x, y(x)) = 0$$

in U' . Sotto le richieste formulate sulle $\varphi_{i=1,2}$, la (4) o la (4bis) è dunque una condizione *necessaria* all'esistenza di y continua in U' .

Proviamo ora il seguente teorema di unicità:

T1. «Se una soluzione y delle (1) soddisfacente la condizione $y(0) = 0$ esiste in un disco aperto di centro $x = 0$ e raggio $\rho > 0$, diciamo $D[0, \rho)$, allora essa è unica in un disco $D[0, \rho')$, per un certo ρ' con $0 < \rho' \leq \rho$ ».

Dim. Poniamo $x = s\Omega$, dove $s \in [0, 1]$ e Ω è un vettore non nullo (di componenti $\Omega^{i=1,2}$) del piano R^2 , e di modulo $< \rho$; e $\phi(s, \Omega) =: y(s\Omega)$. Secondo la (1), è allora

$$(5) \quad \partial \phi / \partial s(s, \Omega) = \Omega^i \varphi_i(s\Omega, \phi(s, \Omega))$$

(somma su i da 1 a 2, e in genere sugli indici ripetuti). La condizione $y(0) = 0$ diventa $\phi(0, \Omega) = 0$; quindi la derivata a 1° membro della (5), che va pensata come unilatera destra per $s = 0$, cioè come

¹⁶ La continuità della soluzione della (2), e la (2) stessa, assicurano che la soluzione è anche di CdC 1 in U' . Se poi $\varphi(x, z)$ è a sua volta di CdC 1 in $U \times V$, allora anche la derivata seconda di y è continua in U' . Infatti $d^2 y / dx^2(x) = \partial \varphi / \partial x(x, z=y(x)) + (\varphi \partial \varphi / \partial z)(x, z=y(x))$ per $x \in U'$, ed è chiaro che il 2° membro di questa è continuo. D'altra parte, la continuità della φ in $U \times V$ è in effetti sufficiente ad assicurare l'esistenza di una soluzione come richiesta, ma la sua unicità può venire a mancare se $\partial \varphi / \partial z$ non è continua in $U \times V$ (G. Peano). Un classico esempio in tal senso è offerto dalla $dy/dx = 3y^{2/3}$, la derivata rispetto a y del cui 2° membro non è continua per $y = 0$ (e qualunque x). La curva $y = x^3$ è infatti una soluzione dell'equazione che passa per $(x=0, y=0)$; ma a ciò soddisfa anche la $y \equiv 0$.

$\lim_{s \rightarrow 0^+} (\phi(s, \Omega) - \phi(0, \Omega))/s$, si riduce a $\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s, \Omega)/s$. La (5) è un'equazione differenziale *ordinaria con parametro* (Ω), e la sua teoria assicura che la soluzione ϕ (che esiste *per ipotesi* per ogni $s \in [0, 1]$ e ogni Ω con $|\Omega| < \rho$) è unica per gli stessi s e ogni Ω con $0 < |\Omega| < \rho' \leq \rho$, per un certo ρ' come indicato. Ciò vale per ogni tale Ω , da cui la tesi. #

Passando all'esistenza di una soluzione delle (1), abbiamo il teorema:

T2. «Sotto le richieste formulate sulle $\varphi_{i=1,2}$ in $U \times V$, una soluzione $y(x)$ delle (1) sotto la condizione iniziale $y(0) = 0$ esiste in un conveniente disco di centro 0 e incluso in U se

$$(6) \quad (Q_{12} - Q_{21})(x, z) = 0$$

in $U \times V$, ove le $Q_{i \neq j}$ sono definite come in precedenza, ma senza sostituire z con $y(x)$.»

Dim. Poniamo ancora $x = s\Omega$, ove $s \in [0, 1]$ e Ω è un qualunque vettore di \mathbb{R}^2 per il quale $(^+) D[0, s|\Omega] \subset U$. Riprendendo l'equazione differenziale ordinaria con parametro (5), la sua teoria assicura l'esistenza di una soluzione per ogni $s \in [0, \delta]$, per un certo $0 < \delta \leq 1$ e per ogni Ω non nullo soddisfacente alla $(^+)$ e con $|\Omega| < \rho$, per un certo $\rho > 0$; e inoltre che in questo dominio ϕ e $\partial\phi/\partial s$ sono continue e $\phi(s, \Omega) \in V$. In virtù del teorema di unicità (T1), questa funzione ϕ non dipende *separatamente* da s e da Ω , perché $\phi(s, \Omega) = \phi(s', \Omega')$ se $s\Omega = s'\Omega'$; ovvero, $\phi(s, \Omega)$ è una effettiva funzione di x per $x \in D[0, \delta\rho)$, come deve essere in base alla sua definizione. (Naturalmente si presuppone che anche $D[0, \delta\rho) \subset U$.) Inoltre la teoria della (5) insegna che, nel suo dominio di esistenza, la ϕ è continua e derivabile rispetto a $\Omega^{k=1,2}$, con derivate $\partial\phi/\partial\Omega^k$ continue. Derivando allora la (5) rispetto a Ω^k , e omettendo gli argomenti delle varie funzioni fino a che ciò non oscuri il senso del ragionamento, otteniamo:

$$(7) \quad \partial^2\phi/\partial\Omega^k\partial s = \varphi_k + s\Omega^i \partial\varphi_i/\partial x^k + \Omega^i \partial\varphi_i/\partial z \partial\phi/\partial\Omega^k.$$

Il 2° membro di questa (in particolare il suo terzo termine) è continuo, per quanto appena affermato, nel solito dominio $s \in [0, \delta]$ e $|\Omega| < \rho$. Segue che $\partial^2\phi/\partial s\partial\Omega^k$ è definita e continua in tale dominio, ove risulta $\partial^2\phi/\partial\Omega^k\partial s = \partial^2\phi/\partial s\partial\Omega^k$.¹⁷ A questo punto poniamo:

$$(8) \quad \psi_k(s, \Omega) =: \partial\phi/\partial\Omega^k(s, \Omega) - s\varphi_k(s\Omega, \phi(s, \Omega)),$$

per cui $\psi_k(0, \Omega) = 0$ (l'essere $\phi(0, \Omega) = 0$ implica $\partial\phi/\partial\Omega^k(0, \Omega) = 0$). Derivata rispetto a s , la (8) dà:

$$(9) \quad \partial\psi_k/\partial s = \partial^2\phi/\partial s\partial\Omega^k - \varphi_k - s\Omega^i \partial\varphi_k/\partial x^i - s\Omega^i \varphi_i \partial\varphi_k/\partial z.$$

¹⁷ Questo segue da una versione "forte" del teorema di Schwarz, secondo la quale se *una* delle due derivate seconde miste di una funzione reale di due (o più) variabili reali è continua ove è definita, allora essa è uguale all'altra derivata seconda mista. Ricordiamo che il teorema di Schwarz standard richiede la continuità di *entrambe* le derivate miste per affermarne l'uguaglianza. La dimostrazione del teorema di Schwarz forte può ottenersi come segue. Sia $\partial^2 f/\partial y \partial x(x, y)$ continua in un certo dominio connesso, quindi anche $\partial f/\partial x(x, y)$ lo sia. Per (x, y) e (x_0, y) in quel dominio è allora $f(x, y) = \int_{x'=x_0}^x \partial f/\partial x(x', y) + f(x_0, y)$. Poiché per ipotesi la $\partial/\partial y$ dell'integranda è continua, si può derivare rispetto a y sotto il segno, ottenendo $\partial f/\partial y(x, y) = \int_{x'=x_0}^x \partial^2 f/\partial y \partial x(x', y) + \partial f/\partial y(x_0, y)$. Derivando quest'ultima rispetto a x si ha la tesi, perché l'ultimo termine non contiene x . Per una dimostrazione alternativa dello stesso risultato, si veda ad es. R. Courant, F. John, "Introduction to Calculus and Analysis", vol. II, Wiley-Interscience, 1974, 1.4d.

Eguagliando le due derivate seconde miste nelle (7, 9), e tenendo conto della (6) (che vale in $U \times V$, quindi dove ϕ è definita, e per i suoi valori) si ottiene

$$(10) \quad \partial \psi_k / \partial s = \psi_k \Omega^i \partial \varphi_i / \partial z,$$

Per dato Ω , questa è un'equazione differenziale *ordinaria lineare* con parametro (anche qui la derivata $\partial \psi_k / \partial s(0, \Omega)$ va pensata come unilatera destra); essa si integra a vista, e tenendo conto della condizione $\psi_k(0, \Omega) = 0$, prova che $\psi_k(s, \Omega) \equiv 0$ nel dominio di esistenza di ϕ . Si conclude così che in tale dominio è:

$$(11) \quad \partial \phi / \partial \Omega^k = s \varphi_k.$$

Poniamo infine, per $s > 0$,

$$(12) \quad \hat{\phi}(s, x) =: \phi(s, x/s)$$

nel dominio di esistenza di ϕ , quindi per $s \in (0, \delta]$ e $x \in D[0, \delta\rho)$. Si noti che la dipendenza da s in $\hat{\phi}$ è apparente; infatti, derivando la (12) rispetto a s e tenendo conto delle (5,11), abbiamo (per $s > 0$):

$$(13) \quad \partial \hat{\phi} / \partial s(s, x) = \partial \phi / \partial s(s, x/s) + (-x^i/s^2) \partial \phi / \partial \Omega^i(s, x/s) = \Omega^i \varphi_i(x, \phi(x, x/s)) - \Omega^i \varphi_i(x, \phi(x, x/s)) \equiv 0;$$

e questo significa proprio che $\hat{\phi}$ non dipende da s . Quindi scriveremo ormai $\hat{\phi}(s, x)$ come $\hat{\phi}(x)$.

D'altra parte, derivando la (12) rispetto a x^i , in forza della (11) abbiamo (sempre per $s > 0$):

$$(14) \quad \partial \hat{\phi} / \partial x^i(x) = s^{-1} \partial \phi / \partial \Omega^i(s, x/s) = \varphi_i(x, \hat{\phi}(x)).$$

La s è sparita nell'ultima uguaglianza, che vale dunque indipendentemente dal fatto che siamo ad essa pervenuti supponendo $s > 0$. Si conclude così che la $\hat{\phi}(x)$ soddisfa alle (1). Infine $\lim_{x \rightarrow 0} \hat{\phi}(x) = 0$ indipendentemente dalla direzione lungo la quale x tende a 0: basta osservare che $\lim_{s \rightarrow 0^+} \hat{\phi}(s\Omega) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s, \Omega) = \phi(0, \Omega) = 0 \quad \forall \Omega$ con $0 < |\Omega| < \rho$. Il teorema di esistenza (di una soluzione delle (1) in $D[0, \delta\rho)$) è così dimostrato. #

I due risultati enunciati sotto (T1) e (T2) si combinano nel fondamentale "Teorema di Frobenius" (G. Frobenius, 1849-1917), che nel caso-base appena illustrato recita dunque: «Siano $\varphi_{i=1,2} = \varphi_{i=1,2}(x, z)$ funzioni di CdC 1 in $U \times V$ – con U aperto connesso di \mathbb{R}^2 e V intervallo reale aperto, entrambi contenenti le rispettive origini – e ivi soddisfacenti alla (6). Allora, una soluzione $y = y(x)$ delle (1) con valori in V e soddisfacente alla condizione $y(0) = 0$ esiste in un conveniente disco D di centro 0 e incluso in U ; questa soluzione è anche unica in un conveniente disco D' di centro 0 e incluso in D , $0 \in D' \subset D \subset U$.»

Su questa versione-base del teorema di Frobenius, osserviamo ancora quanto segue. Consideriamo la soluzione $y(x)$ passante per (0,0) e unicamente determinata in un disco di centro 0, e sia $(x_1, y_1) \in U \times V$ un punto della curva $y(x)$ distinto dal punto iniziale $(x_0=0, y_0=0)$. Riformulando il problema intorno a questo punto (x_1, y_1) , la soluzione può essere unicamente determinata in un altro disco di centro x_1 , e in questo modo *prolungata* al di là del precedente disco

di centro 0. Si può dimostrare che se U e V , e quindi $U \times V$, sono limitati, questa procedura di prolungamento della soluzione, iterata un numero *finito* di volte (sempre nello stesso verso), conduce fino al contorno di $U \times V$, dominio di definizione delle funzioni $\varphi_{i=1,2}$. Il fenomeno ricorda quello del prolungamento di una funzione analitica al di fuori del disco di convergenza della serie di potenze che la rappresenta (a parte la possibile plurivocità di quest'ultima funzione).

Del teorema di Frobenius sono dimostrabili, sulla stessa traccia, alcune importanti generalizzazioni. Una prima generalizzazione consiste nel sostituire \mathbb{R}^2 con $\mathbb{R}^{n>2}$. Ciò comporta alcune ovvie modifiche: (i) x diventa $\langle x^1, \dots, x^n \rangle$; (ii) le equazioni (1) diventano n ; (iii) U diventa un aperto connesso di \mathbb{R}^n contenente la sua origine; (iv) la (6) diventa un sistema di $n(n-1)/2$ equazioni del tipo $Q_{ij} - Q_{ji} = 0$, $i, j = 1 \div n$, $i \neq j$ (sempre da richiedere in $U \times V$). Una seconda generalizzazione, altrettanto semplice, consiste nel sostituire le origini di \mathbb{R}^n e di \mathbb{R} con loro punti arbitrari $x_0 \equiv \langle x_0^1, \dots, x_0^n \rangle$ e rispettivamente y_0 , traslando così U di x_0 e V di y_0 . Nulla cambia rispetto alla precedente versione, se non il “nome” del punto iniziale (x_0, y_0) .¹⁸ Con una terza generalizzazione, infine, si passa dalla singola incognita $y = y(x)$ ad una colonna di $m > 1$ incognite $y(x) \equiv \langle y^1(x), \dots, y^m(x) \rangle$; quindi V diventa un aperto di \mathbb{R}^m contenente il punto $y_0 \equiv \langle y_0^1, \dots, y_0^m \rangle$. Le (1) diventano così mn equazioni $\partial y / \partial x^i(x) = \varphi_i(x, y(x))$ con $\varphi_i \equiv \langle \varphi_i^1, \dots, \varphi_i^m \rangle$; le (6) diventano $mn(n-1)/2$ equazioni del tipo $(Q_{ij}^\alpha - Q_{ji}^\alpha)(x, z) = 0$, $\alpha = 1 \div m$, $i, j = 1 \div n$, $i \neq j$, ove $Q_{ij}^\alpha(x, z) =: (\partial \varphi_i^\alpha / \partial x^j + \varphi_j^\beta \partial \varphi_i^\alpha / \partial z^\beta)(x, z)$ (somma su β da 1 a m , $z \equiv \langle z^1, \dots, z^m \rangle$); mentre la condizione $y(x_0) = y_0$ resta formalmente invariata. (a parte l'attuale diverso significato di $y(x)$ e y_0).¹⁹

In \mathbb{R}^{n+1} , consideriamo la 1-forma (pffiana) $v_{(1)} = \varphi_i(x, y) dx^i - b(x, y) dy$, ove la somma su i va da 1 a n , $x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle$ e gli $n + 1$ coefficienti $\varphi_{1 \leq i \leq n}$, b , sono di CdC 1, in $U (\subset \mathbb{R}^n) \times V (\subset \mathbb{R})$, con U e V aperti qualsiasi di \mathbb{R}^n e rispettivamente di \mathbb{R} . Poiché in \mathbb{R}^{n+1} le 1-forme dx^i e dy sono linearmente indipendenti, l'imporre che l' **equazione pffiana**

$$(15) \quad v_{(1)} = 0$$

valga in un intorno di un punto di riferimento (x_0, y_0) equivale alle $\varphi_i(x, y) = b(x, y) = 0$ in quell'intorno. Queste ultime sono $n + 1$ equazioni finite nelle (x, y) , per ipotesi soddisfatte in (x_0, y_0) ,

¹⁸ Va da sé che in questo caso, denotando con y^* la soluzione sotto la condizione $y^*(x_0) = 0$, mentre da una parte è $y(x_0) = y_0 + y^*(x_0)$, dall'altra in generale è $y(x) \neq y_0 + y^*(x)$ per $x \neq x_0$. Pensando inoltre y_0 come variabile in V , si pone il problema di come la soluzione dipenda da y_0 . Nelle solite ipotesi sulle φ_i , si dimostra che $w(x, y_0) =: \partial y / \partial y_0(x, y_0)$ esiste continua, e soddisfa al sistema differenziale parziale *lineare* $\partial w / \partial x^i(x, y_0) = \varphi_i(x, y(x, y_0))w(x, y_0)$, sotto la condizione $w(x_0, y_0) = 1$.

¹⁹ Ancora più significativa appare l'estensione della versione classica del teorema di Frobenius di cui abbiamo detto fin qui – e che a suo tempo (1876) segnò una tappa importante della teoria dei sistemi di equazioni differenziali parziali del 1° ordine quasi-lineari e in forma normale – a spazi di Banach (\equiv lineari normati e completi), dovuta inizialmente a M. Korner (1933) e completamente generalizzata da J. Dieudonné (1960). Ciò fu reso possibile dal nuovo concetto di derivata (“derivata in norma”) introdotto nel 1911 da M. Fréchet (1878-1973), che pose le basi della cosiddetta “Analisi Generale” e della stessa moderna Analisi Funzionale. Questa versione del teorema di Frobenius è talvolta nominata come “teorema di Frobenius-Dieudonné”.

ma prive di interesse nel presente contesto. Richiediamo invece che la matrice a 1 riga e $n+1$ colonne $\varphi_1, \dots, \varphi_n, b$ abbia rango massimale (cioè, che sia $(*) \sum_{i=1}^n (\varphi_i)^2 + b^2 > 0$) nel punto di riferimento (che per questa ragione si dirà un punto “regolare” di \mathbb{R}^{n+1} rispetto alla $v_{(1)}$), e sotto questa ipotesi manteniamo la richiesta (15). Pur non avendo interesse in \mathbb{R}^{n+1} , questa equazione può essere soddisfatta in varietà di dimensione più bassa immerse in \mathbb{R}^{n+1} , per l'appunto (incompletamente) definite dalla (15). Senza ledere la generalità, possiamo supporre che la $(*)$ sia soddisfatta perché $b \neq 0$; in questo caso la (15) può risciversi come $\varphi'_i dx^i = dy$ avendo posto $\varphi'_i =: \varphi_i/b$. Ad esempio, questa indica in $y = y(x)$ una varietà n -dimensionale di \mathbb{R}^{n+1} (se esiste), per la quale $dy = \partial y/\partial x^i dx^i$ è uguale a $\varphi'_i dx^i$; cioè, tornando per semplicità a scrivere φ'_i come φ_i , per la quale in forza della indipendenza lineare delle dx^i vale il sistema di n equazioni differenziali $\partial y/\partial x^i(x) = \varphi_i(x, y(x))$ nella incognita $y = y(x)$. In particolare, per $n = 2$ queste coincidono con le (1). La $y(x)$ si dice **varietà integrale n -dimensionale di \mathbb{R}^{n+1} per l'equazione pffaffiana** (15), ed è, come sappiamo, unica se si richiede $y(x_0) = y_0$. Per fare un altro esempio: sia t un parametro variabile in un intervallo aperto contenente $t = 0$, e sia $x \equiv \langle x^i \rangle_{i=1+n} = x(t)$, di CdC 1 e con $\sum_{i=1}^n (d_t x^i)^2 > 0$ in $t = 0$; allora la (15) equivale ad una EDO del tipo $d_t y = \varphi_i d_t x^i$ nella $y = y(t)$ (con coefficienti $\varphi_i = \varphi_i(x(t), y)$ di CdC 1). Questa EDO individua una famiglia ad un parametro di curve di \mathbb{R}^{n+1} (o **1-varietà integrali** della (15) di data proiezione $x(t)$ su \mathbb{R}^n), della quale la condizione $y(t=0) = y_0$ seleziona (localmente) un unico elemento. Similmente, essendo (per $n > 2$) u, v due parametri variabili in un aperto di \mathbb{R}^2 contenente l'origine $u = v = 0$, poniamo $x \equiv \langle x^i \rangle_{i=1+n} = x(u, v)$, di CdC 1 e sotto $\text{rng}\{\partial(x)/\partial(u, v)\} = 2$ in $u = v = 0$; allora la (15) equivale alle due EDP $\partial y/\partial u = \varphi_i \partial x^i/\partial u$, $\partial y/\partial v = \varphi_i \partial x^i/\partial v$ nella $y = y(u, v)$ (con $\varphi_i = \varphi_i(x(u, v), y)$), e queste individuano una famiglia ad un parametro di 2-superfici in \mathbb{R}^{n+1} (**2-varietà integrali** della (15) di data proiezione $x = x(u, v)$ su \mathbb{R}^n), della quale la condizione iniziale $y(u=0, v=0) = y_0$ seleziona un elemento. Si può analogamente proseguire con le 3-varietà integrali (se $n > 3$), ..., le $(n-1)$ -varietà integrali, della (15). Nel caso delle n -varietà integrali in \mathbb{R}^{n+1} , che abbiamo introdotto più sopra per primo, abbiamo posto $x \equiv x^{1 \leq i \leq n} = u \equiv u^{1 \leq i \leq n}$ (il che comporta che $\text{rng}\{\partial(x)/\partial(u)\} = n$), e la (15) riproduce le EDP (1) nella incognita $y = y(x)$. La condizione iniziale $y(u=0) = y_0$ seleziona allora un elemento della famiglia ad un parametro delle n -varietà integrali corrispondenti. Questo schema può anche essere simmetrizzato evitando di scegliere a priori uno degli addendi della 1-forma di partenza; a quel punto ci si riferirà ovviamente a \mathbb{R}^n anziché a \mathbb{R}^{n+1} , ponendo $v_{(1)} = v_i dx^i$ (somma su i da 1 a n), e richiedendo che la proiezione $x^i = x^i(u^1, \dots, u^r)$, $1 \leq r \leq n-1$, abbia matrice jacobiana $\{\partial x^i/\partial u^j\}_{i=1+n, j=1+r}$ di rango r in $u^{1 \leq j \leq r} = 0$.

Equazioni che consistono nell'annullare una data $(1 < \kappa \leq n)$ -forma differenziale esterna di \mathbb{R}^n si dicono ancora, in senso lato, **equazioni pfaffiane** di ordine κ . La teoria di tali più generali equazioni, o addirittura dei loro sistemi, è stata fortemente sviluppata nella prima metà del secolo scorso (soprattutto negli scorsi anni '30 – '40) e costituisce ormai un vasto capitolo dell'Analisi Differenziale, con importanti applicazioni alla geometria differenziale e alla fisica teorica. È ovviamente impossibile affrontare qui questo tema nella sua generalità²⁰, per cui ci limiteremo ad esplorarne gli aspetti più importanti per le sole equazioni pfaffiane in senso stretto ($\kappa = 1$) e i loro sistemi.

Riprendiamo allo scopo la terza ed ultima versione del teorema di Frobenius di qualche paragrafo più sopra, in cui $y \equiv \langle y^1, \dots, y^m \rangle$ è una m -colonna di funzioni di $x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle$, e la (15) è sostituita dall'annullarsi di una m -colonna di 1-forme (supposte linearmente indipendenti nel punto di riferimento) del tipo $v_{(1)}^\alpha = \varphi_i^\alpha(x,y) dx^i - dy^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, m$, somma su i da 1 a $n \geq 2$. (Diversamente da quanto abbiamo fatto nella S.sez. 4.5.1, abbiamo ormai soprascritto il contrassegno della forma a destra del suo simbolo.) Rinunciando ancora per semplicità al pedice (1) nel denotare le $v_{(1)}^\alpha$, avremo cioè:

$$(15\text{bis}) \quad v^\alpha = 0,$$

per $\alpha = 1, \dots, m$.

Mostriamo ora come il teorema di Frobenius si traduca nel linguaggio delle forme differenziali esterne. Sottintendendo la somma da 1 a m sugli indici greci ripetuti e quella da 1 a n sugli indici latini ripetuti, abbiamo

$$(16) \quad \partial v^\alpha = \partial \varphi_i^\alpha / \partial x^s dx^s \wedge dx^i + \partial \varphi_i^\alpha / \partial y^\beta (\varphi_s^\beta dx^s - v^\beta) \wedge dx^i = (1/2)(Q_{is}^\alpha - Q_{si}^\alpha) dx^s \wedge dx^i + \partial \varphi_i^\alpha / \partial y^\beta dx^i \wedge v^\beta,$$

dove $Q_{is}^\alpha =: \partial \varphi_i^\alpha / \partial x^s + \varphi_s^\beta \partial \varphi_i^\alpha / \partial y^\beta$. Avendo posto $N =: v^1 \wedge \dots \wedge v^m$, moltiplichiamo esternamente a destra ∂v^α per N . Otteniamo:

$$(17) \quad \partial v^\alpha \wedge N = (1/2)(Q_{is}^\alpha - Q_{si}^\alpha) dx^s \wedge dx^i \wedge N,$$

perché $v^\beta \wedge N \equiv 0 \quad \forall \beta = 1, \dots, m$. Si vede così che la condizione di integrabilità $Q_{is}^\alpha - Q_{si}^\alpha = 0$ implica

$$(18) \quad \partial v^\alpha \wedge N = 0$$

$\forall \alpha = 1, \dots, m$. Ma è vero anche il contrario. Supponiamo infatti che le m $(2+m)$ -forme $\partial v^\alpha \wedge N$ siano nulle. Poiché $(dx^1, \dots, dx^n, dy^1, \dots, dy^m)$ sono elementi di una base dello spazio lineare delle 1-forme v^1, \dots, v^m , e il passaggio dalle dy^1, \dots, dy^m alle v^1, \dots, v^m è indotto da una matrice a determinante uguale a 1, segue che anche le 1-forme $(dx^1, \dots, dx^n, v^1, \dots, v^m)$ sono linearmente indipendenti.

²⁰ Il lettore che ne fosse curioso potrà consultare i classici trattati di Schouten e Kulk (J.A. Schouten, W. Kulk, "Pfaff's Problem and its Generalizations", Clarendon Press (1949)), o quello più recente di Haak e Wendland (W. Haak, W. Wendland, "Vorlesungen über Partielle und Pfaffische Differentialgleichungen", Birkhäuser, 1969, tr. ingl. in Pergamon Press, 1972).

Quindi le C_n^2 $(2+m)$ -forme $dx^i \wedge dx^s \wedge N \forall i, s = 1, \dots, n, i > s$, sono linearmente indipendenti nello spazio C_{n+m}^{2+m} -dim delle $(2+m)$ -forme su R^{n+m} ²¹. Questo basta a concludere che le (18) implicano che $Q_{is}^\alpha - Q_{si}^\alpha = 0$ ($\forall \alpha = 1, \dots, m$ e ogni $i, s = 1, \dots, n, i > s$), qed. Il teorema di Frobenius può dunque riformularsi affermando che «il sistema pfaffiano (15bis) è integrabile (nel solito intorno di (x_0, y_0)) sse ivi valgono le (18)».

Si deve peraltro osservare che le 1-forme v^α hanno una struttura specifica. Partiamo quindi da 1-forme (per ipotesi linearmente indipendenti nel punto di riferimento) su R^{m+n} del tipo generale $\mu^\alpha = \varphi_i^\alpha(x, y) dx^i - \psi_\beta^\alpha(x, y) dy^\beta$, dove al solito gli indici greci corrono su $1 \div m$, quelli latini su $1 \div n$, e i coefficienti $\varphi_i^\alpha, \psi_\beta^\alpha$ sono supposti di CdC 1 nei loro argomenti (x, y) . È ovvio che un sistema del tipo $\mu^\alpha = 0 \forall \alpha = 1 \div m$, equivale ad un sistema del precedente tipo (15bis) sse la matrice $\{\psi_\beta^\alpha\}$ è non singolare. Detta in questa ipotesi $\{\chi_\alpha^\gamma\}$ la sua matrice reciproca, $\chi_\alpha^\gamma \psi_\beta^\alpha = \delta_\beta^\gamma$, vediamo così che le m 1-forme $\pi^\gamma = \chi_\alpha^\gamma \mu^\alpha = \chi_\alpha^\gamma \psi_\beta^\alpha dx^i - dy^\alpha$, a loro volta linearmente indipendenti nel punto di riferimento, sono del tipo delle precedenti v^α . Per esse, sappiamo quindi trascrivere le condizioni di integrabilità secondo le (18), cioè come $\partial \pi^\gamma \wedge \Pi = 0$ con $\Pi =: \pi^1 \wedge \dots \wedge \pi^m$. Vogliamo ora esprimere tale criterio in termini delle 1-forme di partenza μ^α . Scriveremo per brevità $\det\{\psi\}$ per $\det\{\psi_\beta^\alpha\}$ e $\det\{\chi\}$ per $\det\{\chi_\alpha^\beta\}$, essendo inteso che $\det\{\psi\} \det\{\chi\} = 1$. Mostriamo che il risultato di questa elaborazione, sotto la predetta ipotesi $\det\{\psi\} \neq 0$, si presenta con l'identica struttura formale delle (18). Abbiamo $\partial \pi^\gamma = d\chi_\alpha^\gamma \mu^\alpha + \chi_\alpha^\gamma \partial \mu^\alpha$; per cui, posto $M =: \mu^1 \wedge \dots \wedge \mu^m$, $\partial \pi^\gamma \wedge M = \chi_\alpha^\gamma \partial \mu^\alpha \wedge M$. Ma $\Pi = \chi_{\alpha 1}^1 \mu^{\alpha 1} + \dots + \chi_{\alpha m}^m \mu^{\alpha m} = (1/m!) e^{\alpha 1 \dots \alpha m} \beta_1 \dots \beta_m \chi_{\alpha 1}^1 \dots \chi_{\alpha m}^m \mu^{\beta 1} \wedge \dots \wedge \mu^{\beta m} = \det\{\chi\} M$. Si ha così $0 = \partial \pi^\gamma \wedge \Pi = \det\{\chi\} \partial \pi^\gamma \wedge M = \det\{\chi\} \chi_\alpha^\gamma \partial \mu^\alpha \wedge M$, e si conclude che $\partial \pi^\gamma \wedge \Pi = 0$ equivale a $\partial \mu^\alpha \wedge M = 0$, qed. Scriveremo pertanto la condizione di integrabilità del sistema $\mu^\alpha = 0$ ($\alpha = 1, \dots, m$), con le μ^α linearmente indipendenti, come

$$(18bis) \quad \partial \mu^\alpha \wedge M = 0, \forall \alpha = 1 \div m.$$

Segnaliamo e giustifichiamo certe versioni equivalenti delle condizioni (18bis) in R^{n+m} . Aggiungiamo alle m forme μ^α altre n 1-forme $\mu^{m+1}, \dots, \mu^{m+n}$ tali che $\{\mu^1, \dots, \mu^n\}$ sia una base dello spazio $(n+m)$ -dim delle 1-forme in R^{n+m} . Allora una generica 2-forma può rappresentarsi come combinazione lineare di $\mu^i \wedge \mu^k, i, k = 1, \dots, m+n$, con coefficienti a due indici (ik) unicamente definiti, sotto $i < k$. Scriveremo dunque, in particolare, $\partial \mu^\alpha = \sum_{i < k} c_{ik}^\alpha \mu^i \wedge \mu^k$ (gli indici latini corrono su $1 \div (m+n)$ e quelli greci su $1 \div m$). Diciamo per brevità (a) la (18bis); allora (a) implica che $0 = \sum_{i < k} c_{ik}^\alpha \mu^i \wedge \mu^k \wedge M$, ossia che $c_{ik}^\alpha = 0$ per ogni $m < i < k$ (e ogni $\alpha = 1 \div m$), perché le $\mu^1, \dots, \mu^m, \mu^i, \mu^k$ sono linearmente indipendenti per $m < i < k$. Segue che

²¹ È facile accertare che C_{n+m}^{2+m} cresce con m e ha il suo minimo $C_n^2 = n(n-1)/2$ per $m = 0$, per cui $C_{n+m}^{2+m} > C_n^2$ per $m \geq 1$.

$$(19) \quad \partial\mu^\alpha = \sum_{\beta=1}^m \sum_{i=\beta+1}^{m+n} c_{\beta i}^\alpha \mu^\beta \wedge \mu^i \equiv \sum_{\beta=1}^m \theta_{\beta}^\alpha \wedge \mu^\beta,$$

dove le 1-forme $\sum_{i=\beta+1}^{m+n} c_{\beta i}^\alpha \mu^i$ sono state scritte come $-\theta_{\beta}^\alpha$. Concludiamo che (a) \Rightarrow “esistono 1-forme θ_{β}^α per le quali le $\partial\mu^\alpha$ si rappresentano mediante le (19)” (\equiv (b)). Inoltre $\partial M = \sum_{\alpha=1}^m (-1)^{\alpha-1} \partial\mu^\alpha \wedge M_{-\alpha}$; e sostituendo in questa la rappresentazione (19) di $\partial\mu^\alpha$, troviamo $\partial M = \zeta \wedge M$, con $\zeta =: \sum_{\alpha=1}^m \theta_{\alpha}^\alpha$. Dunque (b) \Rightarrow “esiste una 1-forma ζ per cui $\partial M = \zeta \wedge M$ ” (\equiv (c)). È chiaro poi che (c) implica “ $\mu^\alpha \wedge \partial M = 0 \quad \forall \alpha = 1 \div m$ ”. Ma, come si verifica subito, $\mu^\alpha \wedge \partial M = \partial\mu^\alpha \wedge M$ ²²; quindi (c) \Rightarrow (a), e concludiamo così che (a), (b), (c) sono equivalenti tra loro. (a), (b), (c) sono pertanto formulazioni diverse ma equivalenti delle condizioni di integrabilità di Frobenius per il sistema di m equazioni indipendenti $\mu^\alpha = 0$.

Con le ovvie modifiche, tutti i risultati ottenuti mediante mere operazioni di differenziazione si possono trasferire su varietà elementari della stessa dimensione riferendosi ai relativi spazi tangenti o cotangenti, e sono carta-indipendenti.

4.5.3) IL TEOREMA DI GAUSS-BONNET

Una applicazione fondamentale del teorema di Frobenius, della massima pertinenza al presente contesto, è il teorema di Bonnet (O. Bonnet, 1819-1892; 1867), più spesso nominato come **teorema di Gauss-Bonnet**, avendone Gauss dato la versione relativa ad una superficie ($n = 2$) abbastanza regolare immersa nello spazio euclideo 3-dimensionale standard. Denotiamo qui con \mathbf{X} il punto dello spazio euclideo $(n+1)$ -dimensionale sommergente ($n \geq 2$), e con $q \equiv \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ le n coordinate della superficie in esso immersa, nei punti della quale è dunque $\mathbf{X} = \mathbf{X}(q)$. Identificando la base \mathbf{F}_μ ($\mu = 1, \dots, n+1$) della S.sez. 3.4.1 con quella dei versori cartesiani ortogonali di \mathbb{R}^{n+1} , la base locale del piano tangente alla superficie, $\{\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(q)\}$, diventa $\mathbf{f}_i = \partial\mathbf{X}/\partial q^i \equiv \mathbf{X}_{/i}$. Trascrivendo in questo riferimento le equazioni di Gauss (3.5.3, 12) abbiamo:

$$(1) \quad \partial\mathbf{X}_{/i}/\partial q^k \equiv \partial\mathbf{X}_{/k}/\partial q^i = \mathbf{X}_{/p} \Gamma_{i^p k} + \mathbf{n} h_{ik},$$

dove $\Gamma_{i^p k}$, \mathbf{n} e h_{ik} hanno i consueti significati di Chr2, versore normale e 2° tensore fondamentale, e tutti gli indici hanno valori compresi tra 1 e n . Similmente trascrivendo le equazioni di Weingarten (3.5.3, 8), troviamo:

$$(2) \quad \mathbf{n}_{/k} = -\mathbf{X}_{/s} h^s_k.$$

²² Infatti $\mu^\alpha \wedge \partial M = \sum_{\beta=1}^m (-1)^{\beta-1} \mu^\alpha \wedge \partial\mu^\beta \wedge M_{-\beta} = (-1)^{\alpha-1} (-1)^{\alpha-1+2} \partial\mu^\alpha \wedge M \equiv \partial\mu^\alpha \wedge M$. Si noti anche che per una arbitraria forma v e una arbitraria 1-forma μ , $\partial(\mu \wedge v) - \partial\mu \wedge v = \partial\mu \wedge v - \partial\mu \wedge v = 0$. Quindi anche ignorando la speciale struttura di M , la $(2+m)$ -forma $\mu^\alpha \wedge \partial M - \partial\mu^\alpha \wedge M$ è comunque chiusa (se non necessariamente nulla).

Il sistema di equazioni (1,2), nel quale le varie funzioni (scalari e vettoriali, \mathbf{X} , Γ_{ik}^p , \mathbf{n} , h_{ik}) sono da pensare come funzioni di q , è un sistema differenzial-parziale lineare del 1° ordine in forma normale nelle $n + 1$ incognite vettoriali \mathbf{X}_i e \mathbf{n} se i due tensori fondamentali $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$ sono prescritti come funzioni di q (entrambi simmetrici e il primo definito-positivo) sotto le relative condizioni di integrabilità di Frobenius. (Ricordiamo che anche i Chr2 sono allora prescritti, essendo unicamente esprimibili in termini di $g_{(2)}$ e derivate prime.) Come sappiamo, le condizioni di Frobenius traducono la richiesta di simmetria rispetto agli indici j,k delle $\partial^2 \mathbf{X}_i / \partial q^j \partial q^k$ e delle $\partial \mathbf{n}_j / \partial q^k$. Imponendo la prima simmetria al 2° membro della (1), esprimendo le derivate seconde di \mathbf{X} e le derivate prime di \mathbf{n} mediante le (1, 2) stesse, e infine tenendo conto della indipendenza lineare dei vettori \mathbf{X}_i , \mathbf{n} , si trovano due sistemi di vincoli tra $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$: da una parte la simmetria di Gauss (vedi S.sez 3.5.3)

$$(3) \quad \partial \Gamma_{ik}^s / \partial q^j + \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pj}^s - h_{ik} h_j^s = \text{alt}(i,j),$$

e dall'altra le equazioni di (Peterson e) Codazzi nella forma (3.5.3, 11). Similmente imponendo la seconda simmetria al 2° membro della (2) e operando in modo simile, si ottengono due altri sistemi di vincoli tra $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$: da una parte ancora le equazioni di Codazzi (3.5.3, 11) che qui riproduciamo per miglior convenienza

$$(4) \quad \partial h_{ik} / \partial q^j + h_{js} \Gamma_{ik}^s = \text{alt}(i,j),$$

e dall'altra le

$$(5) \quad h_i^p h_{pj} = \text{alt}(i,j).$$

Queste ultime (5) sono automaticamente soddisfatte in forza della assunta simmetria di $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$ e della non-singularità di $g_{(2)}$. In conclusione le condizioni di integrabilità di Frobenius che si impongono ai due tensori fondamentali, sottintendendo la simmetria di entrambi e la non-singularità del primo, sono costituiti dalle simmetrie di Gauss (3) e dalle equazioni di Codazzi (4). Si lascia al lettore la facile verifica di quanto affermato.

Se $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$ sono assegnati come funzioni abbastanza regolari di q sotto i predetti vincoli, il teorema di Frobenius assicura l'esistenza e l'unicità di una soluzione \mathbf{X}_i , \mathbf{n} in un intorno aperto connesso di un valore $q = q_{(0)}$ (che senza limitazioni di generalità si può assumere coincidente con l'origine $q = 0$), ove si intendono assegnati i valori "iniziali" delle incognite \mathbf{X}_i , \mathbf{n} , diciamo $\mathbf{X}_i(0)$, $\mathbf{n}(0)$. Dal sistema (1, 2) ricaviamo

$$(6) \quad \partial(\mathbf{X}_i, \mathbf{n}) / \partial q^j = \Gamma_{ij}^p(\mathbf{X}_p, \mathbf{n}) + h_{ij}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) - h_{jp} g_{ip} = \Gamma_{ij}^p(\mathbf{X}_p, \mathbf{n}) + h_{ij}[(\mathbf{n}, \mathbf{n}) - 1],$$

e similmente

$$(7) \quad \partial(\mathbf{n}, \mathbf{n}) / \partial q^j = -2h_j^p(\mathbf{X}_p, \mathbf{n}),$$

ove (\cdot, \cdot) sta al solito per prodotto interno. Se dunque i valori iniziali $\mathbf{X}_i(0)$, $\mathbf{n}(0)$ sono assegnati sotto i vincoli

$$(8_1) \quad (\mathbf{X}_{/i}(0), \mathbf{n}(0)) = 0,$$

$$(8_2) \quad (\mathbf{n}(0), \mathbf{n}(0)) - 1 = 0,$$

questi vincoli sono automaticamente mantenuti nell'intorno di esistenza/unicità della soluzione. Infatti le (6,7) (quest'ultima riscrivendone il 1° membro come $\partial((\mathbf{n}, \mathbf{n})-1)/\partial q^i$) formano un sistema differenziale *lineare* omogeneo nelle $n+1$ incognite $(\mathbf{X}_{/i}, \mathbf{n})$ e $(\mathbf{n}, \mathbf{n})-1$, e questo ha la sola soluzione nulla sotto le condizioni iniziali (8). In conclusione, in forza delle equazioni (1, 2) e delle condizioni iniziali (8) le $\mathbf{X}_{/i}, \mathbf{n}$ soddisfano alle

$$(9_1) \quad (\mathbf{X}_{/i}, \mathbf{n})(q) = 0,$$

$$(9_2) \quad ((\mathbf{n}, \mathbf{n})-1)(q) = 0$$

nel loro dominio di esistenza/unicità.

Il sistema (1, 2) mostra inoltre che, se $\mathbf{X}_{/i}, \mathbf{n}$ sono soluzioni per i dati $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$, $\mathbf{X}_{/i}, -\mathbf{n}$ sono soluzioni per $g'_{(2)} = g_{(2)}$ e $h'_{(2)} = -h_{(2)}$. Infine i vincoli (3,4,5) sono pari rispetto a $h_{(2)}$. Si può dunque ormai enunciare il teorema di Bonnet nella forma seguente: «Siano $g_{(2)}(q)$ e $h_{(2)}(q)$ due campi 2-tensoriali simmetrici di ordine n , il primo definito-positivo, assegnati come funzioni abbastanza regolari di $q \in V \subset \mathbb{R}^n$ (V essendo aperto e connesso) e soddisfacenti ai vincoli (3, 4). Allora esiste un intorno $U \subset V$ (aperto e connesso) di $q_{(0)} \in V$ in cui è definito un campo $\mathbf{X} = \mathbf{X}(q) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tale che al variare di q in U descrive una n -superficie Σ immersa in \mathbb{R}^{n+1} , e che i dati $g_{(2)}$ e $h_{(2)}$ sono il 1°, e rispettivamente 2°, tensore fondamentale di Σ . Questa n -superficie Σ è determinata unicamente a meno di una rototraslazione (propria o impropria), cioè a meno di una trasformazione del gruppo ortogonale affine dello spazio \mathbb{R}^{n+1} .» Non dimostriamo qui questo teorema, come potrebbe ormai essere fatto senza troppe difficoltà.²³

Una conseguenza del teorema di Gauss-Bonnet è la *rigidità* (locale) di una larga classe di superfici $(n>2)$ -dim, ovvero l'impossibilità di una loro trasformazione isometrica (locale) non banale (\equiv distinta da una trasformazione affine ortogonale). Precisamente, si può dimostrare che queste superfici $(n>2)$ -dim localmente rigide sono quelle che nel punto considerato hanno almeno *tre* curvatures principali non nulle.

Il teorema di Gauss-Bonnet suggerisce anche una questione più generale, quella della esistenza di una superficie $(n \geq 2)$ -dim immersa in uno spazio euclideo m -dim avente un assegnato 1° tensore fondamentale (simmetrico, definito-positivo e di CdC 3) $g_{(2)}$. Come abbiamo già accennato, la risposta a questo problema è positiva sotto certe richieste di sufficiente regolarità su $g_{(2)}$ (inizialmente (1926-27) si richiese l'*analiticità* di $g_{(2)}$), sse $m \geq n(n+1)/2$. In questo caso si può

²³ Oltre che nei lavori originali di Gauss e di Bonnet, la dimostrazione si trova ormai in parecchi trattati istituzionali di Analisi delle funzioni di più variabili reali.

addirittura rinunciare al carattere definito-positivo di $g_{(2)}$, conservandone quello di non-singularità; ma allora lo spazio sommergente m -dimensionale non può più, ovviamente, essere euclideo.

APP. 4.A ESTENSIONE DELLE FORMULE DI FRENET-SERRET AD UNA VARIETÀ PSEUDORIEMANNIANA

L'analisi delle $m-1$ curvatures di una curva m -embedded in R^m illustrata nella S.sez. 3.5.2 può ormai essere estesa a curve m -embedded in (un aperto U di) una varietà pseudoriemanniana $r \geq m$ $M^m \equiv M$, nella quale si presupponga cioè assegnato un (campo di) 2-tensore metrico, ad esempio attraverso le sue componenti covarianti (simmetriche) $g_{ik} = g_{ik}(x)$ per $x \in \lambda(U)$, ove $C = (U, \lambda)$ è una carta di M . In generale, si presuppone che $\det\{g_{ik}\}_{i,k=1,\dots,m}$ sia $\neq 0$, ma non che la forma quadratica $g_{ik}\xi^i\xi^k$ ($\xi^{1 \leq i \leq m}$ essendo arbitrarie indeterminate non tutte nulle) sia definita positiva come quando $M \equiv R^m$. In quanto segue, il caso $m = 1$ è piuttosto banale ed ha in pratica scarso interesse. Anticipiamo ora alcune importanti definizioni generali che riprenderemo nella terza parte del libro.

Siano $V^{1 \leq i \leq m} = V^i(x)$ le componenti controvarianti di un vettore $V(x)$ definito in $\lambda(U)$, per ipotesi non tutte nulle.¹ La forma (invariante) $g_{ik}V^iV^k$ può essere positiva o negativa o nulla in $x \in \lambda(U)$. Se $g_{ik}V^iV^k = 0$ in x , V si dice **isotropo** (o “appartenente al cono locale”), o ancora, ma meno felicemente, “nullo” (in x). La specificazione “in x ”, in questa e simili occasioni, sarà sottintesa nel seguito. Il numero $|g_{ik}V^iV^k|^{1/2}$ (una funzione di x) si dice **magnitudine di V** ; ed è ovvio che la magnitudine di un vettore isotropo è zero, e viceversa che un vettore di magnitudine nulla è isotropo. Nella magnitudine di V , *supposta positiva*, non vi è traccia del segno di $g_{ik}V^iV^k$; per cui è utile introdurre l'**indicatore** $\varepsilon = \pm 1$ di V , da scegliere in modo che $\varepsilon g_{ik}V^iV^k > 0$. In altre parole, dalla magnitudine supposta > 0 e dall'indicatore di V si ricostruisce l'invariante $g_{ik}V^iV^k$ in valore e segno; mentre se la magnitudine di V è nulla, $g_{ik}V^iV^k = 0$ e l'indicatore di V non è definito. Sia infine V non isotropo ed ε il suo indicatore: se $\varepsilon g_{ik}V^iV^k = 1$, V si dice **vettore pseudounitario** o **pseudoversore** (di indicatore ε). Due vettori V e W si dicono **ortogonali** se $g_{ik}V^iW^k = 0$; quindi un vettore è isotropo sse è perpendicolare a se stesso.

Sia u un parametro variabile in $I \equiv (0,1)$, e Γ una curva 1-embedded in U descritta nella carta C dalle $x^i = x^i(u)$ (con le dx^i/du mai simultaneamente nulle in I), e tale che il vettore dx/du di componenti controvarianti dx^i/du non sia mai isotropo in I . Siano u_1 e $u_2 > u_1$ due valori di u in I ; allora la magnitudine di dx/du , se ε è il suo indicatore (costante lungo Γ), è $(\varepsilon g_{ik}dx^i/dudx^k/du)^{1/2}$, ed è funzione positiva e continua di u per $u \in [u_1, u_2]$. L'integrale $s(u_1, u_2) = \int_{u_1}^{u_2} (\varepsilon g_{ik}dx^i/dudx^k/du)^{1/2} du$ si dice **lunghezza** (o **misura lineare**) di Γ tra u_1 e u_2 . La lunghezza s di Γ tra u_1 e $u_1 \leq u \leq u_2$ è

¹ Questa riserva si sottintenderà per ogni vettore nel seguito considerato.

funzione monotona crescente di u , per cui può essere usata come particolare parametro u . In questo caso

$$(1) \quad \varepsilon g_{ik} dx^i / ds dx^k / ds = 1;$$

ovvero, dx/ds è un vettore pseudounitario di indicatore ε lungo Γ .

Definiamo la **derivata assoluta** (lungo Γ) **rispetto a** u di un tensore di componenti $T_{\dots}^{\dots} = T_{\dots}^{\dots}(x)$ di CdC 1 come $D_u T_{\dots}^{\dots} =: T_{\dots}^{\dots} / d dx^d / du$. Questo è un nuovo tensore con gli stessi indici di covarianza/controvarianza di T_{\dots}^{\dots} . È evidente che l'operatore D_u è lineare e leibniziano; come pure che, se T_{\dots}^{\dots} è uno scalare T , $D_u T_{\dots}^{\dots}$ si riduce alla derivata ordinaria di T rispetto a u , $d_u T \equiv \partial T / \partial x^i dx^i / du$. Sappiamo infine (teorema di Ricci) che $D_u g_{ik} = 0$, $D_u g^{ik} = 0$ e (banalmente) $D_u g_i^k = 0$.

Tutto ciò premesso, denotiamo con μ il pseudoversore dx/ds di indicatore ε , riscrivendo quindi la (1) come

$$(1_1) \quad g_{ik} \mu^i \mu^k = \varepsilon.$$

D'ora in avanti, ad ogni passo successivo supporremo Γ 2-embedded, 3-embedded, ..., m -embedded in U . Quindi supponendo Γ 2-embedded in U , e prendendo la derivata assoluta \equiv ordinaria rispetto a s dell'invariante a 1° membro della (1₁), abbiamo: $0 = d_s(g_{ik} \mu^i \mu^k) \equiv D_s(g_{ik} \mu^i \mu^k) = 2g_{ik} \mu^i D_s \mu^k \equiv 2\mu_k D_s \mu^k$. Vale a dire, $D_s \mu$ è perpendicolare al vettore pseudounitario, o pseudoversore $\mu \equiv \mu_{(0)}$, di indicatore $\varepsilon \equiv \varepsilon_{(0)}$, tangente a Γ .

Supponendo $D_s \mu_{(0)}$ non isotropo, scriviamo $\mu_{(1)}$ per il suo pseudoversore, che si ottiene dividendo $D_s \mu_{(0)}$ per la sua magnitudine $\kappa_{(1)} > 0$. Se ε_1 è l'indicatore di $\mu_{(1)}$, avremo così

$$(2_1) \quad g_{ik} \mu_{(1)}^i \mu_{(1)}^k \equiv \mu_{(1)i} \mu_{(1)}^i = \varepsilon_{(1)},$$

$$(1_2) \quad D_s \mu_{(0)} = \kappa_{(1)} \mu_{(1)}.$$

$\mu_{(1)}$ si dice (pseudoversore) **1-normale** a Γ , e $\kappa_{(1)}$ **1-curvatura** di Γ . Diremo le (1) "coppia di formule del primo passo".

Similmente supponendo Γ 3-embedded in U e prendendo la D_s dell'invariante a 1° membro della (2₁) otteniamo $0 = \mu_{(1)k} D_s \mu_{(1)}^k$. Poniamo $\mu_{(2)}^* =: D_s \mu_{(1)} + \varepsilon_{(0)} \varepsilon_{(1)} \kappa_{(1)} \mu_{(0)}$, e dimostriamo che questo vettore è ortogonale sia a $\mu_{(0)}$ che a $\mu_{(1)}$. Per quanto riguarda la prima tesi risulta $\mu_{(0)i} \mu_{(2)}^{*i} = -\kappa_{(1)} \varepsilon_{(1)} + \kappa_{(1)} \varepsilon_{(1)} = 0$, perché prendendo la D_s della $0 = \mu_{(0)i} \mu_{(1)}^i$ e tenendo conto della (2₂) si ha $\mu_{(0)i} D_s \mu_{(1)}^i = -\kappa_{(1)} \varepsilon_{(1)}$. Quanto alla seconda tesi si ha $\mu_{(1)i} \mu_{(2)}^{*i} = \mu_{(1)i} D_s \mu_{(1)}^i + \varepsilon_{(0)} \varepsilon_{(1)} \mu_{(1)i} \mu_{(0)}^i = 0$ perché entrambi i prodotti interni a 2° membro sono nulli. Dunque $\mu_{(2)}^*$ è un vettore ortogonale a $\mu_{(0)}$ e a $\mu_{(1)}$; *supponendolo non isotropo*, e dividendolo per la sua magnitudine $\kappa_{(2)} > 0$, otteniamo un pseudoversore $\mu_{(2)}$ ancora ortogonale a $\mu_{(0)}$ e a $\mu_{(1)}$, per il quale

$$(2_2) \quad D_s \mu_{(1)} = \kappa_{(2)} \mu_{(2)} - \varepsilon_{(0)} \varepsilon_{(1)} \kappa_{(1)} \mu_{(0)}.$$

$\mu_{(2)}$ si dice **2-normale** a Γ , e $\kappa_{(2)}$ **2-curvatura** di Γ . Diremo le (2) “coppia di formule del 2° passo”.

Si prosegue in modo analogo producendo in successione gli ulteriori pseudoversori $\mu_{(3)}, \dots, \mu_{(m-1)}$ (**3-normale**, ..., **(m-1)-normale** a Γ) di indicatori $\varepsilon_{(3)}, \dots, \varepsilon_{(m-1)}$, tutti ortogonali tra loro e ai precedenti pseudoversori $\mu_{(0)}, \mu_{(1)}$ e $\mu_{(2)}$. Al (t+1)-mo passo, per $t+1 < m$, abbiamo la coppia di formule

$$((t+1)_1) \quad \mu_{(t)i}\mu_{(t)}^i = \varepsilon_{(t)},$$

$$((t+1)_2) \quad D_s\mu_{(t)} = \kappa_{(t+1)}\mu_{(t+1)} - \varepsilon_{(t-1)}\varepsilon_{(t)}\kappa_{(t)}\mu_{(t-1)}.$$

Al successivo m-mo passo abbiamo l’*m*-ma ed *ultima* coppia di equazioni

$$(m_1) \quad \mu_{(m-1)i}\mu_{(m-1)}^i = \varepsilon_{(m-1)},$$

$$(m_2) \quad D_s\mu_{(m-1)} = -\varepsilon_{(m-2)}\varepsilon_{(m-1)}\kappa_{(m-1)}\mu_{(m-1)}.$$

Che l’*m*-mo passo sia effettivamente l’ultimo è ovvio, perché se ce ne fosse un successivo, esso produrrebbe un ipotetico pseudoversore $\mu_{(m)}$ ortogonale ai precedenti *m* pseudoversori, già tra loro ortogonali, $\mu_{(0)}, \dots, \mu_{(m-1)}$; il che è assurdo perché nell’*m*-piano tangente di U non possono esistere *m*+1 pseudoversori linearmente indipendenti. La scrittura della prima, e rispettivamente dell’ultima, coppia di formule (1) e (m) può omologarsi a quella della generica coppia di formule (t+1) semplicemente ponendo $\kappa_{(0)} = 0$ e rispettivamente $\kappa_{(m)} = 0$.

Rileviamo che la gerarchia di coppie di formule (1), ..., (m) così ottenute generalizza quelle di Frenet-Serret della S.sez. 3.5.2 sotto due diversi profili, e cioè: (i) esse valgono nel dominio U di una carta (U, λ) di una varietà $r^{\geq m}M^m \equiv M$ *astratta*, senza alcun riferimento a possibili immersioni di questa in uno spazio lineare più ampio (e inoltre, anche se riferite ad altra carta (U, λ') di M *r*-compatibile con (U, λ)); (ii) la forma fondamentale $g_{ik}(x)\xi^i\xi^k$ è supposta generalmente indefinita per x in $\lambda(U)$, pur mantenendosi $\neq 0$ lungo Γ .

Per la data Γ *m*-embedded in U , e sotto tutte le ipotesi nominate, le formule in questione producono un sistema di *m* pseudoversori mutuamente ortogonali, di cui il primo ($\mu_{(0)}$) è il pseudoversore tangente a Γ . D’altra parte dobbiamo ricordare che la gerarchia di formule si interrompe al *t*-mo passo, non potendosi quindi produrre il pseudoversore $\mu_{(t)}$, se $\mu^*_{(t)}$ è isotropo, ovvero se la corrispondente *t*-curvatura $\kappa_{(t)}$ non è strettamente positiva. Questo fatto non significa tuttavia che, non potendosi produrre il pseudoversore $\mu_{(t)}$ mediante il meccanismo di Frenet-Serret, non esistano altri pseudoversori $\mu'_{(t)}, \dots, \mu'_{(m-1)}$ mutuamente ortogonali e ortogonali ai pseudoversori di più basso ordine già prodotti $\mu_{(0)}, \dots, \mu_{(m-1)}$.

APP. 4.B COMPLEMENTI: OLTRE IL PULL-BACK

La nozione di pull-back di una funzione, introdotta nella S.sez. 4.2.3, è più importante di quanto può essere apparso dalla nostra esposizione. Essa può infatti generalizzarsi e simmetrizzarsi, e ricevere altre significative applicazioni. Per vedere come, converrà innanzitutto rinunciare ad alcuni aspetti di generalità della sua definizione di cui sopra, e inessenziali agli scopi presenti. Vale a dire, supporremo che l'applicazione φ applichi l'intera varietà di partenza (e non soltanto un intorno aperto di un suo punto dato) nella varietà di arrivo, e assumeremo come senz'altro *lisce* sia la prima che la seconda varietà ($r = s = \infty$), nonché la stessa applicazione φ ($h = \infty$). Continuando a denotare come M^m la varietà m -dim di partenza e come N^n la varietà n -dim di arrivo (con m generalmente diverso da n), scriveremo dunque

$$(1) \quad \varphi: M^m \rightarrow N^n$$

in luogo della (4.2.2, 13).

Ancora finché possibile senza rischio di equivoci, per brevità sottintenderemo la dimensione nella notazione di M^m e di N^n . Non rinunceremo invece alla possibilità che l'applicazione φ *non* sia iniettiva, cioè che non esista l'applicazione inversa φ^{-1} da $\varphi(M)$ a M ; ovvero, alla possibilità che la matrice jacobiana di φ (relativa a due carte correnti di M e N) non abbia ovunque caratteristica massimale. (Se in particolare $M = N$, non rinunceremo dunque alla possibilità che φ non sia ovunque localmente invertibile, ossia che la predetta matrice jacobiana (quadrata) non sia ovunque regolare.)

A questo punto la relazione che definisce il pull-back della generica funzione *liscia* $g: N \rightarrow R$, cioè (cfr. S.sez. 4.2.3)

$$(2) \quad \varphi_*(g) = g \circ \varphi,$$

rimane inalterata, ma ha un contenuto leggermente più semplice, perché $\varphi_*(g) \in \mathcal{F}(M)$ (piuttosto che $\in \mathcal{F}_p(M)$), ed è automaticamente evitata ogni considerazione sulle varie CdC in gioco.

Se da una parte quello di tirare indietro (\equiv pull-back) su M una funzione (scalare) liscia² definita su N è un concetto semplice e naturale, non esiste un corrispondente modo di spingere avanti (\equiv push forward) su N una funzione reale f definita su M , ferma restando l'esistenza dell'applicazione $\varphi: M \rightarrow N$; vale a dire, non c'è un modo "naturale" di comporre f con φ per creare una funzione reale definita su N .

² Come anticipato, *tutte* le funzioni reali con cui avremo a che fare saranno supposte lisce, e quindi non lo ricorderemo esplicitamente volta per volta.

Questo è invece possibile per i campi vettoriali (reali, lisci) definiti su M . Precisamente, sia $V: M \rightarrow B(M)$ un tale campo vettoriale (c.v.) su M ($B(M)$ è il fibrato vettoriale di M), e sia $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1+m} \equiv \{\partial_i\}_{i=1+m}$ la base canonica covariante associata alla coordinata $x \equiv \langle x_i \rangle_{i=1+m} = \lambda(p \in M)$ nella carta corrente ($U \subset M, \lambda$). Al c.v. V di componenti controvarianti $V^i(x)$ ³ nella stessa base ($V = V^i \partial_i$), si associa in modo naturale l'operatore lineare differenziale $V^i \partial_i$ che trasforma la generica funzione (liscia) $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ nella funzione $V^i \partial_i f^\circ: M \rightarrow \mathbb{R}$ (dove $f^\circ(x) = f(\lambda^{-1}(x))$); funzione per definizione altrettanto liscia, e che denoteremo $V(f)$. Se allora g è la generica funzione su N , definiremo il c.v. su N $\varphi^\times(V)$, **spinto-avanti** (pushed-forward) di V , mediante la

$$(3) \quad (\varphi^\times(V))(g) =: V(\varphi_\times(g))$$

da richiedere $\forall g \in \mathcal{F}(N)$. Come φ_\times si è detto il pull-back di φ , φ^\times si dirà il suo **push-forward**.

Questa è una definizione alquanto astratta dello spingere avanti V ; per averne una un po' più intuitiva, conviene far uso della base canonica covariante $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1+m}$ dello spazio tangente $T(M)$ e della analoga base canonica $\{\partial/\partial y^j\}_{j=1+n}$ dello spazio tangente $T(N)$, dove le $y^j = y^j(x)$ sono le funzioni definite dalla (4.2.1, 3) con riferimento alle carte correnti su M e su N (e al solito si assume che il trasformato da φ del dominio della carta di M sia incluso al dominio della carta di N). Allora la (3) diventa

$$(3') \quad (\varphi^\times(V))^j \partial g^\circ / \partial y^j =: (V^i \partial / \partial x^i)(\varphi_\times(g))^\circ = V^i \partial y^j / \partial x^i \partial g^\circ / \partial y^j,$$

Qui le somme su (i) vanno da 1 a m e quelle su (j) da 1 a n , mentre il $^\circ$ ha il solito significato, secondo cui $g^\circ(y) = g(\mu^{-1}(y))$ se μ è la mappa della carta di N . Infine, secondo l'uso comune le $(\varphi^\times(V))^j$ e le V^i si possono intendere direttamente come funzioni di y e rispettivamente di x , vedi nota precedente. Poiché g è arbitraria, dalla (3') si trae

$$(3bis) \quad (\varphi^\times(V))^j =: (\varphi^\times)_i^j V^i, \quad 4$$

con $(\varphi^\times)_i^j =: \partial y^j / \partial x^i$. Per brevità, nelle (3') e (3bis) non sono stati evidenziati gli argomenti correnti, che sono x e rispettivamente $y = y(x)$. La (3bis) è la versione indiciale della (3'), ed afferma che la componente (j) nella base $\{\partial/\partial y^j\}_{j=1+n}$ dello spinto-avanti di V è per definizione il prodotto della riga j -ma della $(n \times m)$ -matrice jacobiana per la colonna delle componenti di V nella base $\{\partial/\partial x^i\}_{i=1+m}$.⁵

³ Poiché V è funzione di $p \in M$, in realtà l'argomento di queste componenti dovrebbe denotarsi $\lambda^{-1}(x)$, e quindi le componenti stesse dovrebbero denotarsi $V^{i\circ}(x) \equiv V^i(\lambda^{-1}(x))$. Come abbiamo anticipato, di norma useremo la notazione semplificata, alla quale il lettore si assuefarà facilmente.

⁴ Che dalla (3') discenda la (3bis) potrebbe non convincere, perché $\partial g^\circ / \partial y^j$ non è, a prima vista, un covettore del tutto arbitrario di \mathbb{R}^n (è un gradiente). Ma se g è arbitraria, anche g° è arbitraria, e può essere assunta uguale a y^k ($k = 1+n$). Allora $\partial y^k / \partial y^j = \delta_j^k$. Sostituendo questa nella (3'), si ha appunto la (3bis).

⁵ Anche se abbiamo preferito non denunciarlo come tale in quella occasione, abbiamo già incontrato un caso di c.v. spinto-avanti. Si tratta di quello che abbiamo denotato con φ_τ nella (4.2.3, 5), e che è a tutti gli effetti il c.v. spinto-avanti di t , $\varphi^\times(t)$, come il lettore potrà subito verificare.

La (3bis) è una significativa generalizzazione della legge di trasformazione delle componenti controvarianti di un c.v. dato su una varietà a fronte di un cambiamento di carta, cfr. la (4.2.2, 3). La (3bis) è più generale di tale (4.2.2, 3) anche quando $N = M$ (quindi $n = m$): da una parte perché il 1° membro e il 2° membro si riferiscono a punti generalmente diversi di M (a x il 2° membro, e a $\mu(\varphi(\lambda^{-1}(x))) = \varphi^0(x)$ il 1° membro), e dall'altra perché la matrice (quadrata) jacobiana che vi figura non è necessariamente ovunque regolare. Ad esempio, nel caso estremo in cui φ manda ogni p di M in un unico \underline{p} costante di M stessa, allora la jacobiana $\partial(y)/\partial(x)$ è identicamente nulla, e identicamente nullo è anche lo spinto-avanti $\varphi^\times(V)$ di V .

Come non vi è modo di spingere avanti (da M a N) un(o) (campo) scalare dato su M , altrettanto impossibile è tirare indietro (da N a M) un (c.) vettoriale dato su N . Tuttavia i campi covettoriali (c.cov.) sono duali di quelli vettoriali, e non c'è da sorprendersi che i primi possano essere tirati indietro (da N a M , come i campi scalari, ma non spinti avanti). Infatti un c. cov. dato su una varietà può considerarsi come un'applicazione *lineare* del generico c.v. (dato sulla stessa varietà) in \mathbb{R} . Se ad esempio la varietà è N , e K è il c. cov. su N , $K: B(N) \rightarrow \mathbb{R}$ (dove $B(N)$ è il fibrato vettoriale di N); allora se U è il generico c.v. di $B(N)$, il valore di K in U , $K(U)$, si definisce come l'invariante scalare $K_j U^j$, calcolato con riferimento ad una qualsiasi coppia di base-cobase associate canoniche come $\{dy^j\}$ e $\{\partial/\partial y^j\}$ per le quali $K = K_j dy^j$ e $U = U^j \partial/\partial y^j$. Ciò detto, il pull-back $\varphi_\times K$ si definisce in modo naturale mediante la

$$(4) \quad (\varphi_\times(K))(V) =: K(\varphi^\times(V)) (= K_j(\varphi^\times(V))^j),$$

$\forall V \in B(M) =$ fibrato vettoriale di M . Alla (4) si può dare la forma indiciale

$$(4bis) \quad (\varphi_\times(K))_i =: (\varphi_\times)_i^j K_j,$$

dove al solito $i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$, avendo posto $(\varphi_\times)_i^j =: \partial y^j / \partial x^i (= (\varphi^\times)_i^j)$. La (4bis) è duale della (3bis): sostituendo formalmente, nella (4bis), K con V , spostando verticalmente la \times di φ e infine scambiando gli indici con la regola $i \leftrightarrow j$ e basso \leftrightarrow alto, si ottiene appunto la (3bis). Inoltre, se si contrae la (3bis) con il generico covettore K_j su N si ottiene

$$(3ter) \quad (\varphi^\times(V))^j K_j = V^i \partial y^j / \partial x^i K_j.$$

Questa è una (apparente) generalizzazione della (3'), nel senso che al covettore-gradiente di componenti $\partial g^0 / \partial y^j$ che figura nella (3') si è sostituito il covettore generico di componenti K_j . Segue che alla (3ter) si può dare la forma

$$(5) \quad (\varphi^\times(V))(K) = V(\varphi_\times(K)),$$

duale della prima (4): basta dislocare verticalmente la \times di φ e scambiare tra loro V e K per passare da una relazione all'altra.

La (3bis) si generalizza facilmente sostituendovi a $V \equiv V_{\langle 0,1 \rangle}$ un generico c. tensoriale su M di tipo $\langle 0,b \rangle$, diciamo $S_{\langle 0,b \rangle} \equiv S$ (cioè con 0 indici covarianti e b indici controvarianti). Il risultato è

$$(6) \quad (\varphi^\times(S))^{j^1 \dots j^b} = \partial y^{j^1} / \partial x^{i^1} \dots \partial y^{j^b} / \partial x^{i^b} S^{i^1 \dots i^b},$$

dove gli indici j variano su $1 \div n$ e gli indici i su $1 \div m$. La (4bis) si generalizza in modo simile, sostituendovi a K un generico c. tens. su N di tipo $\langle a,0 \rangle$, diciamo $T_{\langle a,0 \rangle} \equiv T$ (cioè con a indici covarianti e 0 indici controvarianti). Il risultato è

$$(7) \quad (\varphi_\times(T))_{i^1 \dots i^a} = \partial y^{j^1} / \partial x^{i^1} \dots \partial y^{j^a} / \partial x^{i^a} T_{j^1 \dots j^a},$$

con gli indici i e j variabili su $1 \div m$ e risp. su $1 \div n$. Non è invece possibile scrivere leggi del tipo (6) o (7) per c. tens. di tipo $\langle a,0,b \rangle$, perché questi campi non possono essere né tirati indietro (da N a M) né spinti avanti (da M a N). Ancora, le (6) e le (7) sono generalizzazioni sostanziali delle leggi di trasformazione delle componenti di un c.tens. di tipo $\langle 0,b \rangle$, e rispettivamente di tipo $\langle a,0 \rangle$, su una data varietà, a fronte di un cambiamento di carta. Delle (6) e (7) si possono subito scrivere versioni non indiciali. Queste sono

$$(6') \quad (\varphi^\times(S))(K^{(1)}, \dots, K^{(b)}) = S(\varphi_\times(K^{(1)}), \dots, \varphi_\times(K^{(b)})),$$

da far valere per arbitrari $K^{(1)}, \dots, K^{(b)}$ c. cov. su N ; e rispettivamente,

$$(7') \quad (\varphi_\times(T))(V^{(1)}, \dots, V^{(a)}) = T(\varphi^\times(V^{(1)}), \dots, \varphi^\times(V^{(a)})),$$

da far valere per arbitrari $V^{(1)}, \dots, V^{(a)}$ c.v. su M . Le (6', 7') sono le naturali generalizzazioni della (4) (da $b = 1$ a $b \geq 1$) e rispettivamente della (5) (da $a = 1$ a $a \geq 1$).

La notazione fin qui adottata nell'intento di ottenere la miglior chiarezza contiene decisamente *troppo* parentesi per essere considerata una buona notazione. Un semplice rimedio consiste nell'abolire le parentesi attorno agli argomenti di φ_\times e di φ^\times , tenuto anche conto che tali φ_\times e φ^\times sono lineari. Lo faremo in quanto resta di questa appendice speciale 4.B.

Una interessante applicazione della (7) è quella che si ottiene supponendo che M sia una sottovarietà propria di N ($m < n$), che N sia dotata di metrica e che φ sia l'applicazione identica (quindi che φ sia l'immersione canonica di M in N). Poniamo nella (7) il c. tens. metrico (di tipo $\langle 2,0 \rangle$) di N , diciamo $g \equiv g_{jk}$ per $j,k = 1 \div n$ (confidiamo che tale g non sia confusa con il generico scalare su N usato più addietro), in luogo del generico T . Allora (si verifica che) il tirato-indietro $(\varphi_\times g)_{ih}$ (con $i,h = 1 \div m < n$) di g , che secondo la (7) è uguale a $\partial y^j / \partial x^i \partial y^k / \partial x^h g_{jk}$, è il c. tens. metrico su M indotto da quello su N .

Come esempio elementare di quanto affermato, consideriamo il caso in cui sia $N = \mathbb{R}^3$ e $M = S^{(2)} \equiv$ sfera unitaria immersa in \mathbb{R}^3 con centro nell'origine. Usando coordinate sferiche $x^1 \equiv \theta \in [0,\pi]$ (colatitudine) e $x^2 \equiv \phi \in [0,2\pi)$ (longitudine) in $S^{(2)}$, e coordinate cartesiane ortogonali standard $y^1 \equiv x$, $y^2 \equiv y$, $y^3 \equiv z$ in \mathbb{R}^3 (per cui $g_{jk} = \delta_{jk}$), abbiamo $\partial y^1 / \partial x^1 = \partial x / \partial \theta =$

$= \cos\theta\cos\phi$, $\partial y^2/\partial x^1 = \partial y/\partial\theta = \cos\theta\sin\phi$, $\partial y^3/\partial x^1 = \partial z/\partial\theta = -\sin\theta$, $\partial y^1/\partial x^2 = \partial x/\partial\phi = -\sin\theta\sin\phi$,
 $\partial y^2/\partial x^2 = \partial y/\partial\phi = \sin\theta\cos\phi$, $\partial y^3/\partial x^2 = \partial z/\partial\phi = 0$. L'intera matrice jacobiana a due righe e tre
 colonne $\partial(y)/\partial(x)$ è così determinata, ed ha caratteristica massimale 2 salvo che nei poli (dove la
 seconda riga si annulla). Un calcolo elementare prova allora che $(\varphi_*g)_{\theta\theta} = 1$, $(\varphi_*g)_{\theta\phi} = (\varphi_*g)_{\phi\theta} = 0$, e
 $(\varphi_*g)_{\phi\phi} = \sin^2\theta$. Questa è appunto la metrica di $S^{(2)}$ che si ricava nel modo usuale, cioè calcolando
 dx , dy , dz come combinazioni lineari di $d\theta$ e $d\phi$, quadrando, sommando ed identificando nel
 risultato i coefficienti di $d\theta^2$, di $d\theta d\phi$, e di $d\phi^2$.

Ricapitolando, abbiamo visto che certi oggetti (i c. tens. del tipo $\langle a \geq 0, 0 \rangle$) possono essere
 “naturalmente” tirati indietro, ma non spinti avanti; e per contro, che certi altri oggetti (i c. tens. del
 tipo $\langle 0, b > 0 \rangle$) possono essere “naturalmente” spinti avanti, ma non tirati indietro. La ragione di
 questa mancanza di simmetria – dopotutto una ragione abbastanza evidente – è nel fatto che
 l'applicazione $\varphi: M \rightarrow N$ è stata fin qui assunta generalmente non invertibile. Se al contrario φ è
 invertibile e “su”, allora è a tutti gli effetti un ∞ -diffeomorfismo, o diffeomorfismo liscio, e M e N
 possono essere identificate come varietà astratte ($m=n$)-dim lisce. In questo caso è possibile tirare
 indietro (da N a $M \equiv \varphi^{-1}(N)$) o spingere avanti (da M a $N \equiv \varphi(M)$) c. tens. di qualunque tipo. Vale a
 dire, se T è un c.tens. dato su M del tipo $\langle a, b \rangle$ con $a+b > 0$, il suo spinto-avanti φ^*T è definito dalla
 (8) $(\varphi^*T)(K^{(1)}, \dots, K^{(b)} | V^{(1)}, \dots, V^{(a)}) = T(\varphi_*K^{(1)}, \dots, \varphi_*K^{(b)} | (\varphi^{-1})^*V^{(1)}, \dots, (\varphi^{-1})^*V^{(a)})$,
 per arbitrari $K^{(1)}, \dots, K^{(b)}$ (c. cov. su N), e arbitrari $V^{(1)}, \dots, V^{(a)}$ (c. v. su N). La versione indiciale della
 (8) è evidentemente:

$$(8') \quad (\varphi^*T)^{j_1 \dots j_b}_{i_1 \dots i_a} = \partial y^{j_1} / \partial x^{h_1} \dots \partial y^{j_b} / \partial x^{h_b} T^{h_1 \dots h_b}_{k_1 \dots k_a} \partial x^{k_1} / \partial y^{i_1} \dots \partial x^{k_a} / \partial y^{i_a}$$

(la comparsa della matrice $\partial(x)/\partial(y)$ essendo legittima perché ormai φ è per ipotesi invertibile). Il
 tirato-indietro di T dato su N si potrebbe definire nel modo ovvio, ma questo riprodurrebbe in
 sostanza le stesse (8), (8'), perché il pull-back φ_* e lo spinto-avanti attraverso l'applicazione inversa
 φ^{-1} , $(\varphi^{-1})^*$, sono lo stesso oggetto.

Le (8), (8') – o le loro duali – si possono leggere immediatamente anche nel caso degenerare
 $a = b = 0$, in cui T è un c. scalare dato su M . Questo è naturale, perché adesso siamo in presenza di
 un diffeomorfismo. In particolare identificando M e N , questo diffeomorfismo trasforma M in sé,
 $\varphi(M) = M$, e stabilisce una corrispondenza 1-1 (liscia) tra i punti di M . In tal caso il c. scalare φ^*T
 coincide con T , ma mentre T è valutato in p , φ^*T è valutato in $\varphi(p)$; e similmente φ_*T coincide con
 T , ma mentre T è valutato in q , φ_*T è valutato in $\varphi^{-1}(q)$. Infine tutto ciò vale anche nel caso di un
 c.tens. generico del tipo $\langle a, b \rangle$ con $a + b > 0$; fermo restando che i due membri sono calcolati in punti
 generalmente diversi (l'uno trasformato dell'altro) della stessa M . Se in particolare il punto $p \in U$
 (dominio della prima carta) si trasforma in $\varphi(p)$ ancora in U , allora il sistema di coordinate può

restare lo stesso passando da p a $\varphi(p)$. Insomma, nella familiare trasformazione cogrediente/controgrediente delle componenti di un c. tens. a fronte di un cambiamento di carta, il punto resta lo stesso e le coordinate cambiano; mentre nel caso della (8') con $\varphi(p) \in U$ le coordinate restano le stesse e il punto cambia. Come vedremo, a questa idea di trasformare un c. tens. sotto un diffeomorfismo liscio sulla varietà (o più precisamente sotto un gruppo continuo additivo ad un parametro v di tali diffeomorfismi φ , generato da un c.v. dato e soddisfacente alle $\varphi_{v+v'} = \varphi_v \circ \varphi_{v'} = \varphi_{v'} \circ \varphi_v$ e $\varphi_{-v} = (\varphi_v)^{-1}$) si può ricondurre l'introduzione di una nuova accezione di c. tens. “derivato” di un c. tens. dato, quella del suo “derivato nel senso di Lie”.

APP. 4.C LE GEOMETRIE A CONNESSIONE AFFINE CON TENSORE FONDAMENTALE. CENNI ALLE TEORIE MACROSCOPICHE UNITARIE

La geometria “post-riemanniana” fondata sulla introduzione assiomatica dei coefficienti $\Lambda_{i k}^j$ soggetti alle leggi di trasformazione affine è ovviamente priva di un tensore metrico. Alcuni dei fisici e fisici-matematici che già molto presto dopo l'avvento della relatività generale (1915) erano interessati a generalizzare la geometria pseudoriemanniana nella direzione delle cosiddette “teorie unitarie” (all'epoca assai meno utopistiche che qualche decennio più tardi) – in prima linea Einstein, Weyl, Levi-Civita, Schouten, É. Cartan, Kaluza, Klein, Eddington, ecc. – trovavano poco accettabile questa mancanza, e fecero diversi tentativi per introdurre, su una varietà astratta con coefficienti di connessione, se non un vero e proprio tensore “metrico”, almeno un “tensore fondamentale” che consentisse la “dislocazione verticale” di un indice tensoriale, secondo la relazione prototipa $v_i = g_{ij} v^j$. In altre parole, vi era una giustificata tendenza a non rinunciare ad una vera e propria algebra κ -tensoriale piuttosto che accontentarsi di quella $\langle a, b \rangle$ -tensoriale (negli spazi tangenti/cotangenti della varietà). Nel seguito ci riferiremo come al solito ad un aperto della varietà ed alle carte del suo atlante aventi dominio includente quell'aperto.

Come oggi appare abbastanza ovvio “col senno di poi”, i tentativi di costruire una teoria unitaria *macroscopica*, capace cioè di “geometrizzare” al contempo i fenomeni gravitazionali e quelli elettromagnetici, non approdarono a risultati convincenti. Si trattò di un grande lavoro di “sondaggio” in molte e diverse direzioni, che tuttavia si rivelò in buona parte sterile dal punto di vista fisico; mentre stimolò contributi di una certa importanza sul versante matematico (ad esempio da parte di É. Cartan (repère mobile), di Ehresmann (connessione di Ehresmann), ecc.). Tali teorie unitarie *macroscopiche* sono da tempo considerate poco realistiche, nel senso che dovrebbero essere viste come limiti, per l'appunto macroscopici, di una futuribile “teoria totale” di là da venire. Ma

naturalmente, quando le speranze di formulare una teoria di tal tipo si affacciarono sulla scena fisico-matematica del tempo, la meccanica quantistica come teoria formalizzata – cioè non contando la prospettiva di quantificare l’energia formulata da Planck (1900) e seguita con radicale convinzione da Einstein nel corso del suo “annus mirabilis”⁶ – non esisteva ancora. In estrema sintesi, si conoscevano soltanto due tipi di interazione (la gravitazionale e l’elettromagnetica) e tre particelle elementari (l’elettrone, il protone e il fotone). Tuttavia già a circa tre quarti del secolo scorso i tipi di interazioni erano diventati quattro, la gravitazionale, l’elettromagnetica, la nucleare debole e la nucleare forte, mentre il numero delle particelle era salito all’ordine delle centinaia. Questo straordinario sviluppo di conoscenze sperimentali rende ragione del perché la creazione di una teoria unitaria, che è ancora “il” problema della fisica fondamentale, abbia presto assunto connotazioni diverse ed assai più complesse. Come c’era da attendersi, la scala dell’estremamente piccolo e quella dell’estremamente grande devono essere considerate *congiuntamente* nella elaborazione di una tale possibile “teoria del tutto”; e molti sono i segnali, negli ultimi quattro o cinque decenni, di un orientamento della ricerca fisica fondamentale in questo senso. In particolare sul piano osservativo, da una parte la fisica con i grandi acceleratori e l’astrofisica/cosmologia dall’altra sembrano concorrere producendo conoscenze pertinenti alle due scale estreme. Ma ovviamente, questa materia esula del tutto dall’orizzonte del nostro libro.

Sulla geometria a connessione affine “pura” (cioè senza né metrica né tensore fondamentale) diremo più avanti, nella S.sez. 8.3.2 Qui ci limitiamo ad accennare alle geometrie post-riemanniane “ibride”, con connessione affine $\underline{\gamma}$ e tensore fondamentale entrambi assegnati. Per distinguerlo da un vero e proprio tensore metrico $g_{(2)}$, denoteremo tale tensore fondamentale (simmetrico e non singolare) come $\gamma_{(2)}$. Diremo poi “coefficienti di connessione affine naturale” quelli generati da $\gamma_{(2)}$ attraverso le formule riemanniane (3.3.2, 12ter), e per semplicità li denoteremo con gli stessi simboli usati per i Chr1 e i Chr2, quindi secondo le

$$(1) \quad 2\Gamma_{ijk} =: \partial\gamma_{ij}/\partial x^k + \partial\gamma_{jk}/\partial x^i - \partial\gamma_{ik}/\partial x^j,$$

e similmente

$$(2) \quad \Gamma_{ik}^j =: \gamma^{jp}\Gamma_{ipk},$$

anch’essi denotati come i Chr2 (qui γ^{jp} è l’elemento di indici (j,p) del tensore “inverso” di $\gamma_{(2)}$).

Manifestamente, valgono le simmetrie

$$(3) \quad \Gamma_{ijk} = \Gamma_{kji},$$

$$(3bis) \quad \Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j.$$

⁶ A. Einstein, “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, Ann. D. Phys. **19** 289 (1906). È appena il caso di ricordare che Einstein ebbe il Nobel (1921) per questo lavoro e non per la teoria della relatività, che nella relazione di Stoccolma non fu nominata esplicitamente.

Si verifica (la prova formale è rinviata alla S.sez. 8.3.1, eq. (12) e (13)) che questi Γ soddisfano alle solite leggi di trasformazione affine (3.3.2, 16,17). Quindi in una varietà in cui sia assegnato un 2-tensore simmetrico non singolare di CdC 1 $\gamma_{(2)}$ esiste comunque una connessione affine simmetrica “naturale” data dalle (1, 2) e soggetta alle (3.3.2, 16,17). La questione inversa, se cioè partendo da una connessione affine simmetrica data si possa risalire ad un suo “generatore”, è mal posta, ed è in generale priva di soluzione per $n > 1$. Questo è comprensibile, perché le (1) sono $n^2(n+1)/2$ equazioni in $n(n+1)/2$ incognite, e il rapporto tra questi numeri è n .

In virtù della simmetria (3), le (1) implicano che

$$(4) \quad 2\Gamma_{(ij)k} = \partial\gamma_{ij}/\partial x^k,$$

dove al solito $2(\cdot)_{(ij)} \equiv (\cdot)_{ij} + (\cdot)_{ji}$. La dimostrazione si ottiene facendo circolare gli indici delle (1) secondo $ijk \rightarrow jki \rightarrow kij$, sommando la prima e la seconda equazione e sottraendo la terza. Quindi, se la derivata covariante ${}_{/d}$ di un generico κ -tensore continua a definirsi mediante le (3.3.2, 9) risulta

$$(5) \quad \gamma_{ik/d} = \partial\gamma_{ik}/\partial x^d - \gamma_{kj}\Gamma_{i d}^j - \gamma_{ij}\Gamma_{k d}^j = 2\Gamma_{(ik)d} - 2\Gamma_{(ik)d} = 0,$$

come avviene nel caso del tensore metrico di una varietà immersa o anche pseudoriemanniana (formalmente, la situazione è la stessa). Infine il problema di determinare un 2-tensore (simmetrico non singolare di CdC 2) che secondo le (4) generi dati coefficienti di connessione affine *simmetrici* Γ_{ijk} di CdC 1 è ben posto ed ammette soluzioni, ma non sarà affrontato qui.

Naturalmente una *generica* connessione affine $\Lambda_{i k}^j$ non è quella (automaticamente simmetrica) offerta dalle (1, 2) per dato $\gamma_{(2)}$. Tuttavia essa può sempre essere posta nella forma

$$(6) \quad \Lambda_{i k}^j = \Gamma_{i k}^j + v_{ik}^j,$$

dove v_{ik}^j è un 3-tensore (continuo) in forma mista, in generale non simmetrico rispetto agli indici inferiori. Evidentemente questo assicura che i $\Lambda_{i k}^j$ (6) si trasformano secondo le leggi (4.3.2, 2). Il relativo tensore di torsione è dato da

$$(7) \quad \sigma_{ik}^j = 2\Lambda_{[i k]}^j = 2v_{[ik]}^j,$$

dove al solito $2(\cdot)_{[ik]} \equiv (\cdot)_{ik} - (\cdot)_{ki}$. Conservando validità alle formule di derivazione covariante (4.3.2, 6,8,10), ci si aspetta che queste si modifichino, rispetto alla loro versione riemanniana, per la comparsa di nuovi termini in v .

In particolare la derivata covariante di uno scalare del tipo “modulo quadrato di un vettore” non coincide più con la sua derivata ordinaria, ma risulta $(v^2)_{/d} = \partial(v^2)/\partial x^d - 2v^i v_j v_{id}^j$. La differenza $2v^i v_j v_{id}^j$ tra le due derivate dipende inoltre, in generale, dalla *direzione* di v . Nella geometria da lui proposta nel (1918) ⁷ nell'intento di costruire per questa via una teoria unitaria macroscopica,

⁷ H. Weyl, Berl. Ber. 465 (1918), Math. Zeit. 2, 384 (1918), Ann. Phys. 59, 110 (1919). Si veda anche in “Raum, Zeit, Materie” dello stesso autore, Bibl. Gen. B).

H. Weyl elimina questa dipendenza imponendo a v_{ik}^j la speciale struttura, *simmetrica* rispetto agli indici (i,k),

$$(8) \quad v_{ik}^j = \gamma^{jh}(\gamma_{hi}\phi_k + \gamma_{hk}\phi_i - \gamma_{ik}\phi_h)/2,$$

dove $\phi_{(1)}$ è un vettore da assegnare convenientemente. Quindi la geometria di Weyl è priva di torsione. Daremo ora qualche informazione su di essa, il primo tentativo importante di teoria unitaria-macroscopica.

È facile verificare che con la (8) $2v^i v_j v_{id}^j$ si riduce effettivamente a $(v^2)\phi_d$, indipendente come richiesto dalla direzione di v , e quindi che $(v^2)_{;d} = \partial(v^2)/\partial x^d - (v^2)\phi_d$. Con l'introduzione di $v_{(3)}$ anche il derivato $\gamma_{ik/d}$ cessa di essere nullo come nel caso pseudoriemanniano, ma diventa $\gamma_{ik/d} = -(v_{ikd} + v_{kid})$, che sotto l'ansatz (8) si riduce a

$$(9) \quad \gamma_{ik/d} = -\gamma_{ik}\phi_d,$$

o equivalentemente a

$$(9bis) \quad (\partial/\partial x^d + \phi_d)\gamma_{ik} - (\Lambda_{idk} + \Lambda_{kdi}) = 0.$$

(Questa sostituisce l'analogia relazione della geometria pseudoriemanniana in cui $\phi = 0$ e v_i è Γ al posto di Λ .)

Una varietà astratta con la connessione simmetrica (6, 8) si dice **varietà di Weyl**. D'altra parte si verifica subito che l'espressione (9) di $\gamma_{ik/d}$ è invariante rispetto ad una trasformazione del tipo

$$(10_1) \quad \gamma_{ik} \rightarrow \gamma_{ik}^* =: \varphi \gamma_{ik},$$

$$(10_2) \quad \phi_k \rightarrow \phi_k^* =: \phi_k - \varphi^{-1} \partial \varphi / \partial x^k,$$

dove φ è una funzione diversa da zero e abbastanza regolare di x di cui disporre. Le connessioni Λ_{ik}^j non variano attraverso una trasformazione del tipo (10). Per provarlo, basta esprimere le Λ_{ik}^j in termini di $\gamma_{(2)}$ e di $\phi_{(1)}$ combinando le (1, 6, 8). Si ottiene così $2\Lambda_{ik}^j = \gamma^{jh}\{(\partial/\partial x^k + \phi_k)\gamma_{ih} + (\partial/\partial x^j + \phi_j)\gamma_{kh} - (\partial/\partial x^h + \phi_h)\gamma_{ik}\}$. Ponendo asterischi sui γ e ϕ di questa relazione e facendo le dovute sostituzioni secondo le (10), si ritrova la stessa relazione dalla quale si è partiti, ovvero si prova che $\Lambda_{ik}^{*j} = \Lambda_{ik}^j$. È immediato constatare che le trasformazioni (10) formano un gruppo commutativo: il prodotto delle trasformazioni associate a φ_1 e φ_2 corrisponde a $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \equiv \varphi_2 \varphi_1$, mentre l'elemento neutro del gruppo corrisponde a $\varphi = 1$ (quindi l'inversa della trasformazione associata a φ corrisponde a φ^{-1}). Il **gruppo delle trasformazioni di Weyl** è il prodotto dei gruppi delle usuali trasformazioni di punto ($x \leftrightarrow x'$) per il gruppo delle trasformazioni (10), e la geometria di Weyl è invariante rispetto a trasformazioni del gruppo di Weyl (così come la geometria pseudoriemanniana è invariante rispetto alle trasformazioni di punto $x \leftrightarrow x'$). Se, in deroga a quanto abbiamo suggerito più sopra, interpretiamo γ_{ik} come 2-tensore metrico, l'invariante *riemanniano*

$ds^2 = \gamma_{ik} dx^i dx^k$ è moltiplicato per φ attraverso le (10), e quindi ds^2 viene “riscalato” o “ricalibrato” (“regauged”) per tale fattore, perdendo il suo carattere di invariante nel più ampio gruppo di Weyl.⁸

È anche immediato constatare che il 2-tensore antisimmetrico

$$(11) \quad F_{ik} =: \partial\phi_i/\partial x^k - \partial\phi_k/\partial x^i{}^9$$

è invariante rispetto alle trasformazioni (10); come pure che se si definisce un 4-tensore di curvatura $\kappa_{ihk}{}^j$ in termini delle $\Lambda_i{}^j{}_k$ (supposte simmetriche e C^1) allo stesso modo in cui si è definito il tensore di Riemann in termini dei Chr2, cioè mediante le

$$(12) \quad \kappa_{ihk}{}^j = \partial\Lambda_i{}^j{}_h/\partial x^k + \Lambda_p{}^j{}_k\Lambda_i{}^p{}_h - \text{alt}(h,k),$$

allora anche tale $\kappa_{ihk}{}^j$ è invariante rispetto alle (10). In definitiva, i 2ⁱ membri delle (11, 12) sono invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni di Weyl.

Come suggeriscono i simboli usati, l’idea di Weyl era quella di identificare F_{ik} con il 2-tensore antisimmetrico elettromagnetico, e ϕ_k con il relativo quadripotenziale (per $n = 4$ e γ_{ik} minkowskiano) nell’intento di costruire così una teoria macroscopica unitaria. Se e solo se $F_{ik} = 0$, mediante una trasformazione di gauge (10) si può fare in modo che ϕ_k sia identicamente nullo. Basta infatti determinare φ in modo che $\phi_k = \varphi^{-1}\partial\varphi/\partial x^k$: le condizioni di integrabilità di questo SDP sono appunto le $F_{hk} = 0$. Allora la derivazione covariante coincide con la derivazione ordinaria. Si conclude così che, come in una varietà pseudoriemanniana esiste un riferimento nel quale la derivazione covariante si riduce alla derivazione ordinaria sse il tensore di Riemann è identicamente nullo, in una varietà di Weyl esiste una unità di lunghezza locale (cioè un φ) con riferimento alla quale la derivata covariante similmente si riduce alla derivata ordinaria sse F_{hk} è identicamente nullo. Con una locuzione un po’ immaginosa, tale 2-tensore antisimmetrico fu detto **tensore di curvatura di misura**.

La teoria di Weyl ha avuto un impatto modesto sulla fisica relativistica generale, e dopo tutto non di primo piano anche nei confronti della geometria differenziale. Dopo un iniziale apparente entusiasmo¹⁰, Einstein espresse riserve, basate sul fatto che il ds^2 non fosse un invariante rispetto alle trasformazioni di gauge (10), e che quindi *non* le componenti del tensore fondamentale, ma soltanto *i loro rapporti* potevano essere oggetto di misurazioni. Essendo omogenei di grado 0 in φ , i (coseni de) gli angoli tra direzioni sono invece invarianti rispetto alle trasformazioni (10), e ciò configura tali trasformazioni come **conformi**. Nonostante le sue difficoltà, la teoria di Weyl ebbe

⁸ Sebbene abbia oggi un significato essenzialmente diverso, l’espressione “trasformazioni di gauge” con la quale ci si riferisce spesso alle (10) ha apparentemente fatto il suo ingresso nella fisica proprio in questo modo.

⁹ Che F_{ik} sia un 2-tensore covariante scende dalle $\phi'_k = \partial x^i/\partial x'^h\phi'_h$ e dalle $F'_{ik} = \partial\phi'_i/\partial x'^k - \partial\phi'_k/\partial x'^i$. Si ha infatti $F'_{ik} = (\partial x^i/\partial x'^h\partial x^p/\partial x'^k - \partial x^i/\partial x'^k\partial x^p/\partial x'^h)\partial\phi_i/\partial x^p = \partial x^i/\partial x'^h\partial x^p/\partial x'^k F_{ip}$, qed.

¹⁰ «Le tue idee mostrano una coesione meravigliosa. Indipendentemente dal loro accordo con la realtà, si tratta di una grandiosa conquista dell’intelletto.» Lettera a H. Weyl, aprile 1918. Si noti come la riserva è già inequivocabile dietro l’amabilità della forma. È nota la risposta di Weyl: «(la tua critica) mi preoccupa moltissimo, naturalmente, perché l’esperienza ha dimostrato che ci si può fidare della tua intuizione.»

comunque notevole risonanza ai suoi tempi, e non a caso il giovanissimo W. Pauli le dedicò la sezione 65 (Cap. VIII) della sua nota monografia sulla teoria della relatività (v. Bibl. Gen. B)).

CAP. 5

STRUMENTI MATEMATICI III

I capitoli 5 ÷ 7 che seguono sono dedicati ad un insieme di questioni matematiche di base che pur non essendo genuinamente propedeutiche (cioè, pur non essendo quelle di cui si tratta nei primi corsi di laurea in fisica, ingegneria, .. ecc.), devono nondimeno considerarsi strumenti irrinunciabili dell'indagine fisico-matematica moderna. La loro scelta è certamente discutibile, e riflette le opinioni maturate dall'autore nel corso della sua esperienza.

Anche in maggior misura che nel resto del libro, il tipo di presentazione è quello di una rassegna a grandi linee piuttosto che di una esposizione sistematica. Nell'intento di raggiungere un ragionevole compromesso tra compattezza, generalità e coerenza, l'estrema vastità della materia ha suggerito di limitare il discorso a problemi *veramente essenziali dal punto di vista dei fondamenti*, e di dare ad alcune dimostrazioni il profilo di semplici abbozzi. Raccomandiamo quindi al lettore meno esperto di affrontare il testo con la prudenza opportuna, procedendo a piccoli passi e cercando di ottenere dimostrazioni esplicite e complete di tutti gli asserti che incontrerà, salvo di quelli per i quali il testo stesso lo invita a consultare la trattatistica specializzata. Ciò non comporterà mai vere e proprie difficoltà, e contribuirà significativamente alla buona assimilazione della materia. Quando poi ne fosse il caso, lo studio preventivo delle tre prime Appendici Generali gioverà a facilitare l'approccio al testo principale.

5.1) INTEGRAZIONE

La teoria dell'integrazione su varietà ($n \geq 1$)-dim – in particolare su varietà n -dim astratte, e di ($\kappa \leq n$)-forme differenziali esterne – ha raggiunto un assetto maturo intorno alla metà del secolo scorso. Essa consiste nell'estendere a tali varietà quel calcolo integrale su R^n e sue sottovarietà regolari creato a partire all'incirca dal terzo decennio dell'Ottocento (Cauchy, 1823, Gauss, 1828). Le origini di questo calcolo risalgono tuttavia a tempi assai più lontani, sin da quando cioè ci si pose il problema di valutare l'area [il volume] di una regione piana [spaziale] limitata. La naturale evoluzione di questo stadio della teoria fu quello della valutazione della massa (o della carica

elettrica, quindi di una quantità dotata di segno) contenuta in quella regione, avendole associato un dato campo di “densità” (di massa, o di carica elettrica). È ovvio che supponendo uniforme tale densità si è immediatamente ricondotti al problema di determinare la “misura” (area, volume) della detta regione. Una volta di più, questo riflette lo strettissimo legame esistente tra la teoria dell’integrazione e quella della misura, che si configura come una vera e propria “immersione” della prima nella seconda.

5.1.1) INTEGRAZIONE SU SPAZI CARICHI

Punto di partenza di questa breve rassegna è la nozione di **integrale di Riemann** (o **R-integrale**) di una funzione assolutamente limitata. Sulla base di questa nozione, e sfruttando il concetto di limite recentemente messo a punto, il cosiddetto “calcolo degli infinitesimi” raggiunse finalmente, nel XIX secolo, una forma logica rigorosa. Della definizione di R-integrale daremo qui appresso una versione un po’ diversa da quella originale ¹ (**R-integrale su uno spazio carico**, o **R-integrale generalizzato**), da una parte atta a meglio lumeggiarne il suo diretto rapporto con certe nozioni “misuristiche”, e dall’altra abbastanza indipendente dalla teoria della misura nella sua accezione più astratta. Le nozioni prerequisite per una adeguata comprensione di quanto segue intorno alla teoria dell’“integrazione su spazi carichi (e normalmente carichi)” sono illustrate nella App. Gen. C.

Sia X un qualsiasi insieme $\neq \emptyset$, e \mathcal{H} un semianello (v. App. Gen. C.2) di suoi sottoinsiemi (SI), quindi sia $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ contenente X stesso (con il che abbiamo una semialgebra su X , l’unità di \mathcal{H}) e dotato di misura m finita e > 0 . Senza quindi limitare la generalità, nel seguito *supporremo sempre* $m(X) = 1$. Allora per ogni decomposizione *finita* di X in elementi (disgiunti) ² C_i di \mathcal{H} , diciamo $X = \cup_{i=1}^p C_i$, risulta $\sum_{i=1}^p m(C_i) = 1$. Supporremo poi che X sia metrico, ³ (e quindi topologico con la topologia associata) e che valga la seguente addizionale condizione ([†]): “per ogni $\delta > 0$, esiste una decomposizione finita di X in elementi (disgiunti) di \mathcal{H} aventi diametro ⁴ $\leq \delta$.”

¹ B. Riemann, *Gesammelte Werke*, 2^a ed. p. 239.

² Ricordiamo che gli elementi di una *decomposizione* di un dato insieme sono disgiunti per definizione.

³ Per le presenti necessità si potrebbe rinunciare all’assioma metrico $\forall (x,y)(\in X)\{d(x,y)=0 \Rightarrow x=y\}$, limitandosi quindi a considerare uno spazio X **semimetrico**.

⁴ Ricordiamo che il diametro di un sottoinsieme di uno spazio metrico è il supremo delle distanze di due suoi punti qualsiasi.

Sotto le dette condizioni, X si dice uno **spazio carico** (agg.), con **carico** (sost.) \mathcal{H} e misura m , e gli elementi di \mathcal{H} si dicono sue **cellule**, e in particolare sue δ -**cellule** se di diametro $\leq \delta$.⁵

Se X e Y sono spazi carichi, è possibile assegnare al loro prodotto cartesiano $X \times Y$ una struttura “naturale” di spazio carico, le cellule del quale sono tutti e soli i prodotti cartesiani di cellule di X per cellule di Y . La famiglia di queste cellule è ancora un semianello, con unità $X \times Y$, e la condizione (⁺) del paragrafo precedente è soddisfatta se si assegna a $X \times Y$ la metrica-prodotto standard $d_{X \times Y}(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) =: [d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)]^{1/2}$, dove $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$, e d_X, d_Y sono le metriche di X e rispettivamente di Y . Si può infatti provare che, se $X = \cup_i A_i^{(\delta)}$ e $Y = \cup_j B_j^{(\delta)}$ sono decomposizioni finite di X e di Y in δ -cellule $A_i^{(\delta)}$ e $B_j^{(\delta)}$ dei rispettivi semianelli, $X \times Y = \cup_{i,j} (A_i^{(\delta)} \times B_j^{(\delta)})$ è una decomposizione (finita) di $X \times Y$ in $(\delta\sqrt{2})$ -cellule. Se quindi si definisce la misura della generica cellula $A \times B$, ove A è cellula del semianello di X e B è cellula del semianello di Y , come il *prodotto* della misura di A per quella di B , questa misura risulta additiva (vedi App. Gen. C.1). Se poi le misure di X e Y sono unitarie, la misura di $X \times Y$ risulta a sua volta unitaria. Tutto ciò si estende facilmente al prodotto cartesiano di più di due spazi carichi.

Uno spazio carico X con carico \mathcal{H} e misura m è un particolare spazio-misura del tipo $\{\mathcal{H}, X, m\}$ (vedi ancora App. Gen. C), con le proprietà addizionali di essere metrico e che valga la condizione (⁺) di due paragrafi più sopra. Converremo di denotare ciò scrivendo $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$. Sotto $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$, un SI Z di X sarà detto **J(ordan)-trascurabile***⁶ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita $\{C_i\}$ di δ -cellule disgiunte di \mathcal{H} tale che $Z \subset (\cup C_i)^\circ$ ($(\)^\circ \equiv$ parte interna di) e che $\sum_i m(C_i) < \varepsilon$. Banalmente, il SI \emptyset di X è J-trascurabile*, e un'unione finita di SI J-trascurabili* di X è J-trascurabile*.

Sempre supponendo $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$, sia $\{C_i^{(\delta)}\}$ la decomposizione finita di X in δ -cellule $C_i^{(\delta)}$ di \mathcal{H} . Avendo supposto $m(X) = 1$, per qualunque decomposizione finita $\{C_i^{(\delta)}\}$ di X sarà ovviamente

$$(1) \quad \sum_i m(C_i^{(\delta)}) = 1.$$

L'integrale (nel senso di R-integrale generalizzato) su X di una data funzione reale assolutamente limitata $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $-M \leq f(x \in X) \leq M$, per un certo $M \geq 0$, si definisce allora come segue. Per una

⁵ Uno spazio semimetrico rappresentabile come unione finita di suoi sottoinsiemi di diametro $\leq \delta$ per ogni prescritto $\delta > 0$ si dice **totalmente limitato** (o **precompatto**). Uno spazio carico X è quindi precompatto per definizione. Se X è precompatto, anche $B \subset X$ (con la semimetrica indotta) lo è, perché se $X = \cup C_i$ con $C_i \subset X$ (unione finita!), allora $B \equiv X \cap B = \cup C'_i$ con $C'_i =: C_i \cap B \subset B$.

⁶ L'asterisco * è dovuto al fatto che nella App. Gen. C abbiamo dato una definizione *diversa* di SI J-trascurabile di un generico spazio-misura $\{\mathcal{E}, E, \mu\}$. In modo analogo sono da interpretare gli asterischi che seguiranno su “J-misurabile”, su “J-misura” e su “ μ ”. Come vedremo, in realtà i due tipi di nozione *coincidono*, e l'asterisco potrà essere abolito. La teoria generale della misura degli n-volumi (di uno spazio n-dim) è stata sviluppata da C. Jordan nel suo Cours d'Analyse, 1882-1887.

data decomposizione finita di X in δ -cellule di \mathcal{H} , in ogni δ -cellula $C_i^{(\delta)}$ della decomposizione $\{C_i^{(\delta)}\}$ si scelga ad arbitrio un punto ξ_i , e si consideri la somma $\sum_i f(\xi_i)m(C_i^{(\delta)})$. Questo reale è la media (lineare) ponderata, con pesi *normalizzati* (cfr. la (1)) $m(C_i^{(\delta)}) \geq 0$, dei valori di f nei punti ξ_i , e si dice la **somma integrale di f su X rispetto alla decomposizione (finita) marcata $\{C_i^{(\delta)}, \xi_i\}$ di X** . Supponiamo adesso che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano un $\delta_\varepsilon > 0$ ed un reale r per i quali, per ogni $0 < \delta < \delta_\varepsilon$, e per ogni decomposizione marcata $\{C_i^{(\delta)}, \xi_i\}$ di X , sia $|r - \sum_i f(\xi_i)m(C_i^{(\delta)})| < \varepsilon$. In questo caso r è unico, e si dice l'**integrale di f su X** . La sua notazione più comune è $\int_X f(x)dx$, talvolta $\int f(x)dX$ o $\int dX$, o anche semplicemente $\int_X f$. Si noti che nella prime due notazioni x è un simbolo "muto".⁷ "[$\int_X f$ esiste" si enuncia equivalentemente come "f è integrabile su X". Sussistono allora i seguenti teoremi, i primi quattro dei quali sono di dimostrazione elementare. Il riferimento a X , sotto $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$ e $m(X) = 1$, nell'attributo "integrabile" e nel segno \int , è sottinteso.

T1. «La funzione (definita su X) $f = c$ (costante reale) è integrabile, e $\int c = c$ »;

T2. «Se f e g sono integrabili e a, b , sono costanti reali, allora $af + bg$ è integrabile, e $\int (af+bg) = a\int f + b\int g$ »;

T3. «Se f e g sono integrabili, e $f \leq g$ (in X), $\int f \leq \int g$; in particolare, se f e $|f|$ sono integrabili, $\int f \leq \int |f|$ »;

T4. «Se f è integrabile, e $c \leq f \leq C$ in X , c e C essendo due costanti, $c \leq \int f \leq C$; in particolare, $\inf_X(f) \leq \int f \leq \sup_X(f)$ (ove $\inf_X(\)$ [$\sup_X(\)$] significa com'è usuale "infimo in X di" ["supremo in X di"]»);

T5. «Se $\{f_i\}_{i=1,2,\dots}$ è una sequenza di funzioni integrabili uniformemente convergente a f , allora f è integrabile e risulta $\int f = \lim_{i \rightarrow \infty} \int f_i$ ».

$\int_X f$ è dunque un funzionale reale sullo spazio delle funzioni integrabili su X , lineare (T2) e continuo (T5) nelle topologie di X (associata alla metrica) e di \mathbb{R} .

Sempre nella ipotesi $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$, una condizione equivalente alla integrabilità su X di f assolutamente limitata, cioè $|f| \leq M$ in X per un certo $M \geq 0$, è quella descritta qui appresso. Per una data decomposizione finita $\{C_i^{(\delta)}\}$ di X in δ -cellule, siano L_i l'infimo, e U_i il supremo, di f nella

⁷ Riferendoci al caso standard in cui X è un intervallo $[a, b]$ ($a < b$) della retta reale (e le δ -cellule sono suoi sub-intervalli di lunghezza $\leq \delta$), l'integrale su $[a, b]$, $\int_{[a, b]} f(x)dx$ si scrive anche $\int_a^b f(x)dx$. Questa notazione risale a G.W. Leibniz (1646-1716). Vedi anche la nota (¹⁴).

cellula i -ma $C_i^{(\delta)}$, e si considerino le somme $\sum_i L_i m(C_i^{(\delta)})$ e rispettivamente $\sum_i U_i m(C_i^{(\delta)})$ ⁸. Evidentemente, la prima di queste somme è \leq della seconda; e inoltre la prima [la seconda] è \leq [\geq] della corrispondente somma integrale $\int f(\xi_i) m(C_i^{(\delta)})$ per la decomposizione marcata $\{C_i^{(\delta)}, \xi_i\}$ di X . Poiché $L_i \leq M$, $U_i \geq -M$, avremo allora $\sum_i L_i m(C_i^{(\delta)}) \leq M$ e $\sum_i U_i m(C_i^{(\delta)}) \geq -M$; quindi esistono il supremo della prima somma e l'infimo della seconda sull'insieme di tutte le decomposizioni finite $\{C_i^{(\delta)}\}$ di X . Questi due reali, il primo \leq del secondo, sono detti l'**integrale inferiore**, e rispettivamente l'**integrale superiore, di f su X** , e verranno qui denotati come $L(\int f)$ (L sta per "lower") e rispettivamente $U(\int f)$ (U sta per "upper"), sempre sottintendendo il riferimento a X . È poi chiaro che, se f è integrabile, risulta $L(\int f) = \int f = U(\int f)$. Sussiste allora il teorema (di significato ovvio, e di facile dimostrazione (che non riportiamo)): «l'integrabilità di f equivale alla uguaglianza $L(\int f) = U(\int f)$. Se questo è il caso, $L(\int f) = \int f = U(\int f)$ ».

Come è naturale, sarebbe utile riconoscere condizioni su f sufficienti ad assicurarne la integrabilità su X (carico). A ciò provvede ad esempio il seguente teorema:

T6. «Sotto $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$, affinché la funzione f sia integrabile su X , è sufficiente che essa sia uniformemente continua in X – o soltanto continua se X è compatto nella topologia indotta dalla metrica, come supporremo salvo avviso contrario – all'esterno di ogni intorno di (o "salvo che in") un SI di X J -trascurabile*, (o anche, come è detto in App. Gen. C, "quasi-ovunque (q.o.) in X ")» ⁹

Diremo poi che $A \subset X$ è **J -misurabile*** se ∂A (la frontiera di A , vedi App. Gen. B) è J -trascurabile*. Possiamo allora definire l'integrale di f – supposta continua in X salvo che in un SI Z di X J -trascurabile* – su un SI A di X J -misurabile*, e con la certezza che esso esista, facendo uso della **funzione caratteristica** di A , $\chi_A = \chi_A(x)$ (cioè $\chi_A(x) =: 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) =: 0$ se $x \notin A$). Infatti, se ∂A è J -trascurabile* e se definiamo l'**integrale di f su A** come $\int f \chi_A$, in forza di (T6) questo esiste sotto l'ipotesi convenuta su f , perché $\partial A \cup Z$ è J -trascurabile*. Va da sé che la definizione è valida anche se f è definita *soltanto* in A , potendosi sempre porre $f = 0$ in $X \setminus A$. $\int f \chi_A$ si denota usualmente come $\int_A f$. Infine $\int_A 1$, valore di $\int_A f$ per $f = 1$, si definisce come **J -misura* di A** , $\mu^*(A)$; quindi $\int_Z 1 = 0$ se Z è J -trascurabile*.

Oltre che nella S.sez 1.4.1, la definizione di un SI A di X "J-misurabile" è data nell'App. Gen. C; e ivi, per un tale A J -misurabile, la definizione della sua "J-misura" $\mu(A)$, nonché quella di

⁸ Nel caso standard dell'intervallo reale, queste somme sono dette **somme integrali di Darboux** (G. Darboux, 1842-1917), dal nome del matematico che le introdusse nel 1875 (Annales de l'école normale, (2), vol. IV), quasi contemporaneamente a G. Ascoli (1843-1896) (Atti dei Lincei, (2), vol. II (1875)).

⁹ La dimostrazione si trova in ogni trattato non troppo elementare di Analisi delle funzioni di più variabili reali.

un SI Z di X “J-trascurabile” in quanto di J-misura nulla, $\mu(Z) = 0$. Sempre nell’App. Gen. C, inoltre, è dimostrato che la famiglia dei SI di X J-misurabili è un anello (l’anello “generato” da \mathcal{H}); quindi, che se A e B sono J-misurabili, anche la loro intersezione, la loro unione, ecc., lo sono; e infine, che $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, e che $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ se $A \supset B$ ¹⁰. Queste ed altre simili proprietà si possono ora ritrovare *in modo più semplice e diretto supponendo* $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$ e usando le definizioni con asterisco * (di J-trascurabile, di J-misurabile e di J-misura μ). Ciò è giustificato alla luce delle seguenti equivalenze/uguaglianze che ci limitiamo qui ad enunciare, ma che si possono verificare senza difficoltà:

- (i) “ Z è J-trascurabile*” \Leftrightarrow “ Z è J-trascurabile”;
- (ii) “ A è J-misurabile*” \Leftrightarrow “ A è J-misurabile”;
- (iii) supposto A J-misurabile (\equiv J-misurabile*), $\mu^*(A) = \mu(A)$.

In definitiva, le proprietà addizionali che fanno di uno spazio-misura del tipo $\{\mathcal{H}, X, m\}$ uno spazio carico permettono uno sviluppo relativamente semplice della teoria della J-misura su X , e al contempo quella dell’integrazione su X di funzioni continue q.o. in suoi SI J-misurabili. Sotto $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$, si può ad esempio dimostrare in modo *diretto* (cioè facendo uso delle definizioni con *) che, se $A \subset X$, $B \subset X$ sono J-misurabili, se $A \cap B$ è J-trascurabile e se f è (definita e) integrabile sia su A che su B , allora $A \cup B$ è J-misurabile, f è integrabile su $A \cup B$, e risulta $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ (**additività dell’integrale** come funzione d’insieme, per qualunque f come descritta). Quest’ultimo risultato copre il caso importante in cui le parti interne (v. App. Gen. B) di A e B sono disgiunte (o come si dice, A e B sono “internamente disgiunti”).

Naturalmente non è detto che la generica cellula C di uno spazio carico $\{\mathcal{H}, X, m\}$ sia J-misurabile; ma se lo è, è facile rendersi conto che la misura $m(C)$ è uguale alla J-misura $\mu(C)$. Uno spazio carico le cui cellule sono J-misurabili si dice uno **spazio normalmente carico**. Si può allora dimostrare che un SI Z di uno spazio normalmente carico è J-trascurabile anche se, alla richiesta $Z \subset (\cup C_i)^\circ$ di cui alla definizione di J-trascurabilità* di Z in uno spazio carico, si sostituisce la più debole richiesta $Z \subset \cup C_i$. Un’altra condizione che assicura la J-trascurabilità di Z , SI di uno spazio normalmente carico, è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un SI A_ε J-misurabile di X per cui $Z \subset A_\varepsilon$ e $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$.¹¹ Se X e Y sono spazi normalmente carichi, si intuisce e si può dimostrare che

¹⁰ A queste ultime relazioni fanno riscontro le $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$, e rispettivamente $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B$ se $A \supset B$, che si verificano facilmente.

¹¹ Facciamo presente che, in uno spazio normalmente carico, l’integrale di una funzione f definita e uniformemente continua q.o. su un insieme $A \subset X$ J-misurabile può essere definito anche in modo diretto, cioè *senza* prima considerare l’integrale di f su tutto X e poi facendo uso della funzione caratteristica di A .

il loro prodotto $X \times Y$, munito della sua struttura canonica di spazio-prodotto carico, è anch'esso normalmente carico.

Sussiste il seguente notevole **teorema dell'integrale iterato**:

T7. «Siano X_1 e X_2 spazi normalmente carichi, $X =: X_1 \times X_2$, e $x =: \langle x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$ il suo generico elemento. Supposto X compatto (nella topologia-prodotto), sia $A \subset X$ J-misurabile (rispetto a X con la struttura canonica di spazio normalmente carico di cui sopra); e infine sia $f = f(x \in A)$ una funzione reale definita e continua in A (con la topologia indotta). Supponiamo ancora che per ogni $z \in X_1$ l'insieme $\text{sect}(A|z) =: \{x | x \in A \wedge x_1 = z\}$ (sezione di A secondo $x_1 = z$, con $\wedge \equiv$ congiunzione logica (v. App. Gen. A)) sia J-misurabile rispetto a X_2 . Allora la funzione di z $F(z) =: \int_{\text{sect}(A|z)} f(z, x_2) dx_2$ – che esiste per ogni $z \in X_1$ ed è nulla per $z \notin \text{pr}_1(A)$ (\equiv proiezione di A su X_1), perché in tal caso $\text{sect}(A|z) = \emptyset$ – è J-integrabile su X_1 , e risulta $\int_{\text{pr}_1(A)} F(z) dz = \int_A f.$ »

Il teorema (T7) è evidentemente simmetrico rispetto allo scambio tra 1 e 2, e come tale è detto **teorema della invertibilità dell'ordine di integrazione** (in un integrale doppio). La condizione di compattezza di X non è necessaria se si richiede la continuità uniforme di f in luogo della continuità semplice. Infine, non è detto che $F(z)$ sia continua q.o. in X_1 . La dimostrazione di (T7) è omessa, e si trova nella trattatistica specializzata.

È naturale che il caso di riferimento, in tutto quanto precede a proposito dell'integrale su X , o su A J-misurabile $\subset X$, di una funzione definita in X o rispettivamente in A , sia quello in cui X è l' $(n \geq 1)$ -cubo (o se si preferisce, n -quadrato) unitario I^n di \mathbb{R}^n (potenza cartesiana n -ma di $I =: [0, 1]$), e \mathcal{H} è il semianello dei suoi n -rettangoli cartesiani coordinati, con unità I^n (cfr. App. Gen. C), diciamo $\mathcal{H}_{\text{st(andard)}}$, con la corrispondente misura standard $m_{\text{st(andard)}}$. Diamo per evidente, e comunque si può agevolmente verificare, che $\{\mathcal{H}_{\text{st}}, I^n, m_{\text{st}}\}$ è carico, e anche normalmente carico. Di solito \mathcal{H}_{st} e m_{st} si sottintendono nelle notazioni, per cui si scrive semplicemente I^n in luogo di $\{\mathcal{H}_{\text{st}}, I^n, m_{\text{st}}\}$.

Posto $x =: \langle x^1, \dots, x^{n \geq 2} \rangle \in I^n$, si dimostra (vedi più avanti) che «se f è continua in I^n , $\int_{I^n} f$ è uguale a $\int_I \dots (\int_I (\int_I f(x) dx^1) dx^2) \dots dx^n$, nonché a $\int_I \dots (\int_I (\int_I f(x) dx^{\pi(1)}) dx^{\pi(2)}) \dots dx^{\pi(n)}$ per qualunque permutazione π di $1, \dots, n$.» Questi $n!$ integrali iterati n volte, tutti uguali tra loro, si dicono **integrali n-plici** di f su I . L'uguaglianza appena menzionata si generalizza al caso dell'integrale di f (continua) su $A \subset I^n$ J-misurabile, sotto certe restrizioni e nella forma seguente. Scriviamo I^n come $I^{n-1} \times I$, e identifichiamo I^{n-1} con lo spazio X_1 e I con lo spazio X_2 di (T7). Conviene scrivere $\langle x^1, \dots, x^n \rangle \in I^n$ come x , e $\langle x^1, \dots, x^{n-1} \rangle \in I^{n-1}$ come y . L'insieme $\{ \langle y, x^n \rangle | \langle y, x^n \rangle \in A \wedge y = z \}$ (\equiv sezione di A con la retta $y = z \equiv \langle z^1, \dots, z^{n-1} \rangle \in I^{n-1}$) verrà denotato come $\text{sect}(A|z)$. Se $\text{sect}(A|z)$ è l'intervallo

$\varphi(z) \leq x^n \leq \psi(z)$ per certe funzioni φ e ψ di z (questo è sempre possibile se A è convesso¹²), secondo (T7) la funzione di z $F(z) =: \int_{[\varphi(z), \psi(z)]} f(z, x^n) dx^n$ è J -integrabile rispetto a I^{n-1} , e il suo integrale sulla proiezione di A su I^{n-1} (al di fuori della quale è $F = 0$) è uguale a $\int_A f$. Non è detto che F sia a sua volta continua su tale proiezione di A ; ma lo è certamente se φ e ψ sono ivi continue. Allora il precedente problema si ripropone con una dimensione in meno, e la sua discussione può essere ripetuta allo stesso modo, sotto le ricorrenti ipotesi, sino a giungere ad un integrale iterato n volte (rispetto a x^n, x^{n-1}, \dots, x^1): su un primo intervallo ad estremi funzioni (da supporre continue) di $\langle x^1, \dots, x^{n-1} \rangle$, .., su un $(n-1)$ -mo intervallo ad estremi funzioni (da supporre continue) di x^1 , e infine su un n -mo intervallo i cui estremi non dipendono più da alcuna variabile, essendo semplicemente la proiezione di A sull'asse coordinato (1). Tutti questi intervalli sono unicamente determinati per il dato A , e l'integrale iterato n volte uguaglia $\int_A f$. Se $A = I^n$, tutti gli intervalli in oggetto sono uguali a I , e si è ridotti all'asserto tra « » posto all'inizio del paragrafo, che è dunque dimostrato come conseguenza di (T7). Quanto sopra vale in particolare nel caso tipico in cui A è un SI di I^n n -dim, J -misurabile, chiuso, convesso e con frontiera continua a pezzi, o **dominio elementare** di I^n . Il caso in cui A è unione finita di domini elementari internamente disgiunti, o **dominio** di I^n , si tratta in modo ovvio, definendo l'integrale di f su A come somma degli integrali di f sui domini elementari componenti. In generale, se esiste l'integrale di f su A , A stesso si dice spesso "dominio di integrazione" dell'integrale in oggetto.

Sempre per f continua in A , il teorema (T7) si può anche applicare al caso (complementare al precedente) in cui $I^{n \geq 2}$ sia pensato come $I \times I^{n-1}$, quindi identificando I con X_1 e I^{n-1} con X_2 . Denotando ora con $\text{sect}(A|w)$ la sezione di A con il $(n-1)$ -piano $x^n = w$, cioè $\text{sect}(A|z) =: \{ \langle y, x^n \rangle | \langle y, x^n \rangle \in A \wedge x^n = w \}$, e supponendo quest'ultima sezione J -misurabile in I^{n-1} , la funzione (di w) $F(w) =: \int_{\text{sect}(A|w)} f(y, w) dw$ esiste per ogni w (essendo nulla per $w \notin \text{pr}_n(A)$); in forza di (T7), essa è integrabile su $\text{pr}_n(A)$, e risulta:

$$(2) \quad \int_{\text{pr}_n(A)} F(w) dw = \int_A f.$$

In questa forma, il teorema (T7) offre una versione moderna del **metodo di esaustione** per il calcolo della J -misura di A facendovi $f \equiv 1$. Si noti che il risultato non varia per quegli A per i quali la J -misura (in $I^{(n-1)}$) di $\text{sect}(A|x^n=w)$, e quindi la risultante funzione $F(w)$, è la stessa. Questo è in sostanza quanto afferma il noto **principio** (o **criterio**) di Cavalieri.¹³ Le generalizzazioni del

¹² Ricordiamo che un SI M di uno spazio lineare si dice **convesso** se ogni segmento di estremi appartenenti a M è incluso in M . M è connesso se è convesso, ma in generale non vale il viceversa.

¹³ Più in generale, il criterio (sufficiente) di Cavalieri recita: "se due solidi di uguale proiezione sull'asse (z) pari a $[0, h]$ hanno le rispettive sezioni con il piano $z = y \in [0, h]$ di aree in rapporto costante $\alpha > 0$, i loro volumi stanno nello stesso rapporto α ". Sostanzialmente servendosi di queste risorse, Cavalieri fu in grado di accertare, ad esempio, l'uguaglianza

contenuto di questo e del precedente paragrafo che si ottengono sostituendo a I^n il prodotto cartesiano $\times_{i=1}^n [a_i, b_i]$ (con $a_i < b_i$) sono banali. Come abbiamo già ricordato, \int_1 si scrive comunemente come \int_0^1 , e similmente (sotto $a < b$) $\int_{[a,b]}$ come \int_a^b .¹⁴

Per un insieme generico X , se $B \subset X$ e $k_1 \leq k_2$ sono due reali, diremo **cilindro di sezione B compreso tra k_1 e k_2** il SI di $X \times \mathbb{R}$ $C(B; k_1, k_2) =: \{ \langle x, z \rangle | x \in B \wedge k_1 \leq z \leq k_2 \}$. Se $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$ (e al solito $m(X) = 1$), al variare della cellula C in \mathcal{H} e di h_1 e h_2 in $I \equiv [0, 1]$ sotto $h_1 \leq h_2$, la famiglia dei cilindri $C(C; h_1, h_2)$ contiene $C(X; 0, 1) \equiv X \times I$, ed è un semianello \mathcal{H}^* con unità $X \times I$ e misura della generica cellula-cilindro $C(C; h_1, h_2)$ definita come $m(C)(h_2 - h_1)$. Denotando quest'ultima misura con m_Δ , risulta $\text{car}\{\mathcal{H}^*, X \times I, m_\Delta\}$, e la misura m_Δ di $X \times I$ è uguale a 1. Questa è una applicazione di quanto affermato sulla struttura naturale di spazio carico del prodotto cartesiano di due spazi carichi. Sia ora f una funzione definita in X e avente valori in I , e si consideri il SI di $X \times I$ $Of =: \{ \langle x, z \rangle | x \in X \wedge 0 \leq z \leq f(x) \}$ ¹⁵. In forza di quanto sopraddetto, ha senso chiedersi se esista, e in tal caso quale sia, la J -misura di Of riferita a $\{\mathcal{H}^*, X \times I, m_\Delta\}$ (da valutare come indicato nella App. Gen. C). Innanzitutto, è chiaro che se tale J -misura esiste, essa è lineare in f . Sussiste allora il seguente teorema di non difficile dimostrazione, ma che ancora una volta ci limitiamo ad enunciare:

T8. « Of ha J -misure interna ed esterna $\mu_-(Of)$ e $\mu^-(Of)$ rispetto a $\{\mathcal{H}^*, X \times I, m_\Delta\}$, e queste sono uguali agli integrali $L(\int f)$, e rispettivamente a $U(\int f)$, su X . Segue come immediato corollario che “ f è integrabile su X ” \Leftrightarrow “ Of è J -misurabile rispetto a $\{\mathcal{H}^*, X \times I, m_\Delta\}$ ”. Se questo è il caso, la J -misura di Of , diciamola $\mu(Of)$, è uguale a $\int_X f$.»

Si sottolinea che (T8) è legato all'ipotesi $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$ (che implica $\text{car}\{\mathcal{H}^*, X \times I, m_\Delta\}$). Infine (T8) si generalizza facilmente al caso in cui a f si sostituisca $f\chi_A$, χ_A essendo la funzione caratteristica di $A \subset X$ (in questo caso f può essere anche definita soltanto su A).

La limitazione più sopra imposta ai valori di f di essere in I può sostituirsi con quella che f sia limitata in valore assoluto, cioè $|f| \leq M$ con $M > 0$. Supponiamo dapprima $0 \leq f \leq M$; allora basta sostituire f con f/M per riprodurre le precedenti conclusioni, perché è banalmente $(\mu_-, \mu^-)(O(f/M)) = (1/M)(\mu_-, \mu^-)(Of)$, $(L, U)\int_X (f/M) = (1/M)(L, U)\int_X f$ e $(\mu_-, \mu^-)(O(f/M)) = (1/M)(L, U)\int_X f$. Passando al caso $|f| \leq M$, si usa l'espedito (ben noto in teoria dell'integrazione) di definire due funzioni f_+ e f_-

$\int_{[0,a]} x^p dx = a^{p+1}/(p+1)$ per p intero non-negativo; un risultato ottenuto indipendentemente da E. Torricelli (un allievo di Galileo, 1608-47), da G.P. de Roberval (1602-75, *Traité des indivisibles*, 1634), e certamente noto anche a Fermat.

¹⁴ Tuttavia la scrittura \int_0^1 suggerisce l'orientamento dell'intervallo $[0, 1]$, e questo è inappropriato al presente contesto. La questione di definire l'integrale \int_1^0 propone il caso più elementare di integrazione su un dominio *orientato* (di fatto in senso opposto a quello standard), che non è stato fin qui preso in considerazione. La ben nota definizione è $\int_b^a =: -\int_a^b$ per $a \leq b$, quindi $\int_a^a = 0$, in accordo col fatto che $[a, a]$ è J -trascurabile in \mathbb{R} .

¹⁵ Qualcuno chiama questo insieme **ombra del grafo di f in $X \times I$** , da cui il simbolo Of .

ponendo $f_+ =: f$ se $f \geq 0$, $f_+ =: 0$ se $f < 0$, e $f_- =: -f$ se $f < 0$, $f_- = 0$ se $f \geq 0$; quindi $f = f_+ - f_-$, con $0 \leq f_+ \leq M$, $0 \leq f_- \leq M$. Basta allora riferirsi alle f_+ , f_- come prima ci si è riferiti alla f/M per avere $(\mu_-, \mu^+)(Of_+) = (L, U) \int_X f_+$ e similmente con f_- in luogo di f_+ . Applicando il corollario di (T8), e supponendo vero uno dei membri della equivalenza, sia per f_+ che per f_- , si ottiene $\int_X f = \int_X f_+ - \int_X f_- = \mu(Of_+) - \mu(Of_-)$.

Mutatis mutandis, e sempre se $\text{car}\{\mathcal{H}, X, m\}$, in modo analogo si potrà identificare la nozione di **integrale di Lebesgue** (o **L-integrale**) di una funzione con valori in I con quella di misura di Lebesgue (se esiste, vedi App. Gen. C) del SI Of di $X \times I$ (ombra del grafo di f in $X \times I$). Si passa poi a funzioni con valori in $[-M, M]$ con le procedure illustrate più sopra. Anche in questo caso, la conclusione sottolinea la subalternità della teoria dell'integrazione a quella della misura. In realtà, come è vero per l'R-integrale generalizzato, anche per l'L-integrale esiste una definizione "autonoma", cioè che *non* la identifica con la differenza delle L-misure di Of_+ e Of_- (se tali misure esistono); ma preferiamo qui sorvolare su questioni di questo tipo.

Non ci occuperemo delle numerose generalizzazioni, ormai di uso comune nella matematica applicata moderna, del concetto di integrale al di là di quello di R-integrale e L-integrale. Ci riferiamo innanzitutto agli integrali di Riemann-Stieltjes e di Lebesgue-Stieltjes, e a quelli (in parte legati al rapporto tra calcolo integrale e calcolo differenziale) di Burkill, di Daniell, di Kolmogorov, di Denjoy, di Radon, ecc.; nonché alle estensioni di queste nozioni a domini non limitati, o a funzioni non limitate, ecc., per le quali il lettore è rinviato alla trattatistica specializzata e ai lavori originali ad esse dedicati.

5.1.2) J-MISURA DI SOTTOINSIEMI NOTEVOLI DI \mathbb{R}^n

La considerazione dei SI J-misurabili di \mathbb{R}^n pone certi problemi facilmente formulabili, ma non altrettanto prontamente risolvibili. Ad esempio: cosa succede della J-misura di A , SI di \mathbb{R}^n supposto J-misurabile, a fronte di trasformazioni di \mathbb{R}^n quali sono le trasformazioni ortogonali affini o le similitudini? Pena la destituzione del significato sostanziale della nozione di J-misura, le risposte devono essere quelle suggerite dall'intuizione, vale a dire: (α) le J-misure sono invarianti

rispetto alle trasformazioni ortogonali affini; (β) detto σ il rapporto della similitudine \mathcal{S} , posto $A' = \mathcal{S}A$ risulta $\mu(A') = \sigma^n \mu(A)$.^{16, 17}

Mediante gli strumenti che abbiamo fin qui descritto, compresi i teoremi (α, β) appena enunciati, siamo in grado di calcolare la J-misura di certi SI notevoli di \mathbb{R}^n , a priori J-misurabili su base intuitiva (una dimostrazione è accennata nella nota⁽²⁰⁾); e cioè, per $1 \leq k \leq n$, dei k-blocchi (o k-parallelogrammi, k-parallelepipedo, k-parallelotopi), dei k-simplessi (o (k+1)-edri), delle k-palle (tutti k-dim); e inoltre delle (k-1)-sfere (\equiv frontiere delle k-palle). Le (k-1)-sfere appartengono ad una categoria più generale di SI di \mathbb{R}^n (ne sono infatti sottovarietà (k-1)dim *non elementari*, e la loro descrizione richiede un atlante), per cui la loro J-misura sarà per il momento ottenuta su base euristica.

§1. Se L_n è un generico spazio lineare n-dim e $v_{(1)}, \dots, v_{(k)}$, $k \leq n$, sono k suoi vettori, l'insieme $B(v_{(1)}, \dots, v_{(k)})$ (di dimensione *lineare* k sse i detti vettori sono linearmente indipendenti) dei vettori $x \in L_n$ dati da

$$(1) \quad x = \sum_{i=1}^k c_i v_{(i)} + d$$

per ogni $c_i \in [0,1]$ e ogni vettore arbitrario d di L_n , si dice un **k-blocco** (chiuso) **generato da** $v_{(1)}, \dots, v_{(k)}$. Quindi $v_{(1)} = x(c_1=1, c_{i \neq 1}=0) - d$, \dots , $v_{(k)} = x(c_k=1, c_{i \neq k}=0) - d$. Essendo qui interessati alla misura di un k-blocco, potremo porre $d = O$ (zero di L_n), perché quella misura non è influenzata dalle traslazioni (teorema (α)).

Nel caso in cui $L_n = \mathbb{R}^n$, cominceremo col considerare n vettori-punti $v_{(1)} \equiv x_{(1)}, \dots, v_{(n)} \equiv x_{(n)}$ linearmente indipendenti. Diremo \mathbb{R}^{n-1} l'(n-1)-piano $\subset \mathbb{R}^n$ abbracciato da $v_{(1)}, \dots, v_{(n-1)}$ (cioè contenente gli n punti $O, x_{(1)}, \dots, x_{(n-1)}$), \mathbb{R}^{n-2} l'(n-2)-piano $\subset \mathbb{R}^{n-1}$ abbracciato da $v_{(1)}, \dots, v_{(n-2)}, \dots$, e \mathbb{R}^1 la retta $\subset \mathbb{R}^2$ abbracciata da $v_{(1)}$. Nel seguito, sarà utile denotare con ${}_k B$ il k-blocco in oggetto, sottintendendo il riferimento ai suoi vettori generatori. Ponendo nella (1) $c_s = 0$ per un certo $1 \leq s \leq k$ ($k \leq n$) (mentre per ogni $i \neq s$, $c_i \in [0,1]$), si ottiene un (k-1)-blocco appartenente alla frontiera di ${}_k B \equiv B(x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ che si dice sua **faccia inferiore** s-ma; e ponendovi $c_s = 1$ (mentre per ogni $i \neq s$, $c_i \in [0,1]$) si ottiene la sua associata **faccia superiore** s-ma. Ovviamente ${}_k B$ ha k tali coppie di facce inferiori/superiori, o facce "opposte", le quali nel loro insieme costituiscono la sua frontiera, trascurabile in \mathbb{R}^k (vedi ancora la nota⁽²⁰⁾). Poiché le J-misure sono invarianti per rotazioni (teorema (α)), oltre che porre $d = 0$ potremo ruotare gli assi cartesiani ortogonali di \mathbb{R}^n in modo che

¹⁶ Il prodotto di una trasformazione ortogonale per una similitudine è commutativo, e si dice talvolta una **omotetia**; così il prodotto diretto (commutativo) del gruppo delle trasformazioni ortogonali affini per quello delle similitudini è il **gruppo delle omotetie**. Parecchi autori usano peraltro il termine "omotetia" come sinonimo di "similitudine".

¹⁷ Le dimostrazioni dei teoremi (α) e (β) non sono banali, e non è comune trovarne versioni rigorose e complete nella corrente trattatistica.

i punti $x_{(1)}, \dots, x_{(n-1)}$ siano nell' $(n-1)$ -piano $x^n = 0$, e la coordinata (n) di $x_{(n)}$, diciamo $h_n = x_{(n)}^n$, sia positiva. La coordinata (n) del generico x di ${}_nB$ è allora $x^n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{(i)}^n + c_n h_n = c_n h_n$ perché $x_{(i)}^n = 0$ per ogni $1 \leq i \leq n-1$. Quindi c_n è la coordinata (n) del generico x di ${}_nB$ di "altezza" x^n sul $(n-1)$ -piano $x^n = 0$, espressa come parte propria ($0 \leq c_n \leq 1$) di h_n . Segue che la sezione di ${}_nB$ con l' $(n-1)$ -piano $x^n = y$, per $0 \leq y \leq h_n$, è

$$(2) \quad x|_y = \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_{(i)} + (y/h_n) x_{(n)},$$

per ogni $c_i \in [0,1]$ ($1 \leq i \leq n-1$). Poiché anche $y/h_n \in [0,1]$, il luogo dei punti (2) è un $(n-1)$ -blocco; per $y = 0$, questo coincide con la faccia inferiore n -ma di ${}_nB$, mentre per $0 < y \leq h_n$ abbiamo lo stesso $(n-1)$ -blocco traslato lungo l'asse (n) della distanza y . (In particolare per $y = h_n$, abbiamo la faccia superiore n -ma di ${}_nB$, opposta alla precedente.) In questa sottosezione, scriveremo $|{}_k B|$ per la J -misura (in \mathbb{R}^k abbracciato da $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$) del k -blocco ${}_k B$, per ogni $1 \leq k \leq n$. Tenendo conto della indipendenza da y della J -misura della sezione di ${}_nB$ con $x^n = y$ (teorema (α)), e applicando il metodo di esaurimento (vedi (5.1.1, 2)), si ottiene la relazione ricorsiva

$$(3) \quad |{}_n B| = h_n |{}_{n-1} B|;$$

e "iterando all'indietro" quest'ultima, in forza dell'ovvia $|{}_1 B| = h_1$ abbiamo infine:

$$(4) \quad |{}_n B| = \prod_{i=1}^n h_i,$$

che ci dà la J -misura di ${}_n B \equiv B(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Questo risultato diventa ovvio se, per ogni $1 \leq i \leq n$, $x_{(i)}$ giace lungo l'asse coordinato (cartesiano ortogonale) (i) dalla sua parte positiva (caso dell'**n-blocco rettangolo equiverso**). Se poi i vettori-punti $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ non sono linearmente indipendenti, almeno uno degli $h_{1 \leq i \leq n}$ è nullo, e quindi $|{}_n B| = 0$.

Con mezzi strettamente algebrici, si può dimostrare che

$$(5) \quad \left(\prod_{i=1}^n h_i \right)^2 = \text{Gr}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \equiv \det \{ (x_{(i)}, x_{(j)}) \}_{i,j=1 \div n}$$

dove al solito Gr denota il gramiano dei suoi argomenti, e $(\ , \)$ il prodotto interno standard in \mathbb{R}^n (quindi $\text{Gr}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \geq 0$). Inoltre l'algebra dei gramiani ci insegna che

$$(6) \quad \text{Gr}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) = \det^2 \{ x_{(i)}^j \}_{i,j=1 \div n},$$

dove $x_{(i)}^j$ è la componente $(^j)$ di $x_{(i)}$ in una qualsiasi base ortonormale di \mathbb{R}^n . Tenuto conto della $\det \{ x_{(i)}^j \}_{i,j=1 \div n} = \sum_{\langle j \rangle} \Upsilon_{j_1 \dots j_n} x_{(1)}^{j_1} \dots x_{(n)}^{j_n}$ (ove $\Upsilon_{j_1 \dots j_n}$ è il simbolo antisimmetrico unitario, e la somma è sul $\langle n, n \rangle$ -indice stretto $\langle j \rangle$, quindi consta di $n!$ addendi), la

$$(6\text{bis}) \quad |{}_n B| = \left| \det \{ x_{(i)}^j \}_{i,j=1 \div n} \right|$$

si trova già, giustificata su base semintuitiva, nella S.sez. 1.4.2 (con alcune differenze di notazione, e riferita alla misura con segno), ed è anche segnalata nella Sez. 4.4. Ovviamente la (5), cioè la

$|_n\mathbf{B}| = (\text{Gr}(x_{(1)}, \dots, x_{(n)}))^{1/2}$, si può anche limitare a $1 \leq k < n$ vettori generatori $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ di \mathbb{R}^n , scrivendo quindi, più in generale:

$$(5\text{bis}) \quad |_k\mathbf{B}| = (\text{Gr}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}))^{1/2},$$

sempre secondo la definizione standard (5) del gramiano. Ricordiamo ora l'uguaglianza, valida per $1 \leq k \leq n$,

$$(7) \quad \text{Gr}(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) \equiv \det\{(x_{(i)}, x_{(j)})\}_{i,j=1 \div k} = \sum_{\langle p \rangle} \det^2\{x_{(i)}^{p_j}\}_{i,j=1 \div k},^{18}$$

dove la somma è fatta sui C_n^k $\langle n, k \rangle$ -indici strettamente ordinati $\langle p \rangle \equiv \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ (cioè sui corrispondenti C_n^k minori al quadrato della $(k \times n)$ -matrice $\{x_{(i)}^j\}_{i=1 \div k, j=1 \div n}$). Sempre per $1 \leq k \leq n$, abbiamo dunque:

$$(5\text{ter}) \quad |_k\mathbf{B}| = (\sum_{\langle p \rangle} \det^2\{x_{(i)}^{p_j}\}_{i,j=1 \div k})^{1/2} \equiv |[x_{(1)}, \dots, x_{(k)}]_n|,$$

in cui abbiamo semplificato la scrittura del 2° membro come indicato nel 3° membro. Si noti che $|[x_{(1)}, \dots, x_{(k)}]_n|$ è una forma k -lineare con valori ≥ 0 , nulla sse i suoi k argomenti sono linearmente dipendenti. Se $k = n$, questa forma diventa $|\det\{x_{(i)}^j\}_{i,j=1 \div n}|$, in accordo con la (6bis); mentre se $k = 1$, si riduce a $(\sum_{j=1}^n (x^j)^2)^{1/2} \equiv |x| = (\text{Gr}(x))^{1/2}$, avendo ovviamente scritto x per $x_{(1)}$. È immediato verificare che la (5bis) è a posteriori in accordo con i teoremi (α, β) . §

§2. A parità di tutte le altre condizioni, la sola proprietà che distingue un k -**simplesso** (chiuso) **generato dai vettori** $v_{(1)}, \dots, v_{(k)}$ dello spazio lineare n -dim L_n , $S(v_{(1)}, \dots, v_{(k)}) \equiv {}_kS$, dal corrispondente k -blocco chiuso ${}_k\mathbf{B}$, è che nella espressione (1) del vettore x di ${}_k\mathbf{B}$, alla condizione “per ogni $c_i \in [0,1]$, $1 \leq i \leq k$ ($k \leq n$)”, si aggiunga il vincolo “sotto $\sum_{i=1}^k c_i \leq 1$ ” (quindi ${}_kS \subset {}_k\mathbf{B}$). Permane con ciò il fatto che la dimensione *lineare* di ${}_kS$ è k sse i vettori generatori sono linearmente indipendenti. ${}_kS$ è anche detto **inviluppo convesso** (o **convex hull**) dei suoi $k+1$ vertici d , $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$. Venendo allo spazio \mathbb{R}^n , posto $d = O$ e supponendo gli n vettori-punti $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ linearmente indipendenti, la $c_s = 0$ per un certo $1 \leq s \leq n$ (ferma restando la condizione “per ogni $i \neq s$, $c_i \in [0,1]$ sotto $\sum_{i \neq s} c_i \leq 1$ ”) fornisce un $(n-1)$ -simplesso di vertici $O, x_{(1)}, \dots, x_{(s-1)}, x_{(s+1)}, \dots, x_{(n)}$ che si dice **faccia** s -ma di ${}_nS$. Quindi ${}_nS$ ha n di queste facce, più una $(n+1)$ -ma faccia “opposta” a O (anch'essa un $(n-1)$ -simplesso) di vertici $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$. La frontiera di ${}_nS$ è costituita dall'insieme di queste $n+1$ facce.¹⁹ Ancora, potremo ruotare gli assi coordinati in modo che $x_{(1)}, \dots, x_{(n-1)}$ siano nell' $(n-1)$ -piano $x^n = 0$, e la coordinata (n) di $x_{(n)}$, $h_n = x_{(n)}^n$, sia positiva. Il generico punto $x|_y$ della

¹⁸ Per le dimostrazioni delle (5,6,7) di questo paragrafo, vedi ad esempio G. Shilov, “Linear Algebra” (engl. transl.) Prentice Hall (1971), ristampato da Dover (1977), Chpt. 8, Sect. 7.

¹⁹ Questo rende conto del fatto che un k -simplesso è un $(k+1)$ -edro. La faccia $(n+1)$ -ma di ${}_nS$ può ad es. rappresentarsi come (*) $x = a_1(x_{(1)} - x_{(n)}) + \dots + a_{n-1}(x_{(n-1)} - x_{(n)}) + x_{(n)}$, con $0 \leq a_i \leq 1$ per $1 \leq i \leq n-1$, e $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \leq 1$, o come qualunque altra espressione dello stesso tipo ottenuta per permutazione ciclica degli indici. Si noti che la (*) può anche scriversi come $x = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_{(i)} + (1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i) x_{(n)}$, nella quale tutti i coefficienti sono in $[0,1]$ e la loro somma è uguale a 1; quindi la faccia $(n+1)$ -ma in questione è inclusa in ${}_nS$, come è naturale.

sezione di ${}_nS$ con il $(n-1)$ -piano di “altezza” y ($0 \leq y \leq h_n$) sul piano $x^n = 0$ è dato dalla (2) con il vincolo $\sum_{i=1}^{n-1} c_i + y/h_n \leq 1$. Posto $c_i = t/h_n c'_i$ per $1 \leq i \leq n-1$, con $t =: h_n - y$, questo vincolo diventa $(t/h_n) \sum_{i=1}^{n-1} c'_i + y/h_n \leq 1$, che equivale a $\sum_{i=1}^{n-1} c'_i \leq 1$. Quest’ultima implica $c'_i \in [0,1]$ per ogni $1 \leq i \leq n-1$. Poiché $t/h_n \in [0,1]$, la sezione in oggetto, cioè $x|_y = \sum_{i=1}^{n-1} c'_i (t/h_n) x_{(i)} + (y/h_n) x_{(n)}$, è un $(n-1)$ -simpleso simile alla faccia n -ma (alla quale si riduce per $t = h_n$, quindi per $y = 0$ e $c'_i = c_i$), con fattore di similitudine $t/h_n \leq 1$, e traslato rispetto ad essa del vettore $(y/h_n) x_{(n)}$. La traslazione non ha effetto sulla J -misura (teor. (α)), mentre la similitudine la riduce di un fattore $(t/h_n)^{n-1}$ (teor. (β)). Denotando con $|_kS|$ la J -misura del k -simpleso ${}_kS \equiv S(x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$, e ancora applicando il metodo di esaustione (5.1.1, 2), otteniamo la formula ricorsiva

$$(8) \quad |{}_nS| = |{}_{n-1}S| \int_{[0, h_n]} (t/h_n)^{n-1} dt = |{}_{n-1}S| h_n/n;$$

e quindi, iterando all’indietro quest’ultima e tenendo conto della $|{}_1S| = h_1$,

$$(9) \quad |{}_nS| = \prod_{i=1}^n h_i/n! = |{}_nB|/n!,$$

secondo un risultato già anticipato, ma qui riprodotto con i valori assoluti al posto di quelli con segno. Ancora, la (9) si applica anche ad un $(1 \leq k < n)$ -simpleso, ottenendo la più generale:

$$(9bis) \quad |{}_kS| = |{}_kB|/k!,$$

per $k \leq n$. §

§3. Per ogni $r \geq 0$, il SI di \mathbb{R}^n ${}_nP(r) =: \{ \langle x^1, \dots, x^n \rangle \in \mathbb{R}^n \wedge ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \leq r^2) \}$ si dice **n -palla (chiusa) di raggio r e centro $x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle = O$** . Per $r = 0$, ${}_nP(0)$ si riduce a $\{O\}$, che è J -trascurabile; e quindi tanto vale assumere $r > 0$ nel seguito. ${}_nP(r > 0)$ è J -misurabile²⁰, e la sua misura è proporzionale a r^n , diciamo (denotando al solito con $| \cdot |$ le J -misure) secondo la $|{}_nP(r)| = C_n r^n$, dove $C_n \equiv |{}_nP(1)|$ è una costante da determinare. Ciò è vero in quanto la n -palla di raggio r' è simile a quella di raggio r con rapporto di similitudine $(r'/r)^n$. La sezione di ${}_nP(r)$ con il $(n-1)$ -piano $x^n = y \in [-r, +r]$ è l’insieme $(\subset {}_nP(r)) \{ \langle x^1, \dots, x^{n-1}, y \rangle \in \mathbb{R}^n \wedge (x^1)^2 + \dots + (x^{n-1})^2 \leq r^2 - y^2 \}$, e quindi è la $(n-1)$ -palla di centro $x^1 = \dots = x^{n-1} = 0$ nel $(n-1)$ -piano $x^n = y$, e raggio $(r^2 - y^2)^{1/2}$. Essa è J -trascurabile (nel suo $(n-1)$ -piano) per $|y| = r$. Poiché la traslazione del suo centro non altera la J -misura di questa $(n-1)$ -palla, tornando ad applicare il metodo di esaustione otteniamo:

²⁰ Diamo questo per *intuitivamente* evidente, non avendo ancora definito la J -misura (in \mathbb{R}^n) della varietà $(n-1)$ -dim $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 = r^2$. Ciò che realmente interessa qui è la J -trascurabilità (in \mathbb{R}^n) di questa varietà $(n-1)$ -dim. Essa è garantita da un teorema generale che investe tutte le varietà $(k < n)$ -dim 1-embedded in \mathbb{R}^n che siano immagini di un SI relativamente compatto (cfr. App. Gen. B) di \mathbb{R}^k , e che ne afferma la J -trascurabilità in \mathbb{R}^n . Si verifica subito che la sfera $(n-1)$ -dim in oggetto soddisfa alle condizioni richieste. Che poi un $(k < n)$ -piano di \mathbb{R}^n sia J -trascurabile in \mathbb{R}^n si vede subito anche in modo diretto; infatti esso è incluso in un “ $(n-k)$ -strato” parallelo di $n-k$ spessori arbitrariamente piccoli, la cui J -misura in \mathbb{R}^n è proporzionale al prodotto di tali spessori (o a tale spessore se $k = n-1$). Ciò prova in particolare la J -misurabilità di un $(k \leq n)$ -blocco o di un $(k \leq n)$ -simpleso, perché le loro frontiere, essendo costituite da porzioni compatte di $(k-1)$ -piani, sono trascurabili in \mathbb{R}^k .

$$(10) \quad |{}_n P(r)| = C_{n-1} \int_{[-r,r]} (r^2 - y^2)^{(n-1)/2} dy.$$

L'integrale a 2° membro vale $r^n \Gamma(1/2) \Gamma((n+1)/2) / \Gamma(n/2 + 1)$, dove $\Gamma(x) =: \int_{[0,\infty]} t^{x-1} \exp(-t) dt$ per ogni reale $x > 0$ (**funzione Gamma**²¹). Le proprietà di Γ che ci serviranno qui sono $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ per ogni $x > 0$, $\Gamma(1) = 1$, e $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$. Si ottiene così la relazione ricorsiva

$$(11) \quad C_n = C_{n-1} \pi^{1/2} \Gamma((n+1)/2) / (\Gamma(n/2) n/2).$$

Iterando all'indietro quest'ultima, e tenendo conto della $C_1 = 2$, troviamo:

$$(12) \quad C_n = 2\pi^{n/2} / (n\Gamma(n/2)),$$

ossia $C_2 = \pi$, $C_3 = (2/3)\pi^{3/2} / \Gamma(3/2) = 4\pi/3$, $C_4 = (1/2)\pi^2 / \Gamma(2) = \pi^2/2$, e così via. In conclusione, $|{}_1 P(r)| = 2r$, $|{}_2 P(r)| = \pi r^2$, $|{}_3 P(r)| = 4\pi r^3/3$, $|{}_4 P(r)| = \pi^2 r^4/2$, ecc., nei primi tre casi in accordo con quanto è noto elementarmente.

Se si denota con ${}_{n-1}\Sigma(r)$ (per $n \geq 2$) il contorno $(n-1)$ -dim di ${}_n P(r)$ (**sfera $(n-1)$ -dim di raggio r e centro O** , che è una sottovarietà di \mathbb{R}^n), intuitivamente ci si aspetta che la sua J -misura $|{}_{n-1}\Sigma(r)|$ in \mathbb{R}^{n-1} (in effetti non ancora definita) soddisfi la $\int_{[0,r]} |{}_{n-1}\Sigma(x)| dx = |{}_n P(r)|$, e quindi che $|{}_{n-1}\Sigma(r)| = r^{n-1} n C_n$. Per ragioni di similitudine, è $|{}_{n-1}\Sigma(r)| = G_{n-1} r^{n-1}$, con $G_{n-1} \equiv |{}_{n-1}\Sigma(1)|$ costante da determinare. Abbiamo così:

$$(13) \quad G_{n-1} = n C_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2),$$

e quindi $G_1 = 2C_2 = 2\pi$, $G_2 = 3C_3 = 4\pi$, $G_3 = 4C_4 = 2\pi^2$, ecc., e $|{}_1 \Sigma(r)| = 2\pi r$, $|{}_2 \Sigma(r)| = 4\pi r^2$, $|{}_3 \Sigma(r)| = 2\pi^2 r^3$, ecc., ancora in accordo con quanto è noto elementarmente nei primi due casi. §

5.1.3) INTEGRAZIONE SU SOTTOVARIETÀ DI \mathbb{R}^n

Alla definizione di integrale su sottovarietà di \mathbb{R}^n , e su certi loro SI, è opportuno premettere la menzione del cosiddetto **teorema del cambiamento di variabile** (in un integrale), per la cui dimostrazione rinviamo a qualsiasi trattato di Analisi delle funzioni (reali) di più variabili reali. Esso recita:

T1. «Siano U e V domini (n -dim, compatti) di $\mathbb{R}^{n \geq 1}$, e sia $\phi: U \rightarrow V$ un 1-diffeomorfismo di U su V . Denoteremo con $u \equiv \langle u^1, \dots, u^n \rangle$ [con $v \equiv \langle v^1, \dots, v^n \rangle$] la variabile corrente in U [in V], e con $\det\{\partial(\phi)/\partial(u)(u)\}$ (o abolendo qui per un momento, per brevità, le $\{ \}$, con $\det\partial(\phi)/\partial(u)(u)$) il determinante jacobiano di ϕ in $u \in U$, che è per ipotesi continuo e diverso da zero in U . Per qualunque funzione (reale) $f = f(v)$ definita e continua q.o. in V , sussiste allora l'uguaglianza:

²¹ Come è noto, la funzione Gamma è in realtà definita in tutto il semipiano complesso a parte reale strettamente positiva, $\Re(z) > 0$.

$$(1) \quad \int_{V=\phi(U)} f(v)dv = \int_U f(\phi(u))|\det\partial(\phi)/\partial(u)(u)|du.»$$

Le ipotesi del teorema (T1) comportano alcune conseguenze immediate, e cioè:

(i) le assunte continuità di ϕ e di ϕ^{-1} implicano che la parte interna e la frontiera di U [di V] siano trasformate da ϕ [da ϕ^{-1}] nella parte interna, e rispettivamente nella frontiera, di V [di U]; #

(ii) i determinanti jacobiani $\det\partial(\phi)/\partial(u)(u)$ e $\det\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v)$ sono legati dalla

$$(2) \quad \det\partial(\phi)/\partial(u)(u) = [\det\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v=\phi(u))]^{-1},$$

o equivalentemente dalla

$$(2bis) \quad \det\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v) = [\det\partial(\phi)/\partial(u)(u=\phi^{-1}(v))]^{-1}.$$

Quindi il segno dei due determinanti jacobiani, che sono continui e $\neq 0$ in U e rispettivamente in V , permane ivi positivo aut negativo per entrambi. Si noti che si passa dalla (2) alla (2bis) sostituendovi ϕ con ϕ^{-1} e u con v , e viceversa; #

(iii) poiché il modulo di una funzione continua è continuo, “ $f = f(v)$ è continua q.o. in V ” \Leftrightarrow \Leftrightarrow “ $f(\phi(u))|\det\partial(\phi)/\partial(u)(u)|$ è continua q.o. in U ”. Quindi l’integrale a 2° membro della (1) – oltre a quello a 1° membro – esiste se vale il primo enunciato della precedente equivalenza, e quello a 1° membro della (1) – oltre a quello a 2° membro – esiste se vale il secondo enunciato della stessa equivalenza; #

(iv) le (2, 2bis) danno un esempio della “simmetria” esistente tra le terne $\{\phi, U, V\}$ e $\{\phi^{-1}, V, U\}$, nel senso che ad una proposizione vera espressa in termini di (ϕ, U, V, u, v) corrisponde una proposizione vera che si ottiene dalla prima con gli scambi formali $\phi \leftrightarrow \phi^{-1}$, $U \leftrightarrow V$, $u \leftrightarrow v$. Applicato alla (1), questo criterio di simmetria fornisce, per ogni $g = g(u)$ continua q.o. in U ,

$$(1bis) \quad \int_{U=1/\phi(V)} g(u)du = \int_V g(\phi^{-1}(v))|\det\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v)|dv ,$$

(dove nel 1° membro abbiamo scritto $1/\phi(V)$ in luogo di $\phi^{-1}(V)$ a causa delle solite limitazioni tipografiche). #

Sia ora U un dominio k -dim, compatto, J -misurabile di \mathbb{R}^k , $k < n$, e $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un 1-embedding di U in \mathbb{R}^n . $W =: \varphi(U)$ è dunque un pezzo (chiuso) di sottovarietà k -dim di \mathbb{R}^n , in biiezione con U per definizione. Detta $u \equiv \langle u^1, \dots, u^k \rangle$ la variabile corrente in U , e $x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle \equiv \langle \varphi^1(u), \dots, \varphi^n(u) \rangle$ quella che le corrisponde in W , sia $f = f(x)$ una funzione continua in W salvo eventualmente che nell’immagine $\varphi(Z)$ di un SI Z di U J -trascurabile (cioè $f(\varphi(u))$ sia continua in U salvo che in Z). Ci proponiamo di arrivare ad una ragionevole definizione dell’“integrale di f su W ”.

Cominciamo col supporre $U = I^k$, e decomponiamolo in k -intervalli standard (attuali cellule di una decomposizione cartesiana ortogonale) $0 \leq a_i \leq u \leq b_i \leq 1$,²² con $a_i \equiv \langle a_i^1, \dots, a_i^k \rangle$, $b_i \equiv$

²² Al solito, qui qualche \leq dovrà essere sostituito da un $<$ per assicurare la disgiunzione delle cellule.

$\equiv \langle b_i^1, \dots, b_i^k \rangle$, $a_i < b_i$. Per brevità converrà ignorare il sottoscritto (i) che distingue la singola cellula, e denotare questa con $b-a$ (quindi qui di seguito $b-a$ è un insieme o un numero a seconda dei casi). Il diametro di $b-a$ è $|b-a| = [(b^1-a^1)^2 + \dots + (b^k-a^k)^2]^{1/2}$, quindi $|b-a| \leq \delta$ per una δ -cellula, mentre la sua misura è $\prod_{t=1}^k (b^t-a^t)$, o brevemente $\prod(b-a)$; ovvero, $\prod(b-a) \leq \delta^k$ per una δ -cellula. È chiaro che $b-a$ non è altro che un k -blocco rettangolo, generato dai vettori $e_1(b^1-a^1), \dots, e_k(b^k-a^k)$, ove $\{e_1, \dots, e_k\}$ è la base canonica ortonormale di \mathbb{R}^k . Se ξ è un punto scelto in $b-a$, la misura di $\varphi(b-a)$, trasformato del k -blocco $b-a$ secondo φ , può essere stimata in approssimazione lineare sviluppando φ al 1° ordine attorno a ξ secondo la $\xi \mapsto \varphi(\xi)$ e $\Delta u \equiv \langle \Delta u^1, \dots, \Delta u^k \rangle \mapsto \varphi'(\xi)\Delta u$, ossia secondo

$$(3) \quad \xi + u \mapsto \varphi(\xi) + \varphi'(\xi)\Delta u,$$

ove $\xi + \Delta u \in b-a$. Qui $\varphi'(\xi)$ denota la mappa tangenziale di φ in ξ , e dunque $\varphi'(\xi)\Delta u$ sta, in notazione esplicita, per $\sum_{t=1}^k \partial\varphi/\partial u^t(\xi)\Delta u^t$. Per definizione di 1-embedding, la trasformazione lineare $\Delta u \mapsto \varphi'(\xi)\Delta u$ è non singolare (ossia il rango di $\{\partial\varphi^j/\partial u^t\}_{t=1+k, j=1+n}$ è uguale a k in U). Sotto la trasformazione (3), il k -blocco $b-a$ si trasforma quindi in un k -blocco, che denoteremo ${}_kT(\xi)$,²³ dello spazio lineare k -dim tangente a W in ξ . La misura di ${}_kT(\xi)$ è

$$(4) \quad |{}_kT(\xi)| = |[\partial\varphi/\partial u^1(\xi)(b^1-a^1), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(\xi)(b^k-a^k)]_n| \equiv |[\partial\varphi/\partial u^1(\xi), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(\xi)]_n| \prod(b-a),$$

cfr. la (5.1.2, 5ter). Questo numero positivo può pensarsi come valore approssimato della fin qui non definita misura di $\varphi(b-a)$, che denoteremo (con riserva) $\mu^*(\varphi(b-a))$, ed è da ritenere tanto più preciso quanto più piccola è δ , quindi quanto più piccola è la misura di $(b-a)$ ($\leq \delta^k$).

A questo punto $\sum_i f(\varphi(\xi_i))|{}_kT(\xi_i)|$, con $|{}_kT(\xi_i)|$ espresso secondo la (4) (in cui si restauri l'indice di cellula (i) in ξ , a e b), si definisce come la **somma integrale di f su W per la decomposizione** (cartesiana ortogonale) **marcata** $\{(b_i-a_i)^{(\delta)}, \xi_i\}$ **di I^k , e nella parametrizzazione** (φ). Per la continuità q.o. di $f \circ \varphi$ e la continuità delle $\partial\varphi^j/\partial u^t$ (con $t = 1+k; j = 1+n$) come funzioni di u , il limite di questa somma integrale per $\delta \rightarrow 0$ esiste, ed è definito come l'**integrale di f su $W = \varphi(I^k)$ con la parametrizzazione** (φ). Converrà denotare come $\int_{\varphi(I^k)} f(x)dx$ questo integrale $\int_{I^k} f(\varphi(u)) |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| du$, dove du sta brevemente per $\prod_{t=1}^k du^t$, per ricordare che il calcolo è fatto con la parametrizzazione $x = \varphi(u)$.

Dimostreremo adesso – come è necessario – che $\int_{\varphi(I^k)} f(x)dx$ è indipendente dalla parametrizzazione. Precisamente, sia $\psi: I^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ un 1-embedding di I^k in \mathbb{R}^n (generalmente diverso da φ), per il quale, avendo ora denotato con $v \equiv \langle v^1, \dots, v^k \rangle$ la variabile corrente in I^k , sia $\varphi(u) =$

²³ Ispirandosi all'ovvio significato geometrico di ${}_kT(\xi)$ quando $k = 2$ e $n = 3$, qualcuno chiama ${}_kT(\xi)$ **k -tegola di W in ξ** .

$= \psi(v) = x$; si tratta di provare che $\int_{\varphi(I^k)} f(x) dx = \int_{\psi(I^k)} f(x) dx$, in accordo *sostanziale*, e non soltanto *formale*, con l'uguaglianza $\varphi(I^k) = \psi(I^k)$. La definizione di embedding implica infatti che $\phi =: \psi^{-1} \circ \varphi$ sia un 1-diffeomorfismo di I^k su se stesso (e $\phi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ il suo inverso), il quale lega le variabili correnti u e v mediante le $v = \phi(u)$ o $u = \phi^{-1}(v)$. Ricordando i significati degli indici soprascritti p_j e del simbolo $[(1), \dots, (k)]_n$ introdotti in (5.1.2, (7) e (5ter)), abbiamo (tornando alla notazione $\det\{\dots\}$):

$$(5) \quad \det\{\partial\varphi^{p_j}/\partial u^i(u)\}_{t,j=1+k} \det\{\partial(\phi^{-1})^t/\partial v^s(v)\}_{s,t=1+k} = \det\{\partial\psi^{p_j}/\partial v^s(v)\}_{s,j=1+k},$$

ove u è eliminato in favore di v o viceversa; e quindi,

$$(6) \quad |[\partial\psi/\partial v^1(v), \dots, \partial\psi/\partial v^k(v)]_n| = |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| |\det\{\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v)\}|.$$

ove ancora u è eliminato in favore di v o viceversa. Ma

$$(7) \quad \int_{\varphi(I^k)} f(x) dx \equiv \int_{I^k} f(\varphi(u)) |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| du,$$

e una simile identità vale con ψ in luogo di φ e v in luogo di u . In forza della (6), otteniamo così:

$$(8) \quad \begin{aligned} \int_{\psi(I^k)} f(x) dx &\equiv \int_{I^k} f(\psi(v)) |[\partial\psi/\partial v^1(v), \dots, \partial\psi/\partial v^k(v)]_n| dv = \\ &= \int_{I^k} f(\psi(v)) |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| |\det\{\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v)\}| dv = \\ &= \int_{I^k} f(\varphi(u)) |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| du \equiv \int_{\varphi(I^k)} f(x) dx, \end{aligned}$$

ove il penultimo passaggio, cioè l'uguaglianza $|\det\{\partial(\phi^{-1})/\partial(v)(v)\}| dv = du$, è giustificato dal teorema (T1). La tesi è così dimostrata, e possiamo definire $\int_W f(x) dx$, con W parametrizzato mediante *qualunque* 1-embedding di I^k in \mathbb{R}^n , come l'**integrale di f su W** . Si noti ancora che estendendo tutto il ragionamento al caso $k = n$ (come è manifestamente lecito) la (7) riproduce (T1) perché $|[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n|$ diventa in tal caso $|\det\{\partial(\varphi)/\partial(u)(u)\}|$.²⁴ Ponendo infine $f(x) \equiv 1$ in $W = \varphi(I^k)$ nell'integrale di f su W si ottiene la definizione di **J-misura di W** , diciamo $\mu(W)$. In parametrizzazione (φ), si può dunque scrivere:

$$(9) \quad \mu(W) = \int_{I^k} |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| du \equiv \int_{\varphi(I^k)} dx,$$

Supposto $A \subset I^k$ J-misurabile, l'**integrale di f su B** $=: \varphi(A \subset I^k)$ si può definire come $\int_X f(x) \chi_B(x) dx$ (ove $\chi_B(x)$ è la funzione caratteristica di B), ed esiste perché la frontiera di A , attraverso la quale $\chi_B(x) = \chi_A(u)$ è generalmente discontinua, è J-trascurabile per definizione. La J-misura di B è quindi $\mu(B) = \int_X \chi_B(x) dx$. In particolare, si può così sciogliere la riserva di aver scritto $\mu^*(\varphi(b-a))$, e non $\mu(\varphi(b-a))$, per la misura di $\varphi(b-a)$, risultando

$$(10) \quad \mu(\varphi(b-a)) = \int_{I^k} \chi_{\varphi(b-a)}(u) |[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n| du.$$

²⁴ Una dimostrazione autonoma di (T1) rimane tuttavia necessaria, perché senza di essa non saremmo autorizzati a confidare sulla indipendenza dalla parametrizzazione della definizione di integrale di f su W , e quindi sulla ragionevolezza della definizione stessa. Del resto la dimostrazione standard di (T1), qui *omessa*, procede allo stesso modo, per mezzo di una linearizzazione di φ intorno a ξ .

Segue anche che $||[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n||$ può considerarsi il limite del rapporto tra $\mu(\varphi(b-a))$ e $\prod(b-a)$ quando $b-a$ “si contrae su u ”, per $\delta \rightarrow 0$. Questo rapporto limite, funzione continua di u , si dice **densità della J-misura di φ** . La

$$(11) \quad ||[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n|| = \lim_{(b-a) \rightarrow u} [\mu(\varphi(b-a))/\prod(b-a)]$$

dà il significato preciso dell’uguaglianza (approssimata al 1° ordine)

$$(12) \quad \mu(\varphi(b-a)) = ||[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n|| \prod(b-a) + o(\prod(b-a))$$

quando $u \in b-a$ e il diametro $|b-a| \rightarrow 0$. È facile verificare che le (11, 12) si estendono al caso di un generico $A \subset I^k$ J-misurabile, nelle analoghe forme

$$(11\text{bis}) \quad ||[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n|| = \lim_{A \rightarrow u} [\mu(\varphi(A))/\mu(A)],$$

e rispettivamente

$$(12\text{bis}) \quad \mu(\varphi(A)) = ||[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n|| \mu(A) + o(\mu(A))$$

quando $u \in A$ e il diametro di $A \rightarrow 0$.

Con le opportune modifiche, tutto quanto è stato fin qui illustrato nel caso $U = I^k$ continua a valere quando U è il dominio generico di R^k considerato all’inizio, decomposto in δ -cellule $C_i^{(\delta)}$. In questo caso basta infatti applicare la (11bis) alla cellula $C_i^{(\delta)}$, formare la corrispondente somma integrale, e passare al limite per $\delta \rightarrow 0$. Naturalmente l’approssimazione lineare (3) deve intendersi limitata a variazioni $(\Delta u)_i$ per cui $\xi_i + (\Delta u)_i \in C_i^{(\delta)}$. Inoltre, nella dimostrazione dell’indipendenza dalla parametrizzazione dell’integrale così ottenuto si dovrà considerare l’1-embedding ψ di un dominio V di R^k (simile ma generalmente diverso da U) in R^n per il quale $\psi(v \in V) = \varphi(u \in U)$. Si procederà poi sulla precedente falsariga, tenendo presente che $\phi = \psi^{-1} \circ \varphi$ è ora un 1-diffeomorfismo di U su V .

L’espressione $(\text{Gr}(\partial\varphi/\partial u^1, \dots, \partial\varphi/\partial u^k))^{1/2}$ di $||[\partial\varphi/\partial u^1, \dots, \partial\varphi/\partial u^k]_n||$ è di particolare interesse, perché se la base $\{e_i\}_{i=1+n}$ è, come nel caso presente, ortonormale $((e_i, e_j) = \delta_{ij})$, $(\partial\varphi/\partial u^i, \partial\varphi/\partial u^j)$ (con $i, j = 1 \div k$) non è altro che la componente covariante $g_{ij} \equiv g_{ij}(|\varphi)$ del 2-tensore fondamentale della sottovarietà $x = \varphi(u)$. Posto al solito $g =: \det\{g_{ij}\} \equiv g(|\varphi)$, si ha dunque:

$$(13) \quad ||[\partial\varphi/\partial u^1(u), \dots, \partial\varphi/\partial u^k(u)]_n|| = (g(u|\varphi))^{1/2}.$$

Seguono le corrispondenti versioni della (7):

$$(7\text{bis}) \quad \int_{\varphi(U)} f(x) dx = \int_U f(\varphi(u)) (g(u|\varphi))^{1/2} du,$$

e rispettivamente della (9):

$$(9\text{bis}) \quad \mu(\varphi(U)) = \int_U (g(u|\varphi))^{1/2} du \equiv \int_{\varphi(U)} dx.$$

Esaminiamo adesso alcuni casi particolari di integrali su sottovarietà regolari k -dim di $R^{n>k}$.

§1. Se $k = 1$, la matrice $\{\partial\phi^j/\partial u(u)\}_{j=1+n}$ a n colonne ha una sola riga, e $[[d\phi/du(u)]_n] = (\sum_{j=1}^n (d\phi^j/du(u))^2)^{1/2} \equiv |d\phi/du(u)| > 0 \forall u \in U$. Qui U è un intervallo chiuso, o un'unione finita di intervalli chiusi disgiunti, e l'integrale di f (per ipotesi continua q.o. in $\phi(U)$) "lungo la curva W di equazione $x = \phi(u)$ ", 1-embedded in R^n , è (in parametrizzazione (ϕ)) $\int_U f(\phi(u)) |d\phi/du(u)| du$. In altra parametrizzazione (ψ) della stessa curva W , ora di equazione $x = \psi(v) (\psi(v) = \phi(u) \in V = \phi(U))$, l'integrale in oggetto si esprime come $\int_V f(\psi(v)) |d\psi/dv(v)| dv$; in forza della (6), questo vale $\int_V f(\psi(v)) |d\phi/du(u)| |d\phi^{-1}/dv(v)| dv = \int_U f(\phi(u)) |d\phi/du(u)| du$, in accordo con il teorema generale di indipendenza dalla parametrizzazione. La J -misura di W , o sua "lunghezza", si definisce al solito modo ponendo $f = 1$. Si noti che la somma integrale $\sum_i |d\phi/du(\xi_i)| |u_{i+1} - u_i|$, con $\xi_i \in u_{i+1} - u_i$ e $|u_{i+1} - u_i| \leq \delta$, *non coincide* necessariamente con la lunghezza di una spezzata inscritta in W , ad es. della spezzata di vertici $x_i = \phi(u_i)$. Tuttavia il limite per $\delta \rightarrow 0$ della somma predetta si dimostra essere uguale al limite della lunghezza di una *generica* spezzata inscritta quando la massima lunghezza dei suoi lati tende a zero. §

§2. Se $k = 2$, la matrice $\{\partial\phi^j/\partial u^i\}_{i=1,2; j=1+n}$ a n colonne ha due righe, e $[[\partial\phi/\partial u^1, \partial\phi/\partial u^2]_n]$ è la radice quadrata della somma dei suoi $n(n+1)/2$ minori al quadrato. In questo caso è tuttavia più pratico servirsi del gramiano di $\partial\phi/\partial u^1$ e $\partial\phi/\partial u^2$, ottenendo

$$(14) \quad [[\partial\phi/\partial u^1, \partial\phi/\partial u^2]_n] = (EG - F^2)^{1/2},$$

dove si è posto $E =: |\partial\phi/\partial u^1|^2$, $G =: |\partial\phi/\partial u^2|^2$, $F =: (\partial\phi/\partial u^1, \partial\phi/\partial u^2)$ – adottando con ciò la ben nota simbolica introdotta da Gauss nello studio del caso $n = 3$. ((\cdot, \cdot) è il prodotto interno in R^n .) Si conclude che, in parametrizzazione (ϕ) , l'integrale di f sulla "superficie" $W = \phi(U)$, 1-embedded in R^n , è $\int_U f(\phi(u)) (EG - F^2)^{1/2}(u) du$, mentre la sua J -misura è data dalla

$$(15) \quad \mu(W) = \int_U (EG - F^2)^{1/2}(u) du.$$

Ricordiamo che per due vettori x, y di uno spazio lineare con prodotto interno (\cdot, \cdot) , $-1 \leq (x, y)/|x||y| \leq 1$ è il coseno del loro angolo. Quindi $EG - F^2 = EG(1 - F^2/(EG)) = (|\partial\phi/\partial u^1| |\partial\phi/\partial u^2|)^2 \sin^2 \omega$, dove $\omega \in [0, 2\pi)$ è l'angolo tra $\partial\phi/\partial u^1$ e $\partial\phi/\partial u^2$. Ciò è in accordo con la formula elementare che dà l'area² del parallelogramma (2-blocco) generato dagli stessi vettori. A differenza dall'analogo caso 1-dim, si può dimostrare che il 2° membro della (15) non coincide necessariamente con il limite dell'area di un poliedro inscritto in W quando il suo lato massimo tende a zero (cfr. il sorprendente controesempio di H. Schwarz, vedi (1.4.1), nota (11)); ma è possibile stabilire condizioni sufficienti, sui poliedri inscritti, per cui ciò avvenga. I poliedri inscritti di questa classe si dicono **arealmente ammissibili**. §

§3. Per $k = n-1$, la matrice $\{\partial\varphi^j/\partial u^t\}_{t=1 \div n-1; j=1 \div n}$ a n colonne ha $n-1$ righe. Se a questa matrice si aggiunge (in una posizione qualsiasi) la riga formata dagli elementi e_1, \dots, e_n della base ortonormale canonica di \mathbb{R}^n , il determinante della matrice così completata è un vettore $N^* \neq 0$ di \mathbb{R}^n determinato a meno del segno e ortogonale a ciascuno degli $n-1$ vettori $\partial\varphi/\partial u^1, \dots, \partial\varphi/\partial u^{n-1}$, e quindi all' $(n-1)$ -piano tangente a W in $x = \varphi(u)$; e inoltre, $|[\partial\varphi/\partial u^1, \dots, \partial\varphi/\partial u^{n-1}]_n|$ è uguale al modulo $|N^*|$ di N^* .²⁵ Si conclude così che, in parametrizzazione (φ) , l'integrale di f sulla sottovarietà $(n-1)$ -dim (o “ $(n-1)$ -superficie”) $\varphi(U)$, 1-embedded in \mathbb{R}^n , è $\int_U f(\varphi(u))|N^*(u)|du$; mentre la sua J -misura è data dalla

$$(16) \quad \mu(W) = \int_U |N^*(u)|du.$$

(NB: si è aggiunto un asterisco in N^* per poter più avanti scrivere come N il corrispondente versore $N^*/|N^*|$.)

Il lettore potrà utilmente esercitarsi a calcolare le J -misure di sottovarietà $(n-1)$ -dim notevoli, 1-embedded in \mathbb{R}^n ; ad esempio, quello della $(n-1)$ -sfera centrata in O , per poi verificare che il suo risultato coincide con quello ricavato euristicamente in (5.1.2, §3). §²⁶

§4. Se infine – in deroga alla limitazione $k < n$ fin qui rispettata, e come è legittimo – supponiamo $k = n$, la matrice jacobiana $\{\partial\varphi^j/\partial u^t\}_{t=1 \div n; j=1 \div n}$ è quadrata, e ritroviamo la (1) del teorema (T1), o la corrispondente (7bis) per $k = n$. §

5.1.4 ESTENSIONI AGLI L-INTEGRALI

Concludiamo questa sezione enunciando senza dimostrarli due importanti teoremi, estensioni “lebesguiane” dei corrispondenti teoremi riguardanti l'integrazione nel senso di Jordan: il teorema della invertibilità dell'ordine di integrazione in un integrale doppio (vedi S.sez. 5.1.1), e quello del cambiamento di variabile in un integrale (vedi S.sez. 5.1.3).

T1. Teorema dell'invertibilità dell'ordine in L-integrali, o teorema di Fubini²⁷. Premettiamo la seguente definizione: una funzione f si dice **misurabile** se coincide q.o. con il limite di una

²⁵ Quando la parametrizzazione di $x = \varphi(u)$ è del tipo $x^i = u^i$ per $i = 1, \dots, n-1$ e $x^n = \lambda(u^1, \dots, u^{n-1})$ (sotto gli usuali vincoli su φ), si trova senza difficoltà che $|N^*|^2 = (\partial\lambda/\partial u^1)^2 + \dots + (\partial\lambda/\partial u^{n-1})^2 + 1$, perché il valore assoluto della n -componente di N^* vale 1. A parte il suo orientamento, che non è stato qui definito, il vettore N^* è il prodotto vettore (ordinato) degli $n-1$ vettori $\partial\varphi/\partial u^1, \dots, \partial\varphi/\partial u^{n-1}$, cfr. S.sez. 1.4.2.

²⁶ Va anche segnalato che il metodo di calcolo della J -misura della $(n-1)$ -sfera ${}_{n-1}\Sigma$ presentato come “euristico” in (5.1.2) si può giustificare rigorosamente, e generalizzare a sottovarietà $(n-1)$ -dim 1-embedded secondo φ in \mathbb{R}^n . La procedura consiste nell'includere la sottovarietà in questione in uno strato (n) -dim di piccolo spessore s di \mathbb{R}^n , valutare la J -misura dello strato, dividere per s e prendere il limite di questo rapporto per $s \rightarrow 0$. Il risultato è la densità di J -misura di φ sulla sottovarietà.

sequenza convergente q.o. di funzioni f_i continue q.o. (qui il “q.o.” si riferisce evidentemente al comune dominio di definizione di f e delle f_i). Ciò detto, il teorema di Fubini recita: «se una funzione $f(x,y)$ definita per $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ è misurabile, e l'integrale $\int(\int |f(x,y)|dx)dy$ esiste, allora f è L-integrabile. Viceversa, se f è L-integrabile, allora entrambi gli L-integrali $\int f(x,y)dx$ e $\int f(x,y)dy$ esistono q.o. come funzioni di y e rispettivamente di x , sono L-integrabili come tali, e valgono le uguaglianze

$$(1) \quad \int(\int f(x,y)dx)dy = \int f(x,y)dxdy = \int(\int f(x,y)dy)dx .»^{28}$$

Il teorema è evidentemente simmetrico rispetto allo scambio di x con y .

T2. Teorema del cambiamento di variabile in L-integrali. Sia φ un 1-embedding di un dominio chiuso $X \subset \mathbb{R}^n$ sulla sua immagine L-misurabile $Y = \varphi(X) \subset \mathbb{R}^n$, e sia $f = f(y)$ una funzione reale definita q.o. per $y \in Y$. Allora «“ f è L-integrabile su Y ” equivale a “la funzione (definita q.o. per $x \in X$) $f(\varphi(x))|\det\{\partial(\varphi)/\partial(x)(x)\}|$ è L-integrabile su X ”. Se questo è il caso, risulta poi $\int_Y f(y)dy = \int_X f(\varphi(x))|\det\{\partial(\varphi)/\partial(x)(x)\}|dx$. Qui $\det\{\partial(\varphi)/\partial(x)(x)\}$ è al solito lo jacobiano della trasformazione $x \mapsto y = \varphi(x)$ in x . In particolare, per $f(y \in Y) \equiv 1$ si ha che $|\det\{\partial(\varphi)/\partial(x)(x)\}|$ è integrabile su X , e che la L-misura di Y è uguale a $\int_X |\det\{\partial(\varphi)/\partial(x)(x)\}|dx$.»

I due teoremi enunciati danno un'idea eloquente della semplicità formale e del potere di sintesi che sono offerte dall'introduzione dell'L-integrale (in luogo del J-integrale) nella teoria generale dell'integrazione.

²⁷ G. Fubini (1879-1943), in “Atti dell'Acc. dei Lincei, Rendiconti”, (5), XVI (1907), 608.

²⁸ Se per contro f non è L-integrabile, non è detto che gli integrali iterati a 1° e 3° membro della (1) esistano, o esistano entrambi; o se esistono, che siano uguali.

5.2) IL RAPPORTO DIFFERENZIAZIONE-INTEGRAZIONE I

5.2.1) IL TEOREMA DI GAUSS-OSTROGRADSKIJ

Il legame tra differenziazione e integrazione cui abbiamo accennato alla fine della S.sez 5.1.1 nasce dalla fondamentale nozione di integrale “indefinito” di una funzione (reale) continua su un intervallo chiuso $[a,b]$, $a < b$, (gli R-integrali e gli L-integrali di cui ci siamo fin qui occupati sono infatti da considerarsi come “definiti”). Sia $f = f(x)$ una tale funzione: *un suo integrale indefinito* è la funzione di $x \in [a,b]$

$$(1) \quad \phi(x) =: \int_a^{a \leq x \leq b} f(t) dt + c_1,$$

o equivalentemente

$$(2) \quad \phi(x) =: -\int_{a \leq x \leq b}^b f(t) dt + c_2,$$

dove \int denota un R-integrale, e c_1, c_2 sono due numeri legati dalla $c_2 - c_1 = \int_a^b f(t) dt$ e per il resto arbitrari. Le due definizioni (1, 2) si equivalgono perché $(1) - (2) = (\int_a^x + \int_x^b) f(t) dt + c_1 - c_2 \equiv \int_a^b f(t) dt + c_1 - c_2 = 0$. Oltre ad essere definita in $[a,b]$ ($\phi(a) = c_1, \phi(b) = c_2$), con ogni evidenza ϕ è anche ivi continua, ovvero $\phi \in C([a,b])$.

Nella sua espressione più elementare, la relazione tra differenziazione e integrazione è espressa dal **teorema di Torricelli-Barrow**, o piuttosto **teorema di Leibniz-Newton (LN)**,¹ o anche **teorema fondamentale del calcolo**, che recita:

«Un integrale indefinito ϕ di $f \in C([a,b])$ è $C^1((a,b))$, e in (a,b) vale la

$$(3) \quad d\phi/dx(x) = f(x).$$

Inoltre i limiti per $x \rightarrow a^+$ e per $x \rightarrow b^-$ (o “limiti verso gli estremi dall’interno”) di $d\phi/dx(x)$ esistono, e alla luce della (3) valgono $f(a)$ e rispettivamente $f(b)$; quindi se *definiamo* $d\phi/dx(a) =: f(a)$ e $d\phi/dx(b) =: f(b)$, risulta $d\phi/dx \in C([a,b])$.² Queste proprietà di ϕ sono anche caratteristiche:

¹ Il contributo di E. Torricelli è contenuto nella sua “Opera Geometrica” (1644), ed è poco più che una segnalazione del fatto che, in certi casi, l’integrale può essere calcolato “invertendo” la procedura di derivazione; quello di Barrow (Isaac, 1630-1677), che appare nelle sue “Lectiones geometricae” (1670), è più significativo ed esplicito. Quanto a Leibniz (Gottfried, Leipzig 1646 - Hannover 1716) e Newton, la pubblicazione del primo in cui il teorema in oggetto è enunciato con sufficiente rigore è del 1684, e quella del secondo del 1687; ma dal carteggio tra i due si deduce che essi ne erano già consapevoli alquanto tempo prima. Anche Fermat conosceva la relazione tra derivata e integrale in casi specifici, ma non sembra che ne abbia apprezzato la portata generale.

² L’esistenza dei sopraddetti limiti permette dunque, in questo caso, di definire la derivata di una funzione (come ϕ) definita e continua in un insieme chiuso (come $[a,b]$), e dotata di derivata continua nell’insieme aperto associato (come (a,b)), nell’insieme chiuso in cui la funzione stessa è continua. Esistono procedure equivalenti atte allo stesso scopo. La più ovvia è quella di servirsi di derivate “unilateri” di ϕ negli estremi a e b , secondo le $d\phi/dx(a) =: \lim_{h \rightarrow 0^+} (\phi(a+h) - \phi(a))/h$ (derivata “destra”, o progressiva, con $h > 0$), e $d\phi/dx(b) =: \lim_{h \rightarrow 0^-} (\phi(b) - \phi(b+h))/h$

vale a dire, per $f \in C([a,b])$, una funzione $g \in C([a,b]) \cap C^1((a,b))$ per la quale $dg/dx(x) = f(x)$ in (a,b) , è un integrale indefinito di f in $[a,b]$.»³,

La (3) è manifestamente la più elementare equazione differenziale ordinaria concepibile, e di essa l'integrale indefinito $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \phi(a) \equiv - \int_x^b f(t)dt + \phi(b)$ offre la soluzione generale, a meno della costante additiva arbitraria $\phi(a)$, o rispettivamente $\phi(b)$, legate dalla

$$(4) \quad \phi(b) - \phi(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Un integrale indefinito di $f \in C([a,b])$ si dice anche una **primitiva di** f . Tutto quanto precede resta banalmente valido nel caso degenerare in cui $a = b$. Tornando alla (4), si osserverà che la differenza a 1° membro può pensarsi come la somma dei valori assunti da ϕ sulla frontiera di (a,b) moltiplicati ciascuno per la componente su R del vettore unitario orientato verso *l'esterno* del dominio di integrazione.

Questa interpretazione della (4) trova corrispondenza nelle sue importanti estensioni ottenute nel secolo XIX ad opera di Gauss, Ostrogradskij (Michel, 1801-1861), Green (George, 1793-1841) e Stokes (George, 1804-1878). Esse fanno parte della cultura analitica di base (essendo inserite, talvolta in versioni semi-intuitive, nei corsi istituzionali di Analisi che gli studenti di fisica, ingegneria e naturalmente di matematica seguono in ogni paese), e possono riassumersi nel seguente **teorema di Gauss-Ostrogradskij (GO)**, che per il momento ci limitiamo ad enunciare:

(GO) «Per $n \geq 2$, sia X un dominio (v. S.sez. 5.1.1) compatto di R^n con frontiera $(n-1)$ -dim S di classe C^1 , f una funzione reale $\in C(X) \cap C^1(X^\circ)$, z una delle n coordinate (ad esempio $z = x^n$), N il

(derivata “sinistra”, o regressiva, con $h < 0$), che esistono entrambe e sono uguali al limite dall'interno di $d\phi/dx$ verso l'estremo sinistro e rispettivamente verso l'estremo destro. Ancora un'alternativa è quella di *estendere* la ϕ ad una ϕ' definita in un aperto (a',b') includente $[a,b]$ (quindi con $a' < a$ e $b' > b$) e tale che $\phi' \in C^1((a',b'))$, ponendo poi $d\phi/dx(a) =: d\phi'/dx(a)$ e $d\phi/dx(b) =: d\phi'/dx(b)$. Questo è possibile in infiniti modi. L'argomento può generalizzarsi ad una funzione ϕ definita in un insieme compatto di R^{n-1} , diciamo $X = X^\circ \cup \partial X$, dove X° è la parte interna di X e ∂X ne è la frontiera $(n-1)$ -dim supposta di classe C^1 . Se $\phi \in C^1(X^\circ) \cap C(\partial X)$, e $\underline{x} \in \partial X$, $\nabla\phi(\underline{x})$ si può definire come $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}} \nabla\phi(\underline{x})$ (con $\underline{x} \in X^\circ$) se questo limite esiste finito e *non dipende* da come \underline{x} tende a \underline{x} . La seconda procedura consiste nel calcolare la derivata parziale di ϕ rispetto alla coordinata x_i , in \underline{x} , come derivata unilatera, in modo che il punto $\langle \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_i+h_i, \dots, \underline{x}_n \rangle$ sia in X° . Questo è possibile sse la coordinata x_i è trasversa a ∂X . Conviene quindi calcolare così la derivata unilatera *normale* a ∂X in \underline{x} ; mentre per calcolare le altre $(n-1)$ derivate (tangenziali) basta conoscere, come si conosce, la ϕ su ∂X . Alla fine, le usuali formule di trasformazione danno $\nabla\phi$ nelle coordinate euclidee standard. Infine con la terza procedura si estende la ϕ ad una ϕ' definita in un aperto $X' \supset X$ in modo che $\phi' \in C^1(X')$, ponendo poi $\nabla\phi(\underline{x}) =: \nabla\phi'(\underline{x})$. Sotto le ipotesi fatte, se una delle procedure funziona, funzionano anche le altre due, e danno gli stessi risultati. Ricordiamo ancora, per concludere, che una funzione continua su un insieme compatto (di uno spazio topologico) con valori in uno spazio topologico ha in quest'ultimo immagine compatta (Weierstrass). Se la funzione è reale, la sua immagine in R è quindi inclusa in un intervallo chiuso, cioè la funzione è limitata.

³ La dimostrazione di questo secondo punto riposa sul teorema: «“ $y \in C^1((a,b)) \cap C([a,b])$ e $dy/dx = 0$ in (a,b) ” \Leftrightarrow “ $y = \text{cost}$ in $[a,b]$ ”». La parte \Leftarrow della precedente equivalenza è ovvia, mentre la parte \Rightarrow seguirebbe immediatamente disponendo di un teorema di unicità. Questo può ottenersi come corollario dal teorema del valor medio (Lagrange); ma è legittimo chiedersi se alla stessa implicazione \Rightarrow si possa giungere senza far uso di tale teorema. La risposta è positiva, vedi ad es. in E.W. Hobson, “The Theory of Functions of a Real variable”, 3rd Edition, Cambridge (1927), ristampato in Dover (1957), vol 1, Chpt. V, n° 267.

versore normale a S orientato verso *l'esterno* di X , e N_z la z -componente di N .⁴ Sotto condizioni addizionali che si approfondiranno più avanti, e denotando con x [con s] il punto corrente su X [su S], si dimostra allora (vedi oltre) che:

$$(5) \quad \int_X \partial f / \partial z(x) dX = \int_S (N_z f)(s) dS. \gg$$

Dal teorema di GO discendono elementarmente:

il teorema del gradiente

$$(6) \quad \int_X \text{grad} f(x) dX = \int_S (Nf)(s) dS$$

che ne è l'equivalente vettoriale;

il teorema della divergenza

$$(7) \quad \int_X \text{div} v(x) dX = \int_S (N \cdot v)(s) dS,$$

dove v è un arbitrario campo vettoriale $\in C^1(X^\circ) \cap C(X)$ e (\cdot) denota l'usuale prodotto interno in R^n ; e infine, per $n = 3$,

il teorema del rotore, o teorema di Stokes

$$(8) \quad \int_X \text{rot} v(x) dX = \int_S (N \times v)(s) dS,$$

dove v è definito come sopra e \times è il prodotto vettoriale standard in R^3 . Le (5÷8) mostrano una comune struttura, in forza della quale si passa dal 1° al 2° membro sostituendo formalmente S a X e s a x , N_z a $\partial/\partial z$ (vedi (5)), quindi N a grad (vedi (6)), $N \cdot$ a div (vedi (7)), e infine $N \times$ a rot per $n = 3$ (vedi (8)). Infine, la (5) riproduce la (4) se, in deroga all'ipotesi $n \geq 2$, si identifica X con l'intervallo (a,b) e si interpreta S come $\{a\} \cup \{b\}$, quindi $-N(a) = N(b) = 1$.

La (8) è stata qui riferita ad un dominio X 3-dim perché questo è il caso di maggior interesse nelle applicazioni alla fisica (idrodinamica, elettromagnetismo classico, ecc.). Tuttavia, con alcune precisazioni, esso vale anche per un dominio 2-dim. Riferendo in questo caso il piano di X a coordinate cartesiane standard (x,y) , e dette v_x, v_y le componenti del campo vettoriale piano $v = v(x,y)$ in esso definito, basta (come si deve in base alla definizione generale) porre $\text{rot} v = z^\wedge (\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y)$, in cui la terna di versori $\langle x^\wedge, y^\wedge, z^\wedge \rangle$ è assunta destra. Poiché il prodotto vettore $N \times v$ è uguale a $z^\wedge (N_x v_y - N_y v_x)$, la (8) si riduce allora all'uguaglianza scalare

$$(8\text{bis}) \quad \int_X (\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y)(x) dX = \int_S (N_x v_y - N_y v_x)(s) dS.$$

Si noti che l'integranda a 2° membro $N_x v_y - N_y v_x$ è la componente tangenziale di v sul bordo S di X orientato in senso antiorario rispetto all'asse z^\wedge (regola del cavatappi). Cioè, se τ è il versore tangente al bordo S (di classe C^1) orientato in modo che la coppia dei versori ortogonali (N, τ) sia congruente alla coppia dei versori ortogonali coordinati (x^\wedge, y^\wedge) , e quindi $N_y = -\tau_x, N_x = \tau_y$,

⁴ Orientamento a parte, risulta $N = N^* / |N^*|$, dove N^* è il vettore definito nella S.sez. 5.1.3, qui riferito alla sottovarietà $(n-1)$ -dim S di R^n .

l'integranda vale $\tau \cdot v$. Non contando il teorema di LN, la (8bis) è il più semplice (quindi il più significativo) esempio di uguaglianza del tipo GO applicata a domini *orientati*, nel senso del teorema generale di Poincaré-Stokes (vedi Cap 8), perché non solo S ma anche X deve considerarsi orientato (secondo l'ordine $x \rightarrow y$). Infatti essa continua a valere sotto lo scambio di x con y, ma in quanto i suoi membri cambiano contemporaneamente segno sotto di esso.

Il teorema del gradiente (6) continua a valere se in luogo di $f \in C(X) \cap C^1(X^\circ)$ vi è il prodotto di f per un fattore singolare $|x-\xi|^{2-n}$ (per $n > 2$) o $\ln(|x-\xi|^{-1})$ (per $n = 2$), dove ξ è un punto arbitrario di X° , da considerare come parametro fisso. Il risultato è allora

$$(6'_{n>2}) \quad \int_X \text{grad}(f(x)|x-\xi|^{2-n})dX = \int_S (Nf)(s)|s-\xi|^{2-n}dS,$$

o rispettivamente

$$(6'_2) \quad \int_X \text{grad}(f(x)\ln(|x-\xi|^{-1}))dX = \int_S (Nf)(s)\ln(|s-\xi|^{-1})dS.$$

La dimostrazione consiste nel sottrarre a X una piccola ($n \geq 2$)-palla aperta di centro ξ e raggio ε , $\mathcal{B}(\xi, \varepsilon)$, ed applicare la formula standard a $X \setminus \mathcal{B}(\xi, \varepsilon)$. Il contributo della $(n-1)$ -superficie della palla, nel 2° membro, è $O(\varepsilon)$ ($n > 2$) o $O(\varepsilon \ln \varepsilon^{-1})$ ($n = 2$), e quindi $\rightarrow 0$ con ε . Con il teorema del gradiente così modificato valgono le sue conseguenze similmente modificate: ad esempio, per $n = 3$ vale il teorema del rotore modificato:

$$(8') \quad \int_X \text{rot}(v(x)/|\xi-x|)dX = \int_S (N \times v)(s)/|s-\xi|dS.$$

Osserviamo poi che l'operatore rot, che in dimensione $n = 3$ trasforma un campo vettoriale $\in C^1(\Omega)$ ($\Omega \equiv$ un aperto di R^3) in un campo vettoriale $\in C(\Omega)$, soddisfa alle ben note identità differenziali del 2° ordine $\text{rotgrad}f \equiv 0$ (per uno scalare $f \in C^1(\Omega)$) e $\text{divrot}v \equiv 0$ (per un vettore $v \in C^1(\Omega)$) *soltanto* se le derivate seconde miste $\partial^2 f / \partial x^i \partial x^k \quad \forall (i \neq k)$, e rispettivamente $\partial^2 v_i / \partial x^j \partial x^k \quad \forall (i, j, k)$ diversi tra loro, esistono continue in Ω (cfr. S.sez. 3.4.1, nota (1³)), e quindi sono simmetriche rispetto agli indici di derivazione. Le due identità sopra menzionate sono di fatto necessarie a molti degli sviluppi che seguono, per cui potrà essere utile introdurre le notazioni $f \in C^{2*}(\Omega)$ e $v \in C^{2*}(\Omega)$ per significare che f, e rispettivamente v, sono di classe $C^1(\Omega)$ e che le loro derivate seconde *miste* esistono continue in Ω .⁵ Di solito, la richiesta su f o v di essere $C^{2*}(\Omega)$ è sostituita da quella di essere semplicemente $C^2(\Omega)$, a rigore ridondante al fine di garantire le $\text{rotgrad}f \equiv 0$ e $\text{divrot}v \equiv 0$.

La dimostrazione standard della (5) presuppone che la sezione di X con una retta parallela all'asse z sia vuota oppure sia un intervallo (eventualmente degenerare in un punto); ovvero, come

⁵ Le stesse richieste sulle derivate seconde di f e di v possono esprimersi in modo più economico facendo uso del teorema di Schwarz "forte" (vedi Sez. 4.5, nota (1⁴)) e precisamente sostituendo " $\forall (i \neq k)$ " con " $\forall (i < k)$ " nella prima di esse, e " $\forall (i, j, k)$ diversi tra loro" con " $\forall (i < j < k)$ in senso ciclico" nella seconda.

anche si dice, che X sia **normale rispetto all'asse** z . Con le notazioni usate nella S.sez. 5.1.1, e identificando z con x^n , questa condizione si specifica come $\varphi(y) \leq x^n \leq \psi(y)$ (dove y sta per $\langle x^1, \dots, x^{n-1} \rangle$, e le φ, ψ sono continue per l'ipotesi fatta su S) se il punto x di coordinate (y, x^n) appartiene a X . Nel calcolare l'integrale a 1° membro della (5), siamo così condotti dapprima all'integrale $\int_{[\varphi(y), \psi(y)]} \partial f / \partial x^n (y, x^n) dx^n$, che per il teorema di LN è uguale a $f(y, \psi(y)) - f(y, \varphi(y))$; e poi all'integrale di quest'ultima differenza sulla proiezione X_n di X sul piano $x^n = 0$, il quale esiste per la supposta continuità di f, φ e ψ . Denotando con N_n la componente di N sull'asse coordinato (n) , e posto $|v_\psi|(y) =: [(\partial\psi/\partial x^1)^2 + \dots + (\partial\psi/\partial x^{n-1})^2 + 1]^{1/2}(y)$, e similmente per $|v_\varphi|(y)$ (cfr. S.sez. 5.1.3), per ogni y di X_n risulta $N_n(y, \psi(y))|v_\psi|(y) = +1$ e $N_n(y, \varphi(y))|v_\varphi|(y) = -1$, per cui

$$(9) \quad \int_X \partial f / \partial x^n (x) dX = \int_{X_n} [f(y, \psi(y)) - f(y, \varphi(y))] dy = \\ = \int_{X_n} f(y, \psi(y)) N_n(y, \psi(y)) |v_\psi|(y) dy + \int_{X_n} f(y, \varphi(y)) N_n(y, \varphi(y)) |v_\varphi|(y) dy.$$

Se scriviamo S_+ [S_-] per la porzione di S di equazione $x^n = \psi(y)$ [$x^n = \varphi(y)$], $\int_{X_n} |v_\psi|(y) dy$ è la misura di S_+ [$\int_{X_n} |v_\varphi|(y) dy$ è la misura di S_-]. Poiché S è l'unione di S_+ ed S_- , si conclude che la somma a 3° membro della (9) è uguale al 2° membro della (5), e il teorema di GO è dimostrato sotto le condizioni stipulate. Le (6, 7, 8, 8bis) seguono poi se X è normale rispetto a tutti gli assi, come avviene ad es. per una n -palla; ma si intuisce facilmente che esse valgono anche per domini X di tipo più generale, decomponibili mediante (un numero finito di) convenienti tagli nell'unione di domini normali a tutti gli assi, e ammettendo, come si verifica essere lecito, frontiere S di classe C^1 a pezzi. Se opportuno, nel seguito ci si riferirà tacitamente a tali domini di tipo più generale.

5.2.2) ESEMPI ED APPLICAZIONI I

La (5.2.1, 5), e le (5.2.1, 6 ÷ 8bis) che ne sono conseguenze dirette, sono all'origine di una varietà di teoremi di grande importanza applicativa, la cui unitarietà si percepisce in modo chiaro man mano che si adottano punti di vista più generali e astratti. Nel loro insieme, questi teoremi costituiscono uno strumento geometrico-analitico di comunissimo impiego nell'analisi e soprattutto nella fisica matematica classica; al punto che non pochi trattati riduttivamente intitolati alla "fisica matematica" sono di fatto dedicati soltanto ad essi e alle loro estensioni e legami con la teoria delle equazioni alle derivate parziali lineari del 2° ordine. Gli asserti riportati nei §§ che seguono costituiscono una piccola ma importante parte dell'argomento, e risalgono con poche eccezioni ad almeno un secolo fa; la versione che ne proponiamo, tuttavia, non è sempre elementare.

§1. Supponendo $f = 1$ in X , secondo il teorema del gradiente $\int_S N(s) dS = 0$. §

§2. Supponendo v solenoidale in X , secondo il teorema della divergenza $\int_S(N \cdot v)(s)dS = 0$. §

§3. Supponendo v irrotazionale in X ($n = 3$), secondo il teorema del rotore $\int_S(N \times v)(s)dS = 0$. §

§4. La (5.2.1, 8bis), che rinumereremo come (1) in questa sottosezione, può generalizzarsi al caso di una superficie Σ 1-embedded in R^3 e J -misurabile, bordata da una o più curve chiuse e semplici C di CdC 1. Con la **condizione di orientabilità** (su Σ) si richiede che il versore normale a Σ *non* possa essere trasformato con continuità nel suo opposto, come è ad es. possibile nel **nastro di Möbius** (A.F. Möbius, 1790-1868).⁶ Supponendo Σ orientabile, sia v un campo vettoriale dato in un intorno 3-dim di Σ come funzione di classe C^{2*} ; se il versore normale N a Σ e il versore tangente τ a C sono orientati secondo l'usuale regola destrorsa o del cavatappi⁷, vale allora la

$$(2) \quad \int_{\Sigma}(N \cdot \text{rot}v)(x)d\Sigma = \int_C(\tau \cdot v)(s)dC,$$

che si riduce alla (1) se Σ è piana.⁸ La (2) si dimostra approssimando Σ con una superficie poliedrica π inscritta *della classe arealmente ammissibile* (cfr. S.sez. 5.1.3, (β)), scrivendo la (1) per ogni poligono di π (orientato congruentemente a Σ), sommando le equazioni risultanti (e tenendo conto, nel far ciò, del fatto che i contributi dei loro 2ⁱ membri si riducono a quelli dei lati del contorno di π , una spezzata chiusa congruentemente orientata), e infine passando al limite per $\pi \rightarrow \Sigma$ (cioè per δ – massimo diametro dei poligoni di π – tendente a zero), mentre π *permane nella classe ammissibile*. §

§5. Sotto le menzionate condizioni, la (2) vale per qualunque superficie Σ come descritta al §4, e per qualunque campo v di classe C^{2*} dato in un suo intorno. Segue che se $\Sigma^{(1)}$ e $\Sigma^{(2)}$ sono due tali superfici con lo stesso bordo C (congruentemente orientate), e v un campo di classe C^{2*} in un aperto connesso che le include entrambe, risulta

$$(3) \quad \int_{\Sigma^{(1)}}(N \cdot \text{rot}v)(x)d\Sigma^{(1)} = \int_{\Sigma^{(2)}}(N \cdot \text{rot}v)(x)d\Sigma^{(2)}.$$

In generale, un integrale del tipo $\int_{\Sigma}(N \cdot w)(x)d\Sigma$, ove Σ è una superficie come descritta al §4 e w è un campo vettoriale continuo dato su Σ , si dice **flusso di w attraverso Σ , nel verso di N** . È chiaro che invertendo N il flusso di w cambia segno. Se w (continuo) è dato in U (aperto di R^3) contenente Σ di bordo C , in generale il suo flusso attraverso Σ varia quando Σ varia nella famiglia delle analoghe

⁶ È questo il prototipo delle superfici non orientabili immerse in R^3 . Per realizzarlo, si pensi ad un nastro standard omeomorfo a $I \times I$; utilizzando la sua deformabilità in R^3 , se ne ruoti una estremità di 180° rispetto all'altra, e si incolli l'estremità ruotata alla prima. Non occorre che il nastro così ritorto (una sola volta!) sia privo di nodi. È immediato constatare che il versore normale al nastro di Möbius, trascinato ad es. lungo la sua linea mediana fino a ritornare al punto di partenza, risulta invertito rispetto al suo orientamento iniziale.

⁷ Con il cavatappi orientato (dal manico alla punta) come N , il senso di rotazione per farlo penetrare deve essere quello con cui si percorre C seguendo τ .

⁸ In effetti, a $N \cdot \text{rot}v$ contribuisce soltanto il componente tangenziale su Σ di v , e lo stesso è vero ovviamente per $\tau \cdot v$. In una generica carta locale, la componente di $\text{rot}v$ su N è proporzionale a $v_{2/1} - v_{1/2}$, $v_{i/j}$ ($i, j = 1, 2$) essendo le componenti del 2-tensore derivato di v in quella carta.

superfici bordate da C e incluse in U ; ma se w è C^1 e solenoidale in U , il suo flusso è lo stesso per ogni Σ di quella famiglia. Questo succede in particolare se w è il rotore di un campo $v \in C^{2*}(U)$. §
 §6. Sia $x = \varphi(l)$ la rappresentazione parametrica di una curva C 1-embedded in $\mathbb{R}^{n \geq 2}$, $l \in (a, b)$ con $a < b$, in cui come parametro l sia stata scelta la lunghezza di C , quindi con $|d\varphi/dl|(l)$ identicamente uguale a 1 (per la definizione di $|d\varphi/dl|(l)$, cfr. (5.3.1, (α))). Inoltre φ sia definita per continuità anche negli estremi di (a, b) , posto che i corrispondenti limiti esistano finiti. Le componenti $\tau^i = \tau^i(l)$ del versore tangente a C (orientata) coincidono con $d\varphi^i/dl(l)$ in (a, b) , e $b-a$ è la lunghezza di C . Sia $w = w(l)$ un campo vettoriale continuo dato lungo C . L'integrale $\int_a^b (\tau \cdot w)(l) dl$ si dice **integrale** di w **lungo** C , **orientata come** τ . Se in particolare la curva C è chiusa, cioè se $\varphi(a) = \varphi(b)$ (questo non è stato escluso nella sua definizione), il precedente integrale si dice piuttosto **circuitazione** (o **circolazione**) di w **lungo il ciclo** (orientato) C , e C stesso si denota preferibilmente con un simbolo più specifico, ad es. Γ . Si supponga ora che w sia il gradiente di uno scalare g di classe C^1 in un intorno (aperto, n -dim) di C , cioè che

$$(4) \quad w_i(l) = \partial g / \partial x^i(x = \varphi(l)).$$

Sottintendendo la somma sull'indice ripetuto, l'integrale di w lungo C (orientata) diventa allora

$$(5) \quad \int_a^b (\partial g / \partial x^i)(x = \varphi(l)) (d\varphi^i/dl)(l) dl = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)),$$

e dunque non dipende dai valori di φ in (a, b) , ma soltanto dai valori-limite agli estremi $A =: \varphi(a)$ e $B =: \varphi(b)$. Si noti che il precedente integrale è lineare in w ; vale a dire, se fermo restando tutto il resto è $w = \alpha u + \beta v$, dove u e v sono gradienti di scalari h, k di $CdC 1$ in intorni aperti di C , e α, β sono costanti, l'integrale è dato dalla (5) con $\alpha h + \beta k$ in luogo di g . Altrettanto evidente è che se l'orientamento di C viene invertito l'integrale cambia segno. Se in particolare $A = B$, la circuitazione di w lungo il ciclo $C \equiv \Gamma$ è nulla. Si conclude così che «la circolazione lungo qualsiasi ciclo di qualsiasi campo vettoriale gradiente di uno scalare di $CdC 1$ in un intorno aperto del ciclo è nulla.» §

§7. Un teorema in certo senso inverso del precedente si formula come segue. Fissiamo una volta per tutte un punto A di un aperto $X^\circ \subset \mathbb{R}^n$ *semplicemente connesso*, e sia C una curva $x = \varphi(l)$ come quella definita in §6, inclusa in X° , con primo estremo $A = \varphi(a)$ e secondo estremo $B = \varphi(b) \in X^\circ$. Sia poi w un campo vettoriale $C(X^\circ)$ per il quale le $\partial w_i / \partial x^j \forall (i \neq j)$, esistano continue in X° , ivi soddisfacendo l'uguaglianza

$$(6) \quad \partial w_i / \partial x^j = \partial w_j / \partial x^i.$$

A queste condizioni (cfr. teorema di Frobenius, S.sez. 4.5.2) esiste una soluzione $g \in C^{2*}(X^\circ)$ unicamente determinata a meno di una costante additiva, della EDP

$$(7) \quad w(x) = \text{grad}g(x).^9$$

Siamo così nel caso del §6, e concludiamo che l'integrale lungo C di w tra A e x vale $g(x) - g(A)$; come è ovvio, la costante additiva incorporata in g non influenza il valore di questo integrale. Un campo vettoriale w come quello sopra descritto (cioè $C(X^\circ)$, con le $\partial w_i / \partial x^j \quad \forall (i \neq j)$ definite e continue in X° e soddisfacenti la (6)) si dice **irrotazionale in X°** . Le soluzioni g della (7), che differiscono una dall'altra per una costante additiva, si dicono **potenziali del campo w** . Possiamo quindi asserire che «per un campo irrotazionale definito in un aperto semplicemente connesso l'integrale lungo una curva arbitraria 1-embedded in esso tra un punto fisso A e un punto variabile x è uguale alla differenza tra il valore di un suo potenziale in x e in A . Se in particolare la curva è un ciclo, l'integrale è nullo.» §

§8. Se nelle condizioni previste in §7 si rimuove la restrizione che l'aperto X° sia *semplicemente* connesso (restando comunque connesso, o meglio pathwise-connesso, vedi App. Gen. B), esistono cicli di X° , diciamo basati in $A \in X^\circ$, lungo i quali la circolazione di w (da pensare sempre come irrotazionale, senza ricordarlo volta per volta) non è nulla *per ogni* w . In questo caso non è più possibile pensare ad una soluzione della (7) che sia una *funzione* di x , se non in senso locale. Ricordando la nozione di coppia di cicli omotopici in Topologia (v. App. Gen. B), si può ora dire che due cicli basati in A sono omotopici sse la circolazione di w lungo di essi è la stessa *per ogni* w ; in particolare questo individua la classe omotopica banale se il valore della circolazione in oggetto è zero *per ogni* w .

I cicli non banali di X° possono essere “impediti” modificando X per mezzo di $m \geq 1$ convenienti barriere $(n-1)$ -dim di classe C^1 , da pensare come aggiunte al contorno di X . Il dominio X così modificato, diciamolo X_* , è per definizione semplicemente connesso ed ha in generale un contorno C^1 *a pezzi*. Una funzione g può allora essere definita in $X^{*\circ}$ (parte aperta di X_*) nel modo usuale, per ogni w in X° . Avendo supposto anche A in $X^{*\circ}$, scriviamo g_* per il potenziale di w così definito in $X^{*\circ}$ a meno di un addendo arbitrario $-g_*(A)$. Le classi di cicli non banali sono sempre in numero pari $2m$, perché ad ogni ciclo non banale si associa lo stesso ciclo con l'orientamento opposto. Siano $\pm\Gamma_1, \dots, \pm\Gamma_m$ cicli rappresentanti delle $2m$ classi non banali, intendendosi che $-\Gamma$ sia il ciclo che si ottiene da Γ invertendone l'orientamento. Se togliamo le m barriere, l'integrale di w lungo una curva (di classe C^1) arbitraria da $A \in X^{*\circ}$ a $x \in X^{*\circ}$ può rappresentarsi come somma di

⁹ Una possibile espressione di g è $g(x) = \int_{\lambda=a^1}^{x^1} w_1(\lambda, x^2, \dots, x^n) d\lambda + \int_{\lambda=a^2}^{x^2} w_2(a^1, \lambda, \dots, x^n) d\lambda + \dots + \int_{\lambda=a^n}^{x^n} w_n(a^1, a^2, \dots, a^{n-1}, \lambda) d\lambda + c$, dove a^1, a^2, \dots, a^n, c sono costanti arbitrarie. Se identifichiamo le $a^{1 \leq i \leq n}$ con le coordinate di A , $c = g(A)$, e $g(x) - g(A)$ è la somma dei soprascritti integrali 1-dimensionali. Ciò corrisponde ad integrare la $w_i(\varphi(I)) d\varphi^i/dI(I)$ tra A e x lungo la spezzata con vertici di coordinate $\langle a^1, a^2, \dots, a^n \rangle, \langle a^1, \dots, a^{n-1}, x^n \rangle, \dots, \langle a^1, x^2, \dots, x^n \rangle, \langle x^1, x^2, \dots, x^n \rangle$, e $g(x) - g(A) = f(x)$. (Il fatto che in realtà tale spezzata non sia C^1 nei suoi vertici non ha importanza agli effetti del risultato.)

$g^*(x) - g^*(A)$ e di una combinazione lineare con coefficienti interi ≥ 0 delle circolazioni di w , $\pm\gamma_1, \dots, \pm\gamma_m$ (lungo $\pm\Gamma_1, \dots, \pm\Gamma_m$); o ciò che è lo stesso, di una combinazione lineare con coefficienti interi delle circolazioni $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ (lungo $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$). Una siffatta “funzione”¹⁰ del posto si dice **polidroma**. Il lettore avrà certamente notato l’analogia tra la situazione descritta e quella che si ha quando l’argomento di una funzione analitica percorre un ciclo attorno ad un suo punto di diramazione nel piano complesso. §

Limitiamo ai cenni dati in §8 la discussione del problema degli integrali di linea di campi vettoriali irrotazionali in domini non semplicemente connessi, le cui applicazioni all’idrodinamica (fluidi incompressibili) e all’elettromagnetismo sono estremamente importanti. L’argomento è assai vasto, e si inserisce in quella che modernamente si chiama “teoria omologica”; nella teoria cioè di certe strutture algebriche associate con la topologia di regioni geometriche astratte (oltre a quelle immerse in \mathbb{R}^n).

5.2.3) ESEMPI ED APPLICAZIONI II (TEORIA DEL POTENZIALE NEWTONIANO)

In un certo senso, le **teorie del potenziale** capovolgono la logica del (5.2.2, §7), partendo dalla considerazione di funzioni (scalari, vettoriali ecc.) definite e abbastanza regolari in $\mathbb{R}^n \setminus \partial X$ (e possibilmente ivi polidrome se $X \subset \mathbb{R}^m$ non è semplicemente connesso), per poi interpretarle come potenziali di corrispondenti campi (vettoriali, 2-tensoriali ecc.). L’idea è che queste funzioni possano essere proficuamente impiegate nello studio o nella soluzione di certi problemi differenziali o integrali. Nel seguito di questa sottosezione ci occuperemo di una particolare teoria del potenziale, quella del potenziale newtoniano, esaminandone alcuni tra i punti più importanti. La **teoria del potenziale newtoniano** – o come sarebbe più appropriato nominarla, del potenziale **coulombiano**, dal momento che le relative densità *non* sono supposte necessariamente ≥ 0 – si limita a considerare come potenziali certe specifiche *funzioni* (monodrome anche quando il dominio di definizione X non è semplicemente connesso) delle quali esamineremo qui appresso i casi canonici. Nel seguito, sottintenderemo l’attributo “newtoniano” (come si è detto, non del tutto appropriato) preferendo parlare di potenziale tout court.

§1. Il caso prototipo è quello della funzione (scalare) definita dalla (per $n > 2$):

$$(1) \quad g_{n>2}(\xi \in \mathbb{R}^n) =: \int_X \rho(x) |x - \xi|^{2-n} d_x X,$$

¹⁰ Ricordiamo, se fosse necessario, che il solo tipo di funzione ammessa nella matematica moderna è quella di funzione ad un sol valore.

dove X è un dominio compatto di \mathbb{R}^n , ρ è uno scalare continuo in X , e per maggior chiarezza si è scritto d_x in luogo di d per evidenziare che l'integrazione è fatta rispetto a x . L'integrale nella (1) è manifestamente improprio se ξ è in X , perché $|x-\xi|^{2-n}$ è singolare per $x = \xi$. Quindi a prima vista $g_{n>2}$ potrebbe non essere definita per ξ in X ; ma (si dimostra) non è così, trattandosi di una **singularità integrabile**.¹¹ $g_{n>2}$ si dice **potenziale (volumico) di X (n-dim) con densità ρ** . Sempre per $n > 2$, due altre funzioni potenziali (scalari) altrettanto importanti sono le

$$(2) \quad h_{n>2}(\xi \in \mathbb{R}^n) =: \int_S \mu(s) |s-\xi|^{2-n} d_s S,$$

e rispettivamente

$$(3) \quad k_{n>2}(\xi \in \mathbb{R}^n) =: \int_S \nu(s) N(s) \cdot \nabla_s (|s-\xi|^{2-n}) d_s S,$$

dove S è la frontiera ∂X del precedente X , supposta di classe C^1 , $N(s)$ è il versore normale a S in $s \in S$, orientato verso l'esterno, μ e ν sono scalari continui in S , e $\nabla_s (|s-\xi|^{2-n})$ è un'abbreviazione per $\lim_{x \rightarrow s-} \nabla_x (|x-\xi|^{2-n})$, (qui $x \rightarrow s-$ significa che x tende a $s \in S$ dall'interno di S ; ma se $\xi \notin S$, è irrilevante che x tenda a s dall'interno o dall'esterno). Anche gli integrali nelle (2) e (3) si dimostrano esistere se $\xi \in S$, perché le relative integrande hanno ivi singolarità integrabili. Le $h_{n>2}$ e $k_{n>2}$ si dicono **potenziale di strato semplice**, e rispettivamente **di strato doppio**, di S (($n-1$)-dim), **con densità μ** e rispettivamente **con densità ν** . Le definizioni di $g_{n>2}$, $h_{n>2}$, $k_{n>2}$ si estendono al caso $n = 2$ sostituendo a $|x-\xi|^{2-n}$ (o a $|s-\xi|^{2-n}$) la funzione – anch'essa con singolarità integrabile in ξ – $\ln(|x-\xi|^{-1})$ (o rispettivamente $\ln(|s-\xi|^{-1})$).¹²

Buona parte della teoria del potenziale (newtoniano/coulombiano) consiste nello studio delle funzioni g_n , h_n , k_n (per $n \geq 2$) e delle loro derivate prime e seconde. Enunciamo ai prossimi punti (a÷d) i teoremi fondamentali, che sono tra i più importanti della fisica matematica. Le loro dimostrazioni sono talvolta laboriose, pur facendo uso esclusivamente di strumenti cosiddetti “classici” dell'Analisi.¹³

(a) Per $n \geq 2$, $g_n(\xi)$ esiste continua in tutto \mathbb{R}^n , e tende a zero come $|\xi|^{2-n}$ per $|\xi| \rightarrow \infty$ ($n > 2$) o come $\ln(|\xi|^{-1})$ ($n = 2$). Più precisamente, posto (per $n > 2$) $(n-2)G_{n-1}E_n(|t|) =: |t|^{2-n}$, dove G_{n-1} è la J -misura

¹¹ Più precisamente, si dimostra che $\int_X \rho(x) |x-\xi|^{-\beta} d_x X$ (ρ continua) converge per ξ in X se $0 < \beta < n$, quindi certamente per $\beta = n-2$. Le singolarità integrabili (di una data funzione integranda, come di $\rho(x) |x-\xi|^{-\beta}$) si dicono anche **singularità deboli**.

¹² Fisicamente, g_3 [h_3] si interpreta come potenziale elettrostatico (o anche gravitazionale se $\rho \geq 0$ [se $\mu \geq 0$]), esercitato nello spazio \mathbb{R}^3 dalla carica elettrica (o anche dalla massa se $\rho \geq 0$ [se $\mu \geq 0$]), $\int_X \rho(x) dX$ [$\int_S \mu(s) dS$] distribuita in X [in S] con densità ρ [μ]. k_3 non ha invece una interpretazione fisica diretta nell'ambito della gravitazione, ma soltanto in quello dell'elettrostatica.

¹³ Tra i trattati più noti che le riportano segnaliamo quello di O.D. Kellogg (1929), e quello più recente di S.G. Mikhlin (1970), vedi Bibl. Gen. (A). In pratica, l'attributo “classici” sta qui a significare “che prescindono dalla teoria delle distribuzioni”.

della sfera $(n-1)$ -dim di raggio 1 (vedi S.sez. 5.1.2), e (per $n = 2$) $2\pi E_2(|t|) =: \ln(|t|^{-1})$, risulta $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} [g_{n \geq 2}(\xi)/E_{n \geq 2}(|\xi|)] = \int_X \rho(x) dX$. #

(b) Per $n \geq 2$, $\nabla_\xi g_n(\xi) (\equiv \nabla g_n(\xi))$ esiste continua in tutto R^n , ed è uguale allo stesso integrale differenziato sotto il segno. Anche ∇g_n tende a zero (lasciamo al lettore di valutare come) per $|\xi| \rightarrow \infty$. #

(c) Per $n \geq 2$, e se ρ è (uniformemente) lipschitziana in X ¹⁴ (condizione sufficiente), $\nabla \nabla g_n(\xi)$ è continua in $R^n \setminus \partial X \equiv \mathbf{C}\partial X$, e ha prolungamenti per continuità unici su ∂X (generalmente diversi dall'interno e dall'esterno). Inoltre in $\mathbf{C}\partial X$ vale la formula (per $n > 2$):

$$(4_{n>2}) \quad \nabla \nabla g_n(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{X \setminus \mathcal{B}(\xi, \varepsilon)} \rho(x) \nabla_\xi \nabla_\xi (|\xi - x|^{2-n}) d_x X - \chi(X^\circ) ((n-2)/n) G_{n-1} \rho(\xi) \delta;$$

e per $n = 2$, quella – la diremo (4₂) – che da essa si ottiene sostituendovi $|x - \xi|^{2-n}$ con $\ln(|x - \xi|^{-1})$, e $((n-2)/n) G_{n-1}$ con π (oltre a g_n con g_2). Nella (4_{n ≥ 2}), $\mathcal{B}(\xi, \varepsilon)$ è la palla n -dim di centro ξ e raggio ε (abbastanza piccolo affinché $\mathcal{B}(\xi, \varepsilon)$ sia inclusa, a seconda del caso, in X° o in $\mathbf{C}X$), $\chi(X^\circ)$ è la funzione caratteristica di X° , e δ è la delta di Kronecker con gli stessi indici di $\nabla_\xi \nabla_\xi$. Per la continuità in $\mathbf{C}\partial X$ delle derivate seconde miste di $g_{n \geq 2}$, queste devono essere simmetriche rispetto ai due indici in forza del teorema di Schwarz; e questo è manifestamente confermato dalle (4_{n ≥ 2}). Conseguenze quasi immediate della (4_{n ≥ 2}) sono poi, per $\xi \in X^\circ$, e sottintendendo che come nelle (4_{n ≥ 2}) ∇ significhi ∇_ξ ,

$$(5_{n>2}) \quad \nabla^2 g_n(\xi) = -(n-2) G_{n-1} \rho(\xi) \quad (n > 2),$$

$$(5_2) \quad \nabla^2 g_2(\xi) = -2\pi \rho(\xi),$$

(dove ∇^2 è al solito l'operatore di Laplace); e per $\xi \in \mathbf{C}X$,

$$(6_{n \geq 2}) \quad \nabla^2 g_n(\xi) = 0. \quad \# \quad ^{15}$$

¹⁴ Una funzione (diciamo, reale) f definita in $A \subset R^n$ si dice ivi (uniformemente) (C, α) -lipschitziana se esistono due costanti $C > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ per le quali $|f(x') - f(x)| \leq C|x' - x|^\alpha$ per ogni $x, x' \in A$. Se questo è il caso, si scrive $f \in (C, \alpha)\text{-Lip}(A)$, o semplicemente $f \in \text{Lip}(A)$ se le costanti (C, α) si sottintendono o non interessano. Si noti che $(C, \alpha)\text{-Lip} \Rightarrow (C, \alpha')\text{-Lip}$ se $\alpha' < \alpha$. È chiaro che la richiesta $f \in \text{Lip}(A)$ è *più forte* della $f \in C(A)$. Se A è aperto, $f \in (C, 1)\text{-Lip}(A)$ se le sue derivate prime esistono *limitate* in A . f si dice (C, α) -lipschitziana in $x \in A$ se la precedente definizione vale per un dato $x \in A$ e $\forall(x')$ in A , con le $(C, \alpha) \equiv (C_x, \alpha_x)$ che dipendono allora in generale da x . Anche questo carattere lipschitziano “in x ” è più forte della continuità “in x ”. La α , o la α_x , si dice spesso **indice** del carattere lipschitziano (globale o risp. locale) di f . Le stesse definizioni si possono infine estendere in modo ovvio a funzioni del tipo $f: X \rightarrow Y$, dove X e Y sono spazi metrici.

¹⁵ I fisici teorici tendono ad interpretare le (5,6) nel senso che $(^*_{n>2}) \nabla_x^2 |x - x'|^{2-n} = -(n-2) G_{n-1} \delta_n(x - x')$, e $(^*_2) \nabla_x^2 \ln|x - x'|^{-1} = -2\pi \delta_2(x - x')$, dove $\delta_{n \geq 2}(x - x')$ è la cosiddetta δ di Dirac **n -dimensionale**, una pseudo-funzione con le (contraddittorie) proprietà (i) “ $\delta(x) = 0$ se $x \neq 0$ ” e (ii) “ $\int_D \delta(x) dD = 1$ per ogni dominio n -dim $D \subset R^n$ contenente al suo interno il punto $x = 0$ ”. (Nelle precedenti $(^*_{n \geq 2})$, ∇_x^2 significa che il laplaciano è preso rispetto a x ; ma questa precauzione è superflua, perché entrambi i membri sono *pari*, per la definizione di δ , rispetto a $x - x'$.) Se le (5,6) fossero una conseguenza delle $(^*_{n \geq 2})$ attraverso una relazione formale del tipo $\int_X \rho(x) \delta_n(x - \xi) dX = \rho(\xi)$, esse varrebbero anche se ρ fosse semplicemente $C(X)$ (e non $\text{Lip}(X)$); ma questa condizione non è sufficiente a giustificarle. In effetti, pensare di ridurre la teoria delle distribuzioni ad innocenti manipolazioni formali sulle pseudo-funzioni di Dirac può

(d) $h_{n \geq 2}$ e $k_{n \geq 2}$ (vedi le (2, 3)) sono definite e continue con le loro derivate di ogni ordine (che possono essere spostate sotto il segno) in \mathbf{CS} , ove sono anche *armoniche*. L'analisi del caso in cui $\xi \in S$ è più delicato, e su di essa sorvoleremo. Le proprietà asintotiche ($|\xi| \rightarrow \infty$) di $h_{n \geq 2}$ e $k_{n \geq 2}$ sono simili a quelle di $g_{n \geq 2}$: precisamente, $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} h_n(\xi)/E_n(|\xi|) = \int_S \mu(s) dS$, e $G_{n-1} \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} k_n(\xi) |\xi|^{n-1} = \int_S v(s) dS$. Quanto abbiamo riportato non esaurisce le proprietà di interesse dei tre potenziali $g_{n \geq 2}$, $h_{n \geq 2}$ e $k_{n \geq 2}$, ma è sufficiente ai fini presenti. # §

§2. Nel seguito scriveremo di norma ∇ per grad, quindi $\nabla \cdot$ per div, $\nabla \times$ per rot, $\nabla \cdot \nabla \equiv \nabla^2$ per divgrad, e via dicendo. Supponiamo che il campo v nella (5.2.1, 7) sia del tipo $f \nabla f$ per una certa $f \in C^1(X) \cap C^2(X^\circ)$. Allora la (5.2.1, 7) si scrive come $\int_X (\nabla \cdot (f \nabla f))(x) dX = \int_S (f \partial_N f)(s) dS$, dove ∂_N denota il limite dall'interno della derivata direzionale secondo N , cioè $\partial_N f(s)$ sta per $N(s) \cdot \lim_{x \rightarrow s^-} \nabla f(x)$. Poiché $\nabla \cdot (f \nabla f) = f \nabla^2 f + \nabla f \cdot \nabla f$, se f è armonica ($\nabla^2 f = 0$), oltre alla $\int_S \partial_N f(s) dS = 0$ ($\equiv \partial_N f$ ha media nulla su S) avremo:

$$(7) \quad \int_X (\nabla f \cdot \nabla f)(x) dX = \int_S (f \partial_N f)(s) dS.$$

La (7) mostra che la sola funzione armonica f del tipo considerato che sia nulla su S è la funzione nulla in tutto X ; e similmente, che la sola funzione armonica con derivata normale nulla su S (questa seconda condizione soddisfa banalmente il vincolo $\int_S \partial_N f(s) dS = 0$) è una costante in X . Infatti in entrambi i casi il 2° membro della (7) è nullo, quindi $\nabla f = 0$, ossia $f = \text{cost}$ in X° ; nel primo caso è poi anche $f = 0$ su S , e quindi $f = 0$ in X per la continuità. Questo risultato offre una semplice dimostrazione dell'unicità di una (possibile) soluzione dell'**equazione di Poisson** in φ :

$$(8_1) \quad \nabla^2 \varphi = \rho,$$

in X , con $\rho \in C(X)$ e $\varphi \in C^2(X^\circ) \cap C(X)$, avendo prescritto φ su S secondo la

$$(8_2) \quad \varphi|_S = \phi$$

con $\phi \in C(S)$; oppure, avendo prescritto $\partial_N \varphi$ su S secondo la

$$(8_3) \quad \partial_N \varphi|_S = \psi$$

essere pericolosamente fuorviante, nonostante la sua attraente semplicità. Esiste ormai una vasta trattatistica su questa teoria, che fu iniziata su base intuitiva da Heaviside (Oliver, 1850-1925) e da Dirac (Paul, 1902-1984), e fu definitivamente elaborata da Schwartz (Laurent, 1915-2002) nella sua monografia "Théorie des distributions", Hermann, 1951. Scrive Schwartz nella introduzione al suo libro: «Depuis l'introduction par Dirac de la fameuse fonction $\delta(x)$, qui serait nulle partout sauf pour $x = 0$ et serait infinie pour $x = 0$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$, les formules du calcul symbolique sont devenues encore plus inacceptables pour la rigueur des mathématiciens. Ecrire que la fonction d'Heaviside $Y(x)$ égale à 0 pour $x < 0$ et à 1 pour $x \geq 0$ a pour dérivée la fonction de Dirac $\delta(x)$ dont la définition même est mathématiquement contradictoire, et parler des dérivées $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ... de cette fonction dénuée d'existence réelle, c'est dépasser les limites qui nous sont permises. Comme expliquer les succès de ces méthodes ?» La questione posta da Schwartz trova risposta nel suo trattato e negli sviluppi che da esso hanno tratto origine. Oltre all'opera di Schwartz, il testo di riferimento resta ancor oggi quello di I.M. Gel'fand e G.E. Shilov, "Generalized Functions", 5 vols, engl. transl. Acad. Press, 1968.

con $\psi \in C(S)$ e sotto il vincolo $\int_S \psi(s) dS = \int_X \rho(x) dX$. Per provare l'unicità di ϕ , basta supporre che esistano due soluzioni $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$, considerare la loro differenza $\Delta\phi =: \phi^{(2)} - \phi^{(1)}$ e rifarsi al problema omogeneo precedente identificando $\Delta\phi$ con f . Il problema (8₁, 8₂) si dice **di Dirichlet interno** (P. Dirichlet, 1805-1859), mentre il problema (8₁, 8₃) si dice **di Neumann interno** (C. Neumann, 1832-1925). Se dunque una soluzione del problema (interno) di Dirichlet [di Neumann] esiste come descritta, quella soluzione è unica. I due problemi nominati (nonché le loro versioni “esterne”, che prenderemo in esame nell'App. 5.A) sono prototipi dei cosiddetti **problemi con valori al contorno** (“boundary-value problems”) per operatori differenziali lineari ellittici del 2° ordine. Le loro generalizzazioni si spingono in molte e diverse direzioni, e la loro teoria riempie ormai interi trattati, con forti collegamenti alla teoria delle **equazioni integrali lineari** (di Fredholm).¹⁶ Come ben prevedibile, l'aspetto più difficile dello studio di questi problemi riguarda l'esistenza di loro possibili soluzioni. §

§3. Un altro problema di grande importanza applicativa che è naturale menzionare in questa sottosezione è quello che viene talvolta detto **del rotore-divergenza**, la cui versione omogenea (interna, per domini semplicemente connessi) si formula come segue. Per $n = 3$, e per il dominio compatto semplicemente connesso $X \subset \mathbb{R}^3$ con frontiera S di classe C^1 , si ricerca un campo vettoriale $v = v(x) \in C^1(X)$ per il quale

$$(9_1') \quad \nabla \times v = 0,$$

$$(9_2') \quad \nabla \cdot v = 0$$

in X° , sotto convenienti condizioni su S . In forza della (9₁'), v deve essere gradiente di uno scalare $\phi \in C^{2*}(X^\circ)$; e quindi, in forza della (9₂'), ϕ deve essere armonica in X° . Per un tale ϕ , devono essere soddisfatte la condizione (i) “ $\int_S \partial_N \phi(s) dS = 0$ ” e la condizione (ii) “ $\int_0^L (\tau \cdot \nabla \phi)|_C(l) dl$ non dipende dalla curva $C \subset S$ di classe C^1 (o possibilmente di classe C^1 a tratti) lungo la quale l'integrale è valutato, dal punto iniziale $a = C(0)$ al punto finale $s = C(L)$, essendo quindi uguale a $\phi(s) - \phi(a)$ ”. Una formulazione equivalente di (ii), più maneggevole, è (iibis) “la circuitazione di $\nabla \phi$ lungo un arbitrario ciclo $\Gamma \subset S$, di classe C^1 , è nulla”. Riferendoci per cominciare alla condizione (i), potremo prescrivere v_N entro il vincolo “ $\int_S v_N(s) dS = 0$ ”, e risolvere un problema omogeneo di Neumann per ϕ , imponendo $\partial_N \phi = v_N$. Se esiste, la soluzione è unica a meno di una costante additiva che non influenza $v = \nabla \phi$; se poi $v_N \equiv 0$, allora vi è una e una sola soluzione $v \equiv 0$ in X .

¹⁶ E.I. Fredholm (1866-1927), in Acta Math., XXVII, 365-90, (1903). Tra i trattati classici che si occupano specificamente di problemi con valori al contorno per operatori lineari ellittici (inclusa la connessa teoria delle equazioni di Fredholm) segnaliamo in particolare quello (monumentale, ma non per dimensioni) di C. Miranda, quello di O.A. Ladyzhenskaya e N.N. Uralt'seva, quello di S.G. Mikhlin (1), quello di A.V. Bitsadze, vedi Bibliogr. Gen. (1), ecc.

Passando alla condizione (iibis), una diversa possibilità è quella di prescrivere v_τ (comp. tangenziale di v) entro il vincolo che esso sia un gradiente di superficie; cioè, entro il vincolo di avere circuitazione nulla lungo un arbitrario ciclo Γ ($\subset S$) di classe C^1 . Il potenziale di superficie di v_τ è così unicamente determinato a meno di una costante additiva, e ciò dà origine ad un problema omogeneo di Dirichlet per ϕ . Se esiste, la soluzione è unica a meno della costante additiva incorporata in ϕ , che comunque non influenza il suo gradiente v . Se poi $v_\tau \equiv 0$, $\phi = \text{cost}$ in X , e vi è una e una sola soluzione $v \equiv 0$ in X .

Questi risultati offrono una semplice dimostrazione della unicità della soluzione del seguente problema rot-div non omogeneo per $v \in C^1(X)$:

$$(9_1) \quad \nabla \times v = \omega,$$

$$(9_2) \quad \nabla \cdot v = \theta,$$

dove ω e θ sono un campo vettoriale, e rispettivamente scalare, $\in C(X^\circ)$, e quando v_N , oppure v_τ , siano convenientemente assegnati su S . La trattazione del problema (9) richiede tuttavia una condizione più forte su v , e cioè che $v \in C^{2*}(X^\circ)$ (o per semplicità che $v \in C^2(X^\circ)$), per modo che $\nabla \cdot \nabla \times v \equiv 0$ in X . Allora $\nabla \cdot \omega$ deve esistere ed essere nulla in X° . Questa è una condizione di compatibilità sul dato ω . Per il teorema della divergenza, la prescrizione di v_N dovrà farsi sotto il vincolo (I) “ $\int_S v_N(s) dS = \int_X \theta(x) dX$ ”, e il teorema di unicità scende immediatamente identificando la differenza Δv tra due possibili soluzioni con la soluzione dell’associato problema rot-div omogeneo (vedi le (9’)) col risultato che $\Delta v_N \equiv 0$. Passando alla possibilità di prescrivere v_τ , questa dovrà soddisfare il vincolo che la sua circuitazione lungo un arbitrario ciclo Γ ($\subset S$) di classe C^1 sia uguale al flusso di ω attraverso la porzione di S bordata da Γ : diciamo, scrivendo Σ per la porzione di S bordata da Γ , p per il punto corrente su Γ e s per quello su Σ , sotto il vincolo (II) “ $\int_\Gamma (v \cdot \tau)(p) d\Gamma = \int_\Sigma \omega_N(s) d\Sigma$ (ove τ e N sono orientati in modo congruente) per ogni ciclo Γ di classe C^1 di S ”.¹⁷ Il teorema di unicità per le (9) scende ancora identificando la differenza Δv tra due possibili soluzioni con la soluzione dell’associato problema rot-div omogeneo, col risultato che $\Delta v_\tau \equiv 0$. In conclusione, l’unicità di una possibile soluzione delle (9) è dimostrata per v_N dato sotto il vincolo (I) oppure per v_τ dato sotto il vincolo (II). §

§4. Esiste un nutrito insieme di identità integro-differenziali tutte derivate dal teorema di GO o da sue conseguenze dirette, e che coinvolgono simultaneamente *due* campi scalari o vettoriali. Esse

¹⁷ Ovviamente ci sono due tali porzioni Σ_1 e Σ_2 di S , e il flusso di ω attraverso l’una è uguale e opposto a quello attraverso l’altra perché ω è solenoidale; ma l’orientamento del bordo di Σ_1 è opposto a quello del bordo di Σ_2 , e il vincolo è rispettato per una delle porzioni sse è rispettato per l’altra.

vanno sotto il nome, in verità un po' generico, di **identità di Green**.¹⁸ Ci limiteremo a ricordarne due: una identità “scalare” del 2° ordine (a), e una identità “vettoriale” del 1° ordine (b).

(a) Ponendo nel teorema della divergenza (5.2.1, 7) $v = \varphi \nabla \psi$ per due scalari φ, ψ entrambi $\in C^2(X^\circ) \cap C^1(X)$, otteniamo:

$$(10) \quad \int_X (\varphi \nabla^2 \psi)(x) dX = - \int_X (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi)(x) dX + \int_S (\varphi \partial_N \psi)(s) dS.$$

Scambiando tra loro φ con ψ e sottraendo le due equazioni membro a membro, risulta

$$(11) \quad \int_X (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi)(x) dX = \int_S (\varphi \partial_N \psi - \psi \partial_N \varphi)(s) dS,$$

che è detta **identità scalare di Green** (per ∇^2), indifferente allo scambio $\varphi \leftrightarrow \psi$. Evidentemente, la (11) vale per ogni dimensione n di X . #

(b) Una **identità vettoriale di Green del 1° ordine** si ottiene dalle (5.2.1, 7) e (5.2.1, 6) come segue. Siano v, u due campi vettoriali entrambi $\in C^1(X^\circ) \cap C(X)$; ponendo nella (5.2.1, 7) la diade (2-tensore) vu in luogo di v , abbiamo

$$(12_1) \quad \int_X \nabla \cdot (vu)(x) dX = \int_S (v_N u)(s) dS;$$

e scambiandovi v con u :

$$(12_2) \quad \int_X \nabla \cdot (uv)(x) dX = \int_S (u_N v)(s) dS.$$

Ponendo poi nella (5.2.1, 6) il prodotto scalare $v \cdot u$ in luogo di f , risulta:

$$(12_3) \quad \int_X \nabla \cdot (v \cdot u)(x) dX = \int_S (N v \cdot u)(s) dS;$$

e infine, sottraendo la (12₃) dalla somma delle (12₁, 12₂):

$$(13) \quad \int_X [\nabla \cdot (vu) + \nabla \cdot (uv) - \nabla \cdot (v \cdot u)](x) dX = \int_S [v_N u + u_N v - N v \cdot u](s) dS \equiv \int_S [v_N u - u \times (N \times v)](s) dS.$$

Anche la (13) è simmetrica in v e u , e vale per generica dimensione n di X . Questa è la preannunciata identità vettoriale del 1° ordine. In dimensione 3, facendo uso della identità $v \cdot \nabla u + u \cdot \nabla v - \nabla \cdot (v \cdot u) + v \times (\nabla \times u) + u \times (\nabla \times v) = 0$ essa diventa:

$$(14) \quad \int_X [v \nabla \cdot u + u \nabla \cdot v - v \times (\nabla \times u) - u \times (\nabla \times v)](x) dX = \int_S [v_N u - u \times (N \times v)](s) dS,$$

dove l'integranda a 2° membro può equivalentemente scriversi $[u_N v - v \times (N \times u)](s)$. Se in particolare u (ad esempio) è gradiente di uno scalare $\phi \in C^2(X^\circ) \cap C^1(X)$ (in modo che $\nabla \times \nabla \phi \equiv 0$ in X°), la (14) implica la:

$$(14bis) \quad \int_X [v \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla v - \nabla \phi \times (\nabla \times v)](x) dX = \int_S [\nabla \phi v_N - \nabla \phi \times (N \times v)](s) dS,$$

un'identità “mista” del 1° ordine rispetto a v e del 2° ordine rispetto a ϕ . Esistono altre identità di tipo Green, in particolare una identità vettoriale del 2° ordine in u e v (per $n = 3$) che generalizza l'identità scalare (11), ma potremo qui trascurarle. §

¹⁸ G. Green, “Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism”, Nottingham, 1828.

§5. Dalla (11) o dalla (14bis) si ricavano due nuove identità, scalare o rispettivamente vettoriale, coinvolgenti un solo campo (scalare o vettoriale). Queste si ottengono identificando ψ (nella (11)), o rispettivamente ϕ (nelle (14bis)), con una specifica funzione di $x \in X^\circ$ con parametro $\xi \in X^\circ$. La scelta più proficua di questa funzione cade su $\psi = \psi(x, \xi) = \psi(|x - \xi|) =: |x - \xi|^{2-n}$ per $n > 2$ (o $\psi = \ln(|x - \xi|^{-1})$ per $n = 2$) nel primo caso, o su $\phi = \phi(x, \xi) = \phi(|x - \xi|) =: |x - \xi|^{-1}$ nel secondo. Allora le identità (11, 14bis) cessano di valere non essendo queste funzioni nemmeno continue in $x = \xi$. Per fissare le idee, consideriamo la (11) con $n > 2$. Per poter porre in essa $\psi = |x - \xi|^{2-n}$, riscriviamola sostituendo X con $X \setminus \mathcal{B}(\xi, \varepsilon)$, dove $\mathcal{B}(\xi, \varepsilon)$ è la solita (piccola) palla aperta di centro ξ e raggio ε . Sulla frontiera di questa, la sfera $(n-1)$ -dim $\Sigma(\xi, \varepsilon)$, è $\psi = \varepsilon^{2-n}$ e $\partial_N \psi = (n-2)\varepsilon^{1-n}$ (si tenga presente che N *entra* nella palla). Introdotto allora il vettore $\Omega =: (x - \xi)/\varepsilon$, che è normale unitario su $\Sigma(\xi, \varepsilon)$, otteniamo:

$$(15) \quad \int_{X \setminus \mathcal{B}(\xi, \varepsilon)} \nabla^2 \varphi(x) |x - \xi|^{2-n} d_x X = \int_S [\partial_N \varphi(s) |s - \xi|^{2-n} - \varphi(s) \partial_N (|s - \xi|^{2-n})] d_s S + \varepsilon \int_{\Sigma_1} \partial_N \varphi(\xi + \varepsilon \Omega) d\Sigma_1 - \\ - (n-2) \int_{\Sigma_1} \varphi(\xi + \varepsilon \Omega) d\Sigma_1,$$

dove per brevità abbiamo denotato con Σ_1 la sfera unitaria di centro 0, $\Sigma(0, 1)$. Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, l'integrale a 1° membro diventa $\int_X \nabla^2 \varphi(x) |x - \xi|^{2-n} d_x X$; mentre, a 2° membro, il primo integrale resta ovviamente invariato, il secondo integrale è limitato (perché $\partial_N \varphi$ è per ipotesi limitato in X) e quindi il suo prodotto per ε va a zero, e infine il terzo integrale converge a $G_{n-1} \varphi(\xi)$. In definitiva, abbiamo:

$$(16) \quad (n-2)G_{n-1} \varphi(\xi) = - \int_X \nabla^2 \varphi(x) |x - \xi|^{2-n} d_x X + \int_S [\partial_N \varphi(s) |s - \xi|^{2-n} - \varphi(s) \partial_N (|s - \xi|^{2-n})] d_s S.$$

Questa identità (16) si dice **rappresentazione integrale** (in X°) **del campo scalare** $\varphi \in C^1(X) \cap C^2(X^\circ)$; essa mostra che, a meno del fattore $(n-2)G_{n-1}$, $\varphi(\xi)$ è uguale alla somma del potenziale volumico di X con densità $-\nabla^2 \varphi$, del potenziale di strato semplice di S con densità $\partial_N \varphi$, e del potenziale di strato doppio di S con densità $-\varphi$. Prendendo il laplaciano ∇_ξ^2 della (16) per $\xi \in X^\circ$, e ricordando il (§1, d) (\equiv i potenziali di strato semplice e doppio sono armonici fuori di S), abbiamo:

$$(16bis) \quad -(n-2)G_{n-1} \nabla_\xi^2 \varphi(\xi) = \nabla_\xi^2 \int_X \nabla_x^2 \varphi(x) |x - \xi|^{2-n} d_x X.$$

Questo risultato è a prima vista disorientante a fronte della (5_{n>2}), perché sembra essere stato ricavato *senza* aver richiesto (condizione sufficiente) che la densità $\nabla_x^2 \varphi$ sia lipschitziana. Il punto è che *non* è permesso postulare l'esistenza di una soluzione della (8₁) in X° se ρ è ivi soltanto continua, e non $\text{Lip}(X^\circ)$. Viceversa, la (16bis) fornisce una prova di tale esistenza, e precisamente della soluzione particolare della (8₁) $\varphi_1(\xi) = -1/((n-2)G_{n-1}) \int_X \rho(x) |x - \xi|^{2-n} d_x X$, *sotto l'ipotesi che ρ sia $\text{Lip}(X^\circ)$* . La soluzione generale si ottiene aggiungendo a questa φ_1 una funzione armonica φ_0 , in

modo da soddisfare una condizione di Dirichlet o di Neumann imposta all'incognita su S . Se ad es. la condizione è del tipo Dirichlet, $\varphi|_S = \phi$, la soluzione si ottiene richiedendo che φ_0 soddisfi alla $\varphi_0|_S = \phi - \varphi_1|_S$. In definitiva il problema dell'esistenza di una soluzione delle (8) (con ρ Lip e condizione al contorno di Dirichlet o di Neumann, nel secondo caso sotto la condizione di compatibilità) è spostato su quello dell'esistenza di una soluzione del problema $(8_1, 8_2)$, o $(8_1, 8_3)$, in cui si faccia $\rho = 0$. Ulteriori informazioni sui problemi di Dirichlet e di Neumann (sia interni che esterni), e in particolare sul loro legame con la teoria delle equazioni di Fredholm, sono riportate nell' App. Spec. 5.A. §

§6. Facendo $\varphi = 1$ nella (16) abbiamo che $\int_S (\partial_N(|\xi-s|^{2-n})(s)) d_s S = -(n-2)G_{n-1}$ se ξ è all'interno di S . Questo fatto può essere facilmente verificato in modo diretto, ad es. prendendo per S una sfera di centro ξ e raggio arbitrario. È anche facile provare in modo diretto che lo stesso integrale è nullo se ξ è al di fuori di S . Il caso di $\xi \in S$ è più delicato, ma si può provare che se S è una superficie di Lyapunov (A. Lyapunov, 1857-1918),¹⁹ l'integrale in questione è uguale alla media aritmetica tra i due precedenti valori, $-(n-2)G_{n-1}/2$. L'integrale $\int_S (\partial_N(|\xi-s|^{2-n})(s)) d_s S$, che è dunque definito in *tutto* R^n (se S è di Lyapunov) e vi assume i tre soli valori $-(n-2)G_{n-1}$ (dentro S), $-(n-2)G_{n-1}/2$ (su S), e 0 (fuori di S) si dice **integrale di Gauss**.

Noteremo ancora che la (16) non può essere usata per risolvere un problema di Dirichlet o di Neumann (con ρ Lip(X°)). Infatti nel primo caso (vedi le $(8_1, 8_2)$), su S è prescritta la φ , ma non conosciamo la $\partial_N \varphi$ (pur sapendo che essa è già unicamente determinata); mentre nel secondo caso (vedi le $(8_1, 8_3)$), su S è prescritta la $\partial_N \varphi$ (sotto il vincolo $\int_S \partial_N \varphi(s) dS = \int_X \rho(x) dX$), ma non conosciamo la φ (pur sapendo che essa è già unicamente determinata a meno di una costante additiva).

In pratica, l'insieme delle funzioni armoniche in X° , determinate ciascuna da una condizione di Dirichlet (o di Neumann), può essere ricondotto alla soluzione di un *unico* problema omogeneo di Dirichlet (o di Neumann), *legato esclusivamente al dominio* X , o se si preferisce alla sua frontiera ∂X . Si ritorni alla (16): per una funzione armonica φ , il primo integrale a 2° membro è nullo, ed essa può quindi risciversi nella forma (per $n > 2$):

$$(16ter) \quad (n-2)G_{n-1}\varphi(\xi) = \int_S [\partial_N \varphi(s)(H(s, \xi) + |s-\xi|^{2-n}) - \varphi(s)\partial_N(H(s, \xi) + |s-\xi|^{2-n})] d_s S,$$

dove $H = H(x, \xi)$ è una funzione armonica di x , con parametro ξ , per ora arbitraria. Se imponiamo a questa $H(x, \xi)$ di avere limite dall'interno pari a $-|s-\xi|^{2-n}$ per $x \equiv s \in S$, (risolvendo un problema di Dirichlet con parametro ξ), siamo dunque ridotti alla

¹⁹ Una superficie S è di **Lyapunov** se è C^1 e se l'angolo (assoluto) tra le normali in s e in s' , $\theta(s, s')$, è Lip rispetto a $|s-s'|$, $\theta(s, s') \leq K|s-s'|^\alpha$. Va da sé che, se è limitata e C^2 , S è di Lyapunov.

$$(16\text{quater}) \quad (n-2)G_{n-1}\varphi(\xi) = -\int_S \varphi(s) \partial_N(H(s,\xi) + |s-\xi|^{2-n}) d_s S.$$

Questa dà la soluzione di tutti i problemi di Dirichlet in X nella forma di una trasformata integrale lineare su S , con nucleo $-\partial_N(H(s,\xi) + |s-\xi|^{2-n})$, del dato al contorno $\varphi(s)$. Il generico problema di Dirichlet in X è così ricondotto a quello di determinare, una volta per tutte, una funzione di x , con parametro ξ , diciamo $G(x,\xi)$ che come $H(x,\xi) + |x-\xi|^{2-n}$, (i): sia $C^2(X \setminus \{\xi\})$, avendo una singolarità debole del tipo $|x-\xi|^{2-n}$ in ξ ; (ii) sia armonica in $X \setminus \{\xi\}$; (iii) abbia limite dall'interno *nullo* sul contorno S . Questa $G(x,\xi)$ è unicamente determinata, e si dice **funzione di Green**, o **funzione di influenza**, per il problema di Dirichlet in $X \subset \mathbb{R}^{n>2}$. Poiché (si dimostra facilmente) risulta $H(x,\xi) = H(\xi,x)$, anche $G(x,\xi) = G(\xi,x)$: cioè la funzione di Green è simmetrica rispetto ai suoi due argomenti. In modo simile si definisce la funzione di Green per il problema di Neumann. Le corrispondenti equazioni per $n = 2$ si ottengono in modo ormai ovvio. Come si può immaginare, il concetto di funzione di influenza – per generici problemi lineari – è molto più generale di quanto suggeriscano i pur fondamentali esempi che abbiamo illustrato.

Con procedura sostanzialmente analoga, ma un po' più complicata, ponendo $\phi = 1/|x-\xi|$ nella (14bis) troviamo:

$$(17) \quad 4\pi v(\xi) = \nabla_\xi \times \left[\int_X ((\nabla \times v)(x)/|x-\xi|) d_x X - \int_S ((N \times v)(s)/|s-\xi|) d_s S \right] - \\ - \nabla_\xi \left[\int_X ((\nabla \cdot v)/|x-\xi|)(x) dX - \int_S (N \cdot v)(s)/|s-\xi| d_s S \right].$$

Questa identità si dice **rappresentazione integrale** (in X°) **del campo vettoriale** $v \in C^1(X^\circ) \cap C(X)$. Secondo essa, v è uguale alla somma di due termini: (i) il rotore della somma del potenziale volumico di X con densità $\nabla \times v$ (un vettore) e del potenziale di strato semplice di S con densità $-N \times v$ (un altro vettore); (ii) il gradiente della somma del potenziale volumico di X con densità $-\nabla \cdot v$ (uno scalare) e del potenziale di strato semplice di S con densità $N \cdot v$ (un altro scalare).

Tuttavia, nemmeno la (17) può essere usata per risolvere il problema rot-div per dati ω (solenoidale) e θ . Ciò è vero sia quando sono assegnate condizioni al contorno del primo tipo (v_N entro il vincolo (I)), che del secondo tipo (v_τ entro il vincolo (II)). Infatti nel primo caso sappiamo che la soluzione è unicamente determinata, ma non possiamo usare la (17) perché non conosciamo v_τ ; e nel secondo caso similmente sappiamo che la soluzione è unicamente determinata, ma ancora non possiamo usare la (17) perché non conosciamo v_N .²⁰

²⁰ La (17), detta talvolta **teorema rot-grad** e già nota a Stokes nel 1849, ha affascinato con la sua bella simmetria non pochi fisici-matematici del secondo Ottocento. Ad esempio, fu apprezzata da Helmholtz (Hermann 1821-1894) come «la più generale rappresentazione di un vettore ovunque finito e continuo, qual che possa essere il suo significato fisico». Sebbene impropriamente, essa è anche nota come “teorema di A. Vaschy”, dal nome del fisico-matematico francese che la riscoprì nel 1893, e la illustrò nella sua monografia “Théorie de l'électricité” del 1896. Abbiamo anche una enfatica testimonianza di J. Carvallo, che così si esprime su di essa (ne riportiamo il testo da una traduzione inglese): «Questo teorema costituisce la sintesi delle nostre conoscenze sui campi vettoriali, e conduce ad un compimento quasi

Conviene denotare con $4\pi A$ il vettore (funzione di ξ) nelle prime [..] della (17):

$$(18_1) \quad 4\pi A(\xi) =: \int_X (\nabla \times v)(x) / |x - \xi| d_x X - \int_S (N \times v)(s) / |s - \xi| d_s S,$$

e con $4\pi \chi$ lo scalare (funzione di ξ) nelle seconde [..]:

$$(18_2) \quad 4\pi \chi(\xi) =: \int_X (\nabla \cdot v)(x) / |x - \xi| d_x X - \int_S (N \cdot v)(s) / |s - \xi| d_s S.$$

Allora la (17) si trascrive (in X°) come

$$(17bis) \quad 4\pi v = \nabla \times A - \nabla \chi.$$

Una richiesta di regolarità su v leggermente più forte di quella fin qui stipulata, e cioè che $v \in C^1(X)$, ci garantisce, per la compattezza di X , che v sia $Lip(X^\circ)$. Sotto questa condizione, è possibile dimostrare che $\nabla \cdot A = 0$ in X° facendo uso della $(4_{n=3})$.²¹ A questo punto si verifica subito che, se i termini liberi ω (solenoidale) e θ sono $Lip(X^\circ)$, esiste una soluzione particolare del problema rot-div data da:

$$(19_1) \quad 4\pi A_1 =: \int_X \omega(x) / |x - \xi| d_x X,$$

$$(19_2) \quad 4\pi \chi_1 =: \int_X \theta(x) / |x - \xi| d_x X.²²$$

La soluzione generale si ottiene aggiungendo a questa soluzione particolare una soluzione del problema omogeneo $\omega \equiv 0$, $\theta \equiv 0$ (con convenienti condizioni su S). Così anche in questo caso il problema dell'esistenza di una soluzione generale del problema rot-div è spostato su quello dell'esistenza di soluzioni del problema omogeneo associato ($\omega = \theta = 0$), sotto le solite condizioni accessorie, di tipo Dirichlet o Neumann) su S . §

§7. In generale, e trascurando ormai per brevità di menzionare le classi di continuità dei campi di cui si tratta, la rappresentazione di un generico campo vettoriale $v = v(x)$ in un dominio 3-dim come somma del rotore di un campo vettoriale B e del gradiente di un campo scalare $-\psi$, si dice una sua **rappresentazione di Clebsch** (R.F.A. Clebsch, 1833-1872); il campo B si dice un suo **potenziale vettore**, e il campo ψ un suo **potenziale scalare**. Questa rappresentazione non è unica, perché la $\nabla \times (B' - B) - \nabla(\psi' - \psi) = 0$ ovviamente non implica $B' - B = 0$ e $\psi' - \psi = 0$. Ponendo $B' - B = -\nabla \lambda$, si può approfittare di λ per rendere B' solenoidale: basta che λ sia una soluzione dell'equazione di Poisson $\nabla^2 \lambda = \nabla \cdot B$ (se $\nabla \cdot B$ è Lip). Le coppie (B, ψ) che rappresentano nel senso di Clebsch lo

prodigioso gli sforzi di coloro che tentano di comprendere le leggi dell'elettricità. Di tutti i risultati della fisica matematica, il teorema di Vaschy è quello con le maggiori conseguenze pratiche e la maggior importanza filosofica.» (J. Cavallo, "Traité d'électricité théorique", 1922).

²¹ Utilizzando il teorema del rotore modificato (\equiv con la singolarità) e l'identità $\nabla_\xi |x - \xi| + \nabla_x |x - \xi| = 0$, $4\pi A(\xi)$ si scrive come $\int_X \nabla_\xi (|x - \xi|^{-1}) \times v(x) d_x X$. Allora $4\pi \partial_1 A = \partial_1 (\partial_2 \gamma_3 - \partial_3 \gamma_2)$, dove $\gamma =: \int_X v |x - \xi|^{-1} d_x X$ e tutte le ∂ sono rispetto alla variabile ξ . Se v è $Lip(X^\circ)$, le derivate seconde miste di γ sono date dalla $(4_{n=3})$ senza il sottraendo a 2° membro perché $\delta = 0$ se gli indici sono diversi. Procedendo in modo analogo per $4\pi \partial_2 A$ e $4\pi \partial_3 A$ e sommando, troviamo zero, qed.

²² Se $\omega_N = 0$, risulta $\nabla \cdot A_1 = 0$. Infatti $4\pi \nabla \cdot A_1 = \int_X \omega(x) \cdot \nabla_\xi (|x - \xi|^{-1}) d_x X = - \int_X \nabla_x \cdot (\omega(x) |x - \xi|^{-1}) d_x X = - \int_S \omega_N(s) |s - \xi|^{-1} d_s S = 0$.

stesso campo vettoriale v , si dicono suoi **gauges**, e l'invarianza di v rispetto al passaggio da un suo gauge ad un altro si dice sua **invarianza di gauge**. Un gauge (B, ψ) di v per cui $\nabla \cdot B = 0$ si dice un suo **gauge di Coulomb**; infatti nemmeno il gauge di Coulomb è unico, potendosi sempre aggiungere a ψ una funzione armonica. La rappresentazione di Clebsch (17bis) di v è quindi data in termini di un suo gauge di Coulomb, perché $\nabla \cdot A = 0$. §

5.2.4) ESEMPI ED APPLICAZIONI III (TEORIA DEI POTENZIALI ELETTROMAGNETICI)

L'idea di rappresentare un campo vettoriale (o tensoriale) come combinazione lineare di derivate di altri campi "potenziali" è molto comune in fisica teorica, e può esser opportuno illustrare qui l'importantissimo esempio della rappresentazione del campo elettromagnetico $E = E(x,t)$ (\equiv campo elettrico), $H = H(x,t)$ (\equiv campo magnetico) come funzioni di x e di t (tempo) in un dominio *fisso* con un campo di densità di carica elettrica ρ in moto con velocità u , ρ e u essendo date sotto il vincolo (di conservazione della carica) $\nabla \cdot (\rho u) + \partial_t \rho = 0$ (vedi S.sez. 2.5.1, 11°, 11b). Come sappiamo, questo campo $(E,H)(x,t)$ soddisfa al sistema di Maxwell (2.5.1, 7a,7b), che converrà qui rileggere con i simboli (e,h,∇) sostituiti dai corrispondenti maiuscoli (E,H,∇) . Le equazioni omogenee (2.5.1, 11a) sono automaticamente soddisfatte, e possono essere ignorate, ponendo

$$(1_1) \quad H = \nabla \times A,$$

$$(1_2) \quad E = -\partial_t A/c - \nabla \alpha$$

(c = celerità della luce), dove $A = A(x,t)$ è un **potenziale elettromagnetico (EM) vettore** e $\alpha = \alpha(x,t)$ è un **potenziale EM scalare**. La rappresentazione (1) non è univoca, perché $(E,H) = 0$ non implica $(A,\alpha) = 0$. Le coppie di potenziali (A,α) che rappresentano il campo (E,H) secondo le (1) si dicono suoi **gauges**. Sostituendo le (1) nelle (2.5.1, 11b) troviamo le equazioni lineari del 2° ordine in (A,α) :

$$(2_1) \quad \partial_t^2 A/c^2 - \nabla^2 A + \nabla(\nabla \cdot A + \partial_t \alpha/c) = \rho u/c,$$

$$(2_2) \quad -\nabla^2 \alpha - \nabla \cdot \partial_t A/c = \rho. \quad ^{23}$$

(Si noti che operando con $\nabla \cdot$ sulla (2₁) e con $(1/c)\partial_t$ sulla (2₂), e sommando, ritroviamo il vincolo di conservazione della carica, del resto già implicito nelle (2.5.1, 11b).)

Si può approfittare della arbitrarietà del gauge (A,α) per soddisfare l'addizionale condizione

²³ Poiché E e H sono dimensionalmente omogenei nelle unità di misura qui usate, anche A e α lo sono; e alla luce delle (2) la loro comune dimensione è (carica)/(lunghezza).

$$(3) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \alpha / c = 0.$$

Se infatti (\mathbf{A}^*, α^*) sono soluzioni particolari delle (2), anche $(\mathbf{A}^* + \nabla \psi, \alpha^* - \partial_t \psi / c)$, dove $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ è congruentemente differenziabile e per il resto arbitraria, lo sono, e lasciano invariati (E,H). Basta dunque imporre che $\nabla \cdot (\mathbf{A}^* + \nabla \psi) + (1/c) \partial_t (\alpha^* - \partial_t \psi / c) = 0$, cioè che

$$(4) \quad (\partial_t^2 / c^2 - \nabla^2) \psi = \nabla \cdot \mathbf{A}^* + \partial_t \alpha^*,$$

per assicurare la (3). Un gauge (\mathbf{A}, α) che soddisfi la (3) si dice **di Lorenz** (L. Lorenz (1867), e non A. Lorentz, come spesso si trova riferito). Nemmeno i gauges di Lorenz sono unicamente determinati, perché la $(\partial_t^2 / c^2 - \nabla^2) \psi = 0$ non implica che $\nabla \psi = 0$ e $\partial_t \psi = 0$. In un gauge di Lorenz, le (2) si semplificano e si simmetrizzano nelle

$$(5_1) \quad (\partial_t^2 / c^2 - \nabla^2) \mathbf{A} = \rho \mathbf{u} / c,$$

$$(5_2) \quad (\partial_t^2 / c^2 - \nabla^2) \alpha = \rho.$$

L'operatore (differenziale del 2° ordine iperbolico) $(\partial_t^2 / c^2 - \nabla^2)$, o più propriamente la sua versione con $c^2 = 1$, si dice **di d'Alembert**, e $\partial_t^2 / c^2 - \nabla^2$ si scrive usualmente \square . Le (5) possono quindi presentarsi sinteticamente come

$$(5\text{bis}) \quad \square(\mathbf{A}, \alpha) = (\rho \mathbf{u} / c, \rho),$$

e la (4) come

$$(4\text{bis}) \quad \square \psi = \nabla \cdot \mathbf{A}^* + \partial_t \alpha^*.$$

Nel caso statico ($\partial_t \equiv 0$), \square si riduce a $-\nabla^2$, ed un gauge di Lorenz per (\mathbf{A}, α) si riduce ad un gauge di Coulomb per \mathbf{A} . In conclusione in tal caso si ha $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, da cui $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ e

$$(6) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \rho \mathbf{u} / c,$$

equazione (vettoriale) della magnetostatica; e $\mathbf{E} = -\nabla \alpha$, da cui

$$(7) \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \alpha = \rho,$$

equazione (scalare) dell'elettrostatica. Si noti che sia la (6) che la (7) sono equazioni di Poisson, vettoriale la prima e scalare la seconda. In assenza di cariche ($\rho = 0$), le equazioni statiche (6, 7) esprimono l'armonicità dei due potenziali (\mathbf{A}, α) nel gauge di Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.²⁴

²⁴ Come quella di Poisson, anche un'equazione di d'Alembert non omogenea ammette soluzioni generali sotto precise condizioni. La soluzione standard dell'equazione di d'Alembert non omogenea (sempre per S fisso), è detta **di Kirchoff** (G.R. Kirchoff, 1810-1887) **a potenziali ritardati**, e presenta una spinta affinità con la (16) ($n = 3$). Applicata alle (5) per (\mathbf{A}, α) , la parte lineare nei termini liberi $\rho \mathbf{u} / c$ e ρ (soluzioni particolari delle (5) stesse) risulta automaticamente un gauge di Lorenz – in forza della equazione di conservazione della carica – se $u_N = 0$. In questo caso la carica totale dentro S non varia nel tempo. Benché presenti ovvie difficoltà di interpretazione *fisica* (principio di causalità) la soluzione di Kirchoff **a potenziali anticipati** è legittima dal punto di vista matematico, ed è stata attentamente riconsiderata verso la metà dello scorso secolo (vedi ad es. F. Rohrlich, "Classical Charged Particles", Addison-Wesley, 1965). È anche evidente, infine, che l'operatore $-\square$ si può considerare formalmente come un laplaciano nelle quattro variabili (\mathbf{x}, ict) ; e questo è uno spunto non trascurabile verso la geometria iperbolica di Minkowski.

Concludiamo la sottosezione con la seguente osservazione. Sappiamo che un campo vettoriale $w = w(x)$ dato in un aperto semplicemente connesso $X \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, e ivi di classe C^2 , è un gradiente sse in X^2 sono soddisfatte le $\binom{n}{2}$ condizioni di compatibilità

$$(8) \quad \partial w_i / \partial x^j = \partial w_j / \partial x^i;$$

per $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$; in questo caso w è un **campo vettoriale irrotazionale** (non soltanto in \mathbb{R}^3).

Ora un campo vettoriale in \mathbb{R}^n ha n componenti, mentre $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ è maggiore di n per $n > 3$. Sembrerebbe quindi nascere una discordanza, per $n > 3$, tra il numero delle componenti disponibili e quello dei vincoli da soddisfare. D'altra parte il fatto che w si esprima come un gradiente, e quindi in termini di una sola funzione, suggerisce che i vincoli (8) siano in realtà soltanto $n - 1$. Infatti i $\binom{n}{2}$ vincoli (8) *non sono differenzialmente indipendenti*. Vogliamo ora mostrare come, tenuto conto di questo fatto, essi si riducono effettivamente a $n - 1$ se w è di classe C^{n-1} . È utile riscrivere le (8) servendosi del simbolo completamente antisimmetrico a n indici $\Upsilon_{i_1 \dots i_n}$, cioè nella forma:

$$(9) \quad \Upsilon_{i_1 \dots i_{(n-2)} i_{(n-1)} i_n} \partial w_{i_{(n-1)}} / \partial x^{i_n} = 0$$

(somma sui due indici ripetuti); oppure, in coordinate generali, come

$$(9bis) \quad \varepsilon_{i_1 \dots i_{(n-2)} i_{(n-1)} i_n} w_{i_{(n-1)}/i_n} = 0,$$

dove $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ è il n -p.tensore antisimmetrico di Ricci. Per $n = 3$, le $3 = \binom{3}{2} \varepsilon_i^{jk} w_{j/k} = 0$ implicano l'identità differenziale scalare del 2° ordine $\varepsilon^{ijk} w_{j/ki} \equiv 0$; quindi solo due di esse sono differenzialmente indipendenti, e $2 = 3 - 1$. Per $n = 4$, le $6 = \binom{4}{2} \varepsilon_{ih}^{jk} w_{j/k} = 0$ implicano le 4 identità differenziali scalari del 2° ordine $\varepsilon_i^{hjk} w_{j/kh} \equiv 0$; ma queste non sono differenzialmente indipendenti, perché implicano a loro volta l'identità scalare del 3° ordine $\varepsilon^{ihjk} w_{j/khi} \equiv 0$. Le (9bis) realmente indipendenti sono quindi in questo caso $4 - 1 = 3$. Si continua così per n qualsiasi: dalle $\binom{n}{2}$ (9bis), occorre togliere $\binom{n}{3}$ identità differenziali scalari del 2° ordine, da queste $\binom{n}{4}$ del 3° ordine, ... e così via fino a quando si sottrae una sola identità differenziale scalare di ordine $(n-1)$. In conclusione, i vincoli (8) realmente indipendenti sono $\sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k}$; e questa somma è effettivamente uguale a $n-1$, come si vede subito sviluppando la potenza n -ma del binomio $0 \equiv (1-1)$ con l'usuale formula di Newton. Risulta infatti $0 \equiv (1-1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^0 \binom{n}{0} + (-1)^1 \binom{n}{1} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 1 - n + \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, qed.

Invitiamo il lettore curioso di generalizzazioni e approfondimenti a consultare la vasta trattatistica esistente sui temi di questa sezione, dei quali abbiamo qui dato un'idea assai parziale. In proposito, si è preferito non aggiungere altri riferimenti oltre alle opere menzionate nella Bibl. Gen.

A), ²⁵ che riflettono le esperienze e le preferenze dell'autore, e a poche altre menzionate nel testo. Possiamo ancora aggiungere che gli sviluppi naturali di questo tipo di problemi si collocano nell'ambito della moderna **teoria dell'integrazione su varietà** (astratte), al cui interno essi si riconducono essenzialmente ad un unico potente teorema generale (quello di Poincaré-Stokes, vedi Cap. 8), che con ragione potrebbe nominarsi come il teorema fondamentale sul rapporto differenziazione-integrazione su varietà.

²⁵ Si vedano soprattutto: Bitsadze, Courant & Hilbert (2 voll.), Ladyzhenskaia & Ural'tseva, Lions & Magenes, Mikhlin (1 e 2), Miranda, Petrovskii, Shilov, Sminorv (vol. 2°), Sobolev, Vladimirov.

5.3) IL RAPPORTO DIFFERENZIAZIONE-INTEGRAZIONE II

5.3.1) EQUAZIONI DIFFERENZIALI E LORO SISTEMI: GENERALITÀ

Un aspetto del rapporto tra differenziazione e integrazione che non può essere ignorato in un libro come il presente è in quell'oggetto dell'Analisi (in realtà ormai un vero e proprio universo matematico per suo conto) noto come "Teoria dei sistemi di equazioni differenziali". Esso può pensarsi suddiviso in due grandi capitoli, connessi ma in pratica poco comunicanti, a seconda che le variabili indipendenti (che qui supporremo per semplicità sempre reali, insieme alle incognite) siano $n \geq 2$ – e allora avremo una **equazione alle derivate parziali**, o **equazione differenzialparziale**, EDP, o anche un sistema di $N \geq 2$ tali equazioni, cioè un **sistema differenzialparziale**, SDP –, oppure una soltanto – e allora avremo una **equazione differenziale ordinaria**, EDO, o anche un sistema di N tali equazioni, cioè un **sistema differenziale ordinario**, SDO. È banale osservare che una EDP [una EDO] è un caso particolare di SDP [di SDO]; e a simile titolo, che la teoria SDP include come caso particolare, *ma con fondamentali semplificazioni*, quella SDO. Cionondimeno, nel seguito ci riferiremo di norma all'interpretazione in senso stretto ($n \geq 2$) dell'acronimo DP, e similmente, a quella in senso stretto ($N \geq 2$) dell'acronimo SD. In conclusione, e sempre limitandoci al campo reale, sebbene la teoria SDP copra quella delle equazioni differenziali in tutte le possibili accezioni, la didattica di questa teoria può, e in pratica deve, essere suddivisa *almeno* nei due sopraddetti capitoli EDO-SDO, EDP-SDP.

Mentre la teoria EDO-SDO (in breve, DO) è ormai sostanzialmente compiuta da circa un secolo, ¹ della teoria EDP-SDP (in breve, DP) ancora pochi decenni or sono qualcuno scriveva che ne fosse stata più o meno «scalpita la superficie» (M. Schechter, 1977); né un tale giudizio potrebbe essere molto modificato oggi, oltre trenta anni più tardi. Di fatto, gli attuali orizzonti della teoria DP sono ormai talmente vasti da rendere irrimediabilmente velleitario qualunque tentativo di darne una idea significativa in meno di molte centinaia di pagine. ² D'altra parte, è proprio alla teoria DP che va il massimo interesse della fisica matematica, al punto che non di rado la seconda viene identificata con la prima. Il nodo della questione, più volte rimarcato, è che spesso è difficile decidere quando uno strumento matematico utilizzato nella descrizione del mondo fisico cessa di

¹ Importanti contributi, in certo senso conclusivi, risalgono appunto all'ultimo decennio dell'Ottocento, e sono dovuti a E. Picard (1856-1941) (Journ. de Mathématiques (4) 6, 1890, (4) 9, 1893, v. anche il 2° volume del Traité d'Analyse dello stesso autore) e a E. Lindelöf (Journ. de Mathématiques (4) 10, 1894 e (5) 6, 1900). Essi sono usualmente riuniti nel cosiddetto "teorema di Picard-Lindelöf".

² Uno dei più recenti trattati EDP con questa (legittima) ambizione, quello di Evans del 1998, ha poco meno di 700 pagine; quello famosissimo di Courant e Hilbert, che nella sua nuova e definitiva versione americana risale al 1962, ne conta più di 800.

essere “strumento” per diventare parte integrante di quella descrizione, cioè per diventare fisica matematica a tutti gli effetti..

La didattica della teoria DP classica presenta una specie di dicotomia (ormai per lo più superata dalla specializzazione) legata al suo sviluppo storico. Da una parte, infatti, lo studio delle più importanti equazioni DP della fisica è stato a lungo affrontato con metodi particolari e “occasionalmente” (ad es. per separazione di variabili, o mediante l’analisi di Fourier, ecc.), certamente efficaci ma disorganici. Dall’altra, soprattutto per opera di Cauchy e a partire da circa il 1820, la teoria DP ha cominciato ad esser posta su basi sistematiche. Un ruolo centrale, in questo diverso orientamento, è stato giocato dal cosiddetto **problema ai valori iniziali**, o per l’appunto **problema di Cauchy** (PC). Gli analisti del XIX secolo attivi in campo DP hanno così opportunamente spostato la loro attenzione su un approccio ai loro problemi di tipo “localistico”, progressivamente abbandonando la vecchia utopia di ottenerne “soluzioni globali” esplicite, o come appunto si diceva, “soluzioni generali”. Illustreremo i fondamenti del problema di Cauchy, sia nella sua versione “normale” (PCN, v. 5.3.2) che “generalizzata” (PCG, v. 5.3.3), nel seguito di questa sezione.

Esiste anche uno speciale capitolo della teoria EDP, quello che ha per oggetto una singola equazione del 1° ordine con n variabili indipendenti, e che (i) è il primo e irrinunciabile gradino della teoria DP generale classica; (ii) è equivalente, almeno localmente, ad uno speciale corrispondente SDO di $2n+1$ equazioni del 1° ordine in forma normale³; (iii) si collega in modo naturale al Calcolo delle Variazioni unidimensionale (vedi Cap. 6), e come tale ha importanti applicazioni nella meccanica analitica dei sistemi discreti; (iv) ha da tempo raggiunto un assetto soddisfacente, e può essere affrontato in modo relativamente semplice. Senza significative perdite di generalità (almeno sul piano concettuale), e anzi con ovvi vantaggi in ordine alla “visualizzazione” dei problemi, ci si può limitare al caso speciale di $n = 2$ variabili indipendenti. Di questo importante oggetto dell’Analisi si tratterà nella Sez 5.4.

Va aggiunto che, in relazione con i grandi e contemporanei progressi dell’Analisi Funzionale, a partire dagli scorsi anni ‘20 – ‘30 lo stesso concetto di soluzione di un problema DP è stato sostanzialmente generalizzato mediante quell’“indebolimento minimale” della nozione di derivata che segna la transizione dalla teoria DP classica (o “forte”) a quella moderna (o “debole”). Di molti problemi DP si sapeva o si presumeva infatti che non esistessero soluzioni forti: era dunque così naturale cercare di allargare un orizzonte intollerabilmente chiuso indebolendo in modo opportuno, ma non più di quanto *strettamente* necessario, la definizione di derivata. Molto suggerisce che il rimedio adottato sia quello giusto, ma è difficile prevedere a quali sviluppi esso

³ È questo un esempio non banale di rapporto tra teoria DP e teoria DO.

potrà condurre nel lungo periodo; non contando tuttavia la teoria dei problemi DP *lineari*, ormai giunta ad uno stadio di accettabile maturità. D'altra parte l'impatto delle nuove idee è stato poco importante sullo studio del PCN/PCG, ancor oggi in sostanza ancorato all'approccio forte-classico.

Naturalmente sulla teoria SDP esiste una moltitudine di trattati di diverso orizzonte e livello di difficoltà. L'eccezionale vastità ed importanza applicativa (alla fisica matematica) della materia suggeriscono qui – in chiusura di questa breve introduzione – di offrire in nota una lista di quelli che a vario titolo riteniamo eccellenti o comunque raccomandabili.⁴ Ad essi rimandiamo il lettore per tutte quelle questioni di pertinenza DP – e naturalmente sono la stragrande maggioranza – che non saranno affrontate in questo libro.

5.3.2) IL PROBLEMA DI CAUCHY NORMALE (PCN) NELLA TEORIA DEI SDP

Sia $u = u(x)$, $x =: \langle x^1, \dots, x^n \rangle$, $n \geq 2$, una funzione a valori reali definita per x in un aperto connesso (e di norma semplicemente connesso) A di \mathbb{R}^n e ivi di CdC $m \geq 1$. Com'è d'uso, denoteremo con $\partial_k u$, ove $k =: \langle k_1, \dots, k_n \rangle$, e k_1, \dots, k_n sono interi non-negativi sotto il vincolo $0 \leq |k| =: \sum_{i=1}^n k_i \leq m$ ($|k|$ è il simbolo standard nella teoria SDP per la somma $\sum_{i=1}^n k_i$), la derivata parziale di ordine $|k|$ $\partial^{|k|} u / \partial^{k_1} x^1 \dots \partial^{k_n} x^n$. Se $|k| = 0$, $\partial_k u$ è naturalmente identificata con u . Tenuto

⁴ 1) Trattati di carattere generale: Bateman H.: "Partial Differential Equations", Dover 1944; Bers L., John F., Schechter M.: "Partial Differential Equations", Wiley 1964; Courant R., Hilbert D.: "Methods of Mathematical Physics vol II", vedi Bibl. Gen (1); DiBenedetto, E.: "Partial Differential Equations", Birkhäuser 1995; Duff G.F.: "Partial Differential Equations", Un. Toronto Pr. 1956; Epstein B.: "Partial Differential Equations: an Introduction", McGraw-Hill 1962; Evans L.C. "Partial Differential Equations", A.M.S. Pr. 1998; Folland G.B.: "Introduction to Partial Differential Equations", Princeton Un Pr. and Tokio Un. Pr. 1976; Friedman A.: "Partial Differential Equations", Holt, Rinehart & Winston 1969; Garabedian P.R.: "Partial Differential Equations", Wiley 1964; Goursat E.: "Course d'analyse mathématique" vol. 3, Gauthier-Villars 1933; Hellwig G.: "Partielle Differentialgleichungen", Teubner 1969; John, F.: "Partial Differential Equations", Springer 1971; Mizohata S.: "The Theory of Partial Differential Equations", engl. transl. Cambridge Un. Pr. 1973; Petrovskii I.G.: "Partial Differential Equations", vedi Bibl. Gen (A); Schechter M.: "Modern Methods in Partial Differential Equations", McGraw-Hill 1977; Smirnov V.I.: "A Course of Higher Mathematics", vol IV" vedi Bibl. Gen (A). 2) Trattati di carattere più specifico: Cinquini-Cibrario M., Cinquini S.: "Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico", Cremonese 1963; Dou, A.: "Lectures on Partial Differential Equations of First Order" Un. Notre Dame Press, 1972; Egorov Yu. V., Shubin M.A.: "Linear Partial Differential Equations, Foundations of the Classical Theory", engl. transl. Springer 1991; Eidel'man S.D.: "Parabolic Systems", engl. transl. North Holland 1969; Hadamard J.: "Lectures on Cauchy's problem in linear differential equations", engl. transl. Dover 1952; Hörmander L.: "Linear Partial Differential Operators", Acad. Pr. 1963; Ladyzhenskaia, O.A., Ural'tseva N.N.: "Linear and Quasi-linear Elliptic Equations", engl. transl. Acad. Pr. 1968; Leray J.: "Hyperbolic Differential Equations", Princeton Un. Pr. 1953; Lions J.L., Magenes E.: "Non-homogeneous Boundary-value Problems and Applications" vol 1, engl. transl. Springer 1972; Martin R.H.: "Non-linear Operators and Differential Equations in Banach Spaces", Wiley 1976; Miranda C.: "Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico", Springer 1955; trad. ingl. in Springer, 1970; Treves F.: "Basic Linear Partial Differential Equations", Acad. Pr. 1975; Tricomi F.G.: "Equazioni a derivate parziali", Cremonese 1957. 3) Trattati più orientati alle applicazioni fisiche: Mikhlin R.H. (ed.): "Linear Equations of Mathematical Physics", Holt, Rinehart & Winston 1967; Sommerfeld A.: "Partial Differential Equations in Physics", engl. transl. Acad. Pr. 1949; Tikhonov A.N., Samarskii A.A.: "Equations of Mathematical Physics", engl. transl. Pergamon Pr. 1963; Vladimirov V.S.: "Equations of Mathematical Physics", engl. transl. Mir 1984. Come è naturale, ciascuno di questi testi contiene riferimenti più o meno ricchi alle innumerevoli memorie specialistiche.

conto della CdC di u , e quindi della simmetria delle derivate miste (Schwarz), l'insieme delle derivate parziali di u di ordine s , $\{\partial_k u\}_{|k|=s}$, per $0 \leq s \leq m$, ha cardinalità pari al numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti a s a s , $C'_n{}^s \equiv (n+s-1)!/((n-1)!s!)$. L'insieme delle derivate di u di ordine fino a m compreso, $\{\partial_k u\}_{0 \leq |k| \leq m}$, ha quindi cardinalità $L = L(n,m) =: \sum_{s=0}^m C'_n{}^s$.⁵ Se più in generale ci riferiamo a u come ad una N -pla di funzioni $\langle u_1, \dots, u_N \rangle$ definite in A e ivi di CdC $m_1 \geq 1, \dots, m_N \geq 1$, o brevemente a una “funzione u di CdC $m =: \langle m_1, \dots, m_N \rangle$ ”, l'insieme delle derivate di queste funzioni, $\{\partial_{k\alpha} u_\alpha\}_{0 \leq |k| \leq m_\alpha} (1 \leq \alpha \leq N)$, che scriveremo come $\{\partial_k u\}_{0 \leq |k| \leq m}$ sottintendendo il sottoscritto α in u , k e m , o addirittura semplicemente come $\{\partial_k u\}$, ha cardinalità M pari alla somma delle cardinalità L_α , $M =: \sum_{\alpha=1}^N L_\alpha$, dell'insieme delle derivate di u_α , con $L_\alpha =: L(n, m_\alpha)$.

Evidentemente, queste valutazioni rispondono al problema di conoscere il numero delle derivate indipendenti (continue) dell'incognita u , u stessa inclusa, presenti in una EDP di ordine $m \geq 1$ [delle $N \geq 2$ incognite $u = \langle u_1, \dots, u_N \rangle$ presenti in un SDP di ordine $m_1 \geq 1$ in $u_1, \dots, m_N \geq 1$ in u_N] e in $n \geq 2$ variabili indipendenti. Si noti che lo stesso problema trova risposta nelle stesse formule quando sia riferito ad una EDO di ordine $m \geq 1$ (o ad un SDO di ordine $m_1 \geq 1$ in $u_1, \dots, m_N \geq 1$ in u_N), semplicemente facendo in esse $n = 1$. Poiché $C'_1{}^s = 1$ per ogni s , risulta $L(1,m) = 1 + m$ (cfr. nota precedente), quindi $L_\alpha = 1 + m_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq N$, e $M = N + \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$.

Tornando al caso DP, se queste derivate $\{\partial_k u\}_{0 \leq |k| \leq m}$ sono pensate come funzioni di $x \in A$, esse sono vincolate differenzialmente, perché generate (appunto per differenziazione) dalla sola N -pla $u \equiv u_{1 \leq \alpha \leq N}$. Se invece esse sono pensate come loro *valori* in un punto di A allora possono considerarsi come indipendenti. In tal senso, sarà utile considerare separatamente l'insieme delle M funzioni di $x \in A$ $\{\partial_k u\}_{0 \leq |k| \leq m}(x)$ (per data u) e un corrispondente insieme di M variabili *indipendenti* c_k correnti in un aperto di \mathbb{R}^M , $\{c_k\}_{0 \leq |k| \leq m}$.

È opportuno, a questo punto, ricordare la seguente classificazione delle EDP. La EDP

$$(L) \quad \sum_{0 \leq |k| \leq m} a_k(x) \partial_k u = h(x)$$

nell'incognita u , e per date funzioni a_k, h (di x), si dice **lineare**, e **lineare-omogenea** se $h \equiv 0$ ⁶. La EDP

$$(SL) \quad \sum_{|k|=m} a_k(x) \partial_k u + a_0(x, \{\partial_k u\}_{0 \leq |k| < m}) = 0$$

nell'incognita u , e per le date funzioni a_k, a_0 , si dice **semilineare**. La EDP

$$(QL) \quad \sum_{|k|=m} a_k(x, \{\partial_k u\}_{0 \leq |k| < m}) \partial_k u + a_0(x, \{\partial_k u\}_{0 \leq |k| < m}) = 0$$

⁵ Risulta $L(n,1) = 1 + n$, e $L(n,m > 1) = 1 + n + \dots + [n(n+1) \dots (n+m-1)]/m!$. Queste formule valgono anche nel caso $n = 1$, in cui $L(1,m) = 1 + m$.

⁶ Questa è la denominazione comune, ma sarebbe più corretto dirla “lineare non-omogenea” (o “lineare affine”) se h non è identicamente nulla, e semplicemente “lineare” in caso contrario. Questo vale del resto per tutti i problemi cosiddetti “lineari”.

nell'incognita u , e per le date funzioni a_k , a_0 , si dice **quasilineare**. Banalmente, "lineare" implica "semilineare", che implica "quasilineare". I SDP di N EDP si nominano allo stesso modo se sono costituiti soltanto da equazioni lineari, semilineari o quasilineari. Ad esempio, nel caso lineare le a_k diventano $(N \times N)$ -matrici e h diventa una N -colonna, ecc.

Scegliamo adesso una delle $x^{1 \leq i \leq n}$, diciamo x^1 , e introduciamo la notazione $t \equiv x^1$, $X^{h-1} \equiv x^h$ per $2 \leq h \leq n$, e X per $\langle X^1, \dots, X^{n-1} \rangle$. Sempre per $m \geq 1$, sia $k' = \langle k'_1, \dots, k'_n \rangle$ con k'_1, \dots, k'_n interi non negativi sotto i vincoli $0 \leq k'_1 \equiv k'_t < m$ e $0 \leq |k'| = \sum_{i=1}^n k'_i \leq m$. Se u è una *singola* funzione di $(t, X) \in A \subset \mathbb{R}^n$, l'insieme delle $\{\partial_{k'} u\}_{0 \leq k'_t < m, 0 \leq |k'| \leq m}$ ha cardinalità $L - 1$ (qui il pedice k'_t sta al solito per k'_t). Se invece u è la $(N \geq 2)$ -pla $u_{1 \leq \beta \leq N}$, si dovrà aggiungere un indice β in k' , m e L (oltre che in u); allora la cardinalità dell'insieme $\{\partial_{k'} u\}_{0 \leq k'_t < m, 0 \leq |k'| \leq m}$ (sottintendendo l'indice β in u , k' e m), o in breve $\{\partial_{k'} u\}$, è $M - N$. Ancora, se queste derivate sono pensate come funzioni di $(t, X) \in A$, esse sono vincolate differenzialmente, mentre possono considerarsi come indipendenti se pensate come loro valori in un punto di A . Sarà di nuovo utile associare all'insieme $\{\partial_{k'} u\}$ un corrispondente insieme di $M - N$ variabili indipendenti $\{c_{k'}\}$ correnti in un aperto di \mathbb{R}^{M-N} . Per $N = 1$, denoteremo con $\partial_s u$ la t -derivata di u di ordine $0 \leq s \leq m$, cioè $\partial_{k=(s,0,\dots,0)} u$, e con c_s la corrispondente variabile indipendente $c_{k=(s,0,\dots,0)}$ (ovviamente, qui $\langle s, 0, \dots, 0 \rangle$ ha n elementi). Questa notazione si generalizza infine in modo ovvio per $N \geq 2$ attribuendo a u , s (quindi a k), m e c l'indice $1 \leq \beta \leq N$.

Formuliamo ora in modo preciso il PCN per una EDP nella incognita $u = u((t, X) \in \mathbb{R}^{n \geq 2})$ di ordine m , o per un SDP di $N \geq 2$ EDP nelle N incognite $u =: \langle u_1, \dots, u_N \rangle$, funzioni di $(t, X) \in \mathbb{R}^{n \geq 2}$, di ordine $m =: \langle m_1 \geq 1 \text{ in } u_1, \dots, m_N \geq 1 \text{ in } u_N \rangle$.

(a) Per i dati $n \geq 2$, $N \geq 1$, $m =: \langle m_1 \geq 1, \dots, m_N \geq 1 \rangle$, e per k' definito come sopra, sia $f =: \langle f_1, \dots, f_N \rangle$ una data N -pla di funzioni (reali) delle $n + M - N$ variabili indipendenti $(t, X, \{c_{k'}\})$ correnti in un intorno ⁷ $\pi \subset \mathbb{R}^{n+M-N}$ di un punto-base $(t, \underline{X}, \{c_{k'}\})$ e ivi di conveniente CdC (almeno continue). Denoteremo con $\pi_{t,X}$ la (t, X) -proiezione di π ⁸ (che è un intorno di (t, \underline{X}) in \mathbb{R}^n), e con $\underline{\pi}_{t,X}$ la sua sezione $t = \underline{t}$ (che è un intorno di \underline{X} in \mathbb{R}^{n-1});

(b) per ogni $0 \leq s' < m$ (al solito pensando s' e m affetti dall'indice $1 \leq \beta \leq N$) sia $g^{(s')}$ una data N -pla $\langle g_1^{(s')}, \dots, g_N^{(s')} \rangle$ di funzioni di X definite e di CdC $m - s'$ nel comune intorno $\omega =: \underline{\pi}_{t,X} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di \underline{X} , sotto il vincolo ("di consistenza") $g^{(s')}(\underline{X}) = c_{s'}$; #

(c) denotiamo con $u \equiv u|_{\Omega}$ una N -pla $\langle u_1|_{\Omega}, \dots, u_N|_{\Omega} \rangle$ di funzioni definite e di CdC m riferita a k' (cioè con le $\partial_{k'} u$ continue per ogni k') in un comune intorno $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di (t, \underline{X}) , tali che:

⁷ Nel presente contesto "intorno" sta brevemente per "intorno aperto e connesso".

⁸ Se E è un insieme di coppie $\langle x, y \rangle$, la sua x -proiezione è l'insieme degli x per cui $\exists y (\langle x, y \rangle \in E)$, vedi N. Bourbaki, "Théorie des Ensembles", E II, 9.

- c1) $\partial_k u(t, \underline{X}) = \underline{c}_k$ (vincolo di consistenza);
 c2) $\underline{t}\Omega \equiv \underline{t}$ -sezione di Ω , intorno di \underline{X} in \mathbb{R}^{n-1}) $\subset \omega$;
 c3) $(t, X) \in \Omega \Rightarrow (t, X, \{\partial_k u\}) \in \pi$; #
 (d) per le date funzioni $f|_\pi, g^{(s')}|_\omega$ descritte in (a) e rispettivamente in (b), si considerino coppie $\langle \Omega, u|_\Omega \rangle$ come descritte in (c) per le quali
 (1) $\partial_m u(t, X) = f(t, X, \{\partial_k u\})(t, X)$
 $\forall (t, X) \in \Omega$ (quindi anche $\partial_m u(t, X)$ è definita e continua in Ω); e
 (2) $\partial_{s'} u(\underline{t}, X) = g^{(s')}(X),$
 $\forall X \in \underline{t}\Omega$ e per ogni $0 \leq s' < m$ (quindi $\partial_{s'} u(\underline{t}, X)$ è di CdC $m-s'$ in $\underline{t}\Omega$, e $\partial_{s'} u(\underline{t}, X) = \underline{c}_{s'}$). #

Le t-derivate di ordine m di u sono dunque date in Ω dalla (1), e quelle di ordine $0 \leq s' < m$ sono date in $\underline{t}\Omega$ dalla (2). Evidentemente, (1) è un sistema di N EDP *in forma normale*, cioè con la α -ma equazione risolta rispetto alla t-derivata di u_α di ordine m_α (il massimo ordine di derivazione con cui u_α compare nel sistema); mentre (2) è un corrispondente sistema di m_α condizioni iniziali, per $t = \underline{t}$, sull'incognita u_α e sulle sue t-derivate fino all'ordine $m_\alpha - 1$ incluso (per un totale di $\sum_\alpha m_\alpha$ condizioni iniziali). Si noti infine che senza limitazioni di generalità, ed essenzialmente per brevità notazionale, volendo si può sempre scegliere $\underline{t} = 0, \underline{X} = 0$. Una funzione $u|_\Omega$ come sopra definita si dice una **soluzione in Ω del PCN relativo al sistema SDP (1) sotto il dato di Cauchy (DC) (2) in ω** .

Le classiche questioni di esistenza/unicità (di una possibile soluzione $u|_\Omega$ delle (1,2)) si formulano allora come segue. Sia \mathcal{G} il grafo delle coppie $\langle \Omega, u|_\Omega \rangle$. Ci si chiede:

- (e') "è $\mathcal{G} \neq \emptyset$?" (esistenza); #
 (e'') " $[\langle \Omega, u^{(1)}|_\Omega \rangle \in \mathcal{G} \wedge \langle \Omega, u^{(2)}|_\Omega \rangle \in \mathcal{G}] \Rightarrow [u^{(1)}|_\Omega = u^{(2)}|_\Omega]$?" (unicità). #

Se in Ω esiste una soluzione u , evidentemente lo stesso vale in un intorno Ω' di $(\underline{t}, \underline{X})$ incluso in Ω (basta considerarvi la restrizione di u a $\Omega', u|_{\Omega'}$). Altre fondamentali questioni pertinenti al PCN (1,2) sono:

- (f) supposto $\mathcal{G} \neq \emptyset$, ci si propone di mettere a punto procedure abbastanza generali per la costruzione delle soluzioni di cui si è provata o si presume l'esistenza. Spesso, la prova di esistenza è costruttiva, cioè è *incorporata* in una procedura di soluzione. Naturalmente il caso più interessante è quello in cui la soluzione esiste ed è unica, cioè in cui entrambe le questioni in (e') e in (e'') hanno risposta affermativa; #
 (g) se una soluzione esiste unica in Ω , ci si chiede se il relativo PC sia "ben posto", cioè se essa soluzione sia continua (o come anche si dice, "stabile") rispetto a "piccole variazioni" nella sua

formulazione (in pratica, rispetto a piccole variazioni delle funzioni $f|_{\pi}$, $g^{(s)}|_{\omega}$). Se in particolare la stabilità è assicurata per piccole variazioni del DC (2), la soluzione si usa dire **stabile nel senso di Hadamard**.

La richiesta che la soluzione delle (1, 2), supposta esistere unica in Ω , sia ivi continua con tutte le sue derivate coinvolte nella formulazione del PCN ((a) ÷ (d)) è ovvia e naturale (\rightarrow soluzione “classica” o “forte”); ma si possono immaginare situazioni più generali. Ciò vale del resto per un problema DP generico, e non soltanto per il PCN. È proprio in rapporto ad una maggiore flessibilità in questo senso che si è dato spazio a soluzioni “non-classiche”, o “deboli”, o “generalizzate” (delle quali tuttavia non ci occuperemo qui).

La versione sopra illustrata del PCN è “strettamente locale”: non si pone cioè alcun limite verso il basso alla misura ⁹ dell’intorno Ω del punto-base $(\underline{t}, \underline{X})$. La versione “semilocale” dello stesso PCN si ha con la più forte richiesta

$$(3) \quad \underline{t}\Omega = \omega (= \underline{t}\pi_{\underline{t}, X}).$$

Secondo la (3), $\underline{t}\Omega$ è dunque *massimale* (in generale $\underline{t}\Omega \subset \omega$) *rispetto a* π ; tuttavia la misura di Ω (cioè il suo “spessore” secondo t) può ancora essere piccola quanto si vuole. ¹⁰ Se $u|_{\Omega}$ è una soluzione del PCN per la quale *non* esiste un sopraperito proprio di Ω in cui $u|_{\Omega}$ può essere prolungata restando soluzione si dice una sua **soluzione massimale**.

Poiché il DC (2) fornisce le $\{\partial_{k'}u\}$ per ($t = \underline{t}$, $X \in \omega$), la (1) dà ivi la t -derivata di u di ordine m . Ma vi è di più: supposto di poter t -derivare la (1) in \underline{t} , si ottiene anche la t -derivata in \underline{t} di ordine $m+1$ secondo la (non trascriviamo la X per brevità):

$$(4_1) \quad \partial_{|m+1}u(\underline{t}) = \partial_{\underline{t}}f(\underline{t}, \{\partial_{k'}u\}(\underline{t})) + \sum_{k'} \partial f / \partial c_{k'}(\underline{t}, \{\partial_{k'}u\}(\underline{t})) \partial_{\underline{t}} \partial_{k'}u(\underline{t})$$

per ogni $X \in \omega$, dove (ricordiamo) la somma su k' è estesa a $0 \leq k'_t < m$, $0 \leq |k'| \leq m$. Le $\partial_{\underline{t}} \partial_{k'}u(\underline{t})$ a 2° membro della (4₁) si ricavano dal DC (2) se $k'_t < m - 1$, e dalla (1) se $k'_t = m - 1$. Proseguendo allo stesso modo, se la CdC di f lo permette, t -derivando la (4₁) si ottiene la $\partial_{|m+2}u(\underline{t})$ secondo una simile relazione (4₂), e così via. Ciò apre la strada all’idea che sotto condizioni di sufficiente regolarità dei dati possa ottenersi uno sviluppo *formale* di u in serie di potenze di $t - \underline{t}$ attorno a $t = \underline{t}$, con coefficienti funzioni note di $X \in \omega$. Per costruzione, in questo sviluppo di u non compaiono derivate rispetto a X di ordine superiore a m , come già mostra la (4₁).

Come è naturale, tutto ciò si applica anche al caso di un SDO ($n = 1$), allorché le X mancano, e le (1, 2) si riducono alle

⁹ Posto che Ω sia misurabile. Più in generale, basterà *non* richiedere che esso includa una n -palla data di raggio positivo e di centro $(\underline{t}, \underline{X})$.

¹⁰ Tipicamente, Ω ha una struttura lenticolare, cioè il suo spessore secondo t tende a zero quando X tende al contorno di $\underline{t}\Omega$.

$$(1\text{bis}) \quad d_t^m u(t) = f(t, \{d_t^{k'} u\}_{0 \leq k' < m}(t))$$

per t in un intorno di \underline{t} , e rispettivamente

$$(2\text{bis}) \quad d_t^{s'} u(t) = g^{(s')}$$

per $0 \leq s' < m$. Questa è la versione del PCN per un SDO di ordine m ; tutto quanto è stato detto a proposito del PCN-DP (PCN differenzialparziale) si ripete parola per parola e con ovvie fondamentali semplificazioni per questo “PCN ordinario”, o PCN-O. Si noti inoltre che le (1bis, 2bis) si possono sempre trascrivere come un SDO di $\sum_{\alpha}^N m_{\alpha}$ EDO del 1° ordine con l’artificio di porre $u^{(h)} \equiv d_t^h u$ per ogni $0 \leq h \leq m - 1$. Infatti la (1bis) diventa in tal caso $d_t u^{(m-1)} = f(t, \{u^{(h)}\}_{0 \leq h \leq m-1})$, e a questa si aggiungono le $m - 1$ equazioni $d_t u^{(h-1)} = u^{(h)}$ per $1 \leq h < m$. Il DC consiste poi nell’assegnare le $\sum_{\alpha}^N m_{\alpha}$ incognite in \underline{t} . Per il SDO (1bis,2bis) sussistono tra gli altri due classici teoremi di esistenza/unicità (sotto certe convenienti restrizioni), fondati su corrispondenti metodi di soluzione costruttivi: il **metodo di Cauchy-Lipschitz**, e il **metodo delle approssimazioni successive**. Questi metodi di soluzione e associati teoremi di esistenza/unicità sono descritti e rispettivamente provati in quasi tutti i testi istituzionali di Analisi nel caso prototipo $N = 1, m \equiv m_t = 1$, quindi con riferimento alla EDO $d_x y = f(x,y)$ con DC $y(\underline{x}) = \underline{y}$.

Tornando al PCN-DP (o semplicemente PCN), i metodi costruttivi per una sua possibile soluzione, e i teoremi di esistenza/unicità che possibilmente gli si associano, formano il nucleo della “teoria locale”. In generale, un teorema di esistenza/unicità della soluzione (in un intorno Ω del punto-base $(\underline{t}, \underline{X})$) non è ottenibile senza imporre convenienti restrizioni alla formulazione ((a) ÷ (d)) del problema. La più nota ed importante possibilità in questo senso (almeno sul piano dei fondamenti) è offerta dal famoso **teorema di Cauchy-Kowalewskaia** (Sophie, 1850-1891; 1875), nel seguito di questa sezione teorema (T_0) . Il teorema (T_0) afferma che, «per il PCN formulato ai punti ((a) ÷ (d)), sotto l’ipotesi che le funzioni $f|_{\pi}, g^{(s')}|_{\omega}$ siano *analitiche* nei loro domini di definizione, esiste un intorno Ω del punto-base $(\underline{t}, \underline{X})$ nel quale esiste e si costruisce *un’unica soluzione analitica*.» Varie dimostrazioni, anche abbastanza diverse tra loro, ma tutte con aspetti tecnici alquanto laboriosi, si trovano nella maggior parte dei trattati specializzati, e anche in alcuni trattati generali di Analisi. Va anche osservato che (T_0) può non valere se qualcuna delle condizioni in ((a) ÷ (d)) (oltre all’analiticità delle $f|_{\pi}, g^{(s')}|_{\omega}$) viene meno. In particolare è questo il caso se, continuando a denotare con m l’ordine della t -derivata a 1° membro della (1), *non è soddisfatta* la $0 \leq |k'| \leq m$.¹¹

¹¹ Un classico esempio in questo senso, dovuto alla stessa Kowalewskaia, è quello della equazione “della conduzione termica” (in una sola dimensione “spaziale” $X^1 \equiv X$) ($^{\circ}$) $u_t = u_{xx}$. Qui $m = 1$ (cfr. la (1)), e la limitazione $|k'| \leq m$ è manifestamente violata perché $k'_t = 0, k'_x = 2$, ossia $|k'| = k'_t + k'_x = 2 > m$. Inoltre la funzione (di u_{xx}) a 2° membro è banalmente analitica. Come si verifica senza difficoltà, la serie di potenze di $t \sum_{h=0}^{\infty} (2h)! t^h (1-X)^{-(2h+1)} / h!$ è infatti una

(T_0) è uno dei pochi teoremi di pertinenza DP di portata del tutto generale; ma forse proprio per questo, presenta serie limitazioni pratiche in ordine alla sua applicabilità. Innanzitutto vi è il suo carattere locale, che lo rende sostanzialmente estraneo a problemi in cui si ricerca una soluzione in un dato aperto con dato “iniziale” sul suo contorno (chiuso), come avviene ad esempio con una EDP del 2° ordine lineare ellittica. Inoltre non è detto che una soluzione costruita per suo mezzo sia stabile nel senso di Hadamard. Ciò ha spinto a ricercare procedure più dirette ed efficaci per la soluzione *di certe classi* di SDP; ma è proprio a questo punto che la teoria delle equazioni/sistemi DP tende a specializzarsi e a suddividersi in un insieme di capitoli sensibilmente indipendenti tra loro. Sul problema di *classificare* i SDP in modo plausibilmente generale ed utile, diremo qualcosa nella prossima sottosezione.

Le equazioni (1, 2) con le quali è formulato il PCN possono essere ridotte ad equazioni equivalenti più convenienti per una sua discussione di principio. Una possibilità è illustrata dal seguente teorema.

T_1 . «A condizione di aumentare convenientemente il numero delle incognite (da N a N^* , un numero che non occorre qui precisare con una formula generale), il generico SDP normale (1) può sempre porsi nella forma di un SDP normale *del 1° ordine quasilineare omogeneo* con coefficienti delle derivate non dipendenti esplicitamente da (t, X) , cioè del tipo:

$$(5) \quad \partial_t u^*(t, X) = \sum_{v=1}^{n-1} G_v(u^*(t, X)) \cdot \partial u^* / dX^v(t, X),$$

dove u^* è la nuova N^* -pla (N^* -colonna) incognita, e G_v sono ($N^* \times N^*$)-matrici dipendenti al più dalla u^* . Alla (5) si aggiunge un DC del tipo:

$$(6) \quad u^*(\underline{t}, X) = g^*(X),$$

dove g^* è una N^* -pla di funzioni di X .» (Ovviamente le G_v , g^* sono unicamente determinate e calcolabili a partire dalle (1, 2).)

La dimostrazione non è difficile una volta che se ne sia compreso il meccanismo nel caso-base di una sola EDP ($N=1$) in una sola incognita u , normale del 1° ordine ($m=1$) e in due sole variabili indipendenti ($(t, X^1 \equiv X)$); cioè, denotando per brevità le derivate parziali mediante sottoscritti, nel caso della

$$(7) \quad u_t(t, X) = f(t, X, u(t, X), u_x(t, X)),$$

con il DC

$$(8) \quad u(\underline{t}, X) = g(X),$$

e sotto l'ipotesi che f e g siano di CdC 1 nei loro domini, un aperto di R^4 e rispettivamente di R . Supposta infatti la u di CdC 2 nel suo dominio (un aperto di R^2) poniamo $u_x \equiv q$ e

soluzione *formale* della (°) con il DC $(1-X)^{-1}$ lungo $t = \underline{t} = 0$. Questo DC è anch'esso analitico per $|X| < 1$, ma la serie diverge per ogni $t \neq 0$.

$$(9_1) \quad u_t \equiv p,$$

quindi

$$(9_2) \quad q_t = p_X,$$

$$(9_3) \quad p_t = f_t + f_u p + f_q p_X.$$

Il sistema DP $(9_{1,2,3})$ nelle u, p, q non è ancora, evidentemente, del tipo (5); ma questo si ottiene subito introducendo le due funzioni “formali” lisce $\tau(t,X) =: t$ e $\eta(t,X) =: X$, soggette dunque alle

$$(9_4) \quad \tau_t = \eta_X (= 1)$$

e

$$(9_5) \quad \eta_t = \tau_X (= 0).$$

Con ciò le precedenti $(9_{1,3})$ diventano infatti

$$(9_1') \quad u_t = p\eta_X,$$

e rispettivamente

$$(9_3') \quad p_t = (f_t + f_u p)\eta_X + f_q p_X,$$

e il sistema $(9_1', 9_2, 9_3', 9_4, 9_5)$ nelle cinque incognite $u^* \equiv (\tau, \eta, u, p, q)$ ha finalmente la forma (5) (quindi in questo caso-base $N^* = 5$). Quanto al DC (8), esso si trasforma a sua volta (ponendovi al solito $\underline{t} = 0$, e denotando con ' la derivata rispetto a X) in:

$$(10_1) \quad \tau(0,X) = 0$$

$$(10_2) \quad \eta(0,X) = X,$$

$$(10_3) \quad u(0,X) = g(X),$$

$$(10_4) \quad p(0,X) = f(0,X,g(X),g'(X)),$$

$$(10_5) \quad q(0,X) = g'(X),$$

ovvero, in

$$(11) \quad u^*(0,X) = g^*(X) \equiv (0,X,g(X),f(0,X,g(X),g'(X)),g'(X)).$$

Si dimostra facilmente, infine, che il sistema DP normale $(9_1', 9_2, 9_3', 9_4, 9_5)$ con il DC $(10_{1,2,3,4,5})$ è *equivalente* al sistema di partenza (7, 8). Questo completa la dimostrazione nel caso-base. Il caso generale si tratta in modo analogo, ma è consigliabile provarci concretamente per convincersene. Così (T_1) è completamente dimostrato. #

Una interessante alternativa alle (5, 6), in certo senso ad esse complementare, è quella in cui si dimostra la possibilità di ridursi ad un SDP del 1° ordine quasilineare *non-omogeneo* equivalente, diciamo (5'), – sempre con tutti i coefficienti, compreso il termine aggiunto a 2° membro, dipendenti al più dall'incognita – e ad un DC *omogeneo*, diciamo 6' (teorema (T_2)). In conclusione, e almeno in linea di principio, i teoremi (T_1) o (T_2) ci consentono di limitare la nostra attenzione a

SDP/DC del tipo (5, 6) o rispettivamente (5', 6'). Di fatto, proprio da SDP/DC del tipo (5, 6) o (5', 6') partono le più comuni dimostrazioni di (T₀).

Supponiamo ora che un dato PC $(f_{|\pi}, g^{(s')}_{|\omega})$ ammetta (sotto certe convenienti restrizioni) un aperto di esistenza/unicità massimale Ω . Tenendo fisso $f_{|\pi}$, è naturale aspettarsi che un tale Ω dipenda in generale dal DC $g^{(s')}_{|\omega}$. Una eccezione notevole è quella dei SDP normali *lineari*, in cui f è del tipo $-\sum_k a_k \cdot \partial_k u + h$, per date $a_k = a_k(t, X)$ e $h = h(t, X)$. In questo caso Ω non dipende che da $f_{|\pi}$, la soluzione essendo la somma di trasformate integrali lineari di h e delle $g^{(s')}$. Per date $(t, X) \in \Omega$, si può allora determinare un aperto $\delta(t, X) \subset \omega$ *minimale*, definito come il più piccolo dei sottoaperti $\delta'(t, X) \subset \omega$ per i quali la soluzione in (t, X) del SDP associato *omogeneo* al SDP dato ($h = 0$) e con $g^{(s')} = 0$ in $\delta'(t, X)$, è nulla. Questo aperto $\delta(t, X)$ si dice **dominio di dipendenza di** (t, X) : un DC non nullo soltanto al di fuori di $\delta(t, X)$ lascia nulla, in (t, X) , la soluzione del dato SDP in cui si faccia $h = 0$. Con riferimento allo stesso SDP normale-lineare, si dice poi **dominio di influenza di un insieme** $\gamma \subset \omega$ quella regione di Ω i cui punti (t, X) hanno domini di dipendenza con punti in γ , cioè per cui $\delta(t, X) \cap \gamma \neq \emptyset$.

In forza della importanza di principio del teorema (T₀), concludiamo questa sottosezione dando la traccia di una sua dimostrazione tra le altre possibili. Possiamo senz'altro partire dalla forma standard (5, 6) del SDP e relativo DC (abolendovi gli asterischi), che semplificheremo ulteriormente facendovi $n = 2$, $(t, X^1 \equiv X) = (0, 0)$, $g(0) = 0$, quindi $u(0, 0) = 0$. La generalizzazione del risultato a $n > 2$ è relativamente semplice una volta che si sia ben compresa la dimostrazione del caso-base $n = 2$.

Scrivendo G per G_1 , la (5) si riduce alla

$$(5bis) \quad u_t(t, X) = G(u(t, X)) \cdot u_X(t, X),$$

e la (6) alla

$$(6bis) \quad u(0, X) = g(X),$$

dove G è una $(N \times N)$ -matrice, e u, g sono N -colonne.

Specificheremo l'analiticità di G intorno a $u = 0$ dicendo che la relativa serie di potenze in u $G(u) = G(0) + \partial_u G(0) \cdot u + (1/2) \partial_{uu}^2 G(0) : uu + \dots$, converge se, per ogni $1 \leq \alpha \leq N$,

$$(12) \quad |u_\alpha| < r$$

per un dato $r > 0$ (ove $| \cdot |$ denota il modulo). Similmente specificheremo l'analiticità di g intorno a $X = 0$ dicendo che la relativa serie di potenze in X converge se

$$(13) \quad |X| < \rho$$

per un dato $\rho > 0$. Secondo la teoria delle serie di potenze, esistono allora due costanti $M' > 0$ e $M'' > 0$ tali che il coefficiente, nello sviluppo di G , della potenza di esponente $j = \langle j_1 \geq 0, \dots, j_N \geq 0 \rangle$ di

u, sia assolutamente $\leq M'/r^{|\mathbf{j}|}$ (con $|\mathbf{j}| =: \sum_{\alpha} j_{\alpha}$); e il coefficiente, nello sviluppo di g, della potenza di esponente $i \geq 1$ di X, sia assolutamente $\leq M''/\rho^i$. Per semplicità, potremo unificare le due costanti M' , M'' nella più grande di esse M. Abbiamo così “estratto” dal problema tre costanti strettamente positive, r, ρ e M.

Consideriamo ora il seguente PCN quasi-lineare del 1° ordine in $v \equiv \langle v^1, \dots, v^N \rangle$:

$$(14_{\beta}) \quad v^{\beta}_t = M \sum_{\alpha} v^{\alpha}_X / (1 - \sum_{\alpha} v^{\alpha} / r)$$

sotto $|\sum_{\alpha} v^{\alpha}| < r$ (v^{α}_t sta per $\partial v^{\alpha} / \partial t$, ecc.), con il DC

$$(15_{\beta}) \quad v^{\beta}(0, X) = MX / (\rho - X)$$

sotto $|X| < \rho$ (per ogni β e α compresi tra 1 e N). Questo problema $(14_{\beta}, 15_{\beta}) \equiv (14, 15)$ (ovviamente le equazioni rimangono le stesse al variare di β) si usa dire **maggiorante** del problema originale (5bis, 6bis), perché la serie di potenze di v [di X] che rappresenta la funzione di v [di X] a 2° membro delle (14) [delle (15)] è **maggiorante** delle analoghe serie di potenze di v [di X] che rappresentano la G(v) [la g(X)].¹² Possiamo verificarlo direttamente nel caso più semplice delle (6bis, 15). Posto $g(X) =: \sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$, per la definizione di M risulta $|a_i| \leq M/\rho^i$. Quindi $M \sum_{i=1}^{\infty} (X/\rho)^i = MX/\rho \sum_{i=0}^{\infty} (X/\rho)^i = MX/(\rho - X)$ sse $|X|/\rho < 1$ (serie geometrica di ragione X/ρ), secondo la tesi.¹³

Supponiamo ora che una soluzione v delle (14, 15) esista in un intorno Ω dell'origine ($t=0, X=0$) (ove $v = 0$) e sia ivi espressa come serie di potenze di (t,X), convergente in Ω , secondo la

$$(16) \quad v(t, X) = \sum_{i=0, k=1} C_{ik} t^i X^k$$

(qui ogni coefficiente C_{ik} è una N-pla). Questa serie (16), si dimostra, è maggiorante della analoga serie

$$(17) \quad u(t, X) = \sum_{i=0, k=1} c_{ik} t^i X^k,$$

soluzione *formale* (cioè fino a quando non se ne dimostri la convergenza), e unicamente determinata, delle (5bis, 6bis). Nella sopraddetta ipotesi, il teorema fondamentale sulle serie maggioranti (vedi nota precedente) assicura che anche la serie (17) converge in Ω . Resta dunque da dimostrare che la serie maggiorante (16) ha un aperto di convergenza.

¹² Una serie di potenze (*) di una o più variabili reali o complesse si dice **maggiorante** di una serie di potenze (**) delle stesse variabili (o equivalentemente la serie (**)) si dice **maggiorata** dalla serie (*) se i coefficienti della serie (*) sono assolutamente \leq dei corrispondenti coefficienti della serie (**) (i quali ultimi devono quindi essere tutti ≥ 0). Il teorema fondamentale sulle serie maggioranti afferma che se una serie di potenze converge in un certo aperto connesso dello spazio delle sue variabili, una serie di potenze delle stesse variabili da essa maggiorata converge nello stesso aperto.

¹³ Volendo fare una simile verifica nel caso delle (5bis, 14), è utile ricordare l'identità, qui limitata per semplicità a due sole variabili (generalmente complesse) (z_1, z_2) : $\sum_{p, q=0}^{\infty} (p+q)! / (p!q!) z_1^p z_2^q = \sum_{s=0}^{\infty} (z_1+z_2)^s = [1 - (z_1+z_2)]^{-1}$, valida sse $|z_1+z_2| < 1$; e inoltre, che $(p+q)! / (p!q!) \geq 1$.

Come si diceva, le (14_β, 15_β) sono tutte identiche al variare di β, e quindi possiamo assumere le v^β uguali fra loro. Denotando con V il comune valore delle v^β, le (14, 15) diventano così

$$(14') \quad V_t = MNV_X / (1 - NV/r)$$

se $N|V| < r$, e rispettivamente,

$$(15') \quad V(0, X) = MX / (\rho - X)$$

se $|X| < \rho$,

nell'unica incognita

$$(18) \quad V(t, X) = \sum_{i=0, k=1} C_{ik} t^i X^k,$$

Ma la soluzione del PCN (14', 15') si costruisce *esplicitamente* con procedure elementari in un conveniente aperto Ω contenente l'origine; quindi la serie (18) converge in tale Ω , e con la (18) convergono in Ω le serie (17) da essa maggiorate, qed.

Quanto all'effettiva espressione della $V(t, X)$ soluzione delle (14', 15'), si verifica facilmente che essa è, per $|X| < \rho$:

$$(19) \quad 2V(t, X)(1 - X/\rho) = r(1 - X/\rho)/N + M(X - rt)/\rho - (D(t, X))^{1/2},$$

purché il discriminante ¹⁴

$$(20) \quad D(t, X) =: [M(X + rt)/\rho - r(1 - X/\rho)/N]^2 - 4M^2 rt/\rho,$$

sia > 0 . Si noti che nell'origine $D(0, 0) = (r/N)^2 > 0$ (secondo la (20)), mentre la (19) dà $2V(0, 0) = r/N - r/N = 0$, come deve essere. Si verifica inoltre che le (19, 20) riproducono la (15') per $t = 0$.

In conclusione Ω è individuato dalla $|X| < \rho$ e dalla combinazione della $N|V| < r$ con le (19, 20), sotto la $D(t, X) > 0$. ¹⁵

Si noterà che questo Ω è soltanto un aperto di convergenza della serie (17), e che possono ben esistere suoi sopraperti con la stessa proprietà. Inoltre l'aperto Ω così individuato non è in generale simmetrico, né rispetto a t né rispetto a X (come sarebbe preferibile); ma anche questo non ha importanza, perché volendo si può sempre ritagliare al suo interno un aperto simmetrico. Ciò che conta, nello spirito del teorema (T₀), è la prova che un aperto di convergenza della serie che rappresenta l'unica soluzione analitica esiste; e pertanto, che tale soluzione esiste unica in esso.

Per altri dettagli e dimostrazioni alternative di (T₀), il lettore può consultare uno dei numerosi trattati che lo discutono; ad esempio, tra quelli elencati nella nota (⁴), Courant-Hilbert, DiBenedetto, Egorov-Shubin, Evans, Folland, Garabedian, Petrovskii, ecc.

¹⁴ In realtà, si tratta proprio del discriminante di una equazione quadratica.

¹⁵ Evidentemente il caso di un SDP (5bis) *lineare* corrisponde a fare $r \rightarrow \infty$ nei precedenti risultati.

5.3.3) IL PROBLEMA DI CAUCHY GENERALIZZATO (PCG) NELLA TEORIA SDP.

S e S' essendo aperti connessi di \mathbb{R}^n , sia $\phi: S \rightarrow S'$ un ($m' \geq 1$)-diffeomorfismo di S su $S' = \phi(S)$. In forza della definizione, $\det\{\partial(\phi)/\partial(x)\} \neq 0 \forall x(\in S)$, e similmente, $\det\{\partial(\phi^{-1})/\partial(x')\} \neq 0 \forall x'(\in S')$; e infine, $\det\{\partial(\phi^{-1})/\partial(x')\}(\phi(x)) = [\det\{\partial(\phi)/\partial(x)\}(x)]^{-1} \forall x(\in S)$ (e viceversa scambiando x con x' , S con S' e ϕ con ϕ^{-1}). Sia poi $u = u(x)$ una funzione reale definita e di CdC $1 \leq m \leq m'$ in un sottoaperto connesso $S_* \subset S$; e sia $u' =: u'(x')$ la funzione definita dalla

$$(1) \quad u'(x') = u(\phi^{-1}(x'))$$

$\forall x'(\in S_*' =: \phi(S_*))$ (quindi per cui $u'(\phi(x)) = u(x) \forall x(\in S_*)$), e dunque della stessa CdC m di u .

È chiaro che, per ogni multindice $k =: \langle k_1, \dots, k_n \rangle$ con $1 \leq |k| \leq m$ (dove al solito $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$), tra le derivate $\partial_k u$ e le derivate $\partial'_{\kappa} u'$ (dove κ è un multindice analogo a k , e ∂' significa derivazione rispetto a x') vale una relazione del tipo ($\forall x(\in S_*)$):

$$(2_k) \quad \partial_k u(x) = \sum_{1 \leq |\kappa| \leq |k|} T_k^{\kappa}(x) \partial'_{\kappa} u'(\phi(x)),$$

in cui $T_k^{\kappa}(x)$ sono coefficienti che si costruiscono in modo unico in termini delle derivate di ϕ fino all'ordine $|k|$ incluso. La (2_k) illustra il cosiddetto **teorema generalizzato della derivazione di funzione di funzione**. L'espressione dei coefficienti $T_k^{\kappa}(x)$ è un po' laboriosa, e qui di non grande interesse. Per $|k| = |\kappa| = 1$, risulta evidentemente, trascurando di esplicitare le variabili indipendenti $x, x' = \phi(x)$:

$$(2_1) \quad \partial_i u = \partial_i x'^r \partial'_r u',$$

ove ∂_i sta per $\partial/\partial x^i$, ecc., i, r sono *indici* variabili tra 1 e n (e non multindici come k e κ), e al solito si somma sugli indici ripetuti. La (2₁) si inverte semplicemente scambiando i simboli con apice con quelli senza apice, quindi:

$$(2_1') \quad \partial'_r u' = \partial'_r x^i \partial_i u.$$

(Questa si giustifica ricordando che la matrice jacobiana $\partial(x')/\partial(x)$ è non singolare e che le matrici $\partial(x')/\partial(x)$ e $\partial(x)/\partial(x')$ sono l'una l'inversa dell'altra nel generico punto $x \leftrightarrow x'$.) La (2₁) è una relazione lineare biunivoca tra le derivate prime di u e quelle di u' nel punto $x \leftrightarrow x'$, e identifica $T_k^{\kappa}(x)$, per $k = \langle 0, \dots, 1, \dots, 0 \rangle$ con l'1 all' i -mo posto, e $\kappa = \langle 0, \dots, 1, \dots, 0 \rangle$, con l'1 all' r -mo posto, con $\partial x'^r / \partial x^i$.

La esplicitazione delle (2_k) si esegue in modo simile per $|k| = 2$, ottenendo:

$$(2_2) \quad \partial^2_{ij} u = \partial^2_{ij} x'^r \partial'_r u' + \partial_i x'^r \partial_j x'^s \partial'^2_{rs} u'.$$

Ancora, e per le stesse ragioni, il sistema (2_{1,2}) si inverte scambiando tra loro i simboli con apice con quelli senza apice. Si noterà anche che la $\partial^2_{ij} x'^r$ a 2° membro della (2₂) può scriversi come

$\partial_{sX}{}^r \partial^2_{ijX}{}^t \partial'_{tX}{}^s \equiv \partial_{sX}{}^r \Gamma_{ij}^s$, e quindi il primo addendo a 2° membro della (2₂) è $u_{/s} \Gamma_{ij}^s$ (mentre il secondo è chiaramente $u_{/ij}$).¹⁶ La (2₂) equivale dunque alla $\partial^2_{ij} u = u_{/ij} + u_{/s} \Gamma_{ij}^s$, secondo la (3.3.2, 8) in cui si sostituisca v_i con $u_i \equiv \partial_i u$. Già a questo livello, questo risultato suggerisce la coincidenza tra la gerarchia delle (2_k) e la relazione generale (3.3.2, 9) riferita alle componenti *covarianti* di un κ -tensore $\tau_{i_1 \dots i_\kappa}$ del tipo $u_{/i_1 \dots i_\kappa}$, quindi *senza* la seconda sommatoria nella (3.3.2, 9).

Proseguendo analogamente per $|k| = 3$, abbiamo:

$$(2_3) \quad \partial^3_{ijh} u = \partial^3_{ijhX}{}^r \partial'_{ru}{}' + (\partial^2_{ihX}{}^r \partial_j X{}^s + \partial^2_{jhX}{}^r \partial_i X{}^s + \partial^2_{ijX}{}^r \partial_h X{}^s) \partial'^2_{rs} u' + \partial_i X{}^r \partial_j X{}^s \partial_h X{}^t \partial'^3_{rst} u',$$

dove l'ultimo addendo a 2° membro è uguale a $u_{/ijh}$; e così via.¹⁷ Ciò che qui importa rilevare è che il sistema delle equazioni (2_k) (per $1 \leq |k| \leq m$) è lineare e unicamente invertibile¹⁸, ponendo così le derivate di u e quelle di u' in una ben definita relazione *biunivoca*. Precisamente, la natura del sistema (2_k) ($1 \leq |k| \leq m$), per il dato ϕ , è tale che riscrivendo le $\sum_{s=1}^m C'_n{}^s \equiv L(n,m) - 1$ equazioni del sistema come

$$(3_k) \quad c_k = \sum_{1 \leq |\kappa| \leq |k|} T_k{}^\kappa \gamma_\kappa,$$

dove c_k e γ_κ , considerate come funzioni di multindici, sono invarianti rispetto a permutazioni arbitrarie dei loro multindici (ad esempio, per $n = 2$, $c_{(k_1, k_2)} = c_{(k_2, k_1)}$, $k_1 + k_2 \leq m$). Gli insiemi $\{c_k\}_{1 \leq |k| \leq m}$ e $\{\gamma_\kappa\}_{1 \leq |\kappa| \leq m}$ (entrambi con $L(n,m) - 1$ elementi distinti), sono così posti in relazione biunivoca: dato uno dei due, l'altro è unicamente determinato. (Per brevità, nel seguito scriveremo spesso $\{c_k\}$ in luogo di $\{c_k\}_{1 \leq |k| \leq m}$, e $\{\gamma_\kappa\}$ in luogo di $\{\gamma_\kappa\}_{1 \leq |\kappa| \leq m}$.) Come suggeriscono le prime tre (2_k) riportate esplicitamente, i coefficienti $T_k{}^\kappa$ ($1 \leq |\kappa| \leq |k|$) sono esprimibili come somme di prodotti di derivate di ϕ , dall'ordine 1 all'ordine $|k|$ incluso, tali che la somma degli ordini delle derivate-fattori è $|k|$. Alle (2_k) ($1 \leq |k| \leq m$) si può infine aggiungere la

$$(2_0) \quad u = u',$$

cioè la (1) (che corrisponde a $|k| = |\kappa| = 0$); quindi alle (3_k) la

$$(3_0) \quad c_0 = \gamma_0,$$

dove il pedice ₀ sta brevemente per $\langle 0, \dots, 0 \rangle_n$ volte.

Le equazioni (2_k) ($0 \leq |k| \leq m$) si generalizzano in modo ovvio se u e u' sono $(N \geq 1)$ -ple di funzioni $u_{1 \leq \beta \leq N} = u'_{1 \leq \beta \leq N}$, ciascuna di CdC $m_\beta \geq 1$, purché si supponga $m' \geq \max_\beta(m_\beta)$. (Una scelta frequente, per tale CdC di ϕ , è $m' = \infty$, o addirittura quella di supporre ϕ un diffeomorfismo

¹⁶ Ricordiamo che i Γ_{ij}^s sono i simboli di Christoffel di 2^a specie, e $/$ denota derivazione covariante. (cfr. S.sez. 3.3.2).

¹⁷ Oltre alla $u_i = \partial_i u$ e alla $u_{/ij} = \partial_j u_i - u_{/s} \Gamma_{ij}^s$, la terza equazione del tipo (3.3.2, 9) da usare per riottenere la (2₃) è ovviamente la $u_{/ijh} = \partial_h u_{/ij} - u_{/ir} \Gamma_{jh}^r - u_{/jr} \Gamma_{ih}^r$.

¹⁸ Nonché, in un senso che il lettore non avrà difficoltà ad intendere, anche "triangolare".

analitico-reale.) Corrispondentemente, i numeri c_k e γ_k si considereranno come N-ple di numeri, $c_{k,\beta}$ e $\gamma_{k,\beta}$.

Ciò premesso, passiamo ad occuparci del **problema di Cauchy generalizzato**, PCG. Innanzitutto,

(a) per i dati $n \geq 1$, $N \geq 1$, siano F_α ($1 \leq \alpha \leq N$) N funzioni date di $(x, \{c_{k,\beta}\}_{0 \leq |k| \leq m_\beta})$, $m_\beta \geq 1$ ($1 \leq \beta \leq N$) – o come diremo brevemente, sia $F \equiv \langle F_1, \dots, F_N \rangle$ una N -pla data di funzioni di $(x, \{c_k\}_{0 \leq |k| \leq m})$ ($\equiv (x, \{c_k\})$), con $m \equiv \langle m_1, \dots, m_N \rangle$ –, di CdC 1 in un intorno $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^{n+M}$ (M essendo definito come nella S.sez 5.3.2) di un punto-base $(\underline{x}, \{\underline{c}_k\})$ nel quale F è nulla. Supporremo poi che per ogni β (indice di c e di m) esistano un k con $|k| = m_\beta$ ed un α (indice di F) per i quali $\partial F_\alpha / \partial c_{k,\beta} \neq 0$ nel punto-base $(\underline{x}, \{\underline{c}_{k,\beta}\})$; vale a dire che, per ogni β , qualche α e qualche k con $|k| = m_\beta$, F_α dipenda *sostanzialmente* da $c_{k,\beta}$ intorno al punto-base. Diremo $\Lambda \subset \Lambda^*$ l'insieme dei $(x, \{c_k\})$ di Λ^* per i quali è anche $F(x, \{c_{k,\beta}\}) = 0$. Ovviamente, Λ è un aperto di \mathbb{R}^{n+M-N} , intorno del punto-base $(\underline{x}, \{\underline{c}_{k,\beta}\})$. #

(b) la formulazione del PCG parte da un SDP del tipo

$$(4) \quad F(x, \{\partial_k u\}_{0 \leq |k| \leq m}) \equiv F(x, \{c_k u\}) = 0,$$

(con F definita come in a)), in una N -pla incognita $u = u(x)$ definita e di CdC m in un comune intorno Ω di \underline{x} , per il quale $x \in \Omega \Rightarrow (x, \{\partial_k u\}) \in \Lambda$. #

Escluderemo qui che $F(x, \{\partial_k u\})$ possa essere della forma $\partial_{|m} u(t, X) - f(t, X, \{\partial_k u(t, X)\})$ per una certa scelta di una variabile $x^1 \equiv t$ tra le x e per una certa f , avendo definito X e k' come nella S.sez. 5.3.2; in caso contrario, infatti, avremmo un PCN assegnando le convenienti condizioni iniziali sul $(n-1)$ -piano $t = \underline{t}$. Possiamo tuttavia disporre del diffeomorfismo ϕ per tentare di riportarci ad un tale PCN. Precisamente, supponendo $S (\equiv \text{dom} \phi) \supset \Lambda_x (\equiv x\text{-proiezione di } \Lambda)$, porremo $x' = \phi(x) \equiv (\tau, \xi)$ con $\tau = \tau(x) = \phi^1(x)$ e $\xi \equiv \xi(x) \equiv \langle \xi^1 = \phi^2(x), \dots, \xi^{n-1} = \phi^n(x) \rangle$. Naturalmente scriveremo $\underline{\tau}$ per $\tau(\underline{x})$ e $\underline{\xi}$ per $\xi(\underline{x})$. Come sappiamo, in ogni $x \in S$ ϕ stabilisce una relazione biunivoca tra gli insiemi $\{c_k\} (\equiv \{c_k\}_{0 \leq |k| \leq m})$ e $\{\gamma_k\} (\equiv \{\gamma_k\}_{0 \leq |k| \leq m})$; quindi ϕ è una biiezione che porta $(x, \{c_k\}) \in \Lambda$ in $(\tau, \xi, \{\gamma_k\}) \in \Lambda'$ (\equiv immagine di Λ attraverso ϕ , $\Lambda' = \phi(\Lambda)$). Ovviamente lo stesso vale per ϕ^{-1} scambiando $(x, \{c_k\})$ con $(\tau, \xi, \{\gamma_k\})$ e Λ con Λ' . Per i nostri scopi, nel seguito basterà scrivere $c_k = c_k(\tau, \xi, \{\gamma_{\kappa}\}_{0 \leq |\kappa| \leq |k|})$ e $\gamma_k = \gamma_k(x, \{c_{\kappa}\}_{0 \leq |\kappa| \leq |k|})$. È anche naturale scrivere $\underline{\gamma}_k$ per $\gamma_k(\underline{x}, \{\underline{c}_{\kappa}\}_{0 \leq |\kappa| \leq |k|})$.

Per il dato ϕ , porremo

$$(5) \quad \Phi(\tau, \xi, \{\gamma_{\kappa}\}_{0 \leq |\kappa| \leq |m|}) =: F(x, (\tau, \xi), \{c_k(\tau, \xi, \{\gamma_{\kappa}\}_{0 \leq |\kappa| \leq |k|})\}_{0 \leq |k| \leq |m|}),$$

per ogni $(\tau, \xi, \{\gamma_{\kappa}\}) \in \Lambda'$. Come F è di CdC 1 in Λ , Φ è di CdC 1 in Λ' , e come F è nullo in $(\underline{x}, \{\underline{c}_k\})$, Φ è nullo in $(\underline{\tau}, \underline{\xi}, \{\underline{\gamma}_{\kappa}\})$. Il SDP (4) si trascrive così nell'equivalente

$$(4') \quad \Phi(\tau, \xi, \{\partial'_{\kappa} u'\}) = 0$$

per la N-incognita $u'(\tau, \xi) \equiv u(x)$ di CdC m nell'intorno Ω' di $(\underline{\tau}, \underline{\xi})$ immagine attraverso ϕ di Ω (vale quindi l'implicazione $(\tau, \xi) \in \Omega' \Rightarrow (\tau, \xi, \{\gamma_{\kappa}\}) \in \Lambda'$).

L'idea è quella di attribuire alla $(n-1)$ -varietà $\tau(x) = \underline{\tau}$ di \mathbb{R}^n , passante per \underline{x} , il ruolo che nel PCN aveva il $(n-1)$ -piano $t = \underline{t}$. A questo scopo occorre prevedere l'invertibilità locale, in un intorno di $(\underline{\tau}, \underline{\xi}, \{\gamma_{\kappa}\})$, della

$$(5\text{bis}) \quad \Phi(\tau, \xi, \{\gamma_{\kappa}\}_{0 \leq |\kappa| \leq |m|}) = 0$$

rispetto a $\gamma_{|m} =: \gamma_{\langle m, 0, \dots, 0 \rangle}$. Per il teorema della funzione implicita, ciò equivale alla

$$(6) \quad \det\{\partial(\Phi)/\partial(\gamma_{|m})\} \neq 0;$$

ovvero, esplicitando gli indici α e β sottaciuti,

$$(6\text{bis}) \quad \det\{(\partial\Phi_{\alpha}/\partial\gamma_{|m\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq N}\} \neq 0$$

nel punto-base $(\underline{\tau}, \underline{\xi}, \{\gamma_{\kappa}\})$.

Se la (6) è soddisfatta, il SDP (4') equivale localmente ad un SDP normale del tipo

$$(4'\text{bis}) \quad \partial'_{|m} u' = \varphi(\tau, \xi, \{\partial'_{\kappa'} u'(\tau, \xi)\})$$

(dove κ' è definito come k' nella S.sez. 5.3.2, cioè con i vincoli $0 \leq \kappa'_i < m$, $0 \leq \kappa' \leq m$) in un intorno $\subset \Lambda'$ del punto-base, per una (unica) φ ivi di CdC 1¹⁹ dei suoi argomenti. In questo caso saremo ridotti ad un PCN assegnando le convenienti condizioni iniziali sulla $(n-1)$ -varietà $\tau(x) = \underline{\tau}$.

Ci si aspetta che esistano diffeomorfismi ϕ che assicurano una tale riduzione. Per rendercene conto, studiamo la condizione “critica” che *nega* la (6), ovvero la

$$(7) \quad \det\{\partial(\Phi)/\partial(\gamma_{|m})\} = 0$$

in un intorno del punto-base. Se vale la (7), la (4') *non* può essere posta nella forma equivalente (4'bis) in alcun intorno del punto-base, ad es. perché tale intorno non esiste, oppure perché la φ non è ivi unica, o non ha la corretta CdC, ecc. D'altra parte la (7) ci dice quali sono i diffeomorfismi ϕ che *non* consentono la riduzione del PCG di partenza ad un PCN del tipo (4'bis). Come si intuisce, di questi diffeomorfismi sarà significativa la sola componente ϕ^1 , ossia la funzione $\tau(x)$ che individua le $(n-1)$ -varietà iniziali “cattive”.

A questo scopo, ci proponiamo di esprimere il $\det\{\partial(\Phi)/\partial(\gamma_{|m})\}$ in termini della F di partenza e di ϕ . Sempre sottintendendo un indice β variabile tra 1 ed N in c_{κ} , γ_{κ} e $m \equiv \langle m_1 \geq 1, \dots, m_N \geq 1 \rangle$, un attento esame delle relazioni (3_k) prova che:

¹⁹ È questa la sola difformità sostanziale tra la (4'bis) e la (5.3.2, 1), nella quale ultima si chiedeva soltanto la continuità della f. Da una parte questa è una conseguenza automatica del teorema della funzione implicita, e dall'altra, come si vedrà, la più forte richiesta attuale è necessaria agli sviluppi che seguono appresso.

- 1) per $|k| = m$, $c_k = \gamma_{|m|} (\partial_x \tau)^k$ + combinazione lineare delle γ_κ con $1 \leq |\kappa| \leq |k|$. In questa, ∂_x sta per $\langle \partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n \rangle$ e, se $a \equiv \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $|a|^k$ è un'abbreviazione per $\prod_{i=1}^n (a_i)^{k_i}$ (produttoria da 1 a n delle potenze di esponente k_i di a_i);²⁰
- 2) per $1 \leq |k| < m$ (se $m > 1$), $c_k =$ combinazione lineare delle γ_κ , con $1 \leq |\kappa| \leq |k|$;
- 3) per $|k| = 0$, cioè $k = \langle 0, \dots, 0 \rangle_n$ volte, $c_0 = \gamma_0$.

Ciò significa che se $\gamma_{|m|}$ viene variato di $\delta\gamma_{|m|}$ mentre tutte le altre γ_κ con $\kappa \neq \langle m, 0, \dots, 0 \rangle$ sono tenute fisse, le sole c_k che possono variare sono quelle con $|k| = m$, avendosi allora una corrispondente variazione di tali c_k data da $(^+) \delta c_k = \delta\gamma_{|m|} (\partial_x \tau)^k$. Le variazioni di Φ e di F (si ricordi che queste funzioni sono entrambe C^1 per ipotesi) sono $\delta\Phi = \sum \partial\Phi/\partial\gamma_{|m|} \delta\gamma_{|m|}$ (dove la sommatoria si riferisce all'indice sottaciuto in γ e m), e rispettivamente $\delta F = \sum \sum_{|k|=m} \partial F/\partial c_k \delta c_k$ (dove similmente la prima sommatoria si riferisce all'indice sottaciuto in c e m). Sostituendo in quest'ultima l'espressione $(^+)$ di δc_k , e tenendo conto della $\delta\Phi = \delta F$ e della arbitrarietà della $\delta\gamma_{|m|}$, concludiamo che:

$$(8) \quad \partial\Phi/\partial\gamma_{|m|} = \sum_{|k|=m} \partial F/\partial c_k (\partial_x \tau)^k.$$

Scritta per esteso, questa ha un indice comune $1 \leq \alpha \leq N$ in Φ e F e un indice comune $1 \leq \beta \leq N$ in γ , c e m , ed è quindi un'uguaglianza tra due $(N \times N)$ -matrici. Gli elementi della colonna (β) della matrice a 2° membro sono polinomi omogenei di grado m_β nelle n componenti del gradiente di τ , con coefficienti funzioni continue di $(x, \{c_k\})$. Sostituendo la (8) nella condizione di regolarità (6), otterremo quindi, per la data τ ,

$$(6ter) \quad \det \left[\sum_{|k|=m} \partial(F)/\partial(c_k)(\underline{x}, \{c_h\}_{0 \leq h \leq m}) (\partial_x \tau(\underline{x}))^k \right] \neq 0,$$

dove per maggior chiarezza si è ora posta tra [] la matrice della quale si deve prendere il determinante. Sostituendola invece nella condizione di criticità (7), avremo:

$$(9) \quad \det \left[\sum_{|k|=m} \partial(F)/\partial(c_k)(x, \{c_h\}_{0 \leq h \leq m}) (\partial_x \tau(x))^k \right] = 0,$$

che può vedersi come una EDP del 1° ordine per l'incognita τ in un intorno del punto-base.

Considerata da un punto di vista algebrico, e per maggior chiarezza esplicitandovi gli indici α e β prima sottaciuti, la (9) è del tipo

$$(10) \quad \det \left[\sum_{|k|=m_\beta} C_{\alpha\beta,k} |z|^k \right] = 0,$$

dove $C_{\alpha\beta,k}$ è l'elemento $(\alpha\beta)$ di una $(N \times N)$ -matrice affetta dal multindice k (con $|k| = m_\beta$) e $z \equiv \langle z_1, \dots, z_n \rangle \neq \langle 0, \dots, 0 \rangle_n$ volte una n -pla di numeri complessi non tutti nulli; vale a dire, dove $z \in \mathbb{C}^n$ ha preso il posto di $\partial_x \tau$. La colonna (β) della matrice è un polinomio omogeneo (a coefficienti reali)

²⁰ A buona ragione, L. Schwartz scrive $|a|^k$ semplicemente come a^k . Abbiamo tuttavia preferito non eccedere in questa tendenza alla sintesi notazionale, che può richiedere troppa attenzione da parte del lettore non specialista.

di grado m_β nelle componenti z_1, \dots, z_n di z , e quindi il determinante della stessa matrice è un polinomio omogeneo di grado $\mu =: \sum_{\beta=1}^N m_\beta$ nelle stesse componenti. La (10) è insomma l'equazione di un cono algebrico (a coefficienti reali) di \mathbf{C}^n col vertice nell'origine di \mathbf{C}^n , di grado μ (cioè una varietà a $n - 1$ dimensioni (complesse) di \mathbf{C}^n). Questo cono è composto di μ falde (complesse) non necessariamente distinte: infatti la (10) è una equazione algebrica omogenea di grado μ in z , ed ha appunto μ soluzioni non necessariamente distinte. I coefficienti (reali) $C_{\alpha\beta,k}$ del cono (9) sono poi funzioni continue degli $n + M - N$ parametri liberi $(x, \{c_k\})$. Dovendo alla fine z identificarsi con il gradiente di una funzione reale, di questo cono (9) interessa essenzialmente la parte reale, che (se non è vuota) è una varietà a $n - 1$ dimensioni (reali) di \mathbf{R}^n . Il cono (9), o più spesso la sua parte reale, si dice **cono normale** del SDP (4) in $(x, \{c_k\})$. La matrice $\sum_{|k|=m} \partial(F)/\partial(c_k)(x, \{c_h\}_{0 \leq |h| \leq m}) (z)^k$ si dice **matrice caratteristica**, e il suo determinante **forma caratteristica**, del DSP (4), in $(x, \{c_h\})$. La forma caratteristica si usa denotare brevemente come $Q(x, \{c_h\}|z)|_F$, o anche, sottintendendo il riferimento a F , come $Q(x, \{c_h\}|z)$.

Sia ora $u = u(x)$ una soluzione del SDP (4) di CdC m in un aperto Ω di \mathbf{R}^n (ovviamente supporremo che, per tale u , $x \in \Omega$ implichi $(x, \{\partial_k u\}) \in \Lambda$), e trascriviamo la (9) sostituendovi $\partial_h u(x)$ a c_h . I coefficienti del cono normale dipendono allora soltanto da x (per la data u , attraverso le sue derivate $\partial_h u(x)$). Scritta per esteso, la (9) diventa così

$$(11) \quad \det \left[\sum_{|k|=m_\beta} \partial F_\alpha / \partial c_{k,\beta}(x, \{\partial_h u(x)\}_{0 \leq |h| \leq m_\beta}) (\partial_x \tau(x))^k \right] \equiv Q(x, \{\partial_h u(x)\} | \partial_x \tau(x))|_F = 0$$

per ogni $x \in \Omega$. Sarà comodo denotare con $C(x|u)|_F$, o semplicemente come $C(x|u)$, questo cono normale (non la sua equazione $Q = 0$), con ciò intendendosi che i parametri in esso presenti sono x , le u_β , e le loro derivate parziali fino all'ordine m_β , sotto i vincoli (4), per un totale di $n + M - N$ parametri liberi. Le generatrici della parte reale di $C(x|u)$, $\mathcal{RC}(x|u)$ (supposta non vuota), si dicono **direzioni caratteristiche** del SDP (4), **in x e relative a u** , o brevemente **in $(x|u)$** . Per evidenziarne la dipendenza da x (per la data u), è utile pensare il vertice di $\mathcal{RC}(x|u)$ posto in x : si ottiene così, al variare di x in Ω , un **campo di coni normali** (parte reale) in Ω . Ad ogni generatrice del cono normale $\mathcal{RC}(x|u)$ si associa biunivocamente un $(n-1)$ -piano di \mathbf{R}^n ad essa normale, che sarà ancora utile pensare passante per x . Questo piano si dice **$(n-1)$ -piano caratteristico del SDP (4) in $(x|u)$** .

Per data u , la EDP del 1° ordine (11) per τ si dice **equazione caratteristica del SDP (4) relativa a u** . La sua natura è manifestamente tale che se $\tau(x|u)$ ne è una soluzione, anche $A\tau(x|u) + B$, con $A \neq 0$, B costanti, lo è. Sempre per data u , sia $\tau(y|u)$ una tale soluzione per y in un intorno $\subset \Omega$ di $x \in \Omega$: l'equazione in y $\tau(y|u) = \tau(x|u)$ individua allora (localmente) una varietà $(n-1)$ -dim di \mathbf{R}^n passante per x , che si dice **varietà caratteristica del SDP (4) relativa a u e**

passante per x , o brevemente **in** $(x|u)$. Va da sé che il $(n-1)$ -piano tangente a una varietà caratteristica in $(x|u)$ è caratteristico in $(x|u)$, e che una varietà caratteristica è involupata da piani caratteristici.

Come si vede, la nozione di varietà caratteristica di un dato SDP *non è*, in generale, *intrinseca*, ma è da riferire ad una sua soluzione. La sola eccezione è quella di un SDP semilineare, perché allora la $F(x, \{c_k\})$ è del tipo $\sum_{|k|=m} a_k(x) \cdot c_k + a_0(x, \{c_h\}_{0 \leq |h| < m})$, e non vi è traccia di u nelle matrici $\partial(F)/\partial(c_k)$ con $|k| = m$.²¹ Poiché molti importanti SDP/EDP della fisica-matematica sono lineari o semilineari, vi è una naturale ma errata tendenza a ritenere il concetto di varietà caratteristica di un dato e generico SDP (4) come qualcosa di indipendente dalle sue soluzioni anche nel caso generale. Lo studio delle varietà caratteristiche – relative a sue soluzioni – di un dato SDP è spesso nominato come sua **analisi caratteristica**.

Sebbene non se ne parli molto nella letteratura corrente, esiste un certo e giustificato scetticismo sulla possibilità di stabilire una classificazione dei SDP che sia ad un tempo *universale e utile*.²² Un buon modo di partire in questa direzione sembra comunque quella di fare riferimento alle *proprietà algebriche dei relativi coni normali*. La loro classificazione è così soltanto rinviata a quella dei coni normali, ma almeno il problema è posto su una base sensata. Naturalmente una condizione necessaria alla “obiettività” di un criterio di questo tipo è che la struttura algebrica di un cono normale sia invariante a fronte di una trasformazione diffeomorfa (di sufficiente CdC) $x \leftrightarrow x'$, $u \leftrightarrow u'$, con $u'(x') = u(x)$. Non occorre riflettere molto per capire che tale condizione è assicurata dalla stessa definizione di cono normale, vedi la (11).

Ad esempio può avvenire che il cono normale di un dato SDP *semilineare* $F = 0$, $C(x)|_F$, sia *privo* di parte reale: allora quel SDP potrà dirsi **ellittico** ($\epsilon' \lambda \lambda \epsilon \iota \psi \iota \zeta \equiv$ mancanza), almeno in senso lato. Al contrario, può avvenire che il cono $C(x)|_F$ sia *tutto* reale e non degenerare (cioè a falde distinte): allora il SDP potrà dirsi **totalmente iperbolico** ($\upsilon \pi \epsilon \rho \beta \circ \lambda \eta' \equiv$ eccesso). Naturalmente un tale criterio è assai incompleto (non comprendendo alcun caso intermedio), e in pratica si applica soltanto a SDP semilineari; ma è logico e di fatto utile. Vi è inoltre un caso di EDP generalmente non lineare in cui il criterio si applica senza complicazioni, quello della generica EDP del 1° ordine nel piano (x, y)

$$(12) \quad F(x, y, u, p \equiv u_x, q \equiv u_y) = 0,$$

²¹ La connessione tra varietà caratteristiche e soluzioni di un SDP rimane in generale, invece, nel caso di SDP quasi-lineari, pur potendosi allora dire che le $\partial(F)/\partial(c_k)$ con $|k| = m$ sono indipendenti dalle $\{\partial_k u\}_{|k|=m}$.

²² Una testimonianza di questo scetticismo è ad esempio la seguente, dovuta a L. Evans (1998): «It is unsatisfactory to “classify” partial differential equations: this is possible in two variables, but creates the false impression that there is some kind of general and useful classification scheme available generally.»

dove F è funzione di CdC 1 delle cinque (infatti $2 + L(2,1) = 2 + 3 = 5$) variabili x, y, u, p, q (vedi Sez. 5.4). L'equazione del cono normale $C(x|u)$ è

$$(13) \quad \partial F / \partial p z_x + \partial F / \partial q z_y = 0,$$

e rappresenta una retta del piano (x, y) , con coefficienti $\partial F / \partial p$, $\partial F / \partial q$ generalmente dipendenti da (x, y, u, p, q) . Questo è l'esempio più elementare di EDP con cono normale interamente reale, quindi di EDP iperbolica; come era del resto facilmente prevedibile, dovendo in questo caso la forma caratteristica (omogenea in z) essere di 1° grado. Analoghe conclusioni valgono se al 2-piano (x, y) si sostituisce \mathbb{R}^n .

A titolo di esercizio/applicazione, proseguiamo con una discussione (sostanzialmente ispirata a quella che si trova in Courant-Hilbert, loc. cit.) dell'analisi caratteristica della generica EDP del 2° ordine semilineare nel piano (x, y) :

$$(14) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + f(u, u_x, u_y) = 0,$$

dove per ipotesi a, b, c non sono simultaneamente nulli, e per brevità non si è esplicitata la dipendenza da (x, y) in a, b, c e f . La (14) può considerarsi un prototipo per eccellenza delle EDP di interesse fisico-matematico. La corrispondente equazione del cono normale (in (x, y)) si determina immediatamente nella

$$(15) \quad a z_x^2 + 2b z_x z_y + c z_y^2 = 0,$$

In questa, cominceremo col supporre uno dei due coefficienti a, c diverso da zero; ad esempio a , senza perdita di generalità in forza della simmetria della (15) rispetto a (x, y) . Allora non può essere $z_y = 0$, perché la (15) implicherebbe che simultaneamente $z_x = 0$, mentre z deve essere comunque diversa da $\langle 0, 0 \rangle$. Posto $p =: z_x / z_y$, riscriviamo la (15) come $a p^2 + 2b p + c = 0$, da cui $p = p_{\pm} = (-b \pm \sqrt{(b^2 - ac)}) / a$. Se il discriminante $b^2 - ac < 0$, le due radici sono complesse coniugate e il cono normale è privo di parte reale (equazione ellittica). Se invece $b^2 - ac > 0$, il cono normale è tutto reale, e consiste delle due rette di equazione $z_x = z_y p_{\pm}$ (equazione totalmente iperbolica). Se infine $b^2 - ac = 0$, il cono degenera nell'unica retta reale (contata due volte) $z_x = (-b/a) z_y$. Per ovvie ragioni, l'equazione (14) si dice **parabolica** in questo caso degenerare.²³ Supponendo invece $a = 0$, e quindi $z_y(2b z_x + c z_y) = 0$, abbiamo le due generatrici $z_y = 0$ e $2b z_x + c z_y = 0$ (nella seconda equazione b e c non possono essere simultaneamente nulle). Possiamo distinguere tre casi, e cioè: (i) $b \neq 0$ e $c \neq 0$, in cui la seconda generatrice è $z_y = -2b z_x / c$; (ii) $b = 0$ e $c \neq 0$, in cui la seconda generatrice coincide con la prima che va contata due volte; (iii) $c \neq 0$ e $b = 0$, in cui le due generatrici sono perpendicolari, coincidendo con gli assi $z_y = 0$ e $z_x = 0$.

²³ Si tenga presente che esiste una definizione molto più generale di "parabolicità", vedi ad es. Eidel'man, loc. cit.

Per riassumere: se $a \neq 0$, il cono è complesso se il discriminante è negativo, oppure reale a due falde (discriminante positivo) o degenerare a una falda (discriminante nullo); se $a = 0$, il cono è comunque reale con le distinte possibilità (i) (a due falde), (ii) (a una falda), (iii) (a due falde). Il caso ellittico “canonico” si ha per $a = c = 1, b = f = 0$ ($\rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0$, equazione di Laplace); quello (totalmente) iperbolico “canonico” per $a = -c = 1, b = f = 0$ ($\rightarrow u_{xx} = u_{yy}$, equazione “delle onde”, o “della corda vibrante”, ecc.). Se infine $a = 1, b = c = 0$ e $f = -u_y$ si ha il caso parabolico canonico ($\rightarrow u_{xx} = u_y$, equazione “della conduzione termica” o “del calore”, ecc.). Questi risultati si generalizzano in modo ovvio se in luogo di x vi sono $n - 1$ variabili x^1, \dots, x^{n-1} , per un totale di n variabili x^1, \dots, x^{n-1}, y . Come si vede, l’analisi caratteristica della (14) (o delle sue generalizzazioni appena menzionate) è elementare, ed è stata riportata soprattutto alla luce della eccezionale importanza della (14) sul piano delle applicazioni fisico-matematiche.

L’equazione (14) ha ancora qualcosa da dirci sotto altri ma connessi profili. Poniamo innanzitutto:

$$(16) \quad \xi = \phi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

dove le (ϕ, ψ) sono di $CdC \geq 2$, e vale la condizione di invertibilità locale

$$(17) \quad \phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x \neq 0.$$

Le (16, 17) descrivono il generico diffeomorfismo dello spazio indipendente appropriato alla (14). Il teorema della derivazione di funzione di funzione (v. precedente sottosezione) dà allora, con le attuali notazioni:

$$(18_1) \quad u_x = u_\xi \phi_x + u_\eta \psi_x, \quad u_y = u_\xi \phi_y + u_\eta \psi_y,$$

$$(18_2) \quad u_{xx} = u_{\xi\xi} \phi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \phi_x \psi_x + u_{\eta\eta} \psi_x^2 + \dots$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \phi_x \phi_y + u_{\xi\eta} (\phi_x \psi_y + \phi_y \psi_x) + u_{\eta\eta} \psi_x \psi_y + \dots$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \phi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \phi_y \psi_y + u_{\eta\eta} \psi_y^2 + \dots$$

dove i ... rappresentano termini che non contengono derivate seconde di u . Con manipolazioni elementari, si verifica subito che l’operatore differenziale del 2° ordine in u a 1° membro della (14), o sua “parte principale” $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$, nelle nuove variabili (ξ, η) diventa uguale a $\alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta}$, avendo posto:

$$(19) \quad \alpha =: a\phi_x^2 + 2b\phi_x\phi_y + c\phi_y^2$$

$$\beta =: a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y$$

$$\gamma =: a\psi_x^2 + 2b\phi_x\psi_x\psi_y + c\psi_y^2.$$

Si verifica anche che il sistema lineare (19) che lega le (a,b,c) alle (α,β,γ) è non singolare (il suo determinante vale infatti $(\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)^3 \neq 0$); quindi, la condizione che le (a,b,c) non siano

simultaneamente nulle *equivale* a quella che non lo siano le (α, β, γ) . Un'altra conseguenza delle (17) immediatamente accertabile è che

$$(20) \quad \beta^2 - \alpha\gamma = (b^2 - ac)(\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)^2;$$

e quindi il cono normale dell'equazione trasformata della (14) (nelle nuove variabili (ξ, η)) ha discriminante dello stesso segno di [nullo come] quello della equazione originale. Quanto alla z (generatrice del cono normale originale), se la si trasforma nella ζ definita dalle relazioni lineari e invertibili:

$$(21) \quad z_x = \zeta_x\phi_x + \zeta_y\psi_x, \quad z_y = \zeta_x\phi_y + \zeta_y\psi_y$$

(il loro determinante è il solito $\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x$), allora risulta

$$(22) \quad az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = \alpha\zeta_x^2 + 2\beta\zeta_x\zeta_y + \gamma\zeta_y^2;$$

cioè le forme caratteristiche delle due equazioni sono uguali, e i due coni normali si trasformano l'uno nell'altro mediante una trasformazione lineare invertibile. L'analisi caratteristica della $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \dots = 0$ e quella della $\alpha u_{\xi\xi} + 2\beta u_{\xi\eta} + \gamma u_{\eta\eta} + \dots = 0$ decorrono dunque parallelamente con gli stessi risultati, in accordo con il già illustrato principio generale di invarianza. È anche possibile approfittare della arbitrarietà del diffeomorfismo (ϕ, ψ) per ridurre l'equazione trasformata alla corrispondente forma canonica $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dots = 0$ nel caso ellittico, $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \dots = 0$ (o a preferenza $u_{\xi\eta} + \dots = 0$) nel caso totalmente iperbolico, e $u_{\xi\xi} + \dots = 0$ nel caso parabolico.

Avviandoci a concludere la sottosezione, è opportuno accennare al cosiddetto PCG **caratteristico**, cioè al PCG nell'intorno di un dato pezzo Σ di varietà caratteristica, dove il SDP di partenza *non* ammette un'unica forma normale equivalente. In questo caso i DC su Σ non possono essere assegnati arbitrariamente, ma devono in generale soddisfare a certe condizioni imposte dal SDP stesso. Se ciò si verifica, ed è assicurata l'esistenza di una soluzione, la sua unicità può richiedere che siano imposte condizioni supplementari sulla classe delle soluzioni considerate. Ad esempio per la EDP della conduzione termica, scritta ormai come $u_t = u_{xx}$, il cono normale è $z_x^2 = 0$, quindi la retta $t = 0$ (ad es.) è caratteristica (due volte), e il PC caratteristico per $t \geq 0$ ammette una soluzione unica soltanto nella classe delle funzioni che non crescono più velocemente di $\exp(x^2)$ per $|x| \rightarrow \infty$; se l'esponente 2 su x è sostituito con $2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, l'unicità può venire a mancare.

Un altro esempio importante per le sue applicazioni alla fisica è quello del sistema delle due equazioni nelle incognite reali (u, v)

$$(23) \quad \partial_x^2 u - \partial_t v = 0, \quad \partial_x^2 v + \partial_t u = 0.$$

Qui il cono normale è $z_x^4 = 0$, quindi la retta $t = 0$ (ad es.) è caratteristica 4 volte. Si verifica subito che il prototipo della equazione di Schrödinger in una dimensione spaziale, $i\partial_t \psi + \partial_x^2 \psi = 0$,

$i = \sqrt{-1}$, nella incognita complessa ψ (la funzione d'onda), equivale alle (23) quando si ponga $u =: \operatorname{Re}\psi$, $v =: \operatorname{Im}\psi$. I fisici usano dire che “l'equazione di Schrödinger è tempo-reversibile”. Questo asserto va inteso con *due* grani di sale. Il primo grano riguarda il fatto appena rilevato che la retta $t = 0$ è caratteristica per il sistema (23), e quindi l'esistenza-unicità della soluzione intorno ad essa è garantita soltanto sotto convenienti restrizioni. Inoltre (secondo grano), evidentemente le (23) non restano invariate quando vi si scambia ∂_t con $-\partial_t$, e quindi l'asserto è falso in senso stretto. Esso sarebbe vero, invece, se al contempo si scambia u con v . Ora, quest'ultimo scambio lascia invariato lo stato del sistema fisico in oggetto, rappresentato da $u^2 + v^2$. Da qui la tesi: per un dato stato iniziale $(u^2 + v^2)_{t=0}$ del sistema fisico, al tempo $t > 0$ esso sistema sarà nello stesso stato in cui era al tempo $-t$.²⁴

Sempre in tema di PCG caratteristico, un fatto tipico è immediatamente suggerito dall'esame dei SDP quasi-lineari del 1° ordine. Se le variabili indipendenti $x = (t, X)$ sono già state scelte in modo che la varietà caratteristica sia $t = 0$, scriveremo il SDP in oggetto come

$$(24) \quad C^t u_t + C^X \cdot u_X + h = 0,$$

dove C^t , C^X sono $(N \times N)$ -matrici e h è una N -colonna, le une e l'altra di sufficiente CdC. Per ipotesi, in corrispondenza al DC $u_0(X) =: u(t=0, X)$ la matrice $C^t_0 =: C^t(t=0, X, u_0(X))$ è singolare, diciamo di rango $N - 1$. Si prova facilmente, allora, che se la (24) ammette una “soluzione” continua attraverso $t = 0$ e di CdC 1 in $t > 0$ (o $t < 0$), la sua derivata u_t presenta in generale un salto $[u_t]$ attraverso $t = 0$; e che $[u_t]$ è proporzionale ai minori di una riga di C^t_0 . Per ragioni legate alla usuale interpretazione delle variabili (t, X) , questo vincolo si usa denominare **condizione di compatibilità cinematica** (sulla discontinuità di u_t).

Rinviamo il lettore alla letteratura specializzata per un'analisi sufficientemente generale, e comunque al di là di questi cenni, del PCG caratteristico, un argomento di grande interesse fisico-matematico. Quanto allo studio della EDP caratteristica (11) in τ – per data u – esso rientra in quello delle più generali EDP del 1° ordine di cui alla prossima Sez. 5.4.

²⁴ Un altro sistema di due equazioni formalmente molto simile (ma sostanzialmente diverso) a quello delle (23) è costituito dalle $\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$, $\partial_x^2 v + \partial_t v = 0$. Torneremo su di esso più oltre, quando ricercheremo una formulazione variazionale dell'equazione del calore (in una sola dimensione spaziale, la prima delle due equazioni appena scritte).

5.4) L'EQUAZIONE DIFFERENZIALPARZIALE DEL 1° ORDINE

5.4.1 IL CASO PROTOTIPO CON DUE VARIABILI INDIPENDENTI

L'idea di costruire soluzioni di SDP generici come serie di potenze formali delle variabili indipendenti è molto naturale, ma ha lo svantaggio di richiedere forti ipotesi restrittive che assicurino la convergenza delle serie stesse. Come vedremo, a questa difficoltà si sottrae il caso assai importante di un'unica EDP del 1° ordine, per la quale si può sviluppare una teoria locale sotto la sola richiesta di una sufficiente regolarità dei dati. L'elaborazione di questa teoria, specialmente nella sua versione prototipa con due sole variabili indipendenti ($n = 2$), fu fortemente legata alla possibilità di visualizzarne intuitivamente i contenuti, portando così ad una sua immediata interpretazione geometrica. Come ampiamente giustifica la centralità dell'argomento nell'ambito della teoria generale dei SDP, la EDP del 1° ordine in due variabili indipendenti (EDP1), e poi in n variabili (EDP1_n), attirò molto presto l'attenzione dei matematici che ne affrontarono lo studio fin dal secondo Settecento: innanzitutto Lagrange (approccio prevalentemente "analitico") e Monge¹ (Gaspard, Beaune Fr. 1746 – Parigi 1818, approccio prevalentemente "geometrico"), e più tardi Cauchy, Jacobi, e molti altri.

Come abbiamo accennato nella S.sez. 5.3.1, il risultato fondamentale è che la soluzione del PCG locale, intorno ad un punto-base di una curva non caratteristica del piano (x,y) , è riconducibile a quella di un sistema di cinque EDO accoppiate in altrettante incognite, e viceversa. Scriveremo l'EDP1 in oggetto al solito modo, cioè come

$$(1) \quad F(x,y,u,u_x,u_y) = 0,$$

dove F è funzione per il momento di CdC 1 dei suoi cinque argomenti, $F: U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con U aperto di \mathbb{R}^2 , e $u: U^* \rightarrow \mathbb{R}$, con U^* anch'esso aperto di \mathbb{R}^2 e $\subset U^2$, ancora di CdC 1. È usuale denotare con z la u , e con p e q la u_x e rispettivamente la u_y , quando (z, p, q) sono considerate come variabili indipendenti entro il vincolo

$$(2) \quad F(x,y,z,p,q) = 0. \quad ^3$$

Sarà anche utile scrivere \mathcal{P} per la quintupla $\{x,y,z,p,q\}$, sempre sottintendendo che $F(\mathcal{P}) = 0$. Come si richiede in generale, anche in questo caso si dovrà presupporre che F dipenda *sostanzialmente* da

¹ Le ricerche di Monge in campo EDP iniziarono parecchio tempo prima (si stima 10-15 anni) della loro effettiva pubblicazione, vedi Hist. de l'Acad. des Sci., Paris, 1784, 85-117, 1787, 118-192; o anche "Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie", 1795, più tardi ripreso come "Application de l'analyse à la géométrie" (3^a ed., 1807).

² In pratica senza limitazioni di generalità, si può supporre $U^* = U$.

³ L'insieme delle tre variabili *indipendenti* z, p, q non è altro che l'insieme (di cardinalità $L(2,1) = 3$) $\{c_k\}_{0 \leq |k| \leq 1}$ della S.sez. 5.3.3.

p e/o da q, cioè che F_p e/o F_q siano diversi da zero in un punto-base \underline{P} del dominio di definizione di F , ovvero

$$(3) \quad F_p(\underline{P}) \neq 0 \vee F_q(\underline{P}) \neq 0,$$

ove \vee sta per e/o (vedi App. Gen. A), e quindi anche in un suo intorno.⁴ Ove faccia comodo, nel seguito denoteremo con P la terna $\{x,y,z\}$, quindi $\mathcal{P} \equiv \{P,p,q\}$ (e ovviamente $\underline{\mathcal{P}} \equiv \{\underline{P},\underline{p},\underline{q}\}$).

Conviene cominciare ricordando quanto segue. Sia $f = f(v,w)$ una funzione di CdC 1 delle due variabili reali (v,w) definita in un intorno del punto $(\underline{v},\underline{w})$ per il quale $f(\underline{v},\underline{w}) = 0$. Se allora $f_w(\underline{v},\underline{w}) \neq 0$, l'equazione $f(v,w) = 0$ è unicamente risolubile rispetto a w in un intorno di $(\underline{v},\underline{w})$, e la soluzione $w = w(v)$ è di CdC 1 intorno a \underline{v} . Banalmente, lo stesso vale invertendo i ruoli delle variabili v, w . È questo il famoso e più volte nominato "teorema della funzione implicita" nella sua versione a due variabili indipendenti (o **teorema di Dini** (Ulisse, 1845-1918)). Al teorema di Dini si può dare una veste del tutto simmetrica rispetto a v, w dicendo che, se $(f_v(\underline{v},\underline{w}))^2 + (f_w(\underline{v},\underline{w}))^2 > 0$, esistono due funzioni di CdC 1, $\varphi = \varphi(t)$ e $\psi = \psi(t)$, di un parametro reale t in un intorno di $t = 0$ per le quali $\varphi(0) = \underline{v}$, $\psi(0) = \underline{w}$, $(\dagger) (d_t\varphi(0))^2 + (d_t\psi(0))^2 > 0$, e $f(\varphi(t),\psi(t)) = 0$ per ogni t in quell'intorno. Le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ non sono univocamente definite, ma scrivendo $v = \varphi(t)$ e $w = \psi(t)$, ed eliminando t tra di esse (ciò che è sempre possibile in virtù della (\dagger)), si trova $v = v(w)$ e/o $w = w(v)$ secondo la precedente versione del teorema. Se poi f , oltre che di v e w , è funzione (sempre di CdC 1) di altre variabili s in un intorno di $(\underline{v},\underline{w},\underline{s})$ ove $f(\underline{v},\underline{w},\underline{s}) = 0$, e valgono le ipotesi del teorema di Dini rispetto alla coppia (v,w) , allora le stesse conclusioni valgono $\forall s$ in quell'intorno. In particolare le precedenti φ e ψ risultano funzioni (di CdC 1) di s oltre che di t , diciamo $\varphi = \varphi(t|s)$, $\psi = \psi(t|s)$, in un intorno di $(t = 0, s = \underline{s})$, per le quali $f(\varphi(t|s),\psi(t|s)) = 0$ identicamente rispetto a $(t|s)$ in quell'intorno. Considerando la (2) dal punto di vista appena descritto, e identificando F con f , P con s , p con v e q con w , possiamo dire che la

$$(2bis) \quad F(P,\varphi(t|P),\psi(t|P)) = 0$$

vale identicamente rispetto a $(t|P)$ in un intorno di $(t=0|P=\underline{P})$, per certe convenienti (ma non univocamente definite) funzioni φ e ψ di CdC 1 di $(t|P)$.

La visualizzazione geometrica della teoria procede come segue. Per F data sotto le precedenti condizioni, e pensando P come fisso, al variare di t intorno a $t = 0$ la retta (non orientata) del 3-spazio (P) parallela al vettore di componenti $(\varphi(t|P),\psi(t|P),-1)$ rispetto agli assi (x,y,z) – retta che sarà utile pensare passante per P – descrive un cono con vertice in P che si dice **cono delle**

⁴ Un modo equivalente e di uso comune di scrivere la relazione $a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee \dots \vee a_r \neq 0$, ove a_1, \dots, a_r sono reali e $r \geq 1$, è naturalmente $\sum_{i=1}^r a_i^2 > 0$. Quindi la precedente (3) si può scrivere $(F_p^2 + F_q^2)(\underline{\mathcal{P}}) > 0$.

normali (relativo a F) **in P**.⁵ Ancora al variare di t intorno a t = 0, il piano dello spazio (P) passante per P e normale alla generatrice di coordinata t del cono delle normali involupa un cono “duale” del cono delle normali che si dice **cono di Monge** (1784) relativo a F⁶ **in P**. Le generatrici del cono di Monge di vertice P si dicono **direzioni caratteristiche in P**. È opportuno denotare per un momento con P' il punto generico dello spazio (P) per distinguerlo dal vertice P del cono di Monge. Ci proponiamo di scrivere l'equazione di questo cono nello spazio (P').

Essa si ottiene nel modo usuale, cioè per differenziazione ed eliminazione, associando all'equazione del piano involupante

$$(4) \quad (x'-x)\varphi(t|P) + (y'-y)\psi(t|P) - (z'-z) = 0$$

quella che da essa si trae derivandola rispetto a t, cioè la

$$(4') \quad (x'-x)d_t\varphi(t|P) + (y'-y)d_t\psi(t|P) = 0,$$

ed eliminando t. D'altra parte, t-derivando la (2bis) si ottiene

$$(5) \quad F_p d_t\varphi(t|P) + F_q d_t\psi(t|P) = 0.$$

Considerate come sistema lineare omogeneo nelle $d_t\varphi(t|P)$, $d_t\psi(t|P)$ (che non possono essere entrambe nulle) le (4', 5) impongono che sia

$$(6) \quad (x'-x)F_q - (y'-y)F_p = 0.$$

Combinando allora la (4) con la (6), otteniamo:

$$(7) \quad (x'-x) : (y'-y) : (z'-z) = F_p : F_q : (F_p p + F_q q),$$

o equivalentemente

$$(7bis) \quad x'-x = \rho F_p, \quad y'-y = \rho F_q, \quad z'-z = \rho(pF_p + qF_q),$$

dove ρ è il fattore di proporzionalità implicito nella (7)⁷. Qui va rimarcato che F_p e F_q sono funzioni di (P, p, q) in cui a p si sostituisce $\varphi(t|P)$ e a q $\psi(t|P)$. Sempre con P fisso, al variare di t intorno a t = 0 varia la generatrice $(x'-x) : (y'-y) : (z'-z)$ del cono di Monge con vertice in P, del quale la (7) è dunque l'equazione cercata.⁸ Infine al variare di P nell'intorno di interesse di \underline{P} avremo un **campo di coni di Monge**, diciamo $\mathcal{M}(P)$, e un **campo di direzioni caratteristiche**, diciamo $\mathcal{H}(t|P)$.

⁵ Questo cono delle normali non è da confondere con il “cono normale” del caso generale, vedi S.sez. 5.3.3. Nel caso presente, il cono normale si riduce infatti a una retta del piano (x, y) passante per $(\underline{x}, \underline{y})$ (o al più ad un insieme *finito* di tali rette).

⁶ Nel seguito ci risparmieremo di menzionare F in definizioni di questo tipo.

⁷ Come è usuale, con la scrittura $a : b : c : \dots = A : B : C : \dots$ si intende che esiste un fattore di proporzionalità non nullo ρ per il quale $a = \rho A$, $b = \rho B$, $c = \rho C \dots$

⁸ L'uso del termine “cono” può indurre a pensare che, al variare di t, la *semiretta* $(x'-x) : (y'-y) : (z'-z)$ di origine P intercetti la sfera unitaria di centro P (dello spazio (P')) secondo una curva (la “direttrice” del cono) chiusa e priva di punti multipli (\equiv semplice), in modo che il cono stesso sia un “cono” nel senso usuale e intuitivo della parola. Questo è un caso eccezionale: di norma, quella curva è soltanto un arco “locale” sulla sfera unitaria, passante per il punto corrispondente a t = 0.

Curve dello spazio (P) che in ogni loro punto hanno per tangente una direzione caratteristica, e quindi sono tangenti al cono di Monge con vertice in quel punto, si dicono **curve di Monge** o **curve focali**. Avendo introdotto un *conveniente*⁹ parametro reale λ lungo di esse, variabile intorno a $\lambda = 0$ (ad es.) e scelto in modo che $P(\lambda=0) = \underline{P}$, le curve focali soddisfano quindi al sistema delle EDO in forma normale e autonome (nel senso che il parametro λ non figura esplicitamente nei loro secondi membri):

$$(8_1) \quad d_\lambda x = F_p,$$

$$(8_2) \quad d_\lambda y = F_q,$$

$$(8_3) \quad d_\lambda z = F_{pp} + F_{qq},$$

dove p e q sono al solito da esprimere come $\varphi(t|P)$ e rispettivamente $\psi(t|P)$. Considerato come SDO nella incognita $P = (x,y,z)$, il sistema (8) è in generale *sottodeterminante*, perché (anche non contando il fatto che in generale le φ e ψ non sono unicamente definite come funzioni di t) t rimane in esso arbitraria. (Del resto, il sistema (8, 2bis) consta di quattro equazioni nelle cinque incognite \mathcal{P}). Fa eccezione il caso in cui la (1) è quasi-lineare, e quindi F_p e F_q non dipendono da (p,q), e nemmeno ne dipende $F_{pp} + F_{qq}$ ¹⁰. Le tre equazioni (8) contengono allora *soltanto* $P \equiv \{x,y,z\}$ nei secondi membri, e possono essere risolte in modo univoco sotto una condizione iniziale del tipo $P(\lambda=0) = \underline{P}$, e sotto la condizione (sufficiente) che i secondi membri delle (8) siano di CdC 1 rispetto a P intorno a \underline{P} . Evidentemente quest'ultima restrizione non è coperta dalla richiesta che F sia di CdC 1, ma è assicurata dalla più forte "F è di CdC 2".

L'impedimento appena segnalato (quattro equazioni in cinque incognite) è ben naturale, perché fino a questo punto non abbiamo sfruttato il fatto che, secondo la (1), dovrà alla fine essere $p = u_x$ e $q = u_y$, e quindi che (p,q) sono in realtà funzioni di (x,y). Ci proponiamo dunque di (possibilmente) completare il SDO (8) con due analoghe equazioni del tipo $d_\lambda p = \dots$, $d_\lambda q = \dots$ alla luce di questa richiesta. Supporremo innanzitutto che u sia di CdC 2 in un intorno di $(\underline{x}, \underline{y})$. Posto allora $r =: u_{xx} = p_x$, $s =: u_{xy} = p_y = u_{yx} = q_x$ (qui si sfrutta la supposta continuità delle derivate seconde di u) e $t = u_{yy} = q_y$, derivando sostanzialmente ("d") la (1) rispetto a x, avremo:

$$(9_1) \quad 0 = d_x F = F_x + F_z p + F_p r + F_q s,$$

e analogamente derivandola rispetto a y,

$$(9_2) \quad 0 = d_y F = F_y + F_z q + F_p s + F_q t,$$

⁹ Se il parametro è scelto arbitrariamente (sotto le usuali condizioni di non-singularità) una semplice procedura consente di modificarlo in modo che il fattore ρ ai secondi membri delle (7bis) si riduca a 1.

¹⁰ Infatti $F(\mathcal{P}) = 0$ è allora del tipo $ap + bq - c = 0$, $a^2 + b^2 > 0$, con a, b, c dipendenti al più da P, e $F_p = a$, $F_q = b$, $F_{pp} + F_{qq} = ap + bq = c$.

identicamente nel dominio di definizione di F intorno a \mathcal{P} . Ma secondo le (8), $F_{pr} + F_{qs} = d_\lambda x p_x + d_\lambda y p_y = d_\lambda p$ e $F_{ps} + F_{qt} = d_\lambda q_x + d_\lambda q_y = d_\lambda q$. In forza delle (9) concludiamo così che le equazioni cercate sono:

$$(10_1) \quad d_\lambda p = -(F_x + F_z p),$$

$$(10_2) \quad d_\lambda q = -(F_y + F_z q).$$

In unione con le tre (8) le due (10) formano un SDO normale autonomo “equilibrato” di cinque EDO nelle cinque incognite $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\lambda)$; queste sono così unicamente determinate intorno a $\lambda = 0$ sotto le condizioni iniziali $P(0) = \underline{P}$ e (diciamo) $p(0) = \underline{p}$, $q(0) = \underline{q}$, cioè $\mathcal{P}(0) = \underline{\mathcal{P}}$ (con $F(\underline{\mathcal{P}}) = 0$), e sotto la richiesta, tacita d’ora in avanti, *che F sia di CdC 2*. Il SDO (8, 10) si dice **sistema caratteristico associato** alla EDP1 (1). Diremo **curva completamente caratteristica** (o **traiettoria caratteristica**) una curva dello spazio (\mathcal{P}) soluzione del SDO caratteristico (8, 10) e passante per un punto di (\mathcal{P}) (ad es. $\underline{\mathcal{P}}$) dove F è nulla. Come ci si aspetta e si verifica subito, F si mantiene identicamente nulla lungo una traiettoria caratteristica. Infatti, derivando sostanzialmente (“d”) F rispetto a λ , troviamo $d_\lambda F = F_x d_\lambda x + F_y d_\lambda y + F_z d_\lambda z + F_p d_\lambda p + F_q d_\lambda q = F_x F_p + F_y F_q + F_z (p F_p + q F_q) - F_p (F_x + p F_z) - F_q (F_y + q F_z) \equiv 0$. Quindi F è costante lungo una traiettoria caratteristica, e poiché questa passa per un punto ove F è nulla, il valore della costante è zero, qed.

Secondo la definizione data nella S.sez. 5.3.3, la condizione che la generica curva del piano (x,y) di equazioni parametriche ($^\circ$) $x = x(\mu)$, $y = y(\mu)$ (che qui presupporremo priva di punti multipli (\equiv “semplice”)) sia caratteristica è che lungo di essa si abbia $F_p d_\mu y - F_q d_\mu x = 0$. Infatti se tale curva è espressa nella forma $\tau(x,y) = \text{cost}$ (τ di CdC 1, $\tau_x^2 + \tau_y^2 > 0$), in base alla (5.3.3, 11) troviamo che

$$(11_1) \quad F_p \tau_x + F_q \tau_y = 0.$$

Descrivendo la curva mediante le ($^\circ$), deve quindi essere anche

$$(11_2) \quad 0 = d_\mu \tau = \tau_x d_\mu x + \tau_y d_\mu y.$$

Il sistema lineare omogeneo delle (11) nelle (τ_x, τ_y) (non entrambe nulle) richiede che il relativo determinante $D = F_p d_\mu y - F_q d_\mu x$ sia nullo, qed. Si vede così che la proiezione di una curva focale $P = P(\mu)$ sul piano (x,y) è una curva caratteristica (perché $d_\mu y = F_q$ e $d_\mu x = F_p$).

In contrasto con la definizione di “curva caratteristica” che abbiamo appena ricordato dalla S.sez. 5.3.3, nel presente contesto (teoria della EDP1 (1)) si dice **curva caratteristica** (o talvolta **traiettoria caratteristica proiettata**) la proiezione nello spazio (P) di una traiettoria caratteristica $\mathcal{P}(\lambda)$. È chiaro che la proiezione sul piano (x,y) di una tale curva caratteristica dello spazio (P) è una curva caratteristica nel senso della S.sez. 5.3.3. Per evitare confusioni, nell’ambito della teoria della (1) la proiezione sul piano (x,y) di una curva caratteristica, quindi anche quella di una traiettoria caratteristica, si dice **curva caratteristica di base**. Una curva caratteristica è senz’altro una curva

focale, ma non ogni curva focale è una curva caratteristica. Ciò è del resto evidente passando dal sistema sottodeterminante (2bis, 8) al sistema determinante (8, 10). Nel caso della EDP quasi-lineare $au_x + bu_y - c = 0$ (cfr la nota (¹⁰)), una curva caratteristica avente un punto in comune con una superficie integrale $u(x,y) - u = 0$ giace interamente su quella superficie integrale; e viceversa, una superficie integrale può considerarsi costituita da una famiglia ad un parametro di curve caratteristiche.

Possiamo rappresentarci visivamente una traiettoria caratteristica anche nello spazio 3-dimensionale (P) attaccando ad ogni punto P della curva caratteristica associata (cioè della proiezione della traiettoria caratteristica nello spazio (P)) la retta di direzione $(p,q,-1)$ passante per quel punto, retta che è normale alla curva in quanto $pd_{\lambda}x + qd_{\lambda}y - d_{\lambda}z = pF_p + qF_q - (pF_p + qF_q) \equiv \equiv 0$; o equivalentemente, il piano normale a quella retta passante per lo stesso punto, piano che è tangente alla curva caratteristica. In generale, si dice ($v \geq 1$)-**striscia** una configurazione consistente di una curva C^1 di $R^{v+1 \geq 2}$ (**sostegno della v-striscia**) e di un continuo di CdC 1 di v-piani ad essa tangenti punto per punto. Per una data v-striscia, la coppia costituita dal punto della curva sostegno e dal v-piano ad essa tangente in quel punto si dice **elemento della v-striscia**. Se $v = 2$, è naturale rappresentarsi una 2-striscia (o “striscia” tout court) come una successione di punti della curva-sostegno ai quali si “appoggiano” corrispondenti “faccette” dei piani tangenti di “lunghezza” (lungo la curva sostegno) e di “larghezza” (perpendicolarmente ad essa) abbastanza piccole. Quando la successione diventa continua otteniamo un *nastro* di quella (piccola) larghezza contenente la curva sostegno, o appunto una “striscia” di R^3 nel senso intuitivo del termine. ¹¹

La traiettoria caratteristica dello spazio (\mathcal{P}), soluzione del SDO caratteristico, può dunque rappresentarsi come una associata **striscia caratteristica** nello spazio (P). È chiaro che quando si parla di traiettoria caratteristica dello spazio (\mathcal{P}) e della corrispondente striscia caratteristica dello spazio (P), si parla dello stesso oggetto: è soltanto la sua rappresentazione che cambia (*curva* dello spazio (\mathcal{P}) vs. *striscia* dello spazio (P)).

Confrontando l'equazione del cono di Monge (7) con le (8), abbiamo

$$(12) \quad (x'-x) : (y'-y) : (z'-z) = d_{\lambda}x : d_{\lambda}y : d_{\lambda}z ;$$

vale a dire, la generatrice di coordinata t del cono è tangente alla curva caratteristica passante per il vertice P e corrispondente allo stesso valore di t. Ciò crea una corrispondenza biunivoca tra generatrici del cono di Monge con vertice in P e curve caratteristiche passanti per P. La (8₃) esprime appunto la tangenza del piano di normale $(p,q,-1)$ alla relativa curva caratteristica, e si dice perciò **relazione di striscia**. Tornando a una curva focale, se associamo al suo generico punto P il piano

¹¹ Un esempio di striscia in R^3 è quello di una curva di CdC 2 con il piano osculatore associato ad ogni suo punto. La richiesta che la curva sia di CdC 2 è dovuta alla definizione di piano osculatore.

passante per P e normale a $(\varphi(t|P), \psi(t|P), -1)$, esso è tangente in P alla curva nonché al cono di Monge $\mathcal{M}(P)$. Con questi piani tangenti attaccati ad ogni suo punto, la curva focale è una striscia che si dice **striscia focale**. È di nuovo chiaro che una striscia caratteristica è una striscia focale, ma che non ogni striscia focale è una striscia caratteristica.

L'insieme delle curve caratteristiche passanti per P è una famiglia ad un parametro di tali curve, e costituisce quindi una superficie dello spazio (P). Questa superficie, che evidentemente ha una singolarità conoidale in P , si dice **conoide di Monge in P** . Quindi il cono di Monge avrebbe potuto essere definito come il cono di vertice P e tangente al conoide di Monge in P . Nel caso quasi-lineare, in cui i secondi membri delle (8) sono indipendenti da p e da q , il conoide di Monge in P degenera in un'unica curva caratteristica passante per P , e quindi il cono di Monge degenera in una retta per P (**asse di Monge**).¹² Si intende, per concludere, che l'intera argomentazione è strettamente *locale*, incluso quanto in essa riguarda il cono di Monge, di cui si considera in generale soltanto una parte "locale" intorno a $t = 0$.

Qui di seguito scriveremo per brevità X per la coppia (x, y) e S per la coppia (p, q) . Si hanno allora i seguenti asserti ormai evidenti.

(a) «Se $u = g(X)$ è una soluzione della EDP (1) in un intorno di \underline{X} , dove vale \underline{u} , la superficie di equazione $g(X) - u = 0$, o **superficie integrale** della (1) passante per $(\underline{X}, \underline{u})$, ha nel corrispondente intorno di $(\underline{X}, \underline{u})$ normale di direzione $(g_x, -1)$ appartenente al cono delle normali in P , e quindi è tangente al cono di Monge in P .»

(b) Viceversa, «una superficie di CdC 2 di equazione $g(X) - u = 0$ in un intorno di \underline{X} (dove $g(\underline{X}) = \underline{u}$) che sia tangente in ogni suo punto P al cono di Monge in P è una superficie integrale della (1) passante per $(\underline{X}, \underline{u})$.»

In particolare, il conoide di Monge di vertice P è una superficie integrale della (1): essendo infatti costituito da curve caratteristiche passanti per P , è in ogni suo punto P' tangente al cono di Monge in P' . Come sappiamo, una curva focale si ottiene associando alle (8) due funzioni $Z = Z(\lambda)$ sotto il vincolo $F(X(\lambda), z(\lambda), Z(\lambda)) = 0$; o equivalentemente, l'equazione differenziale (nelle $d_\lambda Z$):

$$(13) \quad F_Z \cdot d_\lambda Z = -F_X \cdot (F_X + F_Z Z),$$

dove il significato di (\cdot) è autoevidente. Soltanto se $d_\lambda Z = - (F_X + F_Z Z)$ (con il che la (13) è identicamente soddisfatta) la curva focale è caratteristica, perché allora $Z \equiv S$. Evidentemente, le curve focali che giacciono su una superficie integrale sono curve caratteristiche.

Passiamo adesso al teorema fondamentale sulla EDP (1). Sappiamo che l'esistenza di una soluzione u di CdC 2 della (1) intorno a \underline{X} , con $\underline{u} = u(\underline{X})$, implica che valga il SDO caratteristico per

¹² Del resto, in questo caso il cono delle normali in P degenera nel piano normale alla curva caratteristica, e quindi il suo duale degenera nella retta tangente in P alla curva stessa.

\mathcal{P} sotto le condizioni iniziali $X(0) = \underline{X}$, $u(0) = \underline{u}$, $S(0) = u_X(\underline{X})$, e che tale SDO ha un'unica soluzione intorno a $\lambda = 0$ (essendo F di CdC 2). Vogliamo provare una tesi reciproca, e precisamente che se conosciamo la striscia caratteristica che ha come elemento iniziale (\equiv in $\lambda = 0$) un corrispondente elemento di una data striscia “iniziale” \mathcal{S} non caratteristica, che supporremo avere per proiezione sul piano (X) , la curva C_0 , semplice, possiamo costruire in un unico modo una superficie integrale contenente la striscia iniziale \mathcal{S} . Questo equivale ad affermare che il PCG per la (1) è unicamente risolvibile. Sia μ un parametro reale corrente in un intorno di $\mu = 0$, e $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mu)$ l'equazione (di CdC 1) della striscia¹³ iniziale \mathcal{S} sotto il vincolo (i) $F(\mathcal{P}(\mu)) = 0$ e sotto la relazione di striscia (ii) $d_\mu u(\mu) = (S \cdot d_\mu X)(\mu)$, per ogni μ in quell'intorno. Una generica striscia $(P,S)(\mu)$ soddisfacente alla (i), si dice una **striscia integrale**.

Il PCG consiste nel costruire una possibile soluzione $u = u(X)$ della $F = 0$ tale che $(X, u(X), u_X(X))$ coincida con \mathcal{S} quando $X \in C_0$. Sia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\lambda, \mu)$ la striscia caratteristica (unicamente determinata essendo F di CdC 2) soluzione del SDO caratteristico in un intorno della striscia iniziale $\lambda = 0$ sotto la condizione iniziale $\mathcal{P}(\lambda=0, \mu) = \mathcal{P}(\mu) \forall \mu$ intorno a $\mu = 0$. Per note proprietà delle soluzioni dei SDO dipendenti da parametro, $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$ è di CdC 1 in quell'intorno. Le sue derivate rispetto a λ e a μ , che abbiamo fin qui considerato come “totali” (d_λ nel SDO caratteristico, e d_μ nella relazione di striscia (ii)), torneranno ora ad essere denotate con sottoscritti in quanto “parziali”. La proiezione di $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$ sul piano (X) è un 1-diffeomorfismo in un intorno della curva iniziale C_0 in forza dell'essere questa, per ipotesi, la proiezione sul piano (X) di una striscia non caratteristica. Infatti $D \equiv F_p d_\mu y - F_q d_\mu x = x_\lambda y_\mu - y_\lambda x_\mu \equiv \partial(x, y) / \partial(\lambda, \mu)$ è diverso da 0 per $\lambda = 0$, e quindi anche in un intorno (dello spazio (λ, μ)) di C_0 .¹⁴ La teoria generale dei SDO prova tuttavia che se $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mu)$, data intorno a $\mu = 0$ entro i due vincoli (i, ii), è di CdC 2, tale diffeomorfismo $X(\lambda, \mu)$ è anch'esso di CdC 2 in un intorno Ω' ($\subset (\lambda, \mu)$) di C_0 . Si ricorderà poi che il SDO caratteristico si ottiene supponendo che la soluzione $u = u(X)$ della (1) sia di CdC 2 in un intorno del punto-base \underline{X} ; quindi $u^*(X) =: u(\lambda, \mu)$ si dovrà presupporre di CdC 2 in un intorno Ω^* (del piano (X)) di C_0 . Poiché $X(\lambda, \mu)$ è di CdC 2 in Ω' , anche $u(\lambda, \mu)$ deve allora esserlo in $\Omega =: X^{-1}(\Omega^*)$ ($\subset (\lambda, \mu)$). (In generale, Ω non è incluso in Ω' , $\Omega \not\subset \Omega'$.)

In definitiva potremo esprimere u e S come funzioni di X , anziché di (λ, μ) , in tale Ω . Avendo similmente definito $S^*(X)$ come $S(\lambda, \mu)$, evidentemente la nostra tesi è che sia $u^*_X = S^*$ per X nell'intorno Ω^* della curva C_0 . Segue la dimostrazione di questa tesi, che diremo teorema (T).

¹³ Così esprimendoci intendiamo che $\mathcal{P}(\mu)$, che di per sé è una curva dello spazio (\mathcal{P}) , sia una coppia $(P, Z)(\mu)$ legata dalla relazione di striscia $d_\mu u(\mu) = (Z \cdot d_\mu X)(\mu)$. Lo stesso varrà poco più avanti per la striscia caratteristica $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\lambda, \mu)$.

¹⁴ Con ogni evidenza, la $D \neq 0$ equivale a che il vettore di componenti $(X_\lambda)(\lambda=0, \mu)$ sia *trasverso* alla curva C_0 nel suo punto di coordinata μ .

Dim. Innanzitutto $\forall(\lambda, \mu)$ in Ω valgono le identità:

$$(14_1) \quad u^*_{X'} \cdot X_\lambda = u_\lambda,$$

e similmente

$$(14_2) \quad u^*_{X'} \cdot X_\mu = u_\mu;$$

inoltre, per le (8),

$$(15_1) \quad S \cdot X_\lambda = u_\lambda.$$

Quanto all'equazione analoga alla (15₁),

$$(15_2) \quad S \cdot X_\mu = u_\mu,$$

essa vale, *per il momento*, $\forall \mu$ intorno a $\mu = 0$, ma soltanto per $\lambda = 0$.

Conviene porre $U =: U(\lambda, \mu) =: (u_\mu - S \cdot X_\mu)(\lambda, \mu)$. Derivando U rispetto a λ , abbiamo:

$$(16_1) \quad U_\lambda = u_{\mu\lambda} - S_\lambda \cdot X_\mu - S \cdot X_{\mu\lambda},$$

e derivando la (14₁) rispetto a μ ,

$$(16_2) \quad 0 = u_{\lambda\mu} - S_\mu \cdot X_\lambda - S \cdot X_{\lambda\mu}.$$

Sottraendo la (16₂) dalla (16₁), e tenendo conto della continuità in Ω delle derivate seconde di u e di X , otteniamo $U_\lambda = -S_\lambda \cdot X_\mu + S_\mu \cdot X_\lambda = (F_X + F_Z S) \cdot X_\mu + S_\mu \cdot F_S$ in forza delle (10) e delle (8_{1,2}). D'altra parte, derivando la $F(\mathcal{P}(\lambda, \mu)) = 0$ rispetto a μ abbiamo $F_X \cdot X_\mu + F_Z u_\mu + F_S \cdot S_\mu = 0$; ed eliminando mediante quest'ultima $F_S \cdot S_\mu$ dalla espressione di U_λ :

$$(17) \quad U_\lambda = -F_Z(u_\mu - S \cdot X_\mu) = -F_Z U.$$

Per (μ, λ) in Ω , e μ fisso, la U soddisfa dunque alla EDO (17); ma dovendo essere $U(\lambda=0, \mu) = 0$, concludiamo che $U \equiv 0$ in *tutto* Ω , e quindi che la (15₂) è anch'essa un'identità $\forall(\lambda, \mu)$ in Ω , esattamente come le (14_{1,2}) e la (15₁).¹⁵ Eliminando infine u_λ e u_μ tra le (14) e le (15), otteniamo $(u^*_{X'} - S) \cdot X_\lambda = 0$ e $(u^*_{X'} - S) \cdot X_\mu = 0$. Il determinante di questo sistema lineare omogeneo nelle $u^*_{X'} - S$ è per ipotesi diverso da zero in Ω , e concludiamo che

$$(18) \quad u^*_{X'} - S^* = 0$$

in Ω^* , qed. #

La funzione $F(X(\lambda, \mu), u(\lambda, \mu), S(\lambda, \mu))$ ha dunque $d_\lambda F = F_X \cdot X_\lambda + F_Z u_\lambda + F_S \cdot S_\lambda = (F_X + F_Z u^*_{X'} + S_\lambda) \cdot X_\lambda = (F_X + F_Z S + S_\lambda) \cdot X_\lambda = 0$ (per le (10)) in Ω ; ma F si annulla in $\lambda = 0$, e quindi è identicamente nulla. Ancora per le (18), $F(X, u^*, u^*_{X'})$ è allora identicamente nulla, e quindi la $u^*(X)$ è una soluzione della (1) per la quale $u^*(X(\mu)) = u(\mu)$ lungo C_0 . Abbiamo così ottenuto una prova costruttiva dell'esistenza di una soluzione soddisfacente la condizione iniziale. D'altra parte la striscia caratteristica $\mathcal{P}(\lambda, \mu)$ è unicamente determinata per ogni μ della striscia iniziale, e quindi la

¹⁵ Infatti $U(\lambda) = U(\lambda=0) \exp[-\int_0^\lambda d\lambda' F_Z(\lambda')]$, con $F_Z(\lambda') \equiv F_Z(X(\lambda'), Z(\lambda'), Z(\lambda'))$ (identicamente rispetto a μ , che ci siamo risparmiati di esplicitare).

soluzione $u^*(X)$ è unica. In definitiva, il PCG ha una e una sola soluzione nell'intorno Ω^* di C_0 , che si costruisce disponendo della striscia caratteristica $\mathcal{P}(\lambda, \mu) \forall \mu$ di C_0 . Riassumendo, condizioni sufficienti a che valga (T) sono 1): F è di CdC 2 intorno alla striscia iniziale \mathcal{S} ; 2): C_0 (proiezione sul piano (X) di \mathcal{S}) è di CdC 2 ; 3): u e S , dati sotto (i,ii), sono di CdC 2 lungo C_0 . Il risultato ottenuto ha ovvio interesse, perché in generale è più difficile risolvere una EDP, sia pure del 1° ordine, che un SDO, sia pure di cinque equazioni in cinque incognite.

La situazione si semplifica alquanto nel caso della EDP1 quasi-lineare $au_x + bu_y - c = 0$, perché le p, q escono allora dal gioco. La (2) diventa infatti $ap + bq - c = 0$, e le prime tre equazioni del SDO caratteristico (8) sono $d_\lambda x = a$, $d_\lambda y = b$, e $(\dagger) d_\lambda z = ap + bq = c$. Se $D = ay_\mu - bx_\mu \neq 0$, $u(\lambda, \mu)$ può scriversi come $u^*(x, y)$, e la (\dagger) dà: $c = d_\lambda u = x_\lambda u^*_x + y_\lambda u^*_y = au^*_x + bu^*_y$, coincidendo con la EDP1 di partenza, che è automaticamente risolta. La precedente EDP1 quasi-lineare rende inoltre più facile comprendere cosa accade se $D = 0$ (“caso eccezionale”) lungo una curva iniziale C dello spazio (P) . C è allora una curva caratteristica, perché possiamo sempre scegliere il parametro μ lungo di essa in modo che $d_\mu x = a$, $d_\mu y = b$, $d_\mu z = c$. Ma se C è una curva caratteristica, non soltanto una, ma infinite superfici integrali passano per essa intesa come curva iniziale. Basta infatti pensare ad un'altra curva C' per cui $D \neq 0$, passante per un punto di C (e per il resto arbitraria); per C' passa un'unica superficie integrale che necessariamente contiene C . Si conclude con una specie di “teorema dell'alternativa”: se $D = 0$ lungo la curva iniziale C , o non esistono superfici integrali che la contengono, o se ne esiste una ne esistono infinite. Una curva dello spazio (P) contenuta in due (o più) superfici integrali si dice **curva di diramazione**. Le curve caratteristiche dello spazio (P) sono in questo senso curve di diramazione; usandole come curve iniziali, o il PCG non ha soluzioni, o ne ha infinite. Conclusioni simili valgono nel caso di una EDP1 del tipo (1) generica (cioè non necessariamente quasi-lineare). Vale a dire, se $D \neq 0$ lungo la striscia iniziale \mathcal{S} , il PCG ha una e una sola soluzione; se $D = 0$ lungo \mathcal{S} , vi è una soluzione sse \mathcal{S} è caratteristica, e in tal caso ve ne sono in effetti infinite, tra loro tangenti lungo \mathcal{S} (la dimostrazione è simile, ma è omessa). Le strisce caratteristiche, intese come strisce iniziali, sono **strisce di diramazione**.

Tutto quanto abbiamo fin qui visto si specializza (e si banalizza nel modo che ci si può aspettare), nel caso in cui invece che dalla (1) si parta da una equazione differenziale *ordinaria* (\equiv una sola variabile indipendente x), cioè dalla

$$(19) \quad F(x, u, d_x u) = 0,$$

e quindi la (2) diventi la $F(x, z, p) = 0$. L'idea di “cono”, delle normali o di Monge, viene meno perché il cono degenera in unica retta (o in un numero finito di rette) del piano $(P = (x, z))$. Ad es. il

cono di Monge si riduce alla retta (o alle rette) del piano (P) passante per P di equazione (non autonoma!) $dz/dx = p(P)$, dove $p(P)$ si ha risolvendo rispetto a p la $F(x,z,p) = 0$ sotto l'ipotesi $F_p(\underline{P}, \underline{p}) \neq 0$. Le curve focali sono determinate dal SDO "equilibrato" $d_\lambda x = F_p$, $d_\lambda z = pF_p$ esprimendovi p in funzione di P attraverso la $F = 0$. Si noti anche che eliminando F_p tra le due ultime equazioni si ha ancora $dz/dx = p(P)$. Infine il SDO caratteristico si ha aggiungendo alle precedenti la $d_\lambda p = -(F_x + pF_z)$, che consegue dalla $0 = d_\lambda F = F_x d_\lambda x + F_z d_\lambda z + F_p d_\lambda p = F_x F_p + F_z p F_p + F_p d_\lambda p$ (basta dividere per $F_p \neq 0$). Esso si risolve in modo unico (essendo F di CdC 2) sotto una condizione iniziale $x(\lambda=0) = \underline{x}$, $z(\lambda=0) = \underline{z}$ e $p(\lambda=0) = \underline{p}$, con $F(\underline{x}, \underline{z}, \underline{p}) = 0$. In particolare abbiamo così $x = x(\lambda)$ e $z = z(\lambda)$; ma la prima di queste si inverte in $\lambda = \lambda(x)$ perché $F_p(\underline{x}, \underline{z}, \underline{p}) \neq 0$, e quindi $u = u(\lambda(x)) = u^*(x)$ è la soluzione dell'equazione ordinaria di partenza sotto la condizione iniziale $u^*(\underline{x}) = \underline{u}$.

5.4.2 IL CASO GENERALE CON $n \geq 2$ VARIABILI INDIPENDENTI

La teoria della EDP del 1° ordine con n variabili indipendenti, $EDP1_n$, diciamo

$$(1) \quad F(x, u, u_x) = 0,$$

quindi

$$(1bis) \quad F(x, z, p) = 0,$$

ove adesso $x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle$, $u_x \equiv \langle u_{x_1}, \dots, u_{x_n} \rangle = \langle p_1, \dots, p_n \rangle \equiv p$, $F_x \equiv \langle F_{x_1}, \dots, F_{x_n} \rangle$, e $F_p \equiv \langle F_{p_1}, \dots, F_{p_n} \rangle$,

sotto

$$(2) \quad F_p(\mathcal{P}) \neq 0,^{16}$$

$\mathcal{P} \equiv \{x, z, p\} \equiv \{P, p\}$, $P \equiv \{x, z\}$, si sviluppa in modo simile a quello della S.sez. 5.4.1. Viene meno la possibilità, di cui ci siamo fin qui avvalsi, di visualizzare geometricamente il fatto analitico; ma dopotutto questa non è ormai una difficoltà seria. Per cominciare, si verifica subito che il SDO caratteristico (ora di $2n + 1$ EDO) diventa

$$(3_1) \quad d_\lambda x = F_p,$$

$$(3_2) \quad d_\lambda z = p \cdot F_p$$

(ove il (\cdot) significa adesso somma su un indice che varia da 1 a $n \geq 2$, quindi $p \cdot F_p \equiv \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i}$, e similmente più avanti),

$$(3_3) \quad d_\lambda p = -(F_x + F_z p),$$

¹⁶ Scriveremo brevemente così, in notazione non indiciale, la $\forall_{i=1}^n (F_{p_i}(\mathcal{P}) \neq 0)$ (o se si preferisce, la $\exists i (\in (1+n)) (F_{p_i}(\mathcal{P}) \neq 0)$); e similmente in altri casi dello stesso tipo.

nelle $2n + 1$ incognite \mathcal{P} . La (3₂) si dice analogamente **relazione di n-striscia** n-dim nello spazio (n+1)-dim (P)). Analogamente al caso $n = 2$, sulla base delle (3) risulta $d_\lambda F = F_x \cdot F_p + F_z p \cdot F_p - (F_x + F_z p) \cdot F_p \equiv 0$. Se quindi $F = 0$ per qualche λ (ad es. per $\lambda = 0$, ove $\mathcal{P}(\lambda=0) = \underline{\mathcal{P}}$, condizione iniziale del SDO (3)), essa rimane nulla in un intorno di $\lambda = 0$. Le nozioni di **traiettoria caratteristica** (curva dello spazio (2n+1)-dim (P) soluzione delle (3)), di **curva caratteristica** (dello spazio (n+1)-dim (P)) e di **n-striscia caratteristica** (dello spazio (P)) sono generalizzazioni ovvie delle analoghe nozioni del caso $n = 2$. Una n-striscia caratteristica avente un suo **elemento** (\equiv punto della traiettoria e n-piano ad essa tangente) in comune con una n-superficie integrale $u = u(x)$ della (1) permane su quella n-superficie; e viceversa, una n-superficie integrale della (1) si può pensare come costituita da n-strisce caratteristiche.

Il PCG si formula sulla traccia del caso $n = 2$, aggiustando convenientemente la dimensione degli oggetti coinvolti. Precisamente, occorrerà adesso pensare al parametro μ lungo la n-striscia iniziale $\mathcal{S} = \{x(\mu), z(\mu), p(\mu)\}$ come ad un “multiparametro” (n-1)-dim, diciamo $\mu \equiv \langle \mu_1, \dots, \mu_{n-1} \rangle$, valendo (oltre alla solita $F(\mathcal{P}(\mu)) = 0$) le $n - 1$ relazioni di n-striscia

$$(4) \quad u_\mu = p \cdot x_\mu.$$

La richiesta che la n-striscia iniziale sia non caratteristica equivale a che $D =: \det\{\partial(x)/\partial(\lambda, \mu)\}$ sia diverso da zero sulla, e quindi intorno alla, (n-1)-varietà C_0 dello spazio n-dim (x). (Alla luce della (3₁), la prima riga della matrice jacobiana può sostituirsi con la riga F_p .) Si noti anche che la $D \neq 0$ equivale a che la curva $x = x(\lambda, \mu)$ dello spazio (x), per ogni μ fisso, sia trasversa alla (n-1)-varietà iniziale C_0 $x = x(\lambda=0, \mu)$ dello stesso spazio, nel suo punto di coordinata μ . Tutto procede allora come per $n = 2$, compresa la dimostrazione delle n relazioni $u^*_x = p^*$ (teorema (T) della S.sez. 5.4.1), che lasciamo al lettore. La conclusione, che la $u^*(x)$ così costruita intorno alla (n-1)-varietà iniziale C_0 è soluzione unica della (1), sotto la prescritta condizione lungo C_0 (in $\lambda = 0$), segue allo stesso modo.

Per semplicità, ci riferiremo ancora alla EDP_{1n} quasi-lineare $a \cdot u_x - c = 0$ per un esame del caso eccezionale $D = 0$ sulla (n-1)-varietà iniziale. In questo caso, una (n-1)-varietà dello spazio (n+1)-dim ($P \equiv \{x, z(\equiv u)\}$) si dice **caratteristica** (agg.) se il (n+1)-vettore $\{a, c\}$ è una combinazione lineare degli $n - 1$ (n+1)-vettori $\{x_\mu, z_\mu\}$; vale a dire, se $\forall \mu$ della (n-1)-varietà in oggetto è $\{a, c\} = \{g^\mu x_\mu, g^\mu z_\mu\}$ (somme sull'indice di μ da 1 a $n - 1$) per certe $n - 1$ funzioni di CdC $g^\mu = g^\mu(\mu)$.¹⁷ La proiezione nello spazio (x) di una tale (n-1)-varietà caratteristica si dirà **(n-1)-varietà caratteristica di base**. Sia ora C una (n-1)-varietà dello spazio (P) per la quale

¹⁷ Per $n = 2$, e con le notazioni adottate in quel caso, questo significa che $x_\mu : y_\mu : z_\mu = a : b : c$; e quindi, che $x_\mu = a$, $y_\mu = b$, $z_\mu = c$ per una conveniente scelta di μ , in accordo con quanto affermato nella S.sez. 5.4.1.

(⁺) $D = 0$ e (⁺⁺) “passa una n-superficie integrale $u = u(x)$ ”. Dalla (⁺) segue che esistono $n - 1$ funzioni di CdC 1 $g^\mu(\mu)$ per cui $a = g^\mu x_\mu$ (somma sull'indice di μ) in C . Dalla (⁺⁺) segue che $g^\mu u_\mu = g^\mu x_\mu \cdot u_x$ (il (\cdot) significa prodotto scalare nello spazio (x)), quindi $g^\mu u_\mu = a \cdot u_x = c$. Si conclude che la $(n-1)$ -varietà C è caratteristica. Viceversa, sia C una $(n-1)$ -varietà caratteristica dello spazio (P) , e sia C' un'altra $(n-1)$ -varietà per cui $D \neq 0$ e con una $(n-2)$ -varietà T in comune con C . Per tale C' passa un'unica n-superficie integrale che, contenendo tutte le curve caratteristiche passanti per T ¹⁸, contiene necessariamente anche la C da esse generata. Conclusioni simili (la cui formulazione lasciamo al lettore) valgono nel caso di una EDP generica, e ancora ne omettiamo la dimostrazione.

Chiudiamo con alcuni commenti su come si specializza il SDO caratteristico, anche nella sua versione a n dimensioni, in certi importanti casi particolari. Cominciando con il caso $n = 2$, supponiamo che $F_z \equiv 0$ identicamente nell'intorno di $\mathcal{P} \equiv \{\underline{x}, \underline{y}, z, \underline{p}, \underline{q}\}$ di interesse. Le (3₃) si semplificano allora nelle

$$(3_3') \quad p_\lambda = -F_x,$$

mentre la (3₂) si disaccoppia, perché la z non compare in alcuno dei 2ⁱ membri delle equazioni del sistema. Inoltre il SDO costituito dalle $2n$ equazioni (3_{3'}) e (3₁) risulta hamiltoniano (vedi Cap. 6) nelle incognite coniugate (x, p) , con hamiltoniana $F = F(x, p)$. Una volta integrato questo sistema con le relative condizioni iniziali in $\lambda = 0$, la (3₂) fornisce la $z = z(\lambda) \equiv u(\lambda)$ mediante una quadratura:

$$(5) \quad u(\lambda) = \underline{u} + \int_{\lambda'=0}^{\lambda} d\lambda' (p \cdot F_p)(\lambda').$$

È questo in particolare il caso della equazione caratteristica per τ della S.sez. 5.3.3.

Un altro caso interessante è quello in cui, supponendo $F_p(\mathcal{P}) \neq 0$, la (5.4.1, 1) sia fin dall'inizio risolta rispetto a u_x intorno a \mathcal{P} , diciamo secondo la

$$(6) \quad u_x + H(x, y, u, u_y) = 0$$

per una conveniente funzione H di CdC 2. Essendo in questo caso $F_p = 1$, il relativo SDO caratteristico diventa:

$$(7_1) \quad x_\lambda = 1,$$

$$(7_2) \quad y_\lambda = H_q,$$

$$(7_3) \quad z_\lambda = -H + qH_q,$$

$$(7_4) \quad p_\lambda = -(H_x + pH_z),$$

$$(7_5) \quad q_\lambda = -(H_y + qH_z),$$

Qui la (7₁) attesta che con una possibile traslazione (se $\underline{x} \neq 0$) la x si identifica con il parametro λ . Inoltre la (7₄) si integra con una quadratura una volta risolto il sistema delle rimanenti (7₂, 7₃, 7₅), potendosi scrivere $p_\lambda (\equiv p_x) = -H_x + HH_z$, il cui 2° membro è noto. Se poi è $H_z \equiv 0$, la

¹⁸ Per $n = 2$, T è un punto; e nel caso quasi-lineare, per tale punto passa una sola curva caratteristica.

(7₄) si riduce a $(p + H)_x = 0$; e quindi, tenuto conto della $p + H(\underline{x}, \underline{y}, \underline{u}, q) = 0$, essa si identifica con la (6) in \mathcal{P} e può essere ignorata. Quanto alle tre rimanenti equazioni (sempre per $H_z \equiv 0$), le (7_{2,5}) diventano un sistema hamiltoniano non autonomo nelle variabili coniugate (y, q) , mentre la (7₃) dà u con una quadratura una volta ottenute le (y, q) . Infine $d_\lambda H = d_x H = H_x + H_y H_q - H_q H_y = H_x$: la derivata sostanziale di H rispetto a x è uguale alla corrispondente derivata parziale, e quindi H è una costante se oltre a $H_z \equiv 0$, è anche $H_x \equiv 0$.

L'esame della (6) si generalizza facilmente se in luogo di y e q ci sono $(n > 1)$ -ple di variabili $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$, e rispettivamente $\langle q_1, \dots, q_n \rangle$ (si noti che così facendo il numero totale delle variabili di base diventa $n + 1$). L'importanza di questi risultati sarà facilmente riconosciuta dal lettore che abbia familiarità con la meccanica analitica: scrivendo t in luogo di x , $x =: \langle x^1, \dots, x^n \rangle$ in luogo di $\langle y^1, \dots, y^n \rangle$ e u_x in luogo di $\langle u_{x1}, \dots, u_{xn} \rangle$, la $u_t + H(x, u_x) = 0$ non è altro che l'equazione di Hamilton-Jacobi, vedi Cap 6.

5.4.3) L'INTEGRALE COMPLETO

Introduciamo ora l'importante nozione di **integrale completo** della EDP_{1_n} (5.4.2, 1), $F(x, u \equiv z, u_x \equiv p) = 0$, che qui richiameremo semplicemente come (1). Tratteremo direttamente il caso generale $n \geq 2$, anche se talvolta potrà essere utile riferirsi al caso $n = 2$ per meglio comprendere il senso di alcune affermazioni. Al solito, i sottoscritti destri significheranno derivate parziali. Se $F_z(\mathcal{P}) \neq 0$, un integrale completo della (1) si definisce come una famiglia a n parametri $a \equiv \langle a^1, \dots, a^n \rangle$ di sue soluzioni $u = \phi(x, a)$, per $x \equiv \langle x^1, \dots, x^n \rangle \in U$ e $a \in A$, dove U e A sono (domini) aperti di \mathbb{R}^n , e ϕ è di CdC 2 in $U \times A$, per la quale

$$(2) \quad \phi_a(\underline{x}, \underline{a}) \neq 0, \text{ }^{19} \text{ e}$$

$$(3) \quad \det\{\phi_{x_i, a_j}\}_{i, j=1 \rightarrow n}(\underline{x}, \underline{a}) \neq 0.$$

Qui $(\underline{x}, \underline{a})$ è un punto-base dell'aperto $U \times A$. Per definizione, $\phi(\underline{x}, \underline{a}) = \underline{z}$ e $\phi_x(\underline{x}, \underline{a}) = \underline{p}$ e $F(\underline{x}, \underline{z}, \underline{p}) = 0$.

La (3) assicura (condizione *sufficiente*) che ϕ dipenda da a "in modo essenziale"; ovvero, in modo che *non* esista una $(m < n)$ -pla di funzioni $b \equiv \langle b^1, \dots, b^m \rangle$ di $a \in A$ (di CdC 1) per le quali $\phi(x, a)$ si possa esprimere come una funzione $v = v(x, b(a))$. La facile verifica si ottiene per assurdo.

¹⁹ ϕ_a è un n -vettore, e la (2) significa che non tutte le sue componenti sono nulle in $(\underline{x}, \underline{a})$.

Supponendo cioè che b esista come descritta, risulta $\phi_{xi\ aj} = \sum_{k=1}^m v_{xi\ bk}(x,b(a)) b_{aj}^k(a)$ e quindi $\det\{\phi_{xi\ aj}\}_{i,j=1+n} = 0$ in $U \times A$.²⁰

Ciascun elemento della famiglia $\{\phi(x,a)\}$ è per definizione soluzione della (1) e si dice un suo **integrale particolare**. Mostreremo ora come disponendo di un integrale completo si possano costruire altre soluzioni della (1). A questo scopo, ricordiamo la definizione di **inviluppo** (per derivazione ed eliminazione) di una famiglia di funzioni (di CdC 1) di $x \in U$, con parametri $c \in C$, diciamo $f: U \times C \rightarrow R$, con U e C aperti di R^n . Per tale famiglia, si imponga in $U \times C$ il sistema di $1 \leq m \leq n$ equazioni

$$(4) \quad f_{c'}(x,c') = 0,$$

dove $c' = \langle c^1, \dots, c^m \rangle$, e $f_{c'}$ significa al solito derivazione rispetto a c' . Si supponga che questo sistema di m equazioni sia risolubile rispetto ai parametri c' (non ci interessano qui le condizioni che lo assicurano, del resto facilmente ricavabili). Se $m < n$, gli m parametri c' saranno esprimibili come funzioni di x e dei rimanenti parametri $n - m$ parametri $c'' \equiv \langle c^{m+1}, \dots, c^n \rangle$, diciamo $c' = \varphi'(x,c'')$ (ove φ' è una m -pla di funzioni), per cui

$$(4') \quad f_{c'}(x,\varphi'(x,c''),c'') = 0$$

è soddisfatta $\forall x \in U$ e $\forall c'' \in C'' \equiv$ proiezione di C su R^{n-m} . Sempre se $m < n$, diremo $f(x,\varphi'(x,c''),c'')$ un **m -inviluppo (parziale) della famiglia** $f(x,c)$ rispetto ai c' . In modo completamente analogo si definisce l' **n -inviluppo (totale) della famiglia** $f(x,c)$ quando $m = n$, che è quindi della forma $f(x,\varphi(x))$ (dove φ è un n -pla di funzioni), e nel quale non ci sono più parametri residui.

Sia ora $\phi(x,a)$ un integrale completo della (1): allora l'inviluppo parziale $v = v(x,a'') = \phi(x,\varphi'(x,a''),a'')$ della famiglia $\phi(x,a)$ è ancora una soluzione della (1). Infatti $v_{xi} = \phi_{xi} + \sum_{j=1}^m \phi_{aj} \varphi'_{xi} \equiv \phi_{xi}$ in forza delle (4'). Ciò prova l'asserto, perché $F(x,\phi(x,a),\phi_x(x,a)) = 0$ per ogni $x \in U$ e $a \in A$, e quindi anche per $a = \langle a' = \varphi'(x,a''), a'' \rangle \in A$. Si conclude che $F(x,v(x,a''),v_x(x,a'')) = 0$, qed. Esattamente lo stesso ragionamento vale poi per $m = n$: allora la soluzione-inviluppo (totale) della (1) non dipende da alcun parametro, e si dice suo **integrale singolare**.²¹

²⁰ Infatti, $\det\{\phi_{xi\ aj}\}_{i,j=1+n} = (\sum_{k=1}^m \dots \sum_{kn=1}^m) v_{x1\ bk1} \dots v_{xn\ bkn} \det\{b_{aj}^{ki}\}_{i,j=1+n}$, e i determinanti a 2° membro di quest'ultima sono nulli per ogni scelta di k^1, \dots, k^n tra 1 e m , avendo (almeno) due righe uguali. Più in generale, la dipendenza essenziale di ϕ dagli n parametri a sarebbe assicurata anche dalla condizione (necessaria oltre che sufficiente) che la $(n \times (n+1))$ -matrice $\{\phi_{aj}, \phi_{xi,aj}\}_{i,j=1+n}$ abbia caratteristica n . Mostriamolo per semplicità nel caso $n = 2$. Scrivendo (x,y) per x e (a,b) per a , se la caratteristica fosse < 2 , la (2×3) -matrice di righe $(\phi_a, \phi_{xa}, \phi_{ya})$ e $(\phi_b, \phi_{xb}, \phi_{yb})$ avrebbe infatti i suoi tre minori di ordine 2, compreso $\phi_{xa}\phi_{yb} - \phi_{xb}\phi_{ya}$ (cioè il determinante (3)), nulli.

²¹ In realtà la conoscenza dell'integrale completo, per la costruzione dell'integrale singolare, non è necessaria. Dimostriamolo per semplicità nel caso $n = 2$. Con la solita notazione che adottiamo in questo caso, le equazioni di inviluppo sono le (*) $\phi_a(x,y,a,b) = 0$, $\phi_b(x,y,a,b) = 0$. Ma in luogo delle (*) si può direttamente utilizzare la terna di equazioni (ove al solito $\mathcal{P} \equiv \{x,y,u,p,q\}$) (*) $F(\mathcal{P}) = 0$, $F_p(\mathcal{P}) = 0$, $F_q(\mathcal{P}) = 0$, ed eliminare tra queste p e q . Infatti l'equazione $F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y) = 0$, che vale identicamente in a e b , derivata rispetto ad a e b dà $F_z\phi_a + F_p\phi_{xa} + F_q\phi_{ya} = 0$ e rispettivamente $F_z\phi_b + F_p\phi_{xb} + F_q\phi_{yb} = 0$. Sulla superficie integrale singolare è $\phi_a = \phi_b = 0$ (vedi le (**)), e si resta con un

La soluzione-inviluppo parziale $v(x, a'')$ ($1 \leq m < n$) è stata considerata per generalità, ma non è di per sé molto importante. Tuttavia essa è premessa naturale alla costruzione di una soluzione non più dipendente da parametri se gli $n - m$ parametri residui a'' sono assunti essere *funzioni* dei rimanenti m , diciamo secondo $a'' = \psi''(a')$, con le $n - m$ ψ'' di CdC 1 e per il resto arbitrarie. Si può allora costruire la soluzione-inviluppo rispetto alle m a' ; questa non dipende più da alcun parametro, ma dipende dalle $n - m$ funzioni arbitrariamente prescelte ψ'' . Questa possibilità presenta notevole interesse nel caso $m = n - 1$, quando vi è una sola funzione $\psi(a')$, $a' = \langle a^1, \dots, a^{n-1} \rangle$ e $a_n (= a'') = \psi(a')$. Le $n - 1$ equazioni di inviluppo sono allora (per $s = 1, \dots, n-1$):

$$(5_s) \quad \phi_{as}(a', \psi(a')) + \phi_{an}(a', \psi(a')) \partial \psi / \partial a_s(a') = 0,$$

dove abbiamo ormai trascurato di evidenziare le x . Supponendo al solito di poter eliminare le a' mediante le (5), le otterremo come certe funzioni $\varphi'(x||\psi)$, dove $||$ significa un certo tipo di dipendenza funzionale. Sostituendo queste nell'integrale completo abbiamo una soluzione-inviluppo della (1) del tipo $\phi(x, \varphi'(x||\psi), \psi(\varphi'(x||\psi))) \equiv \Psi(x||\psi)$, che non contiene più parametri liberi ma dipende dalla scelta della funzione ψ di $n - 1$ variabili, e che si dice un **integrale generale** della (1).²²

L'importanza della nozione di integrale generale, anche in una versione "simmetrica" (rispetto alle a) che vedremo appresso, è dovuta al seguente teorema:

T₁. «Le **n -strisce di contatto** (nello spazio (x, z)) tra l'integrale completo e l'integrale generale sono n -strisce del SDO caratteristico associato alla (1).»

Dim: Osserveremo anzitutto che la famiglia delle traiettorie caratteristiche deve essere a $2n - 1$ parametri: tanti sono infatti i parametri di una famiglia di curve che "riempie" una porzione della varietà $2n$ -dim $F(x, z, p) = 0$ dello spazio $(2n+1)$ -dim (\mathcal{P}) . Mostreremo ora che è possibile costruire questa famiglia di traiettorie caratteristiche a partire dall'integrale completo. L'idea dalla quale muovere è quella di costruire l'inviluppo di una famiglia a $n - 1$ parametri di soluzioni del tipo $\phi(x, a)$. Questo inviluppo, essendo tangente in ogni suo punto ad una soluzione, è esso stesso una soluzione, e quindi è costituito da n -strisce caratteristiche. Precisamente, le n -strisce caratteristiche devono essere n -strisce di contatto tra la generica soluzione della famiglia e l'inviluppo; la soluzione inviluppante e la soluzione-inviluppo contengono entrambe la n -striscia di contatto, e ciò può avvenire soltanto lungo n -strisce caratteristiche. (Si tenga presente che, intuitivamente, una

sistema lineare omogeneo in F_p, F_q per ipotesi non singolare (infatti $\phi_{xa}\phi_{yb} - \phi_{xb}\phi_{ya} \neq 0$), e dunque con $F_p = F_q = 0$. Unite alla $F = 0$, queste formano proprio il sistema (*).

²² Questa conclusione è a prima vista sorprendente, perché partendo da una soluzione dipendente da n numeri ne abbiamo ricavato una dipendente da una *funzione* di $n - 1$ variabili. Tuttavia un momento di riflessione sulla natura del problema ai valori iniziali mostra che un integrale generale deve avere proprio questa struttura.

curva di contatto può considerarsi il limite dell'intersezione tra due soluzioni della famiglia quando una tende all'altra.)

Diamo ora veste analitica a questa idea. Ci provvederemo della famiglia a $n - 1$ parametri a partire dall'integrale completo $\phi(x,a)$ esprimendovi gli n parametri a come funzioni di $n - 1$ parametri $t = \langle t^1, \dots, t^{n-1} \rangle$ secondo la

$$(6) \quad a = \omega(t),$$

dove $\omega = \langle \omega^1, \dots, \omega^n \rangle$ sono funzioni di CdC 1 per le quali la $(n \times (n-1))$ -matrice jacobiana per $t = \underline{t}$ (un valore del multiparametro t per cui $\underline{a} = \omega(\underline{t})$) ha rango massimale,

$$(7) \quad \text{rng}\{\partial\omega/\partial(t)|_{\underline{t}}\} = n - 1.$$

Sostituendo la (6) nella $\phi(x,a)$ si ottiene la desiderata famiglia a $n - 1$ parametri di soluzioni

$$(8) \quad u = \phi(x, \omega(t))$$

intorno a $(\underline{x}, \underline{t})$, ove $\phi(\underline{x}, \omega(\underline{t})) = \underline{z} (\equiv \underline{u})$ per definizione. L'inviluppo si ha al solito per derivazione ed eliminazione, cioè mediante le $n - 1$ equazioni che si ottengono annullando le t -derivate di $\phi(x, \omega(t))$,

$$(9) \quad \phi_a(x, \omega(t)) \cdot \omega_t(t) = 0,$$

intorno a $(\underline{x}, \underline{t})$, ove ω_t sta per $\partial\omega_i/\partial t_s$, $i = 1 \div n$, $s = 1 \div (n - 1)$. Il valore di $t =: \kappa(x||\omega)$ (dove $||$ indica al solito dipendenza funzionale) che si ricava dalle (9) (con $\underline{t} = \kappa(\underline{x}||\omega)$) è l'elemento della famiglia tangente all'inviluppo in x (avendo ivi lo stesso valore). In definitiva l'inviluppo in oggetto può scriversi come

$$(10) \quad \phi(x, \omega(\kappa(x||\omega))) \equiv \mathcal{U}(x||\omega)$$

in un intorno di \underline{x} , con $\mathcal{U}(\underline{x}||\omega) = \underline{z}$. Questa è la versione "simmetrica" di integrale generale che avevamo preannunciato, da confrontare con la precedente $\Psi(x||\psi)$ ma ad essa strutturalmente simile.

Piuttosto che occuparci di tale integrale generale, ricercheremo le curve di contatto tra esso e l'integrale completo nello spazio $(n+1)$ -dim (x,z) . Queste curve sono individuate dalle $n - 1$ equazioni (9) e dalla (8). Per dato t , gli n valori di $a = \omega(t) = \{a_i\}_{i=1 \div n}$ e gli $n(n-1)$ valori di $\omega_t(t)$, che denoteremo brevemente con γ (una matrice a $n - 1$ righe e n colonne, $\{\gamma_{is}\}_{i=1 \div n; s=1 \div (n-1)}$) non possono considerarsi come parametri indipendenti della curva di contatto perché il loro numero eccede $2n - 1$ (infatti $n + n(n-1) = n^2 > 2n - 1$ per $n \geq 2$). In effetti, in virtù della (7), le (9), che riscriveremo come $\phi_a(x,a) \cdot \gamma = 0$, sono equivalenti alle

$$(9\text{bis}) \quad \phi_a(x,a) = \lambda d$$

dove λ è un fattore di proporzionalità $\neq 0$ (per la (2)), $d = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$, e $d_{1 \leq j \leq n}$ è il determinante della matrice quadrata che si ottiene dalla γ cancellandovi la colonna j -ma, moltiplicato per $(-1)^j$. Ancora

alla luce della (7), questi $d_{1 \leq j \leq n}$ non possono essere tutti nulli. Se, diciamo, $\phi_{an}(\underline{x}, \underline{a}) \neq 0$ (vi è certamente un a per cui ciò è vero, e nulla vieta di chiamarlo a^n), per la presenza del fattore λ potremo porre $d_n = 1$ nella (9bis) senza limitare la generalità. A questo punto le (9bis) si riscrivono come

$$(11') \quad \phi_{a'} = d' \phi_{an},$$

con $d' =: \langle d_1, \dots, d_{n-1} \rangle$, $a' =: \langle a^1, \dots, a^{n-1} \rangle$, e

$$(11) \quad \phi_{an} = \lambda,$$

in un intorno di $(\underline{x}, \underline{a})$. Si vede subito che le (11', 11) sono unicamente risolvibili rispetto alle x intorno a $(\underline{x}, \underline{a})$. Infatti la relativa matrice jacobiana ha come prime $n - 1$ righe $\phi_{a'x} - d' \phi_{anx}$ e come n -ma riga ϕ_{anx} ; quindi il sottraendo $d' \phi_{anx}$ in $\phi_{a'x} - d' \phi_{anx}$ non contribuisce al valore del suo determinante, che è quello a 1° membro della (3) ($\phi_{xa} = \phi_{ax}$!), diverso da zero in $(\underline{x}, \underline{a})$ per ipotesi. Porremo poi $\underline{\lambda} =: \phi_{an}(\underline{x}, \underline{a}) \neq 0$. Avremo pertanto le x unicamente determinate come n funzioni di (a, d', λ) ovvero di (a, d', λ) , diciamo come

$$(12) \quad x = g(a, d', \lambda)$$

per un' n -pla di certe funzioni g . Queste sono le equazioni parametriche delle curve di contatto di base (\equiv proiezione nello spazio (x)), λ essendo la variabile lungo la singola curva, intorno a $\underline{\lambda}$ (la famiglia ha come deve $2n - 1$ parametri (a, d')). Le altre variabili u e p si otterranno poi come

$$(13) \quad u = \phi(g(a, d', \lambda), a) \equiv k(a, d', \lambda),$$

dove k è una funzione, e rispettivamente come

$$(14) \quad p = \phi_x(g(a, d', \lambda), a) \equiv h(a, d', \lambda),$$

dove h è un' n -pla di funzioni.

Le (12, 13) sono le equazioni delle curve di contatto nello spazio (x, z) , e le (12, 13, 14) sono le equazioni delle n -strisce di contatto. Ponendo $\underline{d}' =: \phi_{a'}(\underline{x}, \underline{a})/\underline{\lambda}$, risulta $\underline{x} = g(\underline{a}, \underline{d}', \underline{\lambda})$. Si presti la dovuta attenzione al fatto che le (12, 13, 14) sono state ottenute, a partire dall'integrale completo, facendo uso *soltanto* del teorema della funzione implicita. Infine, vi sarà corrispondenza biunivoca tra il punto (x, u, p) della varietà $2n$ -dim $F(x, u, p) = 0$ intorno a $(\underline{x}, \underline{u}, \underline{p})$ e (a, d', λ) intorno a $(\underline{a}, \underline{d}', \underline{\lambda})$ se la matrice jacobiana a $2n + 1$ righe e $2n$ colonne $J = \partial(x, u, p)/\partial(a, d', \lambda)|_{\underline{a}, \underline{d}', \underline{\lambda}}$ ha rango massimale (cioè uguale a $2n$).²³

²³ Questa matrice jacobiana J ha $(g_a, g_{b'}, g_\lambda)$ come prime n righe, $(k_a, k_{b'}, k_\lambda)$ come $(n+1)$ -ma riga, e $(h_a, h_{b'}, h_\lambda)$ come ultime n righe, ove $k_a = \phi_x \cdot g_a + \phi_a$, $k_{b'} = \phi_x \cdot g_{b'}$, $h_a = \phi_{xx} \cdot g_a + \phi_{xa}$, $h_{b'} = \phi_{xx} \cdot g_{b'}$. D'altra parte, poiché $F_z \neq 0$ per ipotesi, z può pensarsi univocamente eliminata come funzione delle (x, p) mediante la $F(x, z, p) = 0$; la precedente richiesta "J ha caratteristica massimale" in $(\underline{a}, \underline{d}', \underline{\lambda})$ può allora riformularsi dicendo che il determinante della $(2n \times 2n)$ -matrice che si ottiene dalla J cancellandovi la riga $(n+1)$ -ma sia ivi diverso da 0, ed eliminando ovunque la z come sopraddetto.

Dobbiamo ora calcolare le derivate rispetto a λ delle $2n + 1$ funzioni g, k, h , per provare che le n -strisce di contatto (12,13,14) sono effettivamente n -strisce caratteristiche. Sostituendo le x con le (12) nelle (11', 11), e derivando rispetto λ , abbiamo $\phi_{a'x} \cdot g_\lambda = d'$, e rispettivamente $\phi_{an \ x} \cdot g_\lambda = 1$, ossia (unificando queste scritture, poiché $d_n = 1$):

$$(15) \quad \phi_{ax} \cdot g_\lambda = d.$$

D'altra parte, sostituendo la u con ϕ nella (1) e derivandola rispetto ad a , si ottengono le

$$(16) \quad F_z \phi_a + F_p \cdot \phi_{xa} = 0,$$

ovvero

$$(16bis) \quad F_p \cdot \phi_{xa} = \phi_{ax} \cdot F_p = \rho d,$$

avendo posto $\rho =: -F_z \lambda \neq 0$. Qui le funzioni di (x,u,p) (sotto $F(x,u,p) = 0$) vanno considerate funzioni di (a,d',λ) per il tramite delle (12, 13, 14), e lo stesso può quindi dirsi di ρ . La (16) ci ricorda fra l'altro l'ipotesi $F_z(\mathcal{P}) \neq 0$ fatta all'inizio; se così non fosse, infatti, per la (3) avremmo $F_{pi}(\mathcal{P}) = 0 \ \forall i$, in conflitto con la (5.4.2, 2).

Confrontando le (15) e (16bis), e tenendo ancora conto della (3), si vede che

$$(17_1) \quad \rho g_\lambda = F_p.$$

Per quanto riguarda k_λ , dalla (13) abbiamo

$$(17_2) \quad \rho k_\lambda = \rho \phi_x \cdot g_\lambda = p \cdot F_p.$$

Infine per avere h_λ ci occorre la derivata rispetto a x della (1) con $\phi(x,a)$ in luogo di u . Questa ci dà:

$$(18) \quad F_x + F_z \phi_x + F_p \cdot \phi_{xx} = 0,$$

e quindi, partendo dalle (14),

$$(17_3) \quad \rho h_\lambda = \rho \phi_{xx} \cdot g_\lambda = \phi_{xx} \cdot F_p = F_p \cdot \phi_{xx} = -(F_x + F_z \phi_x) = -(F_x + F_z p).$$

Le (17_{1,2,3}) si trascrivono sostituendo x a g , u (o z) a k e p a h . Otteniamo così un SDO non autonomo, perché ρ contiene il parametro λ esplicitamente oltre che attraverso le x, z e p . Ciò non impedisce tuttavia di modificare λ in modo da ridurre ρ all'unità. Con λ così modificato, ma che continueremo a scrivere come λ , le (17_{1,2,3}) diventano il SDO caratteristico per la (1); vale a dire, le n -strisce di contatto (12, 13, 14) (famiglia a $2n - 1$ parametri (a,d')) sono effettivamente n -strisce caratteristiche della (1). La tesi (T_1) è così provata sotto la condizione che $F_z(\mathcal{P}) \neq 0$. #

Osserviamo che in forza della $F(g(a,d',\lambda), k(a,d',\lambda), h(a,d',\lambda)) = 0$ (identicamente in (a,d',λ)) intorno a $(\underline{a}, \underline{d}', \underline{\lambda})$ deve ivi essere $F_\lambda = 0, F_a = 0, F_{d'} = 0$. La prima di queste uguaglianze scende subito, come sappiamo, dalle (17_{1,2,3}). Quanto alla seconda, essa è $(F_x + F_z \phi_x + F_p \cdot \phi_{xx}) \cdot g_a + F_z \phi_a + F_p \cdot \phi_{xa} = 0$, ed è soddisfatta alla luce delle (18, 16). Infine la terza uguaglianza è $(F_x + F_z \phi_x + F_p \cdot \phi_{xx}) \cdot g_{d'} = 0$, ed è anch'essa soddisfatta per la (18). Un ultimo commento è il seguente. Le $(x,z,p) = (g,k,h)(a,d',\lambda)$ sono equazioni parametriche (i $2n - 1$ parametri essendo (a,d')) di una

sottovarietà $(2n-1)$ -dim $\lambda = \underline{\lambda}$ della varietà $2n$ -dim $F(x,z,p) = 0$ dello spazio $(2n+1)$ -dim (x,z,p) , purché la $(2n+1) \times (2n-1)$ -matrice J' che si ottiene dalla J cancellandovi l'ultima colonna abbia rango massimale (cioè $2n - 1$). Se allora J e J' hanno *entrambe* rango massimale, si può verificare che le traiettorie caratteristiche della (1) sono *trasverse* alla $\lambda = \underline{\lambda}$.

Se d'altra parte $F_z \equiv 0$ in un aperto dello spazio (\mathcal{P}) , la dimostrazione della tesi (T_1) va modificata. La nuova dimostrazione segue fino alla prossima #. Per cominciare, osserveremo che una soluzione della

$$(19) \quad F(x, u_x) = 0,$$

dipendente da n parametri a ne contiene uno, che diremo a^n , come costante additiva. Scriveremo così l'integrale completo nella forma $\phi(x,a) = \phi^*(x,a') + a^n$, ove $a' =: \langle a^1, \dots, a^{n-1} \rangle$, e ϕ^* non contiene a^n . In questo caso si vede subito che la richiesta (2) è soddisfatta perché $\phi_{an} = 1$, mentre la richiesta (3) non può esserlo, perché l'ultima colonna della matrice $\{\phi_{xa}\}$ è nulla. Modificheremo allora la (3) in "la matrice $\{\phi^*_{x'a'}\}|_{\underline{x}, \underline{a}}$ ha rango $n - 1$ "; o se si preferisce, nella

$$(20) \quad \det\{\phi^*_{x'a'}\}|_{\underline{x}, \underline{a}} \neq 0,$$

dove si è posto $x' =: \langle x^1, \dots, x^{n-1} \rangle$. Applicando la (16) al caso presente si ottiene $0 = F_p \cdot \phi_{xa'} = F_p \cdot \phi^*_{x'a'} + F_{pn} \phi^*_{xn a'}$, con $p' =: \langle p_1, \dots, p_{n-1} \rangle$. Alla luce della (20), queste $n - 1$ equazioni mostrano che la $F_{pn} = 0$ è incompatibile con la condizione $F_p \neq 0$ (vedi (5.4.2, 2)). Deve quindi essere $F_{pn} \neq 0$; ma allora l'equazione di partenza può porsi fin dall'inizio nella forma $F^*(x,p') + p_n = 0$ per una certa F^* (con $F^*(\underline{x}, \underline{p}') + p_n = 0$). Identificheremo quindi F con $F^* + p_n$. Le (11', 11) forniscono allora

$$(21') \quad \phi^*_{a'} - d' = 0,$$

$$(21) \quad \lambda = \phi_{an} = 1.$$

Per la (20), le $n - 1$ (21') danno le x' come:

$$(22_1) \quad x' = g'(a', d', x^n)$$

per certe $n - 1$ funzioni g' , e quindi

$$(22_2) \quad u = \phi^*(g'(a', d', x^n), x^n, a') + a^n,$$

$$(22_3) \quad p' = \phi^*_{x'}(g'(a', d', x^n), x^n, a') \equiv h'(a', d', x^n);$$

e infine

$$(22_4) \quad p_n = \phi^*_{xn}(g'(a', d', x^n), x^n, a') \equiv h_n(a', d', x^n) = -F^*(g'(a', d', x^n), x^n, h'(a', d', x^n)).$$

Il parametro lungo le traiettorie è ora evidentemente x^n . Le x^n , g' , u e h soddisfano quindi il SDO caratteristico appropriato al caso presente:

$$(23) \quad d_{xn}x^n = 1; \quad d_{xn}g'_{xn} = F^*_{p'}; \quad d_{xn}u = p' \cdot F^*_{p'} - F^*; \quad d_{xn}h = -F^*_x.$$

Basta infatti riportarsi alle (5.4.2, 7) e generalizzarle a un $n > 2$; oppure alle (5.4.2, 3) ponendo in esse $F(x,p) = F^*(x,p') + p_n$. (Nel secondo caso si trova: $d_\lambda x^n = F_{p_n} = 1$, quindi $x^n = \lambda$ a meno di una costante additiva; $d_{x_n} x' = F_{p'} = F^*_{p'}$; $d_{x_n} u = p \cdot F_p = p' \cdot F_{p'} + p_n = p' \cdot F^*_{p'} - F^*$; e infine $d_{x_n} p = -F_x = -F^*_{x'}$, ossia le (23)). In particolare, $d_{x_n} p' = -F^*_{x'}$; e poiché F^* contiene le x' , le p' e x^n , il sistema delle $d_{x_n} x' = F^*_{p'}$, $d_{x_n} p' = -F^*_{x'}$, è di tipo hamiltoniano (vedi cap. 6) con hamiltoniana F^* , non autonomo perché F^* contiene il parametro x^n . La dimostrazione del teorema (T₁) è così completa. #

24

Notiamo anche che il trattamento di questo caso $F_z \equiv 0$ intorno a $\underline{\mathcal{P}}$ risulta alquanto più semplice del precedente in cui $F_z(\underline{\mathcal{P}}) \neq 0$. È quindi notevole il fatto che la condizione $F_z \equiv 0$ non sia particolarmente vincolante, bastando per riprodurla aumentare di una unità il numero delle variabili indipendenti. Per vederlo, rappresentiamo innanzitutto la soluzione u nella forma implicita $U(x,u) = C$, dove C è una costante, e $U_u \neq 0$ nel punto-base $(\underline{x}, \underline{u})$, quindi $u_x = -U_x/U_u$ intorno ad esso, e poniamo $u = x^{n+1}$. L'equazione di partenza $F(x,u,u_x) = 0$ si trascrive allora come $F(x, x^{n+1}, -U_x/U_{x(n+1)}) = 0$ nella incognita U . Abbiamo così $n + 1$ variabili indipendenti (x, x^{n+1}) , mentre l'incognita U non figura in F ; inoltre la F è omogenea di grado zero nelle $U_x, U_{x(n+1)}$. Il SDO caratteristico di una equazione di questo tipo, diciamola $G(y, U_y) = 0$ (dove y sta per $(x, x^{n+1}) \equiv (x, u)$ e G è omogenea di grado zero nelle U_y), è

$$(24_1) \quad d_\lambda y = G_p,$$

ove abbiamo scritto $p \equiv \langle p_1, \dots, p_{n+1} \rangle$ in luogo di $U_y = \langle U_{y1}, \dots, U_{y(n+1)} \rangle$,

$$(24_2) \quad d_\lambda U = p \cdot G_p,$$

$$(24_3) \quad d_\lambda p = -G_y,$$

per un totale di $2(n+1) + 1$ equazioni. Tenuto conto che né U né λ figurano nei secondi membri delle (24₁, 24₃), queste costituiscono un sistema hamiltoniano autonomo nelle $2(n+1)$ variabili canoniche coniugate (y, p) . Quanto alla (24₂), alla luce del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee di grado zero risulta $p \cdot G_p = 0$; ossia la (24₂) dice che U è una costante, come deve essere, e $C = U(\underline{x}, \underline{u})$, con $\underline{x} = x(\lambda = \underline{\lambda})$, $\underline{u} = u(\lambda = \underline{\lambda})$, $\underline{\lambda}$ = valore iniziale del parametro.

²⁴ Può essere di utile riconsiderare la dimostrazione del teorema (T₁) avendo direttamente identificato gli $n - 1$ parametri t^1, \dots, t^{n-1} con i parametri a^1, \dots, a^{n-1} ($\equiv a'$). Allora $\omega^s(a') = a^s$ ($s = 1, \dots, n-1$) e $\omega^n(a') \equiv \psi(a') = a^n$. In questo caso, nelle (9bis) scritte indicialmente come $\phi_{ai} = \lambda d_i$ ($i = 1, \dots, n$) si ha ancora $d_1 = 1$ e $\phi_{an} = \lambda$, mentre è semplicemente $d_s = -\partial\psi/\partial a^s$. Il resto della dimostrazione segue sulla medesima traccia di quella che abbiamo già illustrato nel caso di parametri t generici. Si noti che in questo caso la versione (10) dell'integrale generale contiene una sola funzione arbitraria (e non n funzioni arbitrarie) di $n - 1$ variabili. Tuttavia non vi è contraddizione tra le due versioni, la (10) e la presente, dell'integrale generale: infatti rappresentare n parametri a come altrettante funzioni di $n - 1$ parametri t e rappresentare uno di essi (diciamo a^n) come funzione dei rimanenti a' significa la stessa cosa sotto la condizione di caratteristica massimale (7).

Per concludere, rimarchiamo un fatto notevole che emerge dalla precedente teoria dell'integrale completo della (1). Partendo dalla assunta disponibilità di tale integrale, abbiamo visto di poter risolvere il PCG determinando le n -strisce di contatto tra l'integrale completo e la soluzione-inviluppo; infatti esse sono n -strisce caratteristiche della (1), e la conoscenza di queste ultime risolve il relativo PCG a partire da una $(n-1)$ -varietà iniziale non caratteristica. Ora *la determinazione di tali n -strisce di contatto si realizza attraverso mere inversioni di funzioni implicite*, e non comporta alcuna genuina procedura di integrazione.²⁵ Vale a dire, la teoria (locale) dell'integrale completo per una EDP del 1° ordine testimonia una volta di più (se ce ne fosse bisogno) l'importanza del teorema della funzione implicita in Analisi, offrendo un altro esempio della sua utilità e potenza.

²⁵ A prima vista si potrebbe pensare che una procedura di integrazione sia “nascosta” nella prova del teorema della funzione implicita; ma non è così, vedi ad esempio la classica dimostrazione di Goursat “per approssimazioni successive”, fondata sul principio di induzione matematica. D'altra parte la disponibilità di un integrale completo è una condizione piuttosto stringente, che si riesce a soddisfare soltanto in alcuni, ma importanti, casi.

APP. SPEC. CAP. 5

APP. 5.A I PROBLEMI DI DIRICHLET E DI NEUMANN, INTERNI ED ESTERNI

I quattro problemi di cui al titolo di questa App. Spec. 5.A hanno una tale importanza, nella fisica matematica classica, da meritarsi la presente breve rassegna ad essi dedicata. Presupporremo qui che il lettore abbia sufficiente familiarità con la teoria delle equazioni integrali di Fredholm (Erik, 1866 – 1927), alla quale la trattazione dei problemi in oggetto è strettamente collegata. In quanto segue, ci limiteremo essenzialmente ad una “esposizione ragionata” dei risultati della teoria.

Partiamo con il Problema Interno di Laplace-Neumann (PIN), che come sappiamo consiste nel ricercare una funzione $u \in C^2(X^\circ) \cap C^1(X)$, e armonica in X° , per la quale $\partial_N u|_S = f$, ove $f \in C(S)$ (essendo $S \equiv \partial X$ di classe C^1 e di Lyapunov, o più liberalmente di classe C^2) è data sotto il vincolo:

$$(1) \quad \int_S f(s) dS = 0.$$

Il risultato fondamentale è che una soluzione esiste ed è uguale ad un potenziale di semplice strato secondo la

$$(2) \quad 4\pi u(\xi) = \int_S \lambda(s) / |s - \xi| d_s S,$$

dove la densità λ soddisfa l'equazione integrale di Fredholm di 2^a specie:

$$(3) \quad \lambda(\eta)/2 + (1/4\pi) \int_S \lambda(s) \partial_N(|1/|\eta-s||) = f(\eta)$$

$\forall \eta \in S$, convenendosi che la derivata normale ∂_N sia fatta rispetto a η (con l'usuale significato di limite dall'interno). Si dimostra che la (3) ha una soluzione, diciamo $\hat{\lambda}$, e la sua omogenea associata, diciamola (3₀), ha una e una sola autosoluzione λ_0 (definita a meno di un fattore costante). Con ogni evidenza, a questa autosoluzione deve corrispondere, attraverso la (2), la soluzione interna $u = \text{cost}$. È conveniente normalizzare λ_0 in modo che la corrispondente u sia uguale a 1; questa λ_0 normalizzata si dice allora **densità** (di strato semplice) **di Robin**.¹ Consideriamo adesso l'equazione integrale **aggiunta** della (3₀), cioè la

$$(4_0) \quad \sigma(\eta)/2 + (1/4\pi) \int_S \sigma(s) \partial_v(|1/|\eta-s||) = 0$$

nella $\sigma = \sigma(\eta \in S)$, convenendo che la derivata normale ∂_v sia fatta ora rispetto alla variabile di integrazione s , sempre nel senso di limite dall'interno.² Se poniamo $\sigma = 1$ nella (4₀), l'integrale (di

¹ Quindi $\int_S \lambda_0(s) / |s - \xi| d_s S = 4\pi$, cioè λ_0 è soluzione di una particolare equazione di Fredholm di 1^a specie, tale che l'integrale a 1° membro *non* dipende in effetti da ξ .

² L'esame comparato della (3₀) e della (4₀) mostra che si passa dalla prima alla seconda semplicemente invertendo il segno del primo addendo e lasciando *invariato* il secondo. Su questa base si vede subito che l'equazione aggiunta

Gauss, vedi S.sez. 5.2.3) contribuisce $-(1/2)$, per cui $\sigma = 1$ è autosoluzione della (4₀), e $\sigma = \text{cost}$ ne è, come si verifica facilmente, la più generale autosoluzione. Alla luce di questo fatto, il vincolo integrale (1) non è altro, dal punto di vista della teoria di Fredholm, che la condizione di ortogonalità, per f , alla varietà lineare abbracciata dalla autosoluzione $\sigma = 1$. L'esistenza della soluzione $\hat{\lambda}$ della (3), e della autosoluzione λ_0 della omogenea associata, seguono così dal cosiddetto 4° teorema di Fredholm.³

La soluzione generale della (3) si scriverà quindi nella forma $\lambda = \hat{\lambda} + C\lambda_0$, C essendo una costante per il momento arbitraria. Denotando con u^\wedge la soluzione corrispondente a $\hat{\lambda}$ attraverso la (2), avremo così:

$$(5) \quad u = u^\wedge + C$$

(perché a λ_0 corrisponde $u = 1$). È conveniente estrarre una particolare $\lambda = \lambda^*$ dall'insieme delle soluzioni $\lambda = \hat{\lambda} + C\lambda_0$, richiedendone l'ortogonalità a λ_0 (nel senso del prodotto interno alla Hilbert (\cdot, \cdot) su S), cioè $(\lambda^*, \lambda_0) = 0$. Evidentemente, questo si ottiene ponendo $C =: -(\hat{\lambda}, \lambda_0)/\|\lambda_0\|^2 \equiv C^*$, dove $\|\cdot\|$ è la norma hilbertiana. È allora quasi immediato verificare che $\lambda^* = \hat{\lambda} + C^*\lambda_0$ non dipende da $\hat{\lambda}$.⁴ In conclusione λ^* è una ben definita trasformata integrale lineare di f su S , alla quale corrisponde una ben definita soluzione u^* attraverso la (2), a sua volta una trasformata integrale (lineare) di f su S , che denoteremo $u^* = \mathcal{N}_i \circ f$. Qui \mathcal{N}_i denota il **nucleo di Neumann interno** e \circ è il segno di trasformata integrale (lineare, qui sul dominio S). La soluzione generale è quindi

$$(6) \quad u = u^* + \text{cost} \equiv \mathcal{N}_i \circ f + \text{cost}.$$

Si può dimostrare che \mathcal{N}_i è L_2 -limitato⁵; quindi $\mathcal{N}_i \circ f$ è continuo in f , rispetto alla $L_2(X^\circ)$ -norma e rispettivamente alla $L_2(S)$ -norma.

Torniamo adesso alla eq. (4₀), e passiamo alla sua associata non-omogenea aggiungendovi un termine libero $g = g(\eta) \in C^1(S)$ a 2° membro. La risultante equazione integrale

$$(4) \quad \sigma(\eta)/2 + (1/4\pi) \int_S \sigma(s) \partial_\nu (1/|\eta-s|) = g(\eta),$$

è da associare al Problema Esterno di Laplace-Dirichlet (PED) nel senso seguente. Supponiamo dapprima che g sia dato sotto il vincolo (di ortogonalità alla densità di Robin):

$$(7) \quad \int_S \lambda_0(s) g(s) dS = 0.$$

dell'aggiunta è l'equazione di partenza. Per la stessa ragione il PED (problema esterno di Laplace-Dirichlet, vedi oltre) e il PIN, come pure il PEN e il PID (vedi oltre), si dicono **problemi aggiunti** l'uno dell'altro.

³ Vedi ad es. Mikhlin (1) Bibl. Gen. (A).

⁴ Se infatti λ^*_1 [λ^*_2] corrisponde a $\hat{\lambda}_1$ [$\hat{\lambda}_2$], abbiamo $\lambda^*_2 - \lambda^*_1 = \hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1 - ((\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1), \lambda_0) \lambda_0 / \|\lambda_0\|^2$; ma $\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1$ deve essere proporzionale a λ_0 , diciamo pari a $A\lambda_0$, da cui $\lambda^*_2 - \lambda^*_1 = A\lambda_0 - A\lambda_0 = 0$, qed.

⁵ Con $L_2(\cdot)$ si intende la norma di Lebesgue quadratica, cioè la radice dell'integrale di Lebesgue del quadrato di (\cdot) sul dominio di interesse, S nel caso presente.

Il PED consiste nel ricercare una $v \in C^2(\mathbf{C}X) \cap C((\mathbf{C}X)^-)$, armonica in $\mathbf{C}X$ e soddisfacente alla $v|_S = g$ su S . Una soluzione esiste, uguale al potenziale di doppio strato con densità σ soluzione della (5), secondo la (cfr. S.sez. 5.2.3)

$$(8) \quad 4\pi v(\xi) = \int_S \sigma(s) \partial_v(1/|s-\xi|) d_s S,$$

con la derivata normale fatta rispetto alla variabile di integrazione s . Si noti che la costante additiva inclusa in σ (cfr. la (4₀)) è inefficace su v perché ξ è ora al di fuori di S .

Sotto il vincolo di ortogonalità (7) esiste una e una sola soluzione della (4), che è dunque una trasformata integrale lineare (su S) del termine libero g ; e di conseguenza, v è a sua volta una ben definita trasformata integrale (lineare) di g , che scriveremo nella forma:

$$(9) \quad v = \mathcal{D}_e \circ g,$$

dove \mathcal{D}_e è il **nucleo di Dirichlet esterno**. Come potenziale di doppio strato, questa v è *fortemente normale* all'infinito (cioè $\rightarrow 0$ più velocemente di $1/|\xi|$).

La sopraddetta soluzione del PED non è la più generale possibile, perché abbiamo convenuto che valga il vincolo di ortogonalità (7) di g alla densità di Robin λ_0 . In realtà una soluzione esiste anche se g non soggiace alla (7). Supporremo, senza limitazione di generalità, che l'origine $\xi = 0$ appartenga a X° . Poniamo poi $\alpha =: \int_S \lambda_0(s) g(s) dS$, generalmente diverso da 0, e consideriamo l'equazione che si ottiene dalla (4) aggiungendo a 2° membro un termine $-\alpha/(4\pi|\eta|)$ e chiamando σ^* la nuova incognita, cioè la:

$$(4^*) \quad \sigma^*(\eta)/2 + (1/4\pi) \int_S \sigma^*(s) \partial_v(1/|\eta-s|) = g(\eta) - \alpha/(4\pi|\eta|).$$

Si dimostra facilmente, allora, che la soluzione del DEP senza il vincolo (7), diciamola v^* , è uguale alla somma del potenziale di doppio strato con densità σ^* e del **potenziale di monopolo** $\alpha/(4\pi|\xi|)$. Questo contributo di monopolo, e quindi l'intera soluzione v^* , è *semplicemente normale* all'infinito. Alla luce della teoria di Fredholm, la richiesta $\alpha = 0$ del caso precedente era dettata dalla opportunità di assicurare l'esistenza di una soluzione σ della (4) (che è anche unica perché la (4₀) non ha autosoluzioni). Ma similmente, l'esistenza di una soluzione σ^* (unica) della (4*) è ora assicurata dalla condizione di ortogonalità $\int_S \lambda_0(s) [g(s) - \alpha/(4\pi|s|)] dS = 0$, che è automaticamente soddisfatta perché $\xi = 0$ appartiene per ipotesi a X° , e quindi $\int_S \lambda_0(s)/|s| dS = 4\pi$ (cfr. nota (1)).

Veniamo adesso al Problema Esterno di Laplace-Neumann (PEN). Questo si formula come il corrispondente PIN, sostituendo X° con $\mathbf{C}X$ e ignorando il vincolo (1). Se una soluzione esiste, è ancora un potenziale di strato semplice con densità μ soddisfacente l'equazione integrale di Fredholm:

$$(10) \quad -\mu(\eta)/2 + (1/4\pi) \int_S \mu(s) \partial_N(1/|\eta-s|) = f(\eta),$$

che si ottiene dalla (3) semplicemente invertendo il segno del primo termine a 1° membro. L'equazione omogenea associata alla (10) non ha autosoluzioni, per cui se una soluzione esiste (come si può dimostrare che è vero per ogni f), allora è unica. Quindi μ è una ben definita trasformata integrale di f , e lo stesso vale per la corrispondente u . Scriveremo dunque, con la solita notazione,

$$(11) \quad u = \mathcal{N}_e \circ f,$$

dove \mathcal{N}_e è il **nucleo esterno di Neumann**. Come \mathcal{N}_i , anche \mathcal{N}_e risulta L_2 -limitato, e così u è continua in f , nel senso delle norme menzionate. Si noti che, a differenza del PIN, nel PEN non si impongono vincoli sul termine libero f (a parte il suo essere continuo). È ovvio che in queste condizioni la corrispondente u è semplicemente normale all'infinito.

Rimane da esaminare il Problema Interno di Laplace-Dirichlet (PID), aggiunto del PEN; ma a questo punto, la situazione è abbastanza chiara da lasciare la maggior parte del lavoro al lettore come esercizio. Ci limitiamo a scrivere la associata equazione integrale di Fredholm nella densità di doppio strato τ , in termini della quale la soluzione si esprime nel modo usuale:

$$(12) \quad -\tau(\eta)/2 + (1/4\pi) \int_S \tau(s) \partial_\nu (1/|\eta-s|) = g(\eta),$$

$\forall \eta \in S$. Come sappiamo, in questo caso l'incognita è prescritta su S come $g \in C(S)$. L'equazione omogenea associata alla (12), diciamo (12₀), non ammette autosoluzioni, come non ne ammette l'associata omogenea alla (10); quindi la soluzione della (12), che esiste sempre, è unica. Ancora, la densità τ è una ben definita trasformata integrale (lineare) di g , e altrettanto è vero per la soluzione

$$(13) \quad v = \mathcal{D}_i \circ g,$$

dove \mathcal{D}_i è il **nucleo di Dirichlet interno**.

Le equazioni (6, 9, 11, 13) riassumono la nostra rassegna dei quattro problemi considerati, nell'ordine PIN, PED, PEN e PID.

CAP 6

STRUMENTI MATEMATICI IV

I Capp. 6 e 7 che seguono sono quasi interamente dedicati al Calcolo delle Variazioni (CDV) e alle sue applicazioni. Questa scelta, che a prima vista può sembrare poco equilibrata, riflette la comune opinione che nel CDV risieda il nucleo concettuale della Fisica Matematica, *almeno nei suoi aspetti fondativi*.

Il CDV si suddivide in modo naturale in due grandi parti, delle quali la prima è propedeutica alla seconda: quella del cosiddetto CDV “unidimensionale” (o per brevità, unidim) e quella del CDV “multidimensionale” (multidim). Il Cap. 6 verte quasi esclusivamente sul CdV unidim, mentre il più breve Cap. 7 tratta *anche* di CDV multidim. Questa distribuzione della teoria variazionale può dare l'impressione che il CDV multidim sia una semplice generalizzazione di quello unidim. Come dovrebbe essere noto, non è così; e se abbiamo deciso di limitare in tal senso la nostra esposizione, è per evitare il rischio di naufragare in un campo ormai sconfinato e tuttora in fase di vivace evoluzione dell'Analisi contemporanea, di natura troppo specialistica per trovare posto in questo libro. Il punto è che il CDV multidim è connaturalmente legato alla teoria dei sistemi differenziali *parziali* (SDP); e questa è ancora lontana dall'aver trovato quell'assetto maturo raggiunto dalla teoria dei sistemi differenziali *ordinari* (SDO), cui si collega invece il CDV unidim.

6.1) ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI I

6.1.1) GENERALITÀ

Se si eccettuano alcuni risultati di tipo isoperimetrico dovuti a Zenodoro di Alessandria (I sec. d.C.)¹ e pochi altri contributi secondari (per non nominare la cosiddetta “leggenda della terra di Didone”²), si può ben dire che il CDV in senso stretto sia nato quasi all'improvviso, come nuova

¹ Di questi abbiamo notizia soltanto attraverso i più tardi conterranei Pappo e Teone (il secondo attivo nel III sec. d.C.). Secondo la loro testimonianza, Zenodoro si occupò di certe figure isoperimetriche, dimostrando ad esempio teoremi del tipo: “tra i poligoni ad n lati aventi perimetro dato, quello regolare ha area *massima*”.

² Secondo questo mito, la futura regina di Cartagine fu invitata a scegliere la terra su cui edificare la nuova città nella misura che sarebbe stata capace di «recingere con la pelle di un toro» (Kline, Bibl. Gen. (F), vol. I). Didone trasformò la pelle in una sottilissima correggia di lunghezza L , e con essa recinse un semidisco il cui diametro coincideva con la riva (rettilinea) del mare. Questa è per l'appunto la *massima* area che può avere una regione il cui contorno sia costituito da

branca della matematica, soltanto verso la fine del XV secolo. Ciò avvenne con due problemi affrontati da Newton (nel 1685, la soluzione completa essendo del 1694) e rispettivamente da Johann Bernoulli ³ (nel 1696).

Il problema considerato da Newton riguardava il profilo ottimale, al fine di *minimizzarne* la resistenza all'avanzamento, di un solido assisimmetrico in moto uniforme in un fluido perfetto con velocità parallela al suo asse, ed aveva pertanto indubbio interesse, come Newton ovviamente sapeva, per l'ingegneria navale dell'epoca. Il metodo di soluzione adottato in quella occasione non ebbe tuttavia un seguito immediato nello sviluppo della nuova disciplina. Bernoulli fece più o meno l'opposto, proponendosi un problema della stessa natura matematica ma di importanza secondaria dal punto di vista delle ricadute pratiche: la determinazione della traiettoria di *minima* durata, o **brachistocrona**, da un punto P_1 ad un punto P_2 più basso di P_1 , ma non sulla sua verticale, di un grave puntiforme ad essa vincolato senza attrito. Joh. Bernoulli, nonché lo stesso Newton, Leibniz, de L'Hospital e Jakob Bernoulli risolsero tutti il problema della brachistocrona; ⁴ e specialmente per merito di Jakob, nel contempo cominciarono a sviluppare tecniche di qualche generalità, che entrarono poi a far parte dell'armamentario metodologico del CDV. Supponendo che il grave partisse da fermo, la brachistocrona, o «linea celerrimi descensus», fu identificata nell'*unico* arco di cicloide, tra i due punti dati, avente tangente iniziale verticale (discendente).

In termini matematici, sia nel caso del problema idrodinamico di Newton che in quello della brachistocrona si trattava di rendere minimo un conveniente funzionale (reale) \mathcal{F} di una funzione incognita di una sola variabile (reale), definita in un certo intervallo (a,b) (con $a < b$) e soggetta a certe condizioni agli estremi, e per ipotesi appartenente ad un certo insieme X di funzioni "ammissibili" (definite in (a,b) e soggette alle stesse condizioni ai suoi estremi). Vale a dire, partendo dall'assegnata applicazione $\mathcal{F}: X \rightarrow \mathbb{R}$, si dovevano trovare (se esistevano) gli elementi di X che minimizzavano \mathcal{F} , almeno in senso locale. Nella modellazione (in verità ancora un po' rudimentale) del problema di Newton, detto $y = y(x)$ il profilo meridiano incognito (funzione della coordinata assiale x compresa tra a e $b > a$), e $y' = y'(x)$ la sua derivata, il funzionale \mathcal{F} di y , $\mathcal{F}[y]$, era $\int_{x=a}^b [y(x)(y'(x))^3 / (1+(y'(x))^2)] dx$; nella modellazione del problema di Bernoulli, detta $y = y(x)$ la traiettoria incognita (funzione dell'ascissa orizzontale x nel piano dei punti (P_1, P_2)), l'asse y

un segmento rettilineo arbitrario (parte "bagnata"), e da una qualsiasi linea di lunghezza assegnata L (parte "asciutta"). Scegliendo la sua terra lungo la riva piuttosto che all'interno, Didone ottenne un'area doppia ($= L^2/(2\pi)$) di quella che avrebbe ottenuto nel secondo caso ($L^2/(4\pi)$). È questo l'aspetto sottile della leggenda, perché sin da tempi assai remoti era noto che la regione di massima area e dato perimetro (o minimo perimetro e data area) è un disco. Anche dimenticando che Didone stessa fu figura leggendaria, la più generosa stima di L mostra poi che l'intera storia non sta in piedi; ma proprio questo la rende più interessante agli occhi del matematico.

³ Johann Bernoulli (1667-1748), Opera, I, 161. Johann fu forse il membro di maggior spicco della famosa famiglia di matematici svizzeri che, oltre a lui, annoverò Jakob (1655-1705), Daniel (1700-1782), Nikolaus (1687-1759) e un secondo Nikolaus (1695-1726).

⁴ Vedi gli "Acta Eruditorum" del 1697.

essendo orientato verso il basso, $\mathcal{F}[y]$ era $\int_{x=a}^b [(1+(y'(x))^2)/y(x)]^{1/2} dx$, sempre con $b > a$. In entrambi i casi, le condizioni agli estremi assegnavano il valore dell'incognita y in a e in b .

Circa trent'anni più tardi, avendo nel frattempo affrontato e risolto alcune questioni di analoga natura, ancora Joh. Bernoulli propose al giovane L. Eulero – che si sarebbe presto affermato tra i massimi matematici del suo tempo – di determinare le **geodetiche** (\equiv linee di lunghezza estrema, tipicamente *minima*) di una superficie data in \mathbb{R}^3 . Questo problema, e la soluzione che ne seguì, introdusse Eulero in una materia che sarebbe rimasta oggetto della sua attenzione per molti anni a venire.⁵ I di lui decisivi contributi, insieme a quelli più tardi di J. Lagrange, avviarono il CDV allo status di grande capitolo dell'Analisi, con importantissime ricadute nella geometria, nella fisica, nell'ingegneria, nella teoria economica, ecc. In particolare, con Eulero, Lagrange, Hamilton, Jacobi, ecc., il CDV divenne presto un formidabile strumento nelle mani del fisico-matematico fondamentalista, anche sul piano euristico. Ad esempio, circa due secoli più tardi, una delle idee-chiave della teoria della relatività generale di Einstein (1915, vedi Sez. 9.1) fu quella che un grave in moto in un campo gravitazionale percorresse una “geodetica”, opportunamente definita, della varietà spazio-temporale 4-dim “incurvata” dal campo stesso secondo le equazioni gravitazionali (9.1.3, 8).

Cominceremo con l'esaminare il CDV da un punto di vista strettamente matematico. Il funzionale da “estremare” (cioè da minimizzare o massimizzare, quasi sempre in senso locale) dal quale si è soliti partire nelle esposizioni introduttive è del tipo:

$$(1) \quad \mathcal{F}[y] = \int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx,$$

dove $[a < b]$ è il dominio della funzione incognita $y = y(x)$ (**problema ad estremi fissi**), $y'(x)$ la sua derivata e $F = F(t, u, v)$ è una funzione data dei suoi tre argomenti che di solito si nomina come “funzione fondamentale” o “lagrangiana” del problema. Per semplicità, l'integrale nella (1), nonché in altre analoghe espressioni del funzionale in questione, sarà qui da intendere nel senso di Riemann.⁶ Ragionevolmente, supporremo la lagrangiana F continua come funzione di x attraverso $(x, y(x), y'(x))$, e richiederemo quindi innanzitutto che $y \in C^1[a, b]$ ($\equiv C^1([a, b])$). Quanto al dominio di $F = F(t, u, v)$, si potrà convenire che esso sia un cilindro indefinito parallelo all'asse v dello spazio (t, u, v) , con sezione nel piano (t, u) costituita da un dominio $U \subset \mathbb{R}^2$ connesso (e più spesso

⁵ Si veda in particolare, di L. Euler, “Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentes” (1744), in L.E. Opera, (I), XXIV. Si può escludere che Eulero si fosse interessato a problemi di CDV *prima* di esserne stato sollecitato da Joh. Bernoulli

⁶ Da ben oltre mezzo secolo, il CDV considera tuttavia anche funzionali-integrali nel senso di Lebesgue, soprattutto nel caso multidimensionale (cfr. eq. (4)). Ciò conduce ovviamente ad un indebolimento delle richieste che si fanno sulle incognite, sulle funzioni integrande e sugli stessi domini di integrazione. Noi rinunciamo qui a queste generalizzazioni, anche perché esse non hanno in generale grande importanza nelle applicazioni comuni. Ci limiteremo comunque a considerare variabili indipendenti, e loro funzioni, reali.

semplicemente connesso) contenente i punti $(t,u) = (a,u(a))$, $(t,u) = (b,u(b))$, e le curve di confronto ammissibili tra di essi. Usualmente, si richiede che la lagrangiana F sia di classe C^2 in questo dominio $U(\subset \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$. Il problema consiste allora nel determinare (se esiste) una funzione y che renda \mathcal{F} *estremo* (cioè minimo o massimo) rispetto ai valori che esso assume per le **funzioni di confronto ammissibili** $y_*(x) \in C^1[a,b]$, per le quali $y_*(a) = y(a)$, $y_*(b) = y(b)$ (ovviamente la stessa y può considerarsi una funzione di confronto ammissibile). Se esiste, una tale $y(x)$ si dice una **estremante** di \mathcal{F} . In realtà, se l'esame della situazione resta confinato alle variazioni prime, si può anche considerare il problema di determinare una $y(x)$ che renda \mathcal{F} semplicemente *stazionario*. Le due richieste si possono scrivere come " $\mathcal{F}[y|(a,b)] = \text{extr!}$ " e rispettivamente come " $\mathcal{F}[y|(a,b)] = \text{staz!}$ ", ed è ovvio che la prima implica la seconda. Gli esempi soprariportati dei problemi di Newton e di Joh. Bernoulli rientrano nel caso descritto, comunemente denominato **problema-base del CDV** "di ordine 1" (perché il massimo ordine di derivata dell'incognita y che vi figura è 1), e "unidimensionale" (perché tale è il dominio di integrazione). Al problema-base " $\mathcal{F}[y|(a,b)] = \text{staz!}$ " ci riferiremo nel seguito come al problema (α) .

È chiaro che lo spazio funzionale X delle funzioni di confronto ammissibili y_* *non* è lineare, tra l'altro perché i valori $y(a)$ e $y(b)$ non sono entrambi nulli in generale; tuttavia, l'uso di spazi *lineari* convenientemente normati gioca un ruolo centrale nel CDV. La ragione di ciò si intuisce facilmente: saremo infatti interessati a *variazioni* $y_*(x) - y(x)$ della funzione incognita che ne lasciano invariati i valori (limite dall'interno) agli estremi, e queste variazioni costituiscono evidentemente uno spazio lineare. Se poi le variazioni sono abbastanza "piccole" (in un senso da precisare) la corrispondente variazione di un funzionale *regolare* di $y(x)$ può considerarsi lineare rispetto ad esse. Questo approccio al problema generale di rendere stazionario un dato funzionale è il solo che possa dirsi propriamente "variazionale"; come si intuisce e meglio vedremo, esso conduce dal problema di partenza ad un problema differenziale, e in particolare dal problema (α) a quello di risolvere una equazione differenziale ordinaria, in questo caso del 2° ordine, quasi-lineare. Altri metodi di soluzione del problema di rendere stazionario (o estremo) un dato funzionale sono genericamente noti come **metodi diretti** (del CDV).

Proseguiamo con una breve rassegna di alcune delle più importanti direttrici di generalizzazione del problema (α) . Queste generalizzazioni possono coesistere, e spesso coesistono.

§ 1. La curva piana incognita $y = y(x)$ è più generalmente espressa in forma parametrica, secondo $x = x(t)$, $y = y(t)$, diciamo con $t \in I \equiv [0,1]$, sotto $(d_t x)^2 + (d_t y)^2 > 0$ e $x(0) = a$, $x(1) = b$. Il funzionale \mathcal{F} , a questo punto $\mathcal{F}[x,y|I]$, è allora del tipo

$$(2) \quad \mathcal{F}[x,y|I] =: \int_{t=0}^1 F(t,x(t),y(t),d_t x(t),d_t y(t))dt,$$

e il dominio di $F = F(z_0, \dots, z_4)$ è del tipo $U \times \mathbb{R}^2$, dove $U \subset \mathbb{R}^3$ ha proiezione sull'asse z_0 includente I e contiene $(x(0), y(0))$ e $(x(1), y(1))$, nonché le curve ammissibili $x_*(t)$, $y_*(t)$ con gli stessi valori agli estremi, $x_*(0) = x(0)$, $y_*(1) = y(1)$. §

§ 2. Anziché in \mathbb{R}^2 , la curva incognita in oggetto è più generalmente in $\mathbb{R}^{1+n \geq 2}$ (problema a $n \geq 1$ incognite). Se essa è descritta parametricamente come in §1, il funzionale è del tipo

$$(3) \quad \mathcal{F}[u|I] = \int_{t=0}^1 F(t, u(t), d_t u(t)) dt,$$

dove u e $d_t u$ stanno adesso per $\langle u^1, \dots, u^n \rangle$ e rispettivamente per $\langle d_t u^1, \dots, d_t u^n \rangle$. In questo caso gli argomenti della lagrangiana F sono $1 + 2n$, e si continuerà a supporre, tipicamente, che i primi $1 + n$ di essi, t e le incognite u , appartengano ad un dominio U semplicemente connesso di \mathbb{R}^{1+n} contenente $(0, u(0))$, $(1, u(1))$ e le curve di confronto ammissibili $u_*(t)$ con gli stessi valori in $(0, 1)$ di $u(t)$. Questa generalizzazione da §1 a §2 non presenta difficoltà, e quasi si riduce ad una modifica del significato dei simboli. §

§ 3. Una ulteriore generalizzazione, con la quale si passa dal CDV unidim al CDV multidim, si ha considerando un numero $m \geq 1$ di parametri, o variabili indipendenti, oltre che $n \geq 1$ funzioni incognite, o variabili dipendenti, come nel precedente caso di cui in §2. Renderemo più omogenea la nostra notazione denotando con $x \equiv x^{1 \leq i \leq m}$ le prime (salvo possibilmente quando $m = 1$, allorché useremo anche t per l'unica variabile indipendente, come in §1 e in §2), e con $u \equiv u^{1 \leq \alpha \leq n}$ le seconde (salvo possibilmente quando $n = 1$, allorché useremo anche y per l'unica variabile dipendente). L'indice delle variabili indipendenti x sarà sempre italico e quello delle variabili dipendenti u sarà sempre greco. Il funzionale integrale del 1° ordine è quindi ora del tipo

$$(4) \quad \mathcal{F}[u|\Omega] = \int_{\Omega} F(x, u(x), \partial u / \partial x(x)) d\Omega,$$

dove Ω è un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^m con frontiera $\partial\Omega$ regolare (o regolare a pezzi), e $\partial u / \partial x(x)$ è il gradiente di u (più spesso potrà essere utile denotare questo gradiente con $v = v(x)$). Qui la F , che nel presente caso multidim si usa nominare come “densità lagrangiana” piuttosto che come lagrangiana, è assunta di classe C^2 in $U \times \mathbb{R}^{mn}$, dove U è un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^{m+n} la cui proiezione su \mathbb{R}^m include Ω , e u è assunta di CdC 2 in Ω , o $u \in C^2(\Omega)$.⁷ Per lo più si considerano domini di integrazione non orientati, sebbene il moderno CDV si interessi anche al caso di domini orientati. Il problema variazionale $\mathcal{F}[u|\Omega] = \text{extr!}$ (o anche $\mathcal{F}[u|\Omega] = \text{staz!}$) con $m > 1$ si dice (strettamente) **multidimensionale** (o **ad integrale multiplo**), in contrapposizione al caso precedente con $m = 1$ (**unidimensionale**, o **ad integrale semplice**). Spesso, parleremo tuttavia di problema multidimensionale riferendoci ad un valore di m *generalmente* ≥ 1 . Non ci occuperemo di CDV multidimensionale in questa sezione 6.1, salvo che, a titolo introduttivo, nel presente articolo

⁷ Più precisamente, $u \in [C^2(\Omega)]^n$. Nel seguito sottintenderemo spesso questo tipo di precisazione.

§3. Le n funzioni incognite $u^\alpha = u^\alpha(x^i)$, con $i = 1, \dots, m$ (ovvero anche $i = 1 \div m$), e $\alpha = 1, \dots, n$ (o $\alpha = 1 \div n$), descrivono una varietà m -dim immersa in \mathbb{R}^n (pensando Ω come aperto). Ci si può limitare a considerare varietà $u = u(x)$ non degeneri, cioè per le quali la matrice $\{\partial u^\alpha / \partial x^i\}_{i=1+m; \alpha=1 \div n}$ ha rango (massimale) $\min(m, n)$ in Ω . Di solito le funzioni di confronto ammissibili uguagliano la u su $\partial\Omega$ (nel senso dei valori-limite dall'interno), e $\partial\Omega$ è regolare a pezzi. Si intuisce, e lo abbiamo già detto, che i problemi ad integrale multiplo sono in generale assai più difficili da risolvere di quelli ad integrale semplice. Se si rimuove la limitazione che la varietà sia immersa in \mathbb{R}^n , ma sia soltanto una varietà astratta, si parla di **problema variazionale su varietà astratte**. §

§ 4. Oltre che dalla (unica) variabile indipendente x , dalla (unica) incognita y e dalla sua derivata dy/dx , la lagrangiana F nel funzionale-base (1) può dipendere anche dalle derivate $d^2y/dx^2, \dots, d^p y/dx^p$, fino ad un certo $p > 1$, in modo convenientemente regolare e in un conveniente dominio dei suoi $2 + p$ argomenti. Questa ipotesi più generale dà luogo ad un problema unidim cosiddetto **di ordine** p , diciamo di tipo (α_p) (intendendosi che per $p = 1$ si ricade nel problema (α)). Per $p > 1$, le condizioni da imporre alle funzioni di confronto ammissibili y^* agli estremi dell'intervallo dovranno allora estendersi similmente alle derivate fino all'ordine $p - 1$ (cioè $y^*(a) = y(a), \dots, y^{*(p-1)}(a) = y^{(p-1)}(a)$, e similmente in b , sempre riferendosi a valori-limite dall'interno). Si possono poi immaginare le ulteriori generalizzazioni che conseguirebbero, per $p > 1$, dal passaggio ad un dominio di integrazione m -dimensionale e ad n incognite. §

§ 5. Piuttosto che nei punti $(a, y(a)), (b, y(b))$, gli estremi della curva incognita $y(x)$ (caso base, vedi §1) nel funzionale (1) giacciono su certe curve del piano (x, y) ; il problema si dice allora **ad estremi liberi**. Spesso, questo tipo di condizione si può anche convenientemente estendere ai problemi più generali descritti in (vedi §2, §3, §4). §

§ 6. Ancora una generalizzazione del problema-base riguarda la possibilità di richiedere all'incognita, e quindi alle funzioni di confronto ammissibili, di soddisfare certi vincoli a priori. Un primo caso importante, riferendoci al problema (α) , è quello in cui questi vincoli sono del tipo (che si dice **isoperimetrico**) $\mathcal{K}_1[y] = c_1, \mathcal{K}_2[y] = c_2, \dots, \mathcal{K}_q[y] = c_q$, dove $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_q$ sono certi funzionali (tipicamente integrali) di y e c_1, \dots, c_q sono certi reali assegnati.⁸ In altri casi, i vincoli sono espressi da q equazioni indipendenti finite (**vincoli olonomi**) o differenziali (**vincoli anolonomi**) non integrabili, cui devono soddisfare le incognite $u^{1 \leq \alpha \leq n}$ sotto la naturale restrizione $n > q$. Tutti i problemi con vincoli o condizioni addizionali, non soltanto del tipo sopra nominato, vengono in generale detti **problemi condizionati** (o **vincolati**). §

⁸ Evidentemente senza limitare la generalità, questi numeri possono porsi uguali a 0 (ad esempio); infatti c_1, \dots, c_q sono sempre pensabili come funzionali di y , e incorporarsi a sottrarre nei corrispondenti $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_q$. Se questi funzionali sono di tipo propriamente integrale, q può essere qualsiasi. Il problema di Didone era dunque del tipo isoperimetrico con un solo vincolo (la prefissata lunghezza L della correggia).

Vi sono due diversi aspetti di un generico problema del CDV: quello di determinare condizioni *necessarie* cui deve soddisfare una sua soluzione (supposta esistere) e quello di determinare condizioni *sufficienti* alla sua esistenza. Come si può immaginare, il secondo problema è più difficile del primo, e ce ne occuperemo soltanto di sfuggita. Un'altra questione consiste nell'accertare che la soluzione determinata corrisponda effettivamente ad un minimo, o ad un massimo, oppure né all'uno né all'altro, essendo soltanto un elemento dello spazio delle possibili soluzioni che rende stazionario il funzionale \mathcal{F} in oggetto. Di norma, nel seguito lasceremo in secondo piano questo tipo di problemi “ \mathcal{F} minimo o massimo vs. \mathcal{F} stazionario”.

È a questo punto evidente come, «posto sulla scesa delle successive generalizzazioni, il Calcolo delle Variazioni dilaghi in superficie e in profondità, in estensione e in comprensione, oltre ogni limite.» (B. Finzi, 1949). Insomma, anche limitandolo alle sole varietà immerse, il CDV è un vero e proprio universo analitico, dal quale quello dei problemi unidim si può estrarre come caso particolare, con alcune proprietà sue proprie, da quello dei problemi multidim.⁹ Nel seguito cercheremo di dare un'idea, per quanto parziale e sintetica, di questo universo, mirando come al solito ai suoi aspetti più fondamentali. La prima tappa è quella delle procedure di soluzione propriamente variazionali, lungo la linea iniziata da Eulero per il problema (α), e in generale per il problema ($\alpha_{p>1}$).¹⁰

6.1.2) LE EQUAZIONI DI EULERO-LAGRANGE NEL CASO UNIDIM¹¹

Secondo quella che a partire dalla tesi di M. Fréchet¹² cominciò ad essere nominata come “Analisi Generalizzata”, un'applicazione $f: A(\subset E) \rightarrow G$, dove E e G sono spazi di Banach con

⁹ Esistono anche problemi variazionali di altra e più generale natura, nei quali il funzionale estremando *non* è un integrale (semplice o multiplo), né può ridursi a tale, e dei quali non ci occuperemo.

¹⁰ La Bibliografia sul CDV è praticamente sterminata, e l'attività di ricerca vi è tutt'oggi molto viva, anche sul versante fisico-matematico. Ci è parso utile segnalare qui, in ordine cronologico, i trattati generali a nostro avviso più autorevoli (ciascuno al suo tempo) pubblicati nello scorso secolo, vedi anche Bibl. Gen. (1): Bolza 1904, Hadamard 1910, Tonelli (2 voll.) 1921-1922; Courant & Hilbert (2 vols.) 1924 (trad. ingl. 1953) e 1962, Carathéodory 1935, Bliss 1946, Akhiezer 1955, Gelfand & Fomin 1961, Elsgolts (1) 1962, Morrey 1966, Rund 1966, Elsgolts (2) 1970, Logan 1977, Blanchard & Brüning 1982, Zeidler (vol. III, 1985), Giaquinta & Hildebrandt (2 vols.) 1996.

¹¹ In questa e nella prossima sezione trascureremo quasi sempre le generalizzazioni conseguenti al sostituire la continuità con la “continuità a tratti” o la “continuità quasi ovunque”, cfr. anche la nota (⁶). Similmente eviteremo la nozione di derivata, ordinaria o parziale, “unilatera” sul contorno del dominio D della funzione f in oggetto (nel secondo caso avendo supposto quel contorno convenientemente regolare). Come già accennato (vedi 5.2.1), questo tipo di difficoltà si aggira includendo D in un aperto A dello stesso spazio e supponendo che esista una funzione f^* definita in A la cui restrizione su D coincida con f ; o più spesso supponendo la derivata in oggetto dotata di limite dall'interno di D . Nel primo caso la richiesta su f di essere $C^{r \geq 1}(D)$ si intende allora come richiesta su f^* di essere $C^{r \geq 1}(A)$; e nel secondo, come richiesta che le derivate fino all'ordine r -mo siano continue fino al contorno di D (incluso).

¹² M. Fréchet, “Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale”, Collection Borel, 1928. Salvo che a scopo di enfasi, l'attributo “generalizzata”, riferito all'Analisi, è praticamente caduto nell'uso moderno.

norme $\| \cdot \|_E$ e rispettivamente $\| \cdot \|_G$, e A è un aperto (ma non necessariamente un sottospazio) di E , è **F-differenziabile** (o semplicemente **differenziabile**) in $x_0 \in A$ se esiste un'applicazione *lineare* $u \in \mathcal{L}(E, G)$ (insieme delle applicazioni lineari di E in G) “tangente” a $f(x) - f(x_0)$ in x_0 ; per cui cioè

$$(1) \quad \lim_{x \in A \rightarrow x_0} \{ \|f(x) - f(x_0) - u \circ (x - x_0)\|_G / \|x - x_0\|_E \} = 0,$$

dove si è scritto $u \circ (x - x_0)$ piuttosto che $u(x - x_0)$ per porre in evidenza la linearità di u , e $/$ è segno di divisione tra le due norme. Se questo è il caso, f è continua (con riferimento alle due norme), e u è unica. L'applicazione lineare u si dice la **F-derivata (derivata alla Fréchet, o forte) di f in x_0** , e si denota usualmente $f'(x_0)$, o $Df(x_0)$. Scritta “fuori dal simbolo \lim ”, la (1) significa che, per $\|x - x_0\|_E$ abbastanza piccola,

$$(2) \quad \Delta f(x, x_0) =: f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \circ (x - x_0) + o(x - x_0),$$

dove con $o(x - x_0)$ si indica, come è usuale, una funzione di x (avente valori in G , e per $x_0 \in A$ fisso) per la quale $\lim_{\|x - x_0\|_E \rightarrow 0} \{ o(x - x_0) / \|x - x_0\|_E \} = 0$ (qui lo “0” a 2° m. è ovviamente lo zero di G). La parte $f'(x_0) \circ (x - x_0)$ di $\Delta f(x, x_0)$, che è definita $\forall x \in E$, si dice sua **parte principale in x_0** .

Se in particolare $G \equiv \mathbb{R}$, $f \equiv \mathcal{F}$ è un funzionale reale di $x \in A$. Ha allora senso dire che \mathcal{F} ha un minimo [massimo] relativo in x_0 , se $\Delta \mathcal{F}(x, x_0) > 0$ [< 0] per $x \neq x_0$ in una palla $B(x_0, r)$ di centro x_0 e raggio r inclusa in A ; quindi se, supposto \mathcal{F} differenziabile in x_0 , dettane \mathcal{F}' la derivata risulta

$$(3) \quad \Delta \mathcal{F}(x, x_0) = \mathcal{F}'(x_0) \circ (x - x_0) + o(x - x_0) > 0$$
 [< 0] ¹³

per $x \neq x_0$ in $B(x_0, r)$, e con $\lim_{\|x - x_0\|_E \rightarrow 0} \{ |o(x - x_0)| / \|x - x_0\|_E \} = 0$. Dividendo la (3) per $\|x - x_0\|_E$, e prendendone il limite per $\|x - x_0\|_E \rightarrow 0$, se $(x - x_0) / \|x - x_0\|_E$ tende ad un limite ω (necessariamente unitario), come avviene di certo se x tende a x_0 lungo una “direzione” ω arbitrariamente prefissata, si ha quindi (nel caso del minimo):

$$(3bis) \quad \mathcal{F}'(x_0) \circ \omega > 0$$
 ¹⁴

per ogni ω unitario. Questo può accadere soltanto se

$$(4) \quad \mathcal{F}'(x_0) = 0$$

(condizione necessaria!). Se la (3bis) vale con $<$ al posto di $>$, basta invertire il segno di ω per invertire quello di $\mathcal{F}'(x_0) \circ \omega$. Come nel caso delle funzioni standard di \mathbb{R} in \mathbb{R} , la (4) implica che x_0 (se \mathcal{F} esiste in x_0) sia un **punto (o elemento) di stazionarietà**, o **punto critico** (di $A \subset E$) per \mathcal{F} .

¹³ La distinzione tra minimi e massimi di \mathcal{F} è banale, nel senso che basta passare da \mathcal{F} a $-\mathcal{F}$ per mutare i primi nei secondi. Nel seguito, si potrà supporre che \mathcal{F} abbia un possibile minimo in x_0 .

¹⁴ Sia ω una generica direzione di E . Se per un certo $x_0 \in E$ esiste un'applicazione $\omega \mapsto \delta f(x_0, \omega)$ della sfera unitaria di E in G per la quale $\lim_{t \rightarrow 0} \{ (f(x_0 + t\omega) - f(x_0)) / t - \delta f(x_0, \omega) \} = 0$, $\delta f(x_0, \omega)$ si dice **G-derivata** (o **derivata alla Gâteaux, o debole**) di f , in x_0 , **nella direzione** ω . Se f è F-differenziabile in x_0 , allora è G-differenziabile, e $\delta f(x_0, \omega) = Df(x_0) \circ \omega \forall \omega$. È facile adattare il precedente ragionamento a questa definizione. La G-derivata è l'analogo, in uno spazio di Banach, di una derivata parziale, oppure direzionale, di una funzione in $\mathbb{R}^{n>1}$.

Oltre a non essere in generale sufficiente ad assicurare l'esistenza di un estremo (un minimo o un massimo) di \mathcal{F} in x_0 , la (4) non ci consente nemmeno di distinguere il caso del minimo da quello del massimo; allo scopo, occorrerebbe considerare la derivata seconda $\mathcal{F}''(x_0)$ (se essa esiste). Lasciando qui da parte questo aspetto del problema, rimarchiamo ancora che il significato della (4) è definito soltanto se è assegnata la norma di E (beninteso, quella di $G \equiv \mathbb{R}$ è la norma standard $|\cdot| \equiv$ valore assoluto). In conclusione, se $\mathcal{F}'(x_0)$ esiste riferita alla $\|\cdot\|_E$,

$$(5) \quad \text{“}\mathcal{F}(x) \text{ ha un minimo (relativo) in } x_0\text{”} \Rightarrow \text{“}\mathcal{F}'(x_0) = 0\text{”}.$$

Quanto sopra può applicarsi in particolare al caso in cui il funzionale \mathcal{F} da minimizzare è l'integrale (che è utile dire **integrale di base**) $\int_{x=a}^b F(x, y(x), y'(x)) dx$ descritto nella precedente sottosezione, e che denotiamo ancora con $\mathcal{F}[y|(a,b)]$ (o per brevità $\mathcal{F}[y]$) (problema (α) , $y \in C^1[a,b]$, $F \in C^2(U \times \mathbb{R})$). Come abbiamo osservato, lo spazio delle funzioni di confronto ammissibili non è lineare in generale, perché tipicamente y ha certi valori A, B , con $A^2 + B^2 > 0$, in a e rispettivamente in b ; ma questa difficoltà decade per lo spazio delle *differenze* ammissibili $\Delta y(x) =: y_*(x) - y(x) \equiv \eta(x)$, perché $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Dotando questo spazio *lineare* (su \mathbb{R}) H delle η di una norma $\|\cdot\|_H$, ed essendo la F data (regolare quanto basta nei suoi argomenti), tutto è definito in \mathcal{F} . Potremo quindi decidere se, per η arbitraria sotto $\|\eta\|_H < r$ (con r abbastanza piccolo) vale uno sviluppo del tipo

$$(6) \quad \Delta \mathcal{F}[\eta|y] =: \mathcal{F}[y+\eta] - \mathcal{F}[y] = u[y] \cdot \eta + o(\eta|y),$$

ove $u[y]$ è un'applicazione lineare, e $o(\eta|y)$ è un funzionale (reale), di η ; precisamente, occorre e basta che

$$(6\text{bis}) \quad \lim_{\|\eta\|_H \rightarrow 0} |o(\eta|y)| / \|\eta\|_H = 0;$$

cioè, che $o(\eta|y)$ sia infinitesimo di ordine superiore a $\|\eta\|_H$ al tendere di questa a zero. In questo caso (e solo in questo) l'applicazione $u[y]$ esiste unica, uguale alla $\mathcal{F}'[y]$ riferita a $\|\cdot\|_H$. Per il funzionale in oggetto, oltre che nulle agli estremi, le η sono evidentemente da assumere (almeno) di classe $C^1[a,b]$; e questo identifica completamente lo spazio H .

Nel seguito, sarà comodo denotare con $C^r_0[a,b]$, per $r \geq 0$, lo spazio delle funzioni di classe $C^r[a,b]$ e nulle (nel solito senso dei loro valori-limite dall'interno) agli estremi; e per $r \geq 1$, con $C^{r_0}[a,b]$ quello delle funzioni di $C^r_0[a,b]$ che hanno nulle agli estremi anche le derivate fino all'ordine $r-1$. Evidentemente $C^{r_0}[a,b] \subset C^r_0[a,b]$ ($r \geq 1$), e $C^{1_0}[a,b] \equiv C^1_0[a,b]$. Quindi $H = C^1_0[a,b]$. Naturalmente $\mathcal{F}[y+\eta]$, e quindi $\Delta \mathcal{F}[\eta|y]$, è definito anche nello spazio “di confronto” $C^{>1}_0[a,b]$; ma un minimo di \mathcal{F} riferito a questo spazio più ristretto potrebbe non esserlo più se riferito a $C^1_0[a,b]$. Viceversa, se lo spazio di confronto è quello delle funzioni nulle agli estremi e soltanto *derivabili* in

$[a,b]$, cioè di classe $D_0[a,b]$, allora un minimo riferito a questo spazio più ampio lo è a fortiori se riferito a $C^1_0[a,b]$. È usuale parlare, in particolare per il problema (α) , di **minimo forte** se riferito a funzioni di confronto di $D_0[a,b]$, e di **minimo debole** se riferito a funzioni di confronto di $C^{r \geq 1}_0[a,b]$ (o possibilmente a $C^{r \geq 1}_0[a,b]$). Bisogna anche dire che la distinzione tra questi minimi non ha, in generale, particolare significato nello studio delle condizioni necessarie per la sua esistenza, ma ne può avere uno importante in quello delle condizioni ad essa sufficienti.

Resta ancora da assegnare la norma di H . Ci limiteremo qui, per funzioni di classe $D^r[a,b]$, alla **norma uniforme di ordine** $p \leq r$, cioè (sottintendendo il riferimento ad $[a,b]$ in $\|\cdot\|$):

$$(7) \quad \|\eta\|_p =: \sum_{k=0}^p \max_{x \in [a,b]} |\eta^{(k)}(x)|,$$

(ove $^{(k)}$ significa derivata di ordine (k)); o se si preferisce alla norma (equivalente)

$$(7bis) \quad \|\eta\|_p =: \max_{0 \leq k \leq p} \max_{x \in [a,b]} |\eta^{(k)}(x)|.$$

Nel caso del funzionale (6.6.1, 1) la scelta naturale della norma è dunque $\|\cdot\|_1$. Se \mathcal{F} ha un minimo (debole) in $y \in C^1[a,b]$ e valgono le (6, 6bis) riferite a $\|\cdot\|_1$, allora la corrispondente $\mathcal{F}'[y]$ esiste ed è nulla.

Vogliamo ora esprimere questa $\mathcal{F}'[y]$. Per il momento supporremo la classe di continuità della lagrangiana F (v. 6.1.1, 1), in un intorno incluso in $U \times R$ della curva $\Gamma =: (x, y(x), y'(x))$, abbastanza alta da legittimare le nostre operazioni. Denotando le derivate parziali mediante pedici destri, e trascurando di esplicitare la x , abbiamo $F(y+\eta, y'+\eta') - F(y, y') = F_y \eta + F_{y'} \eta' + o(\eta, \eta')$, dove $o(\eta, \eta')$ è di ordine superiore a $|\eta| + |\eta'|$ al tendere di quest'ultima somma a zero. Integrando la precedente, abbiamo dunque:

$$(8) \quad \Delta \mathcal{F}[\eta|y] = \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx + o(\eta),$$

dove $o(\eta)$ è un funzionale di ordine superiore a $\|\eta\|_1$, e per brevità scriviamo ormai \int_a^b invece di $\int_{x=a}^b$. Dividendo la (8) per $\|\eta\|_1 \neq 0$, e prendendo il limite per $\|\eta\|_1 \rightarrow 0$, segue che $\mathcal{F}'[y]$ esiste riferita alla norma $\|\cdot\|_1$, e vale la

$$(8bis) \quad \mathcal{F}'[y] \circ \omega = \int_a^b (F_y \omega + F_{y'} \omega') dx,$$

ove ω è l'elemento unitario di E uguale a $\eta/\|\eta\|_1$ ($\|\omega\|_1 = 1$). Se allora \mathcal{F} ha un minimo (o è stazionaria) in y , si deve avere

$$(9) \quad \int_a^b (F_y \omega + F_{y'} \omega') dx = 0$$

$\forall \omega \in H = C_0^1[a,b]$; o equivalentemente,

$$(9') \quad \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx = 0.$$

Supponiamo adesso $y \in C^2[a,b]$ (e non soltanto $y \in C^1[a,b]$), e scriviamo $F_y \eta'$ come $d_x(F_y \eta) - d_x F_y \eta$; ¹⁵ mediante una integrazione per parti, e in forza delle condizioni agli estremi su η , si ha dunque:

$$(10) \quad \mathcal{F}[y] \circ \eta = \int_a^b (F_y - d_x F_y) \eta dx = 0$$

$\forall \eta \in C_0^1[a,b]$. Ora $d_x F_y$ ed è lineare nelle tre derivate rispetto a x, y, y' di F_y ; se quindi vogliamo che tutte le funzioni integrande nella (10) siano continue, oltre a quella di F si dovrà a priori richiedere la continuità, in $(U(\subset \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R})$, di F_y e delle tre derivate prime di F_y . Ciò mostra che la più comune richiesta $F \in C^2(U \times \mathbb{R})$ (o “richiesta standard” su F) è in realtà ridondante, equivalendo alla richiesta di continuità di *sei* funzioni contro quella effettivamente necessaria delle *cinque* funzioni $F, F_y, F_{xy}, F_{yy'}, F_{y'y'}$ (o F_x in luogo di F).

Sia ora $\alpha = \alpha(x)$ una funzione continua in $[a,b]$, e per arbitrario $r \geq 0$ si consideri la condizione su α , che noteremo $I^{(r)}(\alpha)$, “ $\int_a^b \alpha(x) \zeta(x) dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^r[a,b]$ ”. Va da sé che $I^{(r)}(\alpha) \Rightarrow I^{(r < r)}(\alpha)$. Si dimostra allora che $I^{(r)}(\alpha) \Rightarrow “\alpha \equiv 0$ in $[a,b]$ ”, una implicazione nota come **lemma fondamentale** (del CDV unidim) **di ordine** r , che denoteremo come $(LF)_r$. ¹⁶ Ovviamente $(LF)_{r < r}$ implica $(LF)_r$, perché porta alla stessa conclusione “ $\alpha \equiv 0$ in $[a,b]$ ” con una premessa più debole. Si conclude così che in tutto (a,b) , e al limite verso i suoi estremi, deve essere soddisfatta la seguente **equazione differenziale di Eulero** (più spesso detta **di Eulero-Lagrange** (EL) in ambito fisico-matematico) **per il problema** (α) :

$$(11) \quad F_y - d_x F_{y'} = 0,$$

nella incognita $y(x)$. La differenza a 1° membro della (11) (o talvolta la sua opposta) si dice **differenza euleriana associata alla** $F = F(x, y(x), y'(x))$, e si denota brevemente con $[F]_y$. Sviluppando la $d_x F_{y'}$, la (11) si scrive equivalentemente come:

$$(11') \quad F_y - (F_{xy'} + F_{yy'} y' + F_{y'y'} y'') = 0.$$

Supponendo $F_{y'y'}$ diversa da zero in un aperto intorno al punto di riferimento, questa è una equazione differenziale ordinaria quasi-lineare del 2° ordine. Le soluzioni y della $(11 \equiv 11')$ si dicono **estremali di \mathcal{F}** ; quindi *una estremante di \mathcal{F} , se esiste, è una sua estrema*. La (11) è

¹⁵ Per ben definire $d_x F_y$ in $[a,b]$ sarebbe sufficiente l'esistenza di y'' in (a,b) e dei suoi limiti agli estremi; ma la successiva integrazione rende ragionevole la più forte richiesta $y \in C^2[a,b]$.

¹⁶ La dimostrazione utilizza la continuità di α e si ottiene per assurdo. Si presuma infatti che α sia $\neq 0$ in un punto c di (a,b) ; esiste quindi un intervallo $[a' > a, b' < b]$ centrato in c nel quale α si mantiene $\neq 0$ e quindi dello stesso segno. Si può allora sempre costruire una funzione ζ di $C_d C$ $r \geq 0$ arbitraria, che si mantiene dello stesso segno in (a', b') e uguale a zero fuori di esso (e quindi anche in a' e b' per la sua continuità). Il prodotto $\alpha \zeta$, che è continuo, si mantiene allora dello stesso segno in (a', b') (annullandosi in a' e b' e fuori di $[a', b']$) e il suo integrale su (a,b) non può essere uguale a zero. Il lemma si estende agevolmente ad uno spazio metrico di dimensione (finita) arbitraria sostituendo ad $[a', b']$ una palla chiusa di raggio abbastanza piccolo e centro in c , e come tale continua a chiamarsi “lemma fondamentale (del CDV multidim)”.

evidentemente in accordo con le richieste a priori fatte sulle classi di continuità di F e di y , nel senso che se la richiesta “ $y \in C^2[a,b]$ ” si indebolisse in “ $y \in D^2[a,b]$ ” (\equiv “ y è derivabile due volte”), di per sé sufficiente, con le altre, a giustificare la (11), quest’ultima implicherebbe automaticamente la continuità di y' , salvo possibilmente che nei punti in cui $F_{y'y'} = 0$. Se quindi si richiede

$$(12) \quad F_{y'y'} \neq 0$$

in $U \times \mathbb{R}$, si ha “ $y \in D^2[a,b]$ ” \Rightarrow “ $y \in C^2[a,b]$ ”. La (12) è l’accezione più semplice, nella gerarchia di problemi qui proposta a partire da (α) , della cosiddetta **condizione di Legendre**. Sotto questa condizione la (11) può risolversi rispetto a y'' , e diventa così del tipo “normale”. Sono allora note, a livello elementare, condizioni sufficienti per l’esistenza e l’unicità della soluzione sotto due condizioni accessorie.

Le più comuni condizioni accessorie sono quelle che prescrivono i valori dell’incognita y della (11) negli estremi a e b dell’intervallo base. Questo è naturale, ma non necessario: qualunque altra coppia di condizioni accessorie che assicuri l’esistenza e l’unicità della soluzione della (11) (ad esempio la prescrizione di $y(\underline{x})$ e $y'(\underline{x})$ in un punto \underline{x} dell’intervallo-base) andrebbe altrettanto bene. Di fatto, i valori agli estremi di una possibile estremante sono *menzionati* (quando si richiede che le funzioni di confronto ammissibili abbiano gli stessi valori agli estremi), ma non *prescritti*. Se tuttavia sappiamo che un’estremante con certi valori agli estremi *esiste*, allora la soluzione della (11) che ha gli stessi valori agli estremi (e che esiste unica per ipotesi) è necessariamente uguale a quella estremante. Questa è la situazione tipica alla quale si fa riferimento. Quanto al fatto che un’estremale *non* sia in generale un’estremante, esso è ovvio, dal momento che la (11) è ricavata proprio *nell’ipotesi che una estremante esista*.

Più sopra, abbiamo dedotto la (11) sotto la richiesta di continuità delle cinque funzioni F (o F_x), F_y , F_{xy} , F_{yy} , $F_{y'y'}$, in $U(\subset \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$, la $y \in D^2[a,b]$, e l’uso di $(LF)_1$. In realtà si può arrivare allo stesso risultato in modo più diretto. Sia $y(x)$ una estremante di \mathcal{F} (di classe C^1), e supponiamo $F(x,u,v)$ continua lungo la curva (dello spazio \mathbb{R}^3) $\Gamma =: (x, u=y(x), v=y'(x))$. Se le F_y , $F_{y'}$ sono continue lungo Γ , l’equazione variazionale (9') vale $\forall \eta \in C_0^1[a,b]$. Si può allora immediatamente pervenire alla (11) se si ricorre al secondo dei due lemmi (i,ii) che seguono (di **Du Bois-Reymond**):

(i) Sia $\alpha \in C[a,b]$; allora “ $\int_a^b \alpha(x) \zeta'(x) dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^1[a,b]$ ” \Leftrightarrow “ $\alpha = \text{costante}$ (\equiv valor medio di α in $[a,b]$) in $[a,b]$ ». Dim. La \Leftarrow è evidente; per provare la \Rightarrow , detto c il valor medio di α in $[a,b]$, per ipotesi $0 = \int_a^b \alpha \zeta' dx = \int_a^b (\alpha - c) \zeta' dx$. Ponendo in questa, in particolare, $\zeta(a \leq t \leq b) =: \int_a^t (\alpha - c) dx$ (con il che $\zeta \in C_0^1[a,b]$, come deve essere), si ha $0 = \int_a^b (\alpha - c)^2 dx$, qed. #

(ii) α e β siano continue in $[a,b]$; allora “ $\int_a^b (\alpha(x) \zeta(x) + \beta(x) \zeta'(x)) dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^1[a,b]$ ” \Leftrightarrow “ $\alpha = \beta'$ in (a,b) (quindi $\beta \in C^1[a,b]$)”. Dim. Ancora, la \Leftarrow è evidente. Per provare la \Rightarrow , sia A una primitiva

di α definita in $[a,b]$; allora $\int_a^b (\alpha\zeta + A\zeta') dx = \int_a^b (A'\zeta + A\zeta') dx = [A\eta]_a^b = 0$, e quindi l'antecedente di \Rightarrow diventa " $0 = \int_a^b (-A + \beta)\zeta' dx \quad \forall \zeta \in C_0^1[a,b]$ ". In forza di (i), risulta così $-A + \beta = \text{cost}$ (\equiv valor medio di $-A + \beta$ in $[a,b]$), qed. #

Si noti che la prova di (ii) utilizza (i). D'altra parte, ponendo in particolare $\alpha = 0$ nell'antecedente di (ii), questo diventa " $0 = \int_a^b \beta\zeta' dx \quad \forall \zeta \in C_0^1[a,b]$ "; ma il conseguente di (ii) è allora $\beta = \text{cost}$, e dunque ritroviamo (i) nel verso \Rightarrow . Ponendo invece $\beta = \text{cost}$ nell'antecedente di (ii), questo diventa " $0 = \int_a^b \alpha\zeta dx, \quad \forall \zeta \in C_0^1[a,b]$ "; ma il conseguente ci dà allora $\alpha = 0$, e ritroviamo il lemma fondamentale di ordine 1, $(LF)_1$.¹⁷

Sia $y \in C^1[a,b]$ è una estremante di \mathcal{F} (con F continua lungo Γ), e si suppongano $F_y, F_{y'}$ continue lungo Γ . Se applichiamo (ii) alla (9'), otteniamo subito la (11) senz'altro aggiungere; inoltre $d_x F_{y'}$ è automaticamente continua lungo Γ . Quindi, se $y \in D^2[a,b]$, e le tre derivate prime di $F_{y'}$ sono continue lungo Γ (con il che la $F_{y'}$ stessa lo è), la (11) afferma che y'' è continua salvo possibilmente nei punti di Γ ove non è soddisfatta la condizione di Legendre. Se quest'ultima è soddisfatta lungo l'intera Γ , allora y'' è continua, e la (11) è normalizzabile (\equiv può essere posta in forma normale). Si ricordi che per arrivare a queste conclusioni si deve richiedere la continuità lungo Γ delle quattro funzioni $F_y, F_{xy'}, F_{yy'}, F_{y'y'}$ – oltre a quella di F , implicita nella formulazione stessa del problema (o quella di F_x) –; mentre le derivate seconde di F sono sei. Naturalmente l'estremante y non è nota, e quindi le precedenti condizioni sulle $F_x, F_y, F_{xy'}, F_{yy'}$ e $F_{y'y'}$ si devono a priori richiedere in $U \times R$.

Anche nei problemi multidim si ottiene, come conseguenza dell'esistenza di una soluzione di un problema di estremo (diciamo, del 1° ordine), una conveniente "equazione di EL" sotto condizioni che sono l'analogo multidim delle richieste standard su F (caso (α)). È ovvio, tuttavia, che la possibilità di ricavare tale equazione *rinunciando alla versione multidim del lemma fondamentale*, come si è appena visto possibile nel caso (α) , decade nei problemi multidim; nel caso di integrali multipli, non avrebbe infatti senso riferirsi alle *primitive* che si sono usate nelle

¹⁷ I lemmi di Du Bois-Reymond (i) e (ii) fanno parte di una gerarchia di lemmi analoghi. Nel seguito intendendosi che $(i_{p=1}) \equiv (i)$, la prima gerarchia è: $(i_{p>1})$ «per α continua, la " $\int_a^b \alpha \zeta^{(p)} dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^p[a,b]$ " equivale a che " $\alpha = c_0 + c_1 x + \dots + c_{p-1} x^{p-1}$ ", dove c_0, \dots, c_{p-1} sono costanti arbitrarie.». Similmente intendendosi che $(ii_{p=1}) \equiv (ii)$, la seconda gerarchia è: $(ii_{p>1})$ «per $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ continue, e se le derivate $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \dots, \alpha_p^{(p)}$ esistono, la " $\int_a^b [\alpha_0 \zeta + \alpha_1 \zeta^{(1)} + \dots + \alpha_p \zeta^{(p)}] dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^p[a,b]$ " equivale alla (*) " $\alpha_0 = \alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(2)} + \dots - (-1)^p \alpha_p^{(p)}$ ". In particolare facendo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ nella (*) si ha $\alpha_0 = 0$, e quindi $(LF)_p$. Naturalmente la (*) non garantisce la continuità *separata* delle funzioni $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_p^{(p)}$. Si conclude che $(ii_{p \geq 1})$ implica $(LF)_p$, e quindi $(LF)_{p'}$ per ogni $p' > p$. Le dimostrazioni di (i_p, ii_p) si ottengono per induzione, e sono lasciate al lettore.

dimostrazioni dei lemmi di Du Bois-Reymond (i,ii), se non sotto convenienti altre ipotesi.¹⁸ Questa è una delle molte occasioni in cui si manifesta la fondamentale diversità tra problemi variazionali unidim e problemi variazionali multidim; diversità del resto a dir poco flagrante se si considera (lo ripetiamo ancora una volta) che l'equazione di EL per problemi multidim del 1° ordine è differenziale (del 2° ordine, quasi-lineare) alle derivate *parziali*.

Il lemma (ii_{p>1}) (vedi nota precedente) può essere usato per ricavare un'equazione differenziale quasi-lineare di ordine 2p, l'**equazione di EL (unidim) per il problema di ordine p > 1**, nel caso del problema (α_p) di (6.1.1, §4). Sia infatti $y \in C^p[a,b]$ una estremante del funzionale di ordine p $\mathcal{F}[y] = \int_a^b F(x,y,y',y'', \dots, y^{(p)})dx$, avendo presupposto F continua lungo la curva (di R^{2+p}) $\Gamma^{(p)} =: (x,y(x), \dots, y^{(p)}(x))$. L'equazione variazionale è allora (in luogo della (9')):

$$(13) \quad \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta' + \dots + F_{y^{(p)}} \eta^{(p)}) dx = 0,$$

$\forall \eta \in C_0^p[a,b]$, ove $F_{y^{(p)}}$ sta per $\partial F / \partial y^{(p)}$ e le $F_y, F_{y'}, \dots, F_{y^{(p)}}$ sono supposte continue lungo $\Gamma^{(p)}$. Applicando a questa il lemma (ii_p) sotto l'ipotesi che le $d_x F_y, d_x^2 F_{y'}, \dots, d_x^p F_{y^{(p)}}$ esistano lungo $\Gamma^{(p)}$ (quindi in particolare che $y \in D^{2p}[a,b]$), si ottiene subito,

$$(14) \quad F_y - d_x F_{y'} + d_x^2 F_{y''} - \dots + (-1)^p d_x^p F_{y^{(p)}} = 0.$$

Da questa non si può desumere la continuità separata degli addendi $d_x F_{y'}, \dots, d_x^p F_{y^{(p)}}$; ma se tutte le derivate parziali di F coinvolte nella espressione di questi addendi (il loro ordine massimo è evidentemente p + 1) sono continue lungo $\Gamma^{(p)}$, allora *tutti* gli addendi presenti nella (14), salvo possibilmente $F_{y^{(p)}y^{(p)}} y^{(2p)}$, sono continui lungo $\Gamma^{(p)}$, e quindi anche $F_{y^{(p)}y^{(p)}} y^{(2p)}$ lo è (in forza della (14) stessa). Perciò $y^{(2p)}$ è continua salvo possibilmente che nei punti di $\Gamma^{(p)}$ ove $F_{y^{(p)}y^{(p)}}$ si annulla. In definitiva, se la “condizione di Legendre di ordine p”

$$(12bis) \quad F_{y^{(p)}y^{(p)}} \neq 0$$

vale lungo $\Gamma^{(p)}$, risulta $y \in C^{2p}[a,b]$, e la (14) può essere risolta rispetto a $y^{(2p)}$. Abbiamo con ciò generalizzato a $p > 1$ l'argomentazione sopra illustrata per $p = 1$.

Sia ora $s(p) - 1$ il numero delle derivate parziali di F (di ordine compreso tra 1 e p + 1) effettivamente coinvolte nella (14), e di cui occorre presupporre la continuità lungo $\Gamma^{(p)}$. Se mettiamo nel conto la F stessa, che deve comunque essere continua, il numero delle funzioni continue è dunque $s(p)$. Non occorre qui dare esplicitamente questa $s(p)$, che può ottenersi per induzione. Quello che conta è mettere in evidenza che $s(p)$ è *più piccolo* del numero di tutte le derivate parziali di ordine p + 1 di F (pari a $(2(p+1))! / ((p+1)!)^2$), e che la differenza tra i due numeri cresce rapidamente con p: è 1 per p = 1 (come sappiamo, 6 contro 5), ma è già 5 per p = 2 (20

¹⁸ In realtà esiste un lemma in qualche modo analogo, ma già di natura essenzialmente funzionalistica, applicabile al caso multidim, e noto come “lemma di Weyl”.

contro 15). Ancora, l'estremante y non è nota e quindi le precedenti $s(p)$ condizioni su F devono essere a priori richieste in $U(\subset \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^p$. Ciò mostra che la richiesta standard $(^\circ) F \in C^{p+1}(U \times \mathbb{R}^p)$ è ridondante per ogni $p \geq 1$, e progressivamente *più* ridondante al crescere di p . Resta l'usuale possibilità di ottenere la (14) sotto la richiesta $(^\circ)$ (oltre alla $y \in D^{2p}[a,b]$) per mezzo di successive integrazioni per parti della (13), facendo poi uso del lemma fondamentale di ordine p , $(LF)_p$.

È quasi immediato passare dal problema (α) a quello considerato in (6.1.1, §2). Scrivendo ormai le variabili dipendenti come $u \equiv u^{1 \leq \alpha \leq n}$ e quella indipendente come t (con $t \in [0,1]$), se la curva incognita è $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$, l'equazione variazionale si scrive formalmente come la (9'), cioè sostituendo x con t , y con $u (\in \mathbb{R}^n)$, e interpretando la variazione η di u come n -vettore per il quale $\eta(0) = 0$, $\eta(1) = 0$, normato con la norma (uniforme del 1° ordine) pitagorica standard.¹⁹ Si ottiene così, sotto le solite ipotesi su F , il **sistema di EL** di n equazioni differenziali quasi-lineari del 2° ordine nelle n incognite u

$$(15) \quad F_u - d_t F_{u'} = 0,$$

$\forall t \in [0,1]$, dove il sottoscritto u' sta qui per $d_t u$.²⁰ Scrivendo più comodamente v per u' , il coefficiente di $(u^{1 \leq \alpha \leq n})''$ nella β -ma (15) è $\partial^2 F / \partial v^\alpha \partial v^\beta$, e quindi la condizione di Legendre è in questo caso

$$(12ter) \quad \det\{\partial^2 F / \partial v^\alpha \partial v^\beta\} \neq 0$$

in $U(\subset \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^n$.

Trascuriamo l'esercizio (di per sé poco istruttivo) di stabilire come il problema di ordine $p > 1$ si generalizza al caso di n incognite.

Se la curva del caso-base è descritta parametricamente secondo $x = x(t)$, $y = y(t)$, cfr. (6.1.1, §1), si ottengono le *due* equazioni di EL

$$(16) \quad d_t \Phi_{x'} - \Phi_x = 0, \quad d_t \Phi_{y'} - \Phi_y = 0,$$

dove abbiamo posto $\Phi(x,y,x',y') =: F(x,y,y'/x')x'$, sempre con $' \equiv d_t$.²¹ Si intuisce subito, tuttavia, che le due (16) non possono essere indipendenti, perché sostituiscono l'*unica* equazione di EL (11).

In effetti l'integranda Φ in $\mathcal{F}[x,y] = \int_0^1 \Phi(x,y,x',y') dt$ ha una struttura particolare, non dipendendo dal parametro t ed essendo positivamente omogenea di grado 1 in (x',y') .²² Integrando di questo

¹⁹ Questa si ottiene ponendo $(\sum_{i=1}^n |(\cdot)_i |^2)^{1/2}$, dove $|(\cdot)_i|$ è il valore assoluto della componente (i) della funzione-vettore, in luogo del modulo $| \cdot |$ nella (7) per $p = 1$.

²⁰ È usuale indicare questa derivata $d_t u$ ponendo un *punto* sopra la u (ciò che non si può fare agevolmente in Word). Riferito alla (15), $\forall t \in [0,1]$ significa al solito che quest'ultima vale anche al limite per u tendente agli estremi di $[0,1]$ dall'interno.

²¹ Nel 2° membro di quest'ultima si deve escludere che sia contemporaneamente $x' = 0$ e $y' \neq 0$.

²² Una funzione $f(x,y, \dots)$ è positivamente omogenea di grado 1 se $f(kx,ky, \dots) = kf(x,y, \dots)$ per ogni $k > 0$.

tipo danno luogo ad una accezione **parametro-indipendente** del problema-base in due incognite funzioni di parametro: nel senso che, se $\tau = \tau(t) \in C^1[0,1]$ sotto $d\tau/dt > 0$, risulta

$$(17) \quad \int_{\tau(0)}^{\tau(1)} \Phi(x,y,d_\tau x,d_\tau y) d\tau \equiv \int_0^1 \Phi(x,y,d_t x,d_t y) dt.$$

Questo conferma che il funzionale $\mathcal{F}[x,y]$ dipende in effetti soltanto dalla curva $y = y(x)$, e non dalla sua particolare rappresentazione parametrica. È facile verificare *direttamente* che i primi membri delle (16) sono di fatto linearmente dipendenti, soddisfacendo identicamente la relazione:

$$(18) \quad x'(d_t \Phi_{x'} - \Phi_x) + y'(d_t \Phi_{y'} - \Phi_y) = 0. \quad^{23}$$

Quello appena illustrato è l'esempio più elementare di problema parametro-indipendente. La (17) si estende facilmente a curve di $\mathbb{R}^{n>2}$ estremali del funzionale $\mathcal{F}[u] = \int_0^1 \Phi(u(t),u'(t))dt$ (ove u sta ora per un n -vettore) con Φ positivamente omogenea di grado 1 nelle $u' \equiv v$. Le relative differenze euleriane $\partial\Phi/\partial u^\alpha - d_t(\partial\Phi/\partial v^\alpha)$ soddisfano allora l'identità $\sum_{\alpha=1}^n v^\alpha [\partial\Phi/\partial v^\alpha - d_t(\partial\Phi/\partial v^\alpha)] = 0$, per cui al più $n-1$ di esse sono indipendenti.

Passando al problema di ordine 1 di cui al §5 della precedente sottosezione, supporremo ad esempio che le curve del piano (x,y) in oggetto siano le rette verticali $x = a$ e $x = b$. Per l'arbitrarietà della variazione η , devono allora al contempo essere soddisfatte sia l'equazione di EL che le due

$$(19) \quad F_{y'|a} = 0, \quad F_{y'|b} = 0.$$

(ove $F_{y'|a} \equiv F_{y'}$ valutata in $x = a$, e simile). Queste condizioni, che sono talvolta dette condizioni “**naturali**” (agli estremi), permettono in generale di determinare le due costanti incorporate nella estremale.

Illustriamo ora una procedura alternativa, di notevole interesse storico e applicativo, per ottenere l'equazione di EL relativa al problema (α) : interesse storico, perché Eulero pervenne alla sua equazione proprio mediante tale procedura, ed applicativo, perché essa è capostipite della filiera dei cosiddetti metodi *diretti* del CDV. Suddividiamo l'intervallo $[a,b]$ in r passi di comune lunghezza $\Delta x = (b-a)/r$ mediante i punti $x_0 = a, x_1, \dots, x_r, x_{r+1} = b$, e poniamo, per una data y di classe C^2 e della quale denotiamo con (A,B) i valori agli estremi (a,b) $F_i =: F(x_i, y_i, (y_{i+1}-y_i)/\Delta x)$ per $i = 0 \div r$, e $F_{r+1} =: F(b, B, (B-y_r)/\Delta x)$, $y_i =: y(x_i)$, $y_0 =: A$, $y_{r+1} =: B$. Allora il *funzionale* \mathcal{F} può essere approssimato dalla *funzione* $\mathcal{F}_{(r)}(y_1, \dots, y_r) =: \Delta x \sum_{i=0}^r F_i - \Delta x (F_0 + F_{r+1})/2$. Questo corrisponde ad approssimare la y con la spezzata di vertici $(a,A), (x_1,y_1), \dots, (x_r,y_r), (b,B)$, usando poi la formula di Bézout per il calcolo approssimato dell'integrale, cioè approssimando la funzione $F (\in C^2(U \times R))$ con la spezzata di vertici $(a,F_0), (x_1,F_1), \dots, (x_r,F_r), (b,F_{r+1})$. Poiché alla fine si farà $r \rightarrow \infty$, e quindi

²³ Fatti i calcoli necessari, si verifica che il primo termine a 1° membro della (18) risulta uguale a $y'[x'(-F_y + F_{xy'}) + y'F_{yy'} + (y'/x')F_{yy'}]$, e il secondo termine al suo opposto. Si noti anche che il contenuto delle [] risulta, come deve essere, dimensionalmente omogeneo tenendo conto della relazione dimensionale $\dim(F_{y'}) \equiv \dim(F_{x'}/y')$.

$\Delta x \rightarrow \infty$, il termine $-\Delta x(F_0 + F_{r+1})/2$ nella formula di Bézout si può ignorare scrivendo addirittura $\mathcal{F}_{(r)}(y_1, \dots, y_r) =: \Delta x \sum_{i=1}^r F_i$.

La funzione $\mathcal{F}_{(r)}$ delle r variabili y_1, \dots, y_r è estrema (o stazionaria) sse $\partial \mathcal{F}_{(r)}/\partial y_i = 0 \quad \forall i = 1 \div r$. Calcolando questa derivata in x_i , per la data y , si trova che essa dipende soltanto da x_{i-1} , x_i e x_{i+1} , e vale

$$(20) \quad \partial \mathcal{F}_{(r)}/\partial y_i = \Delta x F_y(x_i, y_i, (y_{i+1}-y_i)/\Delta x) - [F_{y'}(x_i, y_i, (y_{i+1}-y_i)/\Delta x) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, (y_i-y_{i-1})/\Delta x)].$$

È chiaro che anche il termine in [] a 2° membro tende a zero con Δx se $F_{y'}$ è continua; per cui, dividendo per Δx e prendendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ (che esiste sotto le ipotesi di partenza), scrivendo x per x_i , $y(x)$ per y_i e $y'(x)$ per $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (y_{i+1}-y_i)/\Delta x$, ed uguagliando infine il risultato a zero, si ottiene:

$$(21) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \partial \mathcal{F}_{(r)}/\partial y_i = F_y(x, y(x), y'(x)) - d_x F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = [F]_y = 0$$

ossia proprio l'equazione di EL (11). Si noti che l'operatore $[]_y \equiv ()_y - d_x ()_{y'}$, nella differenza euleriana, è lineare. Alla luce della definizione che ne abbiamo appena data (e prescindendo dal suo annullarsi secondo la (21)), $[F]_y(x)$ si dice anche **derivata variazionale di \mathcal{F} rispetto a y , in x** .

Una nozione più generale di derivata variazionale di un dato funzionale $\mathcal{W}[y]$, non necessariamente del tipo integrale (6.1.1, 1), e sempre con y definita in $[a, b]$ e ammissibile (cioè tale che $\mathcal{W}[y]$ sia definito), è quella illustrata qui appresso. Sia \underline{x} un punto in (a, b) da considerare per un momento come fisso, e $\varepsilon > 0$ tale che $a < \underline{x} - \sqrt{\varepsilon}/2$ e $\underline{x} + \sqrt{\varepsilon}/2 < b$. Sia poi $h = h(x)$ una funzione definita in $[a, b]$ sotto le condizioni (i) “ h è continua in $[\underline{x}-\sqrt{\varepsilon}/2, \underline{x}+\sqrt{\varepsilon}/2]$ ”; (ii) “ h è nulla in $[a, \underline{x}-\sqrt{\varepsilon}/2]$ e $[\underline{x}+\sqrt{\varepsilon}/2, b]$ ”; (iii) “ $|h(x)| \leq A\sqrt{\varepsilon}$ in $[a, b]$ (dove A è una costante positiva)”; (iv) “ $(y+h)(x)$ è ammissibile, cioè $\mathcal{W}[y+h]$ è definito”. Allora l'integrale $\sigma =: \int_a^b h(x) dx$ esiste, e come si verifica subito, risulta $|\sigma| \leq A\varepsilon$. Se, per il dato \underline{x} , il $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{W}[y+h] - \mathcal{W}[y])/ \sigma$ esiste finito e non dipende dalla particolare funzione h prescelta entro le precedenti condizioni (i ÷ iv), esso si dice **derivata variazionale di \mathcal{W} rispetto a y in \underline{x}** , e si denota $\delta \mathcal{W}/\delta y = \delta \mathcal{W}/\delta y(\underline{x})$.²⁴ Scrivendo la precedente $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{W}[y+h] - \mathcal{W}[y])/ \sigma = \delta \mathcal{W}/\delta y$ fuori dal segno di limite, si ha quindi:

$$(22) \quad \mathcal{W}[y+h] - \mathcal{W}[y] = \sigma \delta \mathcal{W}/\delta y(\underline{x}) + o(\sigma).$$

Ricordiamo che $[F]_y$ è una funzione di x, y, y' e y'' (lineare in y''), quindi una funzione di x per data $y(x)$; e similmente, che $\delta \mathcal{W}/\delta y(x)$ è pure una funzione di x per la data y . Non è difficile provare che, se in particolare \mathcal{W} è l'integrale \mathcal{F} definito dalla (6.1.1, 1), risulta

$$(23) \quad \delta \mathcal{W}/\delta y(x) = [F]_y(x)$$

²⁴ Vi è di fatto maggior libertà nella definizione di $\delta \mathcal{W}/\delta y(x)$; ciò che conta è che la variazione h della y sia diversa da zero soltanto in un piccolo intervallo Δx interno ad $[a, b]$, e che il suo integrale su Δx sia maggiorato da un numero proporzionale a $(\Delta x)^2$.

$\forall x \in (a,b)$ (e quindi per continuità anche in $[a,b]$). Basta rappresentare \mathcal{F} nella approssimazione $\mathcal{F}_{(r)}(y_1, \dots, y_r) =: \Delta x \sum_{i=1}^r F_i$, e dare alla y una variazione locale consistente nel passare da y_i a y_i+h per *una sola* $1 \leq i \leq r$. La (piccola) variazione dell'area sottesa dalla funzione y si calcola subito e vale $h\Delta x$. Infatti la spezzata originale di vertici $(x_j, y_j)_{j=0, \dots, r+1}$ diventa la spezzata di vertici $(x_j, y_j)_{j=0, \dots, i-1}, (x_i, y_i+h), (x_j, y_j)_{j=i+1, \dots, r+1}$, ed è immediato verificare che l'area σ_i del quadrilatero di vertici $(x_i, y_i), (x_i+\Delta x, y_{i+1}), (x_i, y_i+h), (x_i-\Delta x, y_{i-1})$, compreso tra le due spezzate, è proprio $h\Delta x$. Scrivendo fuori dal segno di limite la $\partial \mathcal{F}_{(r)} / \partial y_i$ si ha quindi

$$(24) \quad \mathcal{F}_{(r)}[y_1, \dots, y_i+h, \dots, y_r] - \mathcal{F}_{(r)}[y_1, \dots, y_i, \dots, y_r] = \sigma_i [F]_{y_i} + o(\sigma_i),$$

ove $[F]_{y_i}$ sta per $[F]_y(x_i)$. Dividendo questa per σ_i e prendendo il limite per $\sigma_i \rightarrow 0$ (che esiste certamente sotto le solite ipotesi su F e y), si ha la (23), qed. Si rilevi che nonostante la denominazione e la notazione, la derivata variazionale $\delta \mathcal{F} / \delta y$ non ha la dimensione di $\mathcal{F} y^{-1}$, ma quella di $\mathcal{F} y^{-1} x^{-1}$, ovvero di $F y^{-1}$.

6.1.3) PROBLEMI VARIAZIONALI UNIDIM CONDIZIONATI

Esamineremo ora i problemi variazionali condizionati: isoperimetrici, olonomi ed anolonomi. Le procedure di soluzione per ciascun tipo sono fondate su corrispondenti teoremi che ci accingiamo ad enunciare ed illustrare. Limitandoci ad un problema del 1° ordine, potremo supporre le estremanti incognite in numero di n , e al solito denotarle con $u \equiv \langle u_\alpha \rangle_{\alpha=1+n} = u(t)$, t essendo il parametro variabile in $I \equiv [0,1]$. Supporremo inoltre l'integranda F di classe $C^2(U \times \mathbb{R}^n)$ (richiesta standard), dove U è il solito dominio connesso di \mathbb{R}^{n+1} contenente i punti $(0, u(0)=A)$ e $(1, u(1)=B)$ e le curve di confronto ammissibili tra di essi. I teoremi in oggetto sono i seguenti tre:

T_1 . *Caso isoperimetrico.*

Sia

$$(1) \quad \mathcal{K}[u|I] \equiv \mathcal{K}[u] =: \int_0^1 K(t, u(t), u'(t)) dt = c$$

il q -vettore dei vincoli isoperimetrici supposti indipendenti, con il q -vettore c assegnato, ad esempio $c = 0$, e il q -vettore K nella stessa classe di F , $C^2(U \times \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (Non ci sono restrizioni su q , che può essere un qualunque intero ≥ 0). Il teorema (T_1) recita: «*Se non è estrema di alcuno dei funzionali di vincolo \mathcal{K} , una possibile estremante $u \in C^2[0,1]$ di $\mathcal{F}[u] =: \int_0^1 F(t, u, u') dt$, sotto la (1), deve essere estrema incondizionata del funzionale $\mathcal{F}^*[u] =: \int_0^1 [F(t, u, u') + \lambda \cdot K(t, u, u')] dt$, dove λ è un q -vettore costante (q -vettore dei **moltiplicatori di Lagrange**) e \cdot denota il prodotto interno*

standard tra q -vettori (cioè è la somma dei q prodotti delle componenti omologhe).» Posto $F^* = F + \lambda \cdot K$, abbiamo quindi le n equazioni di EL, per $\alpha = 1, \dots, n$,

$$(2) \quad [F^*]_{u\alpha} = 0,$$

(dove il pedice $u\alpha$ sta al solito per u_α). Le n incognite $u(t)$ e le q costanti incognite λ si determinano mediante il sistema delle $q + n$ equazioni (1, 2) e le $2n$ condizioni accessorie.

T_2 . *Caso oloonomo.*

Detto

$$(3) \quad \varphi = \varphi(t, u) = 0,$$

il q -vettore dei vincoli, supposti (localmente) indipendenti ($q < n$)²⁵, il teorema (T_2) recita: «Se $\varphi \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, una possibile estremante $u \in C^2[0,1]$ del funzionale $\mathcal{F}[u]$ definito come in (T_1), sotto i vincoli (3), deve essere estrema incondizionata del funzionale $\mathcal{F}^*[u] = \int_0^1 [F(t, u, u') + \lambda \cdot \varphi(t, u)] dt$, dove $\lambda = \lambda(t)$ è ora un q -vettore funzione di t in $[0,1]$; vale a dire, avendo ancora posto $F^* = F + \lambda \cdot \varphi$, di un sistema differenziale del tipo (2), ma con λ in generale funzione di t .» L' n -vettore $u(t)$ (soddisfacente alle $2(n-q)$ condizioni accessorie assegnabili²⁶), e il q -vettore $\lambda(t)$ sono determinati dal sistema di $n + q$ equazioni (2, 3).

T_3 . *Caso anolonomo.*

Detto

$$(4) \quad \varphi = \varphi(t, u, u') = 0$$

il q -vettore dei vincoli differenziali supposti indipendenti ($q < n$) e non integrabili (cioè non ottenibili per differenziazione di vincoli oloonomi), il teorema (T_3) si enuncia più o meno come il precedente, e precisamente: «se $\varphi \in C^2(U(\subset \mathbb{R}^{n+1}) \times \mathbb{R}^n)$, una possibile estremante $u = u(t) \in C^2[0,1]$ di \mathcal{F} , sotto i vincoli (4), è estrema del funzionale $\mathcal{F}^*[u]$ definito come in (T_2), ma in cui ora φ dipende in generale anche da u' ». Le $n + q$ incognite sono determinate dalle (2, 4) e da $2n$ condizioni accessorie.

Per quanto riguarda le dimostrazioni di (T_1 , T_2 , T_3): rinunceremo qui ad una dimostrazione completa di (T_3) – il più potente dei tre teoremi – che è stata data da Hilbert.²⁷ Tuttavia la disponibilità di (T_1) suggerisce che nel caso di (T_3) il problema equivalga a quello di ricercare un estremo incondizionato. Infatti, dividendo $[0,1]$ in piccoli intervalli uguali Δt , un (*unico*, $q = 1$) vincolo del tipo (4) si può pensare come equivalente ad un insieme di $1/\Delta t$ vincoli isoperimetrici ciascuno con integranda $\varphi_k(t, u, u')$ diversa da zero soltanto nell'intervallo $(\Delta t)_k$. Secondo (T_1),

²⁵ Quindi $q < n$ se la matrice jacobiana $\partial(\varphi)/\partial(x)$ ha rango q (cioè massimale) nel suo dominio di definizione $I \times U$.

²⁶ Non avrebbe senso pretendere di assegnare ad arbitrio $2n$ condizioni, perché le (3) impongono q relazioni finite tra le incognite.

²⁷ D. Hilbert, "Zur Variationsrechnung", Math. Annalen, 62, 351, 1906.

ciascuno di questi vincoli isoperimetrici contribuisce alla F un addendo del tipo $\lambda_k \varphi_k$ con λ_k costante, e quindi, al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, un integrale del tipo $\int_0^1 \lambda(t) \varphi(t, u, u') dt$. Se poi i vincoli anolonomi sono più d'uno, basterà sostituire, in questo integrale, $\lambda \varphi$ con $\lambda \cdot \varphi$. In conclusione, ci si attende che la lagrangiana del funzionale da estremare incondizionatamente sia del tipo $F^*(t, u, u') = F(t, u, u') + \int_0^1 \lambda(t) \varphi(t, u, u') dt$. Poiché (T_3) è il più potente dei tre teoremi, faremo precedere una sua discussione qualitativa, che in sostanza si riduce ad una verifica della “ragionevolezza” (\equiv corretto bilancio tra numero delle equazioni e numero delle incognite) del problema.

Osserviamo innanzitutto che basta richiedere che $\lambda \in C^1[0,1]$, perché, come si verifica immediatamente, le equazioni di EL per F^* coinvolgono soltanto $\lambda' =: d\lambda$. Nel seguito semplificheremo la notazione scrivendo $[]_\alpha$, con $1 \leq \alpha \leq n$, in luogo di $[]_{u_\alpha}$ (differenza euleriana per la u_α), α in luogo di $\partial/\partial u^\alpha$ e α' in luogo di $\partial/\partial u'^{\alpha'}$. Sviluppando le equazioni di EL (2) troviamo

$$(5) \quad \lambda' \cdot \varphi_{\alpha'} + \lambda \cdot [\varphi]_\alpha = [F]_\alpha$$

per ogni $1 \leq \alpha \leq n$. Pensando le $u_{\alpha'}$ come altrettante incognite v_α , cioè

$$(6) \quad v_\alpha = u_{\alpha'},$$

i vincoli (4) diventano $\varphi(t, u, v) = 0$, olonomi nelle $2n$ incognite (u, v) , e le (5, 6) diventano un sistema differenziale del 1° ordine quasi-lineare nelle (u, v) , lineare nelle λ . In definitiva abbiamo $2n + q$ incognite (u, v, λ) da una parte, e le $2n$ equazioni (5, 6) più le q equazioni di vincolo (4) dall'altra; cioè $2n + q$ equazioni, di cui le (5, 6) differenziali del 1° ordine (le (5), lineari nelle λ). La soluzione contiene $2n$ costanti arbitrarie che figurano nelle $2n$ condizioni accessorie, per fissare le idee attraverso le condizioni agli estremi $u(0) = A$, $u(1) = B$.

Una ragionevole ipotesi restrittiva permette di meglio approfondire l'esame della situazione. Converremo di scrivere $\kappa \leq [\kappa \geq]$ di un indice *greco* κ (cioè di un indice di u o v) che può variare tra 1 e n , per significare che ci limitiamo a considerarne valori compresi fra 1 e q [fra $q+1$ e n]. (Gli indici italiani, che distinguono i vincoli, variano invece per definizione tra 1 e q .) Supporremo allora (questa è la ragionevole ipotesi) che le q equazioni di vincolo (4) siano invertibili rispetto alle q $v_{\alpha \leq}$, diciamo secondo la

$$(7) \quad v_{\alpha \leq} = \psi_{\alpha \leq}(t, u, v_{\alpha \geq}),$$

dove le $\psi_{\alpha \leq}$ sono note in $U \times \mathbb{R}^{n-q}$. Inoltre il sistema delle q equazioni (5), per $\alpha = 1 \div q$, è risolubile rispetto alle λ' , perché la matrice quadrata $\{\varphi_{\alpha'}^i\}_{i, \alpha=1 \div q}$ è per ipotesi non singolare²⁸; esso è dunque lineare non singolare nelle λ' per date t , $u(t)$ e $v_{\alpha \geq}(t)$ (le $v_{\alpha \leq}$ essendo eliminate mediante le (7)). È

²⁸ Che la matrice $\{\varphi_{\alpha'}^i\}_{i, \alpha=1, \dots, q}$ debba essere non-singolare è ovvio, perché la supposta invertibilità globale delle (4) rispetto alle v_α implica la corrispondente invertibilità locale, equivalente alla non-singolarità della matrice. Lasciamo al lettore l'esame del caso di vincoli “misti”, alcuni olonomi e alcuni anolonomi.

allora chiaro che le equazioni (5) contengono le sole $v_{\alpha \geq}$, essendo differenziali quasi-lineari in queste ultime. Usando una simbolica auto-evidente (ad esempio, scrivendo v_{\geq} per $v_{\alpha \geq}$), possiamo infatti ormai scrivere le (4) come $\varphi = \varphi(t, u, \psi(t, u, v_{\geq}), v_{\geq})$. Altrettanto vale per le derivate φ_{α} e $\varphi_{\alpha'}$, e le derivate rispetto a t , u e v di tali φ_{α} e $\varphi_{\alpha'}$. In particolare i termini contenenti le v_{\geq}' nel 1° membro delle (5) provengono da $-\lambda \cdot d_t \varphi_{\alpha'}$, e le v_{\geq}' vi compaiono linearmente, con il coefficiente $-\lambda \cdot (\varphi_{\alpha', \beta' \geq} + \varphi_{\alpha', \gamma' \leq} \partial \psi_{\gamma} / \partial v_{\beta \geq})$ a fattore di $v_{\beta \geq}'$ (somma su $\gamma \leq$). Un ragionamento analogo vale per il 2° membro delle (5), e in definitiva queste ultime possono risciversi nella forma

$$(8) \quad \lambda' \cdot \varphi_{\alpha'} + H_{\alpha, \beta \geq} v_{\beta \geq}' = \Sigma_{\alpha},$$

dove le $\varphi_{\alpha'}$ sono funzioni note di (t, u, v_{\geq}) e le $H_{\alpha, \beta \geq}$, Σ_{α} , sono funzioni note di $(t, u, v_{\geq}, \lambda)$. Se poi la $(n-q) \times (n-q)$ -matrice $H_{\alpha \geq, \beta \geq}$ è non singolare in $U \times \mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{R}^q$, il sistema (5) è non singolare nel senso che le prime q equazioni sono risolvibili rispetto alle λ' , e le rimanenti $n - q$ sono risolvibili rispetto alle v_{\geq}' .

Si osserverà ancora che le n equazioni differenziali

$$(9_{\leq}) \quad u_{\leq}' = \psi_{\leq}(t, x, v_{\geq})$$

$$(9_{\geq}) \quad u_{\geq}' = v_{\geq}$$

determinerebbero completamente le u (perché $u(0) = A$) se le v_{\geq} fossero note. Ma tali v_{\geq} , in quanto soluzioni delle (5), sono determinate a meno di $n - q$ costanti arbitrarie, alle quali si devono aggiungere le q costanti contenute nelle λ ; quindi a meno di n costanti, che attraverso l'integrazione delle (9) finiscono nelle u . Le n condizioni al secondo estremo, $u(1) = B$, forniscono queste costanti.

Quanto alla giustificazione delle (2) a partire dalla $\mathcal{F}^{*'}[u] \circ \eta = 0$, ricordiamo che se si varia \mathcal{F}^* ignorando i vincoli si ottiene l'equazione variazionale $\int_0^1 [F^*]_{\alpha} \eta^{\alpha} dt = 0$ (somma su α); ma da questa non si può desumere che $[F^*]_{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha = 1 \div n$ tenendo conto dei vincoli, perché le η^{α} non sono allora indipendenti. Ora, soltanto le $\eta^{\alpha \geq}$ possono considerarsi tali ²⁹, e ciò porta alle sole $n - q$ equazioni $[F^*]_{\alpha \geq} = 0$. Le rimanenti q equazioni $[F^*]_{\alpha \leq} = 0$ si impongono (approfittando per soddisfarle dei moltiplicatori λ), come abbiamo per l'appunto fatto. Questa è del resto l'idea di base implicita nell'uso dei moltiplicatori di Lagrange.

²⁹ Evitiamo una giustificazione rigorosa di questo punto, che comporterebbe la considerazione di un sistema di q equazioni del tipo $0 = \{\varphi_{\alpha} \eta^{\alpha} + \varphi_{\alpha'} (\eta^{\alpha'})'\} + o(\eta, \eta')$, $o(\eta, \eta')$ essendo di ordine superiore a $\|\eta\|$.

Su (T_3) vi è ancora da osservare che esso provvede un metodo, alternativo a quello illustrato nella S.sez. 6.1.2, per la soluzione di un problema di ordine $p \geq 2$ e in una sola incognita y (cioè, con $F = F(x, y, y', \dots, y^{(p)})$). Ci limitiamo a provarlo nel caso-base $p = 2$, $F = F(x, y, y', y'')$. Il problema di rendere stazionario l'integrale su x di tale F equivale a quello di renderlo stazionario per $F = F(x, y, y', z')$, dove z è un'altra funzione incognita di x , sotto il vincolo anolonomo del 1° ordine $z = y'$. Applicando la regola del moltiplicatore di Lagrange λ , troviamo le due equazioni di EL $[F]_y + \lambda' = 0$ e $[F]_z + \lambda = 0$. Eliminando λ' tra la prima equazione e la derivata della seconda otteniamo $0 = [F]_y - d_x[F]_z$; e tenendo presente che F_z è identicamente nullo, concludiamo che $0 = F_y - d_x F_z - d_x(-d_x F_z) = F_y - d_x F_{y'} + d_x^2 F_{y''}$. Quest'ultima è proprio la (6.1.2, 14) per $p = 2$. Lasciamo al lettore l'estensione di questo risultato a $p > 2$.

Passiamo ora alla

Dimostrazione di (T_1) . Questa si può ottenere assai semplicemente disponendo di (T_3) . Basta introdurre le q nuove incognite

$$(10) \quad w = w(t) = \int_0^1 K(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau,$$

primitive "sostanziali" delle $K(t, u(t), u'(t))$ (qui w e K stanno per w_i e rispettivamente per K_i , con $i = 1 \div q$, con q arbitrario³⁰), quindi con $w(0) = 0$, $w(1) = c$, c essendo le costanti nelle (1). Differenziando le (10) si ha

$$(11) \quad K(t, u, u') - w' =: \Psi(t, u, u', w') = 0.$$

Questi sono q vincoli anolonomi per il nuovo insieme di $n + q$ incognite u, w . Applicando la regola dei moltiplicatori, si tratta di estremare il funzionale \mathcal{F}^* di lagrangiana $F^* =: F + \lambda \cdot \Psi$, ove λ è a priori funzione (di classe $C^1[a, b]$) di t . Abbiamo quindi i due insiemi di $n + q$ equazioni di EL $[F^*]_{u_\alpha} = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$, e $[F^*]_{w_i} = 0$, $i = 1, \dots, q$. Sviluppando le $[F^*]_{w_i} = 0$, ed essendo $\partial F^* / \partial w_i = 0$, $\partial F^* / \partial w_i' = -\lambda_i$, troviamo subito $\lambda_i' = 0$, ovvero $\lambda_i = \text{cost}_i$. Le prime n equazioni di EL, trattandovi le λ_i come costanti, danno poi

$$(12) \quad [F]_{u_\alpha} + \lambda \cdot [K]_{u_\alpha} = 0,$$

per $\alpha = 1, \dots, n$. Se fosse $[K_i]_{u_\alpha} = 0$, cioè se u^α fosse estrema di $\mathcal{K}_i =: \int_0^1 K_i(t, u(t), u'(t)) dt$, il moltiplicatore λ_i sparirebbe dalla $(12)_\alpha$; ma una delle premesse del teorema è proprio che nessuna delle estremanti u_α sia estrema di alcuno dei funzionali \mathcal{K}_i , e dunque ognuna delle costanti λ_i è effettivamente presente in ognuna delle equazioni (12). Questo implica che le (12) danno le n incognite u a meno di $2n + q$ costanti arbitrarie. D'altra parte, si hanno le $2n$ condizioni accessorie

³⁰ q è arbitrario perché il numero q dei vincoli è comunque minore di quello delle nuove incognite, $n + q$.

sulle u , ad esempio agli estremi $u(0) = A$, $u(1) = B$, e i q vincoli $w(1) = \int_0^1 K(t, u(t), u'(t)) dt = c$ per determinare le $2n + q$ costanti in oggetto.

Per la sua importanza, ed anche perché (T_3) è stato discusso ma non dimostrato, diamo una prova indipendente di (T_1) , per semplicità riferendoci al problema (α) ($n = 1$) con un *unico* vincolo isoperimetrico

$$(13) \quad \mathcal{K}[y] = \int_a^b K(x, y, y') dx = c,$$

e sotto le usuali richieste di regolarità su F e K . Questa prova di (T_1) è istruttiva anche come applicazione della nozione di derivata variazionale introdotta nella S.sez (6.1.2). Siano x_1 e x_2 due punti arbitrari di $[a, b]$ (o anche di (a, b)). La variazione del funzionale \mathcal{F} conseguente a variazioni della y intorno a x_1 e rispettivamente a x_2 si esprime, facendo uso delle derivate variazionali e usando i simboli precedentemente introdotti (vedi (S.sez. 6.1.2)), come:

$$(14_{\mathcal{F}}) \quad \Delta \mathcal{F} = \delta \mathcal{F} / \delta y|_{x_1} \sigma_1 + o(\sigma_1) + \delta \mathcal{F} / \delta y|_{x_2} \sigma_2 + o(\sigma_2);$$

e similmente, la variazione del funzionale \mathcal{K} come:

$$(14_{\mathcal{K}}) \quad \Delta \mathcal{K} = \delta \mathcal{K} / \delta y|_{x_1} \sigma_1 + o(\sigma_1) + \delta \mathcal{K} / \delta y|_{x_2} \sigma_2 + o(\sigma_2),$$

ove σ_1 [σ_2] è l'area della variazione di y intorno a x_1 [x_2]. In queste (14), le derivate variazionali possono trascriversi come differenze euleriane secondo la (5.3.2, 22): quindi $\delta \mathcal{F} / \delta y|_{x_1}$ come $[F]_y(x_1)$, e simile scambiando (1) con (2). Tenendo conto che \mathcal{K} non può variare, se si sceglie x_2 (ad es.) tale che $\delta \mathcal{K} / \delta y|_{x_2} \equiv [K]_y(x_2) \neq 0$ (un tale x_2 esiste certamente, perché per ipotesi la y non è una estremale di \mathcal{K}), la $\Delta \mathcal{K} = 0$ impone una relazione del tipo:

$$(15) \quad \sigma_2 = -([K]_y(x_1) / [K]_y(x_2)) \sigma_1 + o(\sigma_1).$$

A meno di termini di ordine superiore a σ_1 , la (15) è un legame lineare tra σ_1 e σ_2 che traduce l'invarianza di \mathcal{K} . Sostituendo la (15) nella (14 $_{\mathcal{F}}$), e ponendo $\lambda = \lambda(x_2) =: - [F]_y(x_2) / [K]_y(x_2)$, abbiamo

$$(16) \quad \Delta \mathcal{F} \equiv \Delta \mathcal{F}(x_1) = \{[F]_y(x_1) + \lambda(x_2)[K]_y(x_1)\} \sigma_1 + o(\sigma_1).$$

Infine dividendo questa per σ_1 e passando al limite per $\sigma_1 \rightarrow 0$, otteniamo $\delta \mathcal{F} / \delta y(x_1) = [F]_y(x_1) + \lambda(x_2)[K]_y(x_1)$. Questa è dunque l'espressione della derivata variazionale di \mathcal{F} rispetto a y , in x_1 , se y è sotto il vincolo isoperimetrico (13). Ma \mathcal{F} ha per ipotesi un estremo in y , cioè y è una sua estremante sotto quel vincolo; quindi $\Delta \mathcal{F}(x) = 0$, e in quanto nulla, la funzione $[F]_y(x_1) + \lambda(x_2)[K]_y(x_1)$ non dipende in realtà né da x_1 né da x_2 (sotto la $[K]_y(x_1) \neq 0$).

Siano ora f , g funzioni entrambe $\in C[0, 1]$, g non identicamente nulla, e h una funzione $\in C^1[0, 1]$, soggette all'equazione funzionale

$$(17) \quad f(u) + h(v)g(u) = 0$$

$\forall(u,v) \in [0,1]$; e sia $\underline{u} \in [0,1]$ un valore di u per cui $g(\underline{u}) \neq 0$. Ponendo $u = \underline{u}$ nella (17) e derivandola rispetto a v , otteniamo $h'(v) = 0 \forall v$ in $(0,1)$; quindi $h = \text{cost} \equiv C$ in $(0,1)$, e perciò in $[0,1]$. Il valore di C si desume dalla (17) stessa ponendovi $u = \underline{u}$, e così $C = -f(\underline{u})/g(\underline{u})$, e $f(u) = g(u)f(\underline{u})/g(\underline{u})$: le funzioni f, g sono ovunque proporzionali secondo il fattore $f(\underline{u})/g(\underline{u})$. Questa è precisamente la situazione in cui ci troviamo, *per la data estremante y*, con la

$$(18) \quad [F]_y(x_1) + \lambda(x_2)[K]_y(x_1) = 0;$$

dunque λ è costante (uguale a $-[F]_y(\underline{x}_1)/[K]_y(\underline{x}_1)$ se \underline{x}_1 è un valore per cui $[K]_y(\underline{x}_1) \neq 0$), e $[F]_y(x_1) = [K]_y(x_1)[F]_y(\underline{x}_1)/[K]_y(\underline{x}_1)$ per ogni x_1 . D'altra parte per λ costante la (18) equivale alla $(\dagger) [F^*]_y(x_1) = 0$ per ogni x_1 , avendo posto $F^* =: F + \lambda K$. Sia ora $y(\lambda)$ la soluzione della (\dagger) (equazione differenziale del 2° ordine nella y) che soddisfa le condizioni agli estremi $y(a|\lambda) = A$, $y(b|\lambda) = B$ ³¹; allora λ deve soddisfare il vincolo $\mathcal{K}[y(\lambda)] = c$. Se $\underline{\lambda}$ è una soluzione di questa equazione, deve essere $\underline{\lambda} = -[F]_{y(\underline{\lambda})}(x_1)/[K]_{y(\underline{\lambda})}(x_1)$ per ogni x_1 per cui $[K]_{y(\underline{\lambda})}(x_1) \neq 0$, e quindi anche nel limite per x_1 tendente ad una qualsiasi (possibile) soluzione \underline{x}_1 della $[K]_{y(\underline{\lambda})}(\underline{x}_1) = 0$. La presente versione di (T_1) è con ciò dimostrata indipendentemente da (T_3) . #

Resta la

Dimostrazione di (T_2) . Se i $q < n$ vincoli $\varphi = 0$ sono olonomi, $\varphi_{\alpha'} = 0$, e (tornando a scrivere $[]_{\alpha}$ per $[]_{u\alpha}$) $[\varphi]_{\alpha} = \varphi_{\alpha}$, la (5) si riduce a

$$(19) \quad \lambda \cdot \varphi_{\alpha} = [F]_{\alpha}.$$

Richiederemo che le equazioni di vincolo (2) siano (globalmente) invertibili rispetto alle $u_{\alpha \leq}$ (diciamo), e quindi che esse siano trascrivibili come

$$(20) \quad u_{\alpha \leq} = \psi_{\alpha \leq}(t, u_{\geq}),$$

dove le $\psi_{\alpha \leq}$ sono funzioni note dei loro $1 + n - q$ argomenti. Segue che la $(q \times q)$ -matrice $\{\varphi_{\alpha}^i\}_{\alpha \leq}$ è non singolare in $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, e quindi che le (19) danno le λ . Convieni allora introdurre la matrice reciproca della $\{\varphi_{\alpha}^i\}_{i, \alpha=1+q}$, la $\{\chi_h^{\alpha}\}_{h, \alpha=1+q}$, per cui $\chi_h^{\alpha \leq} \varphi_{\alpha \leq}^i = \delta_h^i$ (somma sui $\alpha \leq$). Si ottiene allora, eliminando i moltiplicatori mediante le (19),

$$(21) \quad \varphi_{\beta \geq}^h \chi_h^{\alpha \leq} [F]_{\alpha \leq} = [F]_{\beta \geq}$$

(somma su $\alpha \leq$ e su h da 1 a q). Queste sono $n - q$ equazioni (differenziali quasi-lineari del 2° ordine) nelle u . Facendo tutte le sostituzioni, il sistema delle (21) si riduce alle sole $n - q$ incognite $u_{\alpha \geq}$, conservandosi differenziale di 2° ordine quasi-lineare in esse. Come abbiamo già osservato, soltanto $2(n-q)$ condizioni accessorie sulle $u_{\alpha \geq}$ sono assegnabili liberamente. Infine le q funzioni

³¹ Ovviamente nella presente versione di (T_1) le due n -colonne costanti (A,B) introdotte più sopra si riducono a due costanti (A,B) .

$\lambda = \lambda(t)$ sono date da $\lambda_h = \chi_h^{\beta \leq} [F]_{\beta \leq}$ (somma su $\beta \leq$), avendovi espresso il 2° membro in termini delle u_{\geq} . (T₂) è così dimostrato. # ³²

³² Esistono alternative alla dimostrazione di (T₂), e in particolare quella di far uso di derivate variazionali in analogia con quanto si è visto nella seconda dimostrazione di (T₁) data più sopra.

6.2) APPLICAZIONI DEL CDV UNIDIM

6.2.1) RASSEGNA DI PROBLEMI CLASSICI

In questa sottosezione illustreremo alcuni dei problemi più tipici del CDV unidim, segnatamente di tipo geometrico, ma anche cinematico, ottico e dinamico. La loro importanza matematica è per lo più quella di più o meno semplici esercizi intorno alla teoria generale, vedi Sez. 6.1; ma le loro applicazioni pratiche sono talvolta sostanziali, e mostrano con evidenza l'efficacia del CDV unidim non solo nei confronti della geometria, ma anche della fisica-matematica, dell'ingegneria, e delle scienze esatte in genere.

Per il suo valore storico, partiremo con il già nominato

§1. *Problema della Brachistocrona*. Diamo per ovvio il fatto che il funzionale da minimizzare sia quello indicato nella S.sez. 6.1.1, cioè $\int_0^b [(1+y'^2)/y]^{1/2} dx$ (avendo posto il punto di partenza in (0,0), ed orientato l'asse y verso il basso). La corrispondente equazione di EL, per $y \neq 0$, è

$$(1) \quad y'' + (1+y'^2)/(2y) = 0.$$

Se $y' \neq 0$, questa equivale alla

$$(1bis) \quad d_x(y(1+y'^2)) = 0;$$

ovvero, prendendo come si deve la radice positiva di y'^2 , alla

$$(1ter) \quad y' = (2C/y-1)^{1/2},$$

dove C è una costante > 0 (grande quanto basta) da determinare. La (1ter) è del tipo separabile, e si trova subito, tenendo conto della condizione iniziale $y(0) = 0$, che

$$(2) \quad x(y) = \int_0^y (w/(2C-w))^{1/2} dw.$$

Una semplice verifica prova che l'integrale nella (2) vale $C \cos^{-1}(1-y/C) - (y(2C-y))^{1/2} \equiv \phi(y,C)$.

Questo implica che $0 < y \leq 2C$. Un momento di riflessione suggerisce allora di porre

$$(3) \quad y = C(1-\cos\theta),$$

dove $0 < \theta \leq \pi$ è un parametro angolare; in questo caso, infatti, l'integrale nella (2) si riduce a $C(\theta - \sin\theta)$. In conclusione la (3), e la

$$(4) \quad x = C(\theta - \sin\theta),$$

sono le equazioni della curva ricercata, che è una cicloide con il punto iniziale (0,0) in $\theta = 0$, in funzione del parametro θ . (Si noti in particolare che $dx/dy = (y/(2C - y))^{1/2}$, e quindi che $dy/dx \rightarrow \infty-$ come $1/\sqrt{y}$ per $y \rightarrow 0+$.) Infine la costante C si calcola mediante la 2ª condizione agli estremi, cioè $b = \phi(B,C)$ (essendo $y(b) = B > 0$), la quale comporta la disuguaglianza $0 < B \leq 2C$.

Quest'ultima implica a sua volta la precedente $0 < y \leq 2C$, perché B è il punto più basso della traiettoria.

Una interessante generalizzazione del problema si ha supponendo che il grave parta da $x = y = 0$ non da fermo ma con velocità di modulo $v > 0$. L'integranda nella (2) si deve allora modificare sostituendovi y con $y + v^2/(2g)$, ove g è l'accelerazione di gravità. Ponendo per brevità $\alpha =: v^2/(2g)$, la brachistocrona è ora descritta dalla $x(y) = \phi(y+\alpha, C) - \phi(\alpha, C)$, e C è dato dalla $b + x_\alpha = \phi(B+\alpha, C)$ con $x_\alpha =: \phi(\alpha, C)$ (sotto la condizione $B + \alpha \leq 2C$). Inoltre è ora $dx/dy = [(y/\alpha+1)/((2C-y)/\alpha - 1)]^{1/2}$; quindi la tangente iniziale non è più verticale, ma uguale a $dy/dx = (2C/\alpha - 1)^{1/2}$. Infine, per α grande, ma sempre sotto la $B + \alpha \leq 2C$ (quindi con $\alpha < 2C$), dy/dx tende alla costante $(2C/\alpha - 1)^{1/2}$, e la brachistocrona degenera in un segmento rettilineo.

Una variante del problema standard è quella in cui si vuole determinare la traiettoria del grave che, partendo da fermo, impiega il minimo tempo tra il punto (0,0) e una retta verticale di ascissa $b > 0$. Il riferimento è allora al §5 della S.sez. 6.1.1, e possiamo applicare la seconda condizione (6.1.2, 17), $F_y|_b = 0$. Nel nostro caso, essa equivale a $y'(b) = 0$, cioè alla perpendicolarità della traiettoria alla retta verticale in oggetto. Questa condizione comporta che $y(b) = 2C$, e quindi che $1 - \cos\theta_b = 2$. Si ha così $\theta_b = \pi$, e dunque $b = C\pi$: le equazioni parametriche sono le (3, 4) con $C = b/\pi$. Infine si potrebbe verificare che in ogni caso la soluzione corrisponde effettivamente ad un *minimo* del tempo di percorrenza. §

§2. *Geodetiche di uno spazio euclideo*. Per quanto ciò sia di scarso impatto dal punto di vista intuitivo, possiamo verificare che la curva di lunghezza stazionaria (in questo caso, minima), o geodetica, tra due punti dati in \mathbb{R}^n è il segmento rettilineo tra di essi. È sufficiente limitarsi al piano ($n = 2$). Dette a, b le ascisse dei punti in questione, e A, B le loro ordinate, e supposto $a \neq b$, dobbiamo minimizzare il funzionale $\mathcal{F}[y] = \int_a^b (1+y'^2)^{1/2} dx$ sotto le $y(a) = A, y(b) = B$. L'equazione di Eulero impone che $y'/(1+y'^2)^{1/2}$ sia costante, ossia che y' sia costante. Detta c quest'ultima costante, abbiamo $y = cx + H$, dove c e H soddisfano il sistema lineare $A = ca + H, B = cb + H$. Poiché $a \neq b$, il determinante di questo sistema in (c, H) è diverso da zero, ed esso dà unicamente c e H per arbitrari A e B . Se poi $a = b$, occorre rovesciare i ruoli di x e y , ricercando la curva come $x = x(y)$. Ovviamente risulta ancora $x = dy + K$, dove d e K sono costanti da determinare. Quindi $a = dA + K$ e $b = a = dB + K$. Poiché deve ora essere $A \neq B$, queste implicano che $d = 0$, e dunque che $K = a = b$. La tesi è così dimostrata in ogni caso. La generalizzazione a $n > 2$ è banale. Il ruolo fondamentale che l'asserto appena provato gioca in una formalizzazione metrica della geometria euclidea (per $n \geq 2$), è stato posto in evidenza nel Cap. 1. §

§3. *Geodetiche di una superficie di rotazione* (o “assisimmetrica”). Considerando i paralleli e i meridiani della superficie come linee coordinate, useremo come coordinate la longitudine standard φ lungo il generico parallelo, e lungo il generico meridiano la sua lunghezza y contata, in un dato verso, a partire da un parallelo prefissato una volta per tutte. Se r è il raggio del parallelo, l’equazione della superficie può allora darsi nella forma $r = r(y)$, dove $r(y)$ si supponrà di CdC 1.¹ L’equazione $\varphi = \varphi(y)$ descrive una generica curva sulla superficie stessa, e il funzionale da estremare è quindi $\mathcal{F}[\varphi] = \int_a^b [1+r^2(y)\varphi'^2(y)]^{1/2} dy$, dove a e $b > a$ sono i valori di y agli estremi della curva. La relativa equazione di EL (in cui φ si suppone al solito di classe C^2) dice allora che, lungo una geodetica, è

$$(5) \quad (r^2\varphi')/(1+r^2\varphi'^2)^{1/2} = C \text{ (costante),}$$

ovvero $\varphi'^2 = C^2/(r^2(r^2-C^2))$, che impone $r^2 > C^2$. Abbiamo così φ' a meno del segno, e quindi φ a meno del segno e di una costante additiva φ_0 , come funzione nota di y . Le due costanti C e φ_0 si determinano mediante le condizioni agli estremi; ma è chiaro che φ_0 si può sempre assumere uguale a zero. Si intuisce subito, inoltre, che il segno di φ' non è essenziale, e che ci si può limitare al caso $\varphi' \geq 0$, convenendo che C sia a sua volta ≥ 0 . Se gli estremi sono sullo stesso meridiano, una estremale tra di essi è comunque quella per cui $\varphi' \equiv 0$, cioè $C = 0$, e quindi è il pezzo di meridiano compreso tra i due punti; ma di norma vi sono altre estremali tra gli stessi punti.

Riferendola alla lunghezza s lungo l’estremale, la (5) si riscrive più semplicemente come

$$(5bis) \quad r^2 d_s \varphi = C;$$

ma $rd_s\varphi$ è uguale al coseno dell’angolo ω che la geodetica (orientata) forma con il parallelo che la interseca, $rd_s\varphi = \cos\omega$, e quindi

$$(5ter) \quad r \cos\omega = C.$$

È questo il **teorema di Clairaut** (A.C. Clairaut, 1713-1765), che recita: «su una superficie assisimmetrica, è costante il prodotto del coseno dell’angolo che una geodetica forma col parallelo che la interseca per il raggio di quest’ultimo.» Lungo un parallelo, r è costante e $d_s\varphi = 1/r$, quindi $r = C$ e $\omega = 0$; per cui se i due estremi sono sullo stesso parallelo, i due pezzi opposti di parallelo tra quei punti sono entrambi estremali. Come al solito, le estremali non sono necessariamente geodetiche; ma si intuisce e si dimostra che esse lo sono effettivamente nei casi considerati. §

§4. *Il (cosiddetto) problema di Didone e le sue varianti*. Il problema isoperimetrico per eccellenza, diciamolo (I), di identificare la regione piana avente area massima e perimetro di lunghezza

¹ Se si identifica l’asse z dell’usuale sistema di riferimento cilindrico (r,φ,z) con l’asse di simmetria della data superficie, e i meridiani sono orientati nello stesso senso di z , una rappresentazione alternativa e più naturale si ha dando r in funzione di z , diciamo $r = f(z)$. Da questa, si vede subito che $dy/dz = (1+f'^2(z))^{1/2}$. Se il parallelo iniziale è in $z = 0$, y è la primitiva g di questa dy/dz che si annulla in $z = 0$. La funzione g è evidentemente monotona, e quindi unicamente invertibile. Si conclude che $r(y) = f(g^{-1}(y))$.

assegnata fu già noto, assieme alla sua soluzione, agli antichi Egizi; anche se ovviamente essi non potevano disporre di una genuina dimostrazione del fatto intuitivo che la regione in oggetto è il disco avente circonferenza della lunghezza data. Riferendo il piano a coordinate cartesiane standard, è corretto considerare il perimetro della regione in oggetto come a priori simmetrico rispetto ai due assi coordinati.² Richiedendo al solito che esso sia di classe C^2 (o C^2 a tratti) il problema consiste nel massimizzare l'integrale $A[y] =: \int_{-a}^a y(x)dx$ (area della regione S compresa tra la curva γ di equazione $y = y(x)$ e l'asse x) sotto il vincolo che $J[y] =: \int_{-a}^a (1+y'^2(x))^{1/2}dx$ (lunghezza della curva γ) sia, diciamo, $2L$ ($y' \equiv d/dx$). Il valore di a , che dà le due intersezioni (simmetriche rispetto all'origine) di γ con l'asse x , $y(\mp a) = 0$, è per il momento indeterminato. Applicando la regola del moltiplicatore (in questo caso una costante che scriveremo μ), dobbiamo quindi massimizzare incondizionatamente l'integrale $\int_{-a}^a [y(x) - \mu(1+y'^2(x))^{1/2}]dx$, dove il segno $-$ davanti a μ è stato posto per miglior convenienza. L'equazione di EL è quindi $1 + \mu d_x[y'(1+y'^2)^{-1/2}] = 0$, ovvero $\mu y'' + (1+y'^2)^{3/2} = 0$. Questa ammette l'integrale primo $y - \mu(1+y'^2)^{-1/2} = \text{cost} \equiv y_0$; conviene quindi porre $y' =: \text{tg}\varphi$, dove l'angolo φ ha significato ovvio. Si trova così immediatamente

$$(6) \quad y - y_0 = \mu \cos\varphi.$$

Essendo poi $dx/d\varphi = (1/y')dy/d\varphi = \text{ctg}\varphi(-\mu \sin\varphi) \equiv -\mu \cos\varphi$, altrettanto facilmente abbiamo

$$(7) \quad x - x_0 = -\mu \int_0^\varphi \cos\varphi d\varphi = -\mu \sin\varphi,$$

dove dobbiamo porre $x_0 = 0$ per ragioni di simmetria. La curva γ è cioè un arco di cerchio di centro $(0, y_0)$, raggio $|\mu|$, anomalia φ e ordinata $y \geq 0$. Si noti che se l'anomalia alle intersezioni $x = \mp a$ è diversa da $\pi/2$, la curva γ , completata con la sua simmetrica $-\gamma$ rispetto all'asse x , ha in $(\mp a, 0)$ due punti angolosi. Ponendo $\alpha =: \varphi(-a) > 0$ (quindi $-\alpha =: \varphi(a)$), abbiamo

$$(8) \quad a = \mu \sin\alpha,$$

$$(9) \quad y_0 = -\mu \cos\alpha.$$

Il vincolo $J[y] = 2L$ impone poi $2L = \int_{-a}^a dx/\cos\varphi(x) = \int_{\alpha}^{-\alpha} (1/\cos\varphi)(dx/d\varphi)d\varphi = \mu \int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = 2\mu\alpha$, da cui $\mu = L/\alpha > 0$. Siamo così rimasti con il solo parametro α a caratterizzare la regione S , perché ormai $a = L \sin\alpha/\alpha$. Se escludiamo l'esistenza dei punti angolosi in $(\mp a, 0)$ della curva $\gamma \cup (-\gamma)$ col porre $\alpha = \pi/2$, (quindi $a = 2L/\pi$, $y_0 = 0$, $\mu = a$), il problema è risolto: la regione S è il semidisco di raggio $2L/\pi$ e centro $(0, 0)$. Questo è il "problema di Didone in senso stretto" di cui alla S.sez.

² In realtà già un argomento di questo tipo induce a configurarsi il perimetro in questione come un cerchio, perché l'orientamento degli assi ortogonali è arbitrario, e l'unica curva chiusa che sia simmetrica rispetto ad assi ortogonali *comunque* orientati è il cerchio con centro nell'origine. Ma evidentemente il nostro scopo non è quello di trovare la soluzione, ma di applicare la teoria di EL al problema, risolvendolo mediante le sue procedure.

6.1.1, nota (2). Quanto al problema iniziale (I) è ovvio a questo punto che la regione cercata è il disco dello stesso raggio $2L/\pi$ avendone assegnato il perimetro $4L$.

La procedura appena illustrata consente la pronta soluzione di una variante del problema di Didone, quella in cui oltre alla lunghezza del perimetro “asciutto” $2L$, è data la distanza $2a$ tra i due punti della “riva” per cui passa il confine. Basta tornare all’uguaglianza $a/L = \sin\alpha/\alpha$, in cui il 1° membro è adesso assegnato. Considerata come equazione in α , essa ha un’unica soluzione α_0 in $(0, \pi/2]$ sse $a < L \leq \pi a/2$: S diventa così la lunula di raggio L/α_0 ed angolo al centro $2\alpha_0$. L’area di questa lunula è $L^2(\alpha_0 - \sin\alpha_0\cos\alpha_0)/\alpha_0^2$, ed è immediato verificare, oltre che intuitivo, che essa è massima per $[1 - (\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0)]\alpha_0 = 2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0$, cioè per $\alpha_0 = \pi/2$. Si torna così al problema di Didone standard.

Illustreremo ora un metodo alternativo per risolvere il problema-base (I). Siano $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \equiv$ lunghezza corrente, le equazioni della curva (semplice, chiusa, C^2) con perimetro di lunghezza imposta L che racchiude la regione di area massima. Il funzionale-area da massimizzare è allora $\int_0^L y(1-y'^2)^{1/2} ds$, dove (') sta per d/ds , perché $x'^2 + y'^2 = 1$. In questa versione del problema il vincolo isoperimetrico è finito nel limite superiore dell’integrale e quindi *non* si usa la regola del moltiplicatore. L’equazione di EL è $[yy'(1-y'^2)^{-1/2}]' + (1-y'^2)^{-1/2} = 0$; ovvero, effettuando la derivazione, moltiplicando i due membri per $1 - y'^2$ e operando banali semplificazioni, si ottiene

$$(10) \quad yy'' = y'^2 - 1.$$

La (10) si integra ravvisando nel rapporto $y^2/(1-y'^2)$ un suo integrale primo: infatti derivando quel rapporto si trova, per il numeratore della derivata, $2yy'(1-y'^2) + 2y'y''y^2$, nullo in forza della (10). In definitiva, abbiamo

$$(10') \quad y^2 = C^2(1-y'^2),$$

dove C^2 è una costante positiva. La (10') si integra a vista, col risultato che $y = C\sin((s+b)/C)$, dove b è una “costante di fase” arbitraria e $C =: +\sqrt{C^2}$. Ancora in forza della $x'^2 + y'^2 = 1$, si ha poi $x' = \pm \sin((s+b)/C)$, per cui (°) $x - x_0 = \mp C\cos((s+b)/C)$. Evidentemente, le costanti b e x_0 non interessano e possono porsi entrambe uguali a zero. Se si sceglie il segno + a 2° membro della (°), si conclude che le espressioni così ottenute per x e y sono le equazioni parametriche di un cerchio di centro $(0,0)$, raggio C e anomalia s/C (quindi, con l’usuale orientamento degli assi, s cresce in senso sinistrorso, è zero in $(C,0)$ e diventa $2\pi C$ dopo un giro). C si determina infine in modo che la circonferenza del cerchio sia come richiesto L , $C = L/2\pi$. Il calcolo dell’area dà effettivamente $\int_0^L y(1-y'^2)^{1/2} ds = C \int_0^L \sin^2(s/C) ds = C^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\beta d\beta = C^2\pi$, come deve essere.

Sia ora γ una curva piana semplice e chiusa, di lunghezza finita L . Per il teorema di Jordan (vedi S.sez 1.7.1), γ divide il piano in una regione di area finita A (la regione interna a γ), e in una

regione complementare esterna di area infinita. Supposta γ di classe C^1 (o C^1 a tratti), il precedente risultato variazionale – integrato da una prova dell'esistenza di una estremante, e del fatto che A è effettivamente massima e non soltanto stazionaria – può trascriversi nella forma

$$(11) \quad A \leq L^2/(4\pi).$$

Questa disuguaglianza è nota come **disuguaglianza isoperimetrica** (per le curve piane), e si riduce ad una uguaglianza sse γ è un cerchio. (Infatti è allora $A = \pi(L/(2\pi))^2 = L^2/(4\pi)$.) Essa può considerarsi come il più significativo ed elementare “teorema globale” sulle curve piane (semplici, chiuse e C^1 a tratti), ed è all'origine di una moltitudine di generalizzazioni e di studi, sia in chiave analitica che geometrica, indipendentemente dal CDV. Come tale, la (11) è dunque in qualche modo estranea all'argomento di questo capitolo, il CDV unidim.

Vogliamo tuttavia introdurre una sua conseguenza di notevole interesse concettuale. Se γ è data in coordinate polari standard (ρ, θ) , a partire da un suo punto $(\rho=0, \theta=0)$ per concludersi in $(\rho=0, \theta=\pi)$, l'area da essa racchiusa è $A = \int_{\theta=0}^{\pi} \rho^2(\theta) d\theta / 2$. D'altra parte (sottintendendo ormai la dipendenza da θ nell'integranda), risulta $L^2 = \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} [\rho^2 + (d_\theta \rho)^2]^{1/2} d\theta \right\}^2$; e quindi, facendo uso della disuguaglianza di Hölder, $L^2 \leq \pi \int_{\theta=0}^{\pi} [\rho^2 + (d_\theta \rho)^2] d\theta$. In forza della disuguaglianza isoperimetrica (11), abbiamo quindi $4A = 2 \int_{\theta=0}^{\pi} \rho^2 d\theta \leq L^2 / \pi \leq \int_{\theta=0}^{\pi} [\rho^2 + (d_\theta \rho)^2] d\theta$, ovvero

$$(12) \quad \int_{\theta=0}^{\pi} [(d_\theta \rho)^2 - \rho^2] d\theta \geq 0.$$

Affermiamo che questa disuguaglianza vale per ogni funzione periodica di periodo 2π del suo argomento che si annulla per i valori 0 e π di quest'ultimo, e di classe C^1 . Si ponga infatti $\rho(\theta) = G(\theta) \sin \theta$, dove $G(\theta)$ è anch'essa periodica di periodo 2π e C^1 . Calcolando l'integranda nella (12), abbiamo: $(d_\theta \rho)^2 - \rho^2 = (d_\theta G)^2 \sin^2 \theta + d_\theta(G^2 \sin \theta \cos \theta)$. La tesi segue integrando quest'ultima su θ da 0 a π , perché $\int_{\theta=0}^{\pi} (d_\theta G)^2 \sin^2 \theta d\theta \geq 0$ e $[G^2 \sin \theta \cos \theta]_0^\pi = 0$. Si noti che l'uguaglianza, nella precedente, si ha sse $d_\theta G = 0$, o $G = \text{cost}$. Si conclude così che la (12) vale in generale, e si riduce ad una uguaglianza sse ρ è proporzionale a $\sin \theta$. La (12) si dice **disuguaglianza di Wirtinger** (Wilhelm, 1865-1952), ed è affine alla più nota, ma meno elementare, “disuguaglianza di Poincaré”. È interessante rimarcare che nel 1904 Hurwitz (Adolf, 1859-1919) ha provato che la disuguaglianza isoperimetrica (11) può dimostrarsi facendo uso di quella di Wirtinger (12). §

§5. *Tre altri problemi geometrici.* Dei molti problemi variazionali classici di pertinenza geometrica, illustriamo ancora i seguenti tre (l'ultimo di essi dovrebbe in realtà considerarsi un problema di “geometria delle masse”):

§5₁. Trovare il profilo $r = r(z)$ della superficie di rotazione di asse z tra i valori $z = 0$ e $z = 1$ – ove r ha certi assegnati valori $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – che ha area stazionaria. Indicando con (\cdot) la d/dz , l'integrale

da estremare è manifestamente $\int_0^1 r(z)(1+r'^2)^{1/2} dz$, e quindi la corrispondente equazione di EL, supponendo al solito r di classe C^2 , è $(rr'(1+r'^2)^{-1/2})' = (1+r'^2)^{1/2}$, o anche $rr'' = r'^2 + 1$. Questa differisce dalla (10) (v. §4) soltanto per il segno davanti a 1 nel 2° membro. Su questa base ci si aspetta che la soluzione sia una funzione iperbolica anziché circolare. In effetti, posto $(\dagger) r = C \operatorname{Ch}((z+\delta)/C)$, dove C e δ sono due costanti arbitrarie, si ha $r' = \operatorname{Sh}((z+\delta)/C)$, quindi $r'^2 + 1 = \operatorname{Ch}^2((z+\delta)/C)$; e d'altra parte $r'' = (1/C)\operatorname{Ch}((z+\delta)/C)$ per cui $rr'' = \operatorname{Ch}^2((z+\delta)/C)$, qed. Le due condizioni agli estremi forniscono le costanti C e δ . In conclusione, il profilo ricercato è l'arco di catenaria tra $(0, \alpha)$ e $(1, \beta)$. Non è possibile, senz'altro aggiungere, decidere se la superficie assisimmetrica di profilo (\dagger) ha area massima o minima: come ovvio, si rende necessaria un'ulteriore analisi basata sul segno della F-derivata seconda del funzionale di area estremato. §

§5₂. Il secondo problema è ancora di tipo assisimmetrico: si tratta di determinare il profilo γ , diciamo $r = r(z)$ di un solido di rotazione di asse z , generalmente “appuntito” a prua e a poppa (cioè con $r(0) = r(1) = 0$) in modo che il solido da esso generato per rotazione abbia volume massimo, avendo assegnato la lunghezza $L > 1$ di γ (nel piano meridiano (r, z)). Trattando il vincolo “lunghezza di γ ” = L con la regola del moltiplicatore (moltiplicatore che diremo ancora μ), si tratta di estremare incondizionatamente l'integrale $\int_0^1 [\pi r^2 - \mu(1+r'^2)^{1/2}] dz$ (come in §4, il segno – davanti a μ è stato posto per miglior convenienza). L'equazione di EL è $[r'(1+r'^2)^{-1/2}]' = -2\pi r/\mu$, ossia

$$(13) \quad r''(1+r'^2)^{-3/2} = -2\pi r/\mu.$$

A 1° membro della (13) c'è la curvatura (con segno) di γ , mentre il 2° membro è proporzionale al suo raggio. Il profilo cercato è dunque quello di una **curva elastica**.³ Poiché r'' deve essere evidentemente ≤ 0 in forza delle condizioni agli estremi, si desume che $\mu > 0$. Le due costanti incorporate nella soluzione, nonché μ , si deducono al solito modo dalle condizioni agli estremi e dal vincolo isoperimetrico.

Per la sua importanza in statica e in meccanica, qui ci interessa in particolare approfondire l'esame della EDO (13) nel caso in cui $r'^2 \ll 1$. Allora la (13), quasi-lineare del 2° ordine, diventa

$$(14) \quad r'' + 2\pi r/\mu = 0,$$

lineare omogenea. Poiché anche le condizioni agli estremi sono lineari, abbiamo un classico ed elementare problema agli autovalori del tipo Sturm-Liouville; ma l'essere necessariamente $r \geq 0$ impedisce la comparsa di autosoluzioni di ordine superiore al primo. Tenuto conto della $r(0) = 0$, la soluzione è dunque $r = A \sin((2\pi/\mu)^{1/2} z)$, dove A è un fattore arbitrario > 0 . La seconda condizione

³ Una curva piana $y = y(x)$ è detta elastica se la sua curvatura con segno è proporzionale alla sua ordinata y . È questa infatti la configurazione che assume una **verga elastica** (rettilinea a riposo) incernierata ai suoi estremi e ivi soggetta ad una forza di compressione. In meccanica dei continui, una verga elastica è un solido elastico idealmente 1-dimensionale, incomprimibile/inestendibile, e tipicamente rettilineo in assenza di momento flettente.

$r(1) = 0$ richiede che $\mu = 2/\pi$, e in conclusione $r = A \sin \pi z$. Il fattore A si determina con il vincolo sulla lunghezza di γ , che è $L = \int_0^1 (1 + A^2 \pi^2 \cos^2 \pi z)^{1/2} dz$. In questo, bisogna tuttavia tener conto della richiesta $r'^2 \ll 1$, cioè che $A^2 \pi^2 \cos^2 \pi z \ll 1$, o anche $A^2 \pi^2 \ll 1$; quindi la differenza $L - 1$ deve essere abbastanza piccola (rispetto a 1) da assicurarla. Questa è la configurazione di *equilibrio stabile* di una verga elastica (rettilinea a riposo) di lunghezza L *leggermente* maggiore di 1, incernierata agli estremi e ivi compressa assialmente fino a che la distanza tra gli estremi sia ridotta a 1. Nell'approssimazione considerata, risulta $A \approx (2/\pi)(L-1)^{1/2}$. §

§5.3. Come si diceva, è questo un noto problema di geometria delle masse, significativo per quanto elementare. Si tratta di determinare la posizione di equilibrio stabile di un filo⁴ pesante, di densità uniforme e di lunghezza data L , appeso ai suoi estremi in punti dati (distanti tra loro non più di L , e non sulla stessa verticale). Detta $y = y(x)$, $x \in [0,1]$, la curva secondo la quale si atteggia il filo nel suo piano verticale, la detta configurazione di equilibrio è quella che minimizza la quota del suo baricentro, cioè dell'integrale $\int_0^1 y(1+y'^2)^{1/2} dx$ sotto il vincolo $L = \int_0^1 (1+y'^2)^{1/2} dx$. Senza limitare la generalità possiamo assumere $\alpha =: y(0) = 0$, per cui richiederemo $(1+\beta^2)^{1/2} \leq L$, avendo denotato con β il valore $y(1)$. Introdotto il solito moltiplicatore μ , abbiamo l'equazione di EL:

$$(15) \quad [(y+\mu)y'(1+y'^2)^{-1/2}]' = (1+y'^2)^{1/2},$$

che integrata fornisce $y = (1/C)\text{Ch}(C(x+\delta)) - \mu$, ove C e δ sono costanti da determinare con le condizioni assegnate (μ è subito eliminata in quanto uguale a $(1/C)\text{Ch}(C\delta)$ in forza della $y(0) = 0$). Si tratta di una catenaria concava verso l'alto se $C > 0$, cioè se vogliamo che la quota del baricentro sia effettivamente *minima*. Questa è la ben nota configurazione, ad esempio, dei fili elettrici tesi tra pali lontani. Si noti che per $C < 0$ si ha un'altra configurazione di equilibrio (in virtù dell'assunta incompressibilità del filo), evidentemente instabile. §

§6. *L'ottica geometrica e il principio di Fermat*. La teoria asintotica del campo elettromagnetico per lunghezze d'onda molto più piccole delle lunghezze tipiche di interesse prova che un "raggio di luce"⁵ si propaga in un mezzo isotropo e generalmente eterogeneo lungo una traiettoria (tra due punti dati dello spazio) che estremizza – tipicamente minimizza – il tempo di percorrenza. Vale a dire, se $V = V(\mathbf{x})$ è la celerità del raggio nel punto \mathbf{x} dello spazio, la traiettoria $\gamma = \gamma(s)$ del raggio

⁴ In meccanica dei continui un filo è un solido idealmente 1-dimensionale, inestendibile/incompressibile e completamente flessibile (cioè incapace di reagire ad un momento flettente).

⁵ Questo termine è leggermente equivoco. Nella comune accezione, un raggio luminoso è una linea (tipicamente una retta, o una spezzata) lungo la quale la luce sembra propagarsi nello spazio, ad esempio visualizzata dal pulviscolo o dal vapor d'acqua atmosferico. Forse conviene qui seguire quanto suggerisce il modello corpuscolare: allora un raggio luminoso è la traiettoria di una piccola regione spaziale in cui si concentra dell'energia luminosa; o più semplicemente, la traiettoria di un fotone.

stesso, espressa in termini di lunghezza corrente s , diciamo in $[0, s_1 > 0]$, tra i punti $\gamma_0 = \gamma(0)$ e $\gamma_1 = \gamma(s_1)$, è la soluzione del problema variazionale

$$(16) \quad \int_0^{s_1} |\gamma'(s)|/V(\gamma(s)) ds = \text{extr!},$$

dove (') sta per d/ds . Ricordiamo che V^{-1} è per definizione proporzionale all'**indice di rifrazione** del mezzo, uguale al rapporto tra una celerità di riferimento (ad es. quella della luce nel vuoto c) e la celerità attuale V . In particolare, la (16) afferma che in un mezzo *omogeneo* ($V = \text{cost}$), o omogeneo a tratti, la *lunghezza* della traiettoria tra i due estremi dati è stazionaria. Questo fu noto fin da tempi molto antichi (cfr. la “Catottrica” di Euclide, i contributi di Erone di Alessandria, ecc.). La (16) fu invece proposta, anche se non precisamente nella forma qui riportata, da P. Fermat nel 1658. Universalmente nota come **principio di Fermat**, essa spiega gran parte dei fenomeni ottici nella sopraddetta approssimazione asintotica “ λ (scala delle lunghezze d’onda) \ll L (scala delle lunghezze tipiche di interesse)”, e caratterizza la cosiddetta **ottica geometrica**. Se usiamo la coordinata spaziale x come parametro (con la componente $\gamma_x(0) < \gamma_x(1)$), descrivendo la traiettoria con $y = y(x)$, $z = z(x)$ per x in $[\gamma_x(0) \equiv a, \gamma_x(1) \equiv b]$, la (16) si trascrive nella forma (adesso con (') $\equiv d/dx$):

$$(16\text{bis}) \quad \int_a^b (1+y'^2+z'^2)^{1/2} V^{-1}(x,y,z) dx = \text{extr!},$$

sotto le condizioni agli estremi $(y(a), y(b)) = (\gamma_y(0) \equiv y_0, \gamma_y(1) \equiv y_1)$ e $(z(a), z(b)) = (\gamma_z(0) \equiv z_0, \gamma_z(1) \equiv z_1)$. Posto $h =: 1+y'^2+z'^2$, le due equazioni di EL per la (16bis) sono

$$(17) \quad [(y', z')/(Vh^{1/2})]' + h^{1/2} V^{-2} \partial V / \partial (y, z) = 0,$$

dove y e z sono da leggere alternativamente. Come è ovvio, le estremali dipendono funzionalmente dalla $V = V(x, y, z)$.⁶

È istruttivo determinare la soluzione della 1^a delle (17) supponendo che V dipenda dalla sola coordinata x e ignorando la z , cioè riducendo il problema al piano (x, y) (con $h =: 1 + y'^2$). Si ha subito $[y'/(Vh^{1/2})]' = 0$, ossia $y'^2/h = C^2 V^2(x)$, dove C^2 è una costante positiva da determinare. Da questa,

$$(18) \quad y(x) = C \int_a^x V(w) (1 - C^2 V^2(w))^{-1/2} dw + y(a)$$

per $a \leq x \leq b$, dove $C = \pm \sqrt{C^2}$.

Interpretando la x come quota nel piano verticale (x, y) , senza limitare la generalità porremo $a = 0$. È importante il segno della derivata di V rispetto a x : se V cresce con la quota, i raggi tendono ad essere concavi verso il basso, in caso contrario verso l’alto. Potremo avere una situazione del primo tipo su una pianura fredda (o spesso in mare aperto) in un giorno soleggiato, e

⁶ In realtà non si sarebbe perso niente di essenziale se il problema fosse stato formulato direttamente nel piano, rinunciando alla terza coordinata z .

del secondo tipo su una pianura infuocata. Se l'osservatore è supposto a quota ≈ 0 , si spiegano così certi noti effetti ottici illusori: nel primo caso l'ingrandimento *verticale* di oggetti lontani, e nel secondo il loro rimpicciolimento, e in casi limite il cosiddetto “miraggio”, cioè la visione di oggetti rispecchiati dal suolo. Questi effetti si spiegano già abbastanza bene con semplici approssimazioni lineari del tipo $V = V(x) = Ax + B$, con A e B costanti, $B > 0$. Si prova allora facilmente, sulla base della (18), che i raggi percorrono *archi di cerchio* (verticali) concavi verso il basso se $A > 0$ (quando V cresce con la quota), e verso l'alto in caso contrario. Il miraggio si ha, nel secondo caso, quando la parte finale del raggio, orientato verso l'osservatore, è addirittura inclinata dal basso verso l'alto, e quindi le immagini sembrano provenire (rovesciate) da *sotto* l'orizzonte, come se il suolo fosse uno specchio. §

6.2.2 GEODETICHE DI UNA VARIETÀ RIEMANNIANA

Ci occuperemo ora di una applicazione di interesse centrale del CDV unidim: la ricerca di estremanti del funzionale “lunghezza” tra curve di confronto ammissibili di un aperto di varietà *riemanniana*, tra due dati punti di questo. Si consideri dunque una tale varietà ($n \geq 2$)-dimensionale $\mathbb{R}^2 M^n \equiv M^7$ con coordinate locali $x \equiv x^{1 \leq i \leq n}$ in una carta C di mappa λ , su un aperto U della quale è assegnato un (campo di) tensore fondamentale ${}^C g_{(2)} = {}^C g_{(2)}(x)$, *definito positivo*, che supponiamo di CdC 2 in $\lambda(U)$. Una curva **semplice** di classe C^1 in U , con inizio in p_0 e fine in $p_1 \neq p_0$ è descritta da un embedding $\gamma: [0,1] \rightarrow \lambda(U)$ – dove $\lambda(U)$ è un aperto di \mathbb{R}^n e γ è un n -vettore di componenti $\gamma^{1 \leq i \leq n}$, non nullo in $[0,1]$ – di classe C^1 , con $\gamma(0) \equiv \gamma_0 = \lambda(p_0)$ e $\gamma(1) \equiv \gamma_1 = \lambda(p_1) (\neq \gamma_0)$. L'aver scelto l'intervallo del parametro uguale a $[0,1]$ non è una restrizione, bastando modificare in modo ovvio γ per passare ad un intervallo qualsiasi $[a,b>a]$. Denotando con z il parametro in $[0,1]$, con un apice la derivata rispetto a z , e con $|\gamma'|^2$ la somma $\sum_{i=1}^n (\gamma^i)'^2$, è ovviamente $|\gamma'(z)| > 0$ in $[0,1]$. Volendo, l'immagine in U di γ attraverso λ^{-1} si può considerare orientata nel senso delle z crescenti. La **lunghezza** della curva $\lambda^{-1}(\gamma[0,1])$ è il funzionale di γ $s^*[\gamma] =: \int_0^1 [g_{ik}(\gamma(z))\gamma^i(z)\gamma^{k'}(z)]^{1/2} dz$.⁸ Si riconosce immediatamente che questo funzionale lunghezza è del tipo indipendente dal parametro

⁷ Il caso $n = 1$ è ammissibile, ma non porta a conclusioni significative nel presente contesto.

⁸ Non ha senso chiedersi quale sia la dimensione di s^* fino a che non si assegni “per decreto” una dimensione alle g_{ik} . Se tuttavia la varietà è immersa, $\dim(g_{ik}) = \dim(X/x)^2$ (cfr. la (3.3.2, 4)), e quindi $\dim(g_{ik}\gamma^i\gamma^{k'}) = \dim(X/x)^2 \dim(x/z)^2$, cioè $\dim(s^*) = \dim(X)$. Se pertanto si attribuisce alle coordinate cartesiane X la dimensione lunghezza (L), si conclude che $\dim(s^*) = L$; e ciò giustifica il nome scelto per s^* . L'asterisco serve a distinguere s^* (lunghezza della curva) dal valore corrente di $s = s(z)$, cioè della lunghezza del tratto di curva compreso tra la sua origine e il valore $0 \leq z \leq 1$ del parametro.

(cfr. S.sez. 6.1.2). Inoltre l'integranda è per ipotesi strettamente positiva in $[0,1]$ per $\gamma' \neq 0$, e positivo è perciò lo stesso $s^*[\gamma]$.⁹ Per brevità, scriveremo $F(\gamma, \gamma')$ per $[g_{ik}(\gamma)\gamma^i\gamma^k]^{1/2}$. Le derivate seconde di F sono allora continue in $\lambda(U) \times \mathbb{R}^n$.

Posto che esista, una **geodetica di U da p_0 a p_1** si definisce come l'immagine in U di una tale γ , per la quale sia soddisfatta l'equazione variazionale

$$(1) \quad \int_0^1 F(\gamma(z), \gamma'(z)) dz = \text{extr!}$$

ad esempio sotto le $2n$ condizioni accessorie

$$(1') \quad \gamma(0) = \lambda(p_0), \gamma(1) = \lambda(p_1). \quad {}^{10}$$

Abbiamo dunque un problema (generalmente locale, perché U è stato identificato con il dominio di una carta ad estremi fissi nelle n incognite $\gamma^{1 \leq i \leq n}$). In vista delle equazioni di EL che ci accingiamo a scrivere per il problema (1), rafforzeremo la $\gamma \in C^1[0,1]$ con la richiesta standard $\gamma \in C^2[0,1]$. Sotto questa ipotesi, abbiamo il sistema di equazioni di EL $\partial F / \partial \gamma^h - d/dz(\partial F / \partial \gamma^{h'}) = 0$, per $h = 1, \dots, n$; o equivalentemente (per essere $F \neq 0$), $F[\partial F / \partial \gamma^h - d/dz(\partial F / \partial \gamma^{h'})] = 0$. Un calcolo elementare dà

$$(2') \quad F \partial F / \partial \gamma^h = (\partial g_{ik} / \partial x^h)|_{x=\gamma} \gamma^i \gamma^{k'} / 2,$$

$$(2'') \quad \partial F / \partial \gamma^{h'} = g_{hj}|_{x=\gamma} \gamma^{j'} / F,$$

per cui $F d/dz(\partial F / \partial \gamma^{h'}) = -F^{-1} g_{hj}|_{x=\gamma} \gamma^{j'} dF/dz + \gamma^{k''} g_{hk}|_{x=\gamma} + \gamma^{j'} \gamma^{k'} (\partial g_{hk} / \partial x^j)|_{x=\gamma}$. Risparmiandoci ormai di ricordare che nelle funzioni di x questa deve essere sostituita da $\gamma = \gamma(z)$, si ha cioè:

$$(3) \quad \gamma^{k''} g_{hk} + \gamma^{j'} \gamma^{k'} (2 \partial g_{hk} / \partial x^j - \partial g_{jk} / \partial x^h) / 2 - F^{-1} g_{hj} \gamma^{j'} dF/dz = 0.$$

Evidentemente, $2\gamma^{j'} \gamma^{k'} \partial g_{hk} / \partial x^j = \gamma^{j'} \gamma^{k'} (\partial g_{hk} / \partial x^j + \partial g_{hj} / \partial x^k)$; e dunque, contraendo la (3) con g^{ih} e ricordando l'espressione dei simboli di Christoffel di prima specie in termini di derivate del tensore fondamentale (3.3.2, 17), si conclude che

⁹ La definizione data di lunghezza (di una curva) è valida per curve di una varietà riemanniana elementare; ma essa può estendersi facilmente a curve di una varietà M non elementare. Consideriamo il caso di due carte congiunte di M , di domini U e V . Sia $p_0 \in U$ il punto di inizio della curva Γ in oggetto, $p^* \in U \cap V$ un suo punto intermedio e $p_1 \in V$ il suo punto di arrivo. Allora la lunghezza di Γ da p_0 a p_1 si definisce come la somma della sua lunghezza da p_0 a p^* (calcolata con la prima carta) e della lunghezza da p^* a p_1 (calcolata con la seconda carta). Naturalmente le componenti, diciamo covarianti, dei tensori fondamentali nelle due carte devono essere legate dalla legge di doppia cogredienza nel dominio di transizione $U \cap V$. In queste condizioni si verifica subito che la definizione è indipendente dalla scelta delle due carte r -compatibili in $U \cap V$, e dalla scelta di p^* .

¹⁰ Se M e N sono varietà riemanniane elementari di comune dimensione n e $\text{CdC} \geq 1$, e $f: M \rightarrow N$ è un 1-diffeomorfismo che trasforma le curve C^1 di M in curve C^1 di N con la stessa lunghezza, f si dice una **isometria di M su N**. Questa nozione è più sofisticata di quella introdotta tra spazi metrici, per i quali vi è una sola "distanza" che separa due punti dati, e non le infinite lunghezze delle infinite curve che hanno quei punti per estremi. M e N sono dette **isometriche** se esiste tra esse una isometria. Una isometria f tra M e N si traduce in una relazione tra f e i relativi tensori fondamentali nei punti che si corrispondono attraverso f . Questa relazione si applica invece alla sola funzione f nel caso di varietà n -dimensionali embedded in spazi euclidei di dimensione $\geq n$, perché i tensori fondamentali sono allora completamente determinati assegnando le varietà nella forma parametrica $X = X(x)$ (per M) e $Y = Y(y)$ (per N), e $y = f(x)$. Affinché f sia una isometria occorre e basta allora che $\partial Y^v / \partial y^i \partial Y^w / \partial y^k \partial f^i / \partial x^j \partial f^k / \partial x^h = \partial X^m / \partial x^j \partial X^u / \partial x^h$. (Non occorre che i due spazi euclidei sommergenti abbiano la stessa dimensione.) Una isometria trasforma geodetiche in geodetiche.

$$(4) \quad \gamma^{i''} + \Gamma_{jk}^i \gamma^j \gamma^{k'} - F^{-1} dF/dz \gamma^{i'} = 0.$$

Questo è il sistema di equazioni di EL per il problema (1); cioè, come deve essere, un SDO del 2° ordine quasi-lineare nelle γ^i , in forma normale.

Poiché $F = ds/dz$, $F^{-1} dF/dz = dF/ds = d(ds/dz)/ds$. Se in particolare scegliamo $z = as + b$ con a e b costanti, allora $ds/dz = 1/a$; per cui $F^{-1} dF/dz = d(ds/dz)/ds \equiv 0$. Quanto al fattore $\gamma^{i'}$ che moltiplica $F^{-1} dF/dz$ nella (4), esso diventa $a d\gamma^i/ds$, certamente finito perché $g_{ik} d\gamma^i/ds d\gamma^k/ds = 1$.^{11, 12} In conclusione, per tutti i parametri z della classe di equivalenza $z = as + b$ (classe dei parametri affini, o “speciali”), le (4) si scrivono nella forma:

$$(5) \quad d^2\gamma^i/dz^2 + \Gamma_{jk}^i d\gamma^j/dz d\gamma^k/dz = 0;$$

e in particolare, per $a = 1$,

$$(5bis) \quad d^2\gamma^i/ds^2 + \Gamma_{jk}^i d\gamma^j/ds d\gamma^k/ds = 0.$$

Quest'ultimo è il SDO di EL del 2° ordine riferito al parametro-lunghezza s per il problema (1); in esso, lo ricordiamo, i coefficienti $\Gamma_{jk}^i \equiv \Gamma_{jk}^i|_{x=\gamma}$ sono da riguardare come funzioni di γ attraverso la (3.3.2, 17), per il dato $g_{(2)}(x)$, e γ come $\gamma(s)$. Le soluzioni $\gamma = \gamma(s)$ di questo sistema sono le estremali di $s^*[\gamma]$, e le $2n$ costanti arbitrarie che esse incorporano sono determinate mediante le $2n$ condizioni accessorie, ad esempio le (1').

Come è vero in generale, le (5) possono anche sostituirsi con un SDO normale di $2n$ equazioni del 1° ordine nelle $n \gamma^{1 \leq i \leq n}$ e nelle altrettante

$$(6') \quad \tau^{1 \leq j \leq n} =: d\gamma^{1 \leq j \leq n}/ds,$$

formato da queste n ultime (6') e dalle altrettante

$$(6'') \quad d\tau^i/ds + \Gamma_{jk}^i(\gamma) \tau^j \tau^k = 0.$$

È chiaro che, in forza della loro definizione, le τ^i sono componenti controvarianti di un versore. Pensiamo ora a queste τ^i non più come a funzioni di s lungo γ , ma come a componenti controvarianti di un campo vettoriale $\tau_{(1)}(x)$; allora la derivata $d\tau^i/ds$ può essere sostituita da $dx^j/ds \partial \tau^i / \partial x^j \equiv \tau^j \partial \tau^i / \partial x^j$, e quindi, se questo campo vettoriale è *geodetico* (\equiv le sue curve integrali $dx^1/\tau^1 = dx^2/\tau^2 = \dots = dx^n/\tau^n$ sono geodetiche), abbiamo il sistema di n EDP

$$(7) \quad (\partial \tau^i / \partial x^j + \Gamma_{jk}^i(x) \tau^k) \tau^j \equiv \tau^i_{;j} \tau^j = 0$$

nelle $\tau^i = \tau^i(x)$.

Essendo il derivato del tensore fondamentale identicamente nullo (teorema di Ricci), le (7) sono equivalenti alle

¹¹ Questo vincolo segue dalla espressione della lunghezza corrente $s(z) = \int_0^z [g_{ik}(\gamma(w)) d\gamma^i/dt(w) d\gamma^k/dt(w)]^{1/2} dw$ della curva, derivando la precedente rispetto a z ed identificando z con s nel risultato.

¹² Per una curva $\gamma: [0,1] \rightarrow \lambda(U)$, il modulo $|\gamma'(z)|$ si usa dire **celerità** di γ . Se la curva è riferita alla sua lunghezza corrente s , la sua celerità è quindi identicamente 1. La curva si dice anche, allora, **di celerità unitaria**.

$$(8) \quad \tau_{ij}\tau^j = 0 \equiv (\partial\tau_i/\partial x^j - \Gamma_{ij}^r(x)\tau_r)\tau^j = g^{jh}(\partial\tau_i/\partial x^j - \Gamma_{ij}^r(x)\tau_r)\tau_h$$

nelle componenti covarianti del campo vettoriale $\tau_{(1)}$. Il sistema (8) è alternativo ed equivalente a quello delle (7).

Concludendo, le (7), o equivalentemente le (8), dicono che le derivate $_{/}$ di un **campo vettoriale geodetico** lungo la sua stessa direzione sono nulle. Naturalmente ci si aspetta che i sistemi (7) \Leftrightarrow (8) siano compatibili con il carattere vettoriale del campo, cioè che ne conservino il modulo $|\tau_{(1)}|$. Provarlo è quasi immediato. Contraendo le (7) con τ_i e le (8) con le τ^i , e sommando, il risultato è $0 = \tau^j(\tau_i\tau^i_{/j} + \tau^i\tau_{i/j}) = \tau^j(\tau^i\tau_i)_{/j} \equiv \tau^j\partial|\tau_{(1)}|^2/\partial x^j \equiv d|\tau_{(1)}|^2/ds$, che è quanto volevamo accertare. Questo significa che se $|\tau_{(1)}| = 1$ in un punto della curva $\lambda^{-1}(\gamma)$, tale rimane, per effetto delle (7) o delle (8), nell'intorno di $\lambda^{-1}(\gamma)$ contenuto in U . Inoltre, secondo un teorema standard sui SDO del 1° ordine normali, essi sono integrabili a partire da un punto p di U se in p sono date $2n$ convenienti condizioni accessorie, ad esempio le condizioni iniziali $\tau_{(1)}(p)$. I vettori iniziali abbracciano lo spazio cotangente di M in p , essendo proporzionali alla sua base canonica $d_p x^i$ (cioè, $\tau_{(1)}(p) \in T_p^*(M)$). Quindi da p si diparte un insieme di curve geodetiche orientate (se esistono), una per ogni scelta del vettore iniziale in $T_p^*(M)$; qualunque punto $p' \in U$ la geodetica $\lambda^{-1}(\gamma)$ di origine p raggiunga, la sua lunghezza tra p e p' è stazionaria rispetto a quella delle altre curve, ad essa abbastanza vicine, tra p e p' .

Si può anche scrivere il SDO normale del 1° ordine, analogo a quello delle (6', 6''), nell'insieme di incognite γ^i e τ_h , per il dato $g_{(2)}$. Si verifica immediatamente che esso è:

$$(9') \quad g_{jh}(\gamma)d\gamma^j/ds = \tau_h,$$

$$(9'') \quad d\tau_i/ds - g^{jh}(\gamma)\Gamma_{ij}^r(\gamma)\tau_r\tau_h = 0.$$

Contraendo le (6'') con τ_i e le (9'') con τ^i e sommando, si ha ancora:

$$(10) \quad 0 = \tau_i d\tau^i/ds + \tau^i d\tau_i/ds + \Gamma_{jk}^i \tau^j \tau^k \tau_i - \Gamma_{ij}^r \tau_r \tau^i \tau^j = d(\tau^i \tau_i)/ds = d|\tau_{(1)}|^2/ds,$$

la quale conferma che il modulo di $\tau_{(1)}$ è conservato lungo una geodetica.

Fin qui, abbiamo tenuto fermo il fatto che la varietà di riferimento sia riemanniana (secondo quanto recita il titolo di questa sottosezione), cioè che la forma $g_{ik}\lambda^i\lambda^k$ sia definita positiva; questo ci assicura tra l'altro che F è reale. Tuttavia è legittimo chiedersi cosa succederebbe in caso contrario, quando la forma $g_{ik}\lambda^i\lambda^k$ fosse indefinita. Supponiamo in particolare che la varietà sia lorentziana, con una coordinata n^{ma} di tipo "tempo": allora $g_{ik}\lambda^i\lambda^k$ è positiva se λ è space-like, negativa se è time-like e nulla se è light-like o luminale. Escludendo per il momento la terza possibilità, supponiamo λ time-like, quindi $g_{ik}\lambda^i\lambda^k < 0$ per le curve di confronto ammissibili. Come si modificano i precedenti risultati? La risposta è ovvia, bastando rovesciare il segno di $g_{(2)}$ in essi. Quindi i secondi membri delle (2', 2'') cambiano segno, ma non si modificano le (3); né le (4), né le

(5), né le (5bis), in quanto i Chr2 sono *pari* in $g_{(2)}$. Quindi una geodetica time-like soddisfa lo stesso SDO di una geodetica space-like; e lo stesso può dirsi ad esempio per il SDO (6', 6''). Le τ_h definite dalle (9') cambiano invece segno; ma le (9'') restano valide, perché $g^{jh}(\gamma) \Gamma_{ij}^r(\gamma) \tau_r \tau_h$ è dispari in $g_{(2)}$.

La precedente trattazione decade quando le curve di confronto ammissibili sono luminali, perdendo allora significato l'assumere l'arco s come parametro. Abbiamo tuttavia verificato che la proprietà di una geodetica space-like aut time-like si esprime richiedendo la proprietà di autoparallelismo del suo versore tangente, cfr. le (7) o le (8). Qui il fatto che $\tau_{(1)}$ sia un versore non ha evidentemente importanza. Riferendo la curva luminale ad un parametro qualsiasi μ , purché le n $\tau^i =: dx^i/d\mu$ non si annullino mai tutte insieme lungo di essa, basterà mantenere la richiesta di autoparallelismo per questo vettore tangente $\tau_{(1)}$, e questo *definirà* una geodetica luminale. Quindi il SDO (5) vale per definizione anche per una geodetica luminale vale per definizione il SDO (5), ma con un parametro μ arbitrario (per cui la matrice $dx^i/d\mu$ abbia caratteristica massimale) in luogo di z . Del resto la classe dei parametri affini in questo caso non esiste. La definizione appare naturale anche per ragioni di continuità, visto che il SDO (5) vale da entrambe le bande del $(n-1)$ -cono locale $g_{ik} dx^i dx^k = 0$.

Riconsideriamo ora il problema delle curve geodetiche a estremi fissi nel caso di una ipersuperficie n -dim embedded in R^{n+1} (con la metrica indotta), che supporremo data in forma implicita mediante l'equazione

$$(11) \quad \varphi(x) = 0,$$

con $x \equiv (x^1, \dots, x^{n+1})$. È sufficiente trattare il caso $n = 2$, il passaggio a $n > 2$ essendo banale. Usando la notazione standard (x, y, z) per (x^1, x^2, x^3) , riscriveremo quindi la (11) come

$$(11bis) \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Scegliendo x come parametro e (y, z) come incognite, e facendo uso della regola dei moltiplicatori di Lagrange (perché la (11bis) è un vincolo olonomo), il funzionale da estremare senza vincoli è $\int_a^{b>a} [(1+y'^2+z'^2)^{1/2} + \lambda\varphi] dx$, dove l'apice sta per d/dx , $\lambda = \lambda(x)$ è il moltiplicatore e al solito le y, z sono supposte di classe C^2 . Le condizioni agli estremi sono $y(a) = A_y, z(a) = A_z, y(b) = B_y, z(b) = B_z$, dove A_y, \dots, B_z sono costanti compatibili con il vincolo (11bis), quindi per cui $\varphi(a, A_y, A_z) = 0, \varphi(b, B_y, B_z) = 0$. Posto $h =: 1+y'^2+z'^2$, la lagrangiana $h^{1/2} + \lambda\varphi$ evidentemente soddisfa i requisiti standard di continuità (se λ è C^1); se un'estremante di CdC 2 di $\int_a^b h^{1/2} dx$ con i sopradetti valori agli estremi *esiste*, si hanno così le due equazioni di EL

$$(12) \quad d((y', z')h^{-1/2})/dx - \lambda \partial\varphi/\partial(y, z) = 0,$$

ove y, z sono da leggere alternativamente. Anche in questo caso, sotto le condizioni agli estremi compatibili date più sopra, le (11bis, 12) permettono di risolvere il problema nelle tre incognite $y, z,$

λ , e quindi di determinare l'estremale $y(x)$, $z(x)$. Si potrebbe anche verificare, eliminando λ mediante la (11bis) e introducendo il tensore fondamentale della superficie, che le (12) non sono altro che le equazioni generali (5) adattate al caso particolare che stiamo considerando.

Sulla base delle (12), è naturale prevedere che sia anche:

$$(13) \quad d(h^{-1/2})/dx - \lambda \partial\phi/\partial x = 0.$$

In effetti, si ha $-\lambda \partial\phi/\partial x = \lambda(y' \partial\phi/\partial y + z' \partial\phi/\partial z) = (y'^2 + z'^2)d(h^{-1/2})/dx + (y'y'' + z'z'')h^{-1/2} = (h-1)d(h^{-1/2})/dx - hd(h^{-1/2})/dx = -d(h^{-1/2})/dx$ (il penultimo passaggio segue dalla $y'y'' + z'z'' = (1/2)dh/dx = -h^{3/2} d(h^{-1/2})/dx$); come volevamo accertare. Se s è il parametro lunghezza lungo la curva, risulta $d/dx = h^{1/2}d/ds$. Quindi le (12) possono risciversi come

$$(12bis) \quad d(d(y,z)/ds)/dx - \lambda \partial\phi/\partial(y,z) = 0,$$

e la (13) come

$$(13bis) \quad d(dx/ds)/dx - \lambda \partial\phi/\partial x = 0;$$

ovvero, se si preferisce, l'insieme delle (12bis, 13bis) come

$$(14) \quad d(d(x,y,z)/ds)/dx = \lambda \partial\phi/\partial(x,y,z)$$

leggendo alternativamente x , y , z . Ora, le $d(d(x,y,z)/ds)/dx$ sono proporzionali alle $d^2(x,y,z)/ds^2$ (perché $d/dx = h^{1/2}d/ds$), cioè alle componenti sugli assi (x,y,z) di un vettore che, se non è nullo, è diretto come la normale principale alla geodetica (orientato verso la sua concavità); mentre le $\partial\phi/\partial(x,y,z)$ sono le componenti del gradiente di ϕ , diretto come la normale alla superficie $\phi = 0$. Sotto le consuete condizioni di regolarità, segue quindi la seguente importante proprietà di una geodetica γ di una superficie S embedded in \mathbb{R}^3 : «la normale principale a γ in un suo punto \mathbf{x} , e la normale \mathbf{n} a S in \mathbf{x} giacciono sulla stessa retta»; ovvero, «il piano osculatore di γ in \mathbf{x} è anche ivi normale a S »; ovvero ancora, «una geodetica γ di S ha in \mathbf{x} un contatto del 2° ordine con la sezione normale di S (in \mathbf{x}) determinata dalla sua direzione». Queste proprietà equivalenti sono caratteristiche, e permettono di definire una geodetica di una superficie di \mathbb{R}^3 in modo intrinseco. Ad esempio si ha così conferma nel modo più semplice di un teorema noto anche a livello elementare:

T1. «Le geodetiche di una 2-sfera immersa in \mathbb{R}^3 sono i suoi cerchi massimi, cioè le sue sezioni con i piani passanti per il suo centro (i versori normali principali di queste sezioni essendo orientati verso il centro stesso).»

È anche interessante, a questo punto, calcolare il vettore (di \mathbb{R}^{n+1}) $d^2\mathbf{x}/ds^2$ per una generica curva Γ di una (iper)superficie n -dim S , di classe C^2 , embedded in \mathbb{R}^{n+1} e descritta da $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q) \equiv X^v(q)\mathbf{F}_v$ (dove $q = q^1, \dots, q^n$ sono coordinate superficiali, e la somma sugli indici greci ripetuti è da 1 a $n+1$). In termini della sua lunghezza s , Γ è a sua volta descritta da $q = q(s)$ di classe C^2 . Il

risultato è $d^2\mathbf{x}/ds^2 = d(d\mathbf{x}/ds)/ds = \partial^2\mathbf{x}/\partial q^i\partial q^j dq^i/ds dq^j/ds + \partial\mathbf{x}/\partial q^i d^2q^i/ds^2$, in cui le somme sugli indici italici ripetuti vanno da 1 a n . Esprimendo le derivate seconde $\partial^2\mathbf{x}/\partial q^i\partial q^j$ mediante le equazioni di Gauss (3.5.3, 12) (nelle quali si ponga $\mathbf{f}_i = \partial\mathbf{x}/\partial q^i$), otteniamo così:

$$(15) \quad d^2\mathbf{x}/ds^2 = \partial\mathbf{x}/\partial q^k (d^2q^k/ds^2 + \Gamma_{ij}^k dq^i/ds dq^j/ds) + \mathbf{h}_{ij} dq^i/ds dq^j/ds,$$

dove h_{ij} sono le componenti covarianti del 2° tensore fondamentale della S , e \mathbf{n} è il suo versore normale (come sappiamo, il prodotto \mathbf{h}_{ij} è invariante rispetto al verso scelto per \mathbf{n}). Se non è nulla, la $d^2\mathbf{x}/ds^2$ al 1° membro della (15) è il prodotto della curvatura κ_1 di Γ per il suo versore normale principale \mathbf{t}_2 , cfr. (3.5.2, 11₂). A 2° membro della (15), abbiamo poi una combinazione lineare dei vettori della base canonica del piano tangente di S , $\partial\mathbf{x}/\partial q^k$, più un vettore normale a questo piano: quindi la (15) *decompon*e $\kappa_1\mathbf{t}_2$ in un componente tangenziale e in un componente normale a S . Se in particolare Γ è una geodetica di S , allora i coefficienti dei $\partial\mathbf{x}/\partial q^k$ sono nulli (cfr. le (5), valide per una varietà generica), ed abbiamo:

$$(16) \quad \kappa_1\mathbf{t}_2 = \mathbf{h}_{ij} d\gamma^i/ds d\gamma^j/ds,$$

dove si è reintrodotta la notazione che ci è familiare in questo caso, γ in luogo di q . Ritroviamo così, per $n \geq 1$ qualsiasi, quanto ottenuto più sopra per le geodetiche di una superficie di R^3 di equazione $\varphi(x,y,z) = 0$: i versori \mathbf{t}_2 , normale principale alla geodetica, e \mathbf{n} , normale alla superficie, sono paralleli, e sono precisamente legati dalla (16). Inoltre, per una varietà immersa, s ha dimensione lunghezza; quindi la dimensione di $d^2\mathbf{x}/ds^2$ è L^{-1} . Il componente tangenziale di $d^2\mathbf{x}/ds^2$, nullo se Γ è geodetica di S , si dice **vettore di curvatura geodetica di Γ** ($\subset S$), il componente normale si dice **vettore di curvatura normale** (o anche **forzata**) di Γ , e naturalmente la somma dei due, $d^2\mathbf{x}/ds^2$, si dice **vettore di curvatura totale di Γ** . Se h_{ij} è nullo nell'aperto di definizione, come sappiamo (App. Spec. 3.A) S è un n -piano (e viceversa); il vettore di curvatura totale di una curva di questo n -piano si riduce allora a quello della sua curvatura geodetica. Se poi S è un n -piano e Γ è geodetica, $d^2\mathbf{x}/ds^2 = 0$, e Γ è (ovviamente) una retta.

Si può anche definire una “curvatura geodetica” di una generica curva Γ di una varietà riemanniana M . Dette $T^i =: d\Gamma^i/ds$ le componenti controvarianti del versore tangente a Γ , si consideri il vettore superficiale di componenti controvarianti $\sigma^i =: T^i_{/k} T^k$ (nullo se Γ fosse geodetica), e con esso si formi l'invariante $\sigma^i\sigma_i \equiv g_{ij}\sigma^i\sigma^j > 0$. La radice quadrata di questo invariante si definisce come **curvatura geodetica di Γ** . Si noti che il vettore superficiale $\sigma_{(1)}$ è normale a Γ : infatti la costanza del modulo di $T_{(1)}$ implica che $T^i_{/k} T_i = 0$, e quindi $\sigma^i T_i = T^i_{/k} T^k T_i = 0$. Per questa ragione, e anche perché il suo modulo è la curvatura geodetica di Γ , $\sigma_{(1)}/|\sigma_{(1)}|$ si dice **versore normale principale** a Γ . Se M fosse uno spazio euclideo, T^i sarebbe uguale a dX^i/ds , X^i essendo coordinate cartesiane di quello spazio, e $\sigma^i = T^i_{/k} T^k = d^2X^i/ds^2$. Normalizzando $\sigma_{(1)}$ (cioè

dividendone le componenti per il modulo) si avrebbero le componenti cartesiane del versore normale principale alla curva.

Concludiamo questa sezione 6.2 proponendo un breve riepilogo della teoria generale (locale) e applicandola al caso-base di una 2-superficie riemanniana Σ immersa in \mathbb{R}^3 . (Le semplici verifiche sono lasciate al lettore come esercizio.) Precisamente, riferendo \mathbb{R}^3 a coordinate cartesiane (x,y,z) , supporremo che Σ sia descritta dalla funzione di classe C^2 $z = z(x,y)$ per $(x,y) \in A$, un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 , nel quale sia rispettata la condizione di non-degenerazione $(\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2 > 0$. Adottando l'usuale indicizzazione $(x) \equiv (1)$, $(y) \equiv (2)$, le componenti covarianti del tensore metrico $g_{(2)}$ di Σ sono date da:

$$(17) \quad g_{11} = 1 + (\partial_1 z)^2, \quad g_{12} = \partial_1 z \partial_2 z, \quad g_{22} = 1 + (\partial_2 z)^2;$$

quindi il determinante g della matrice metrica $\{g_{ik}\}_{i=1,2;k=1,2}$ è uguale a $1 + (\partial_1 z)^2 + (\partial_2 z)^2 > 1$. Le componenti controvarianti di $g_{(2)}$ sono poi

$$(18) \quad g^{11} = [1 + (\partial_2 z)^2] g^{-1}, \quad g^{12} = -\partial_1 z \partial_2 z g^{-1}, \quad g^{22} = [1 + (\partial_1 z)^2] g^{-1}.$$

Quanto al 2° tensore fondamentale di Σ , $h_{(2)}$, le sue componenti covarianti sono

$$(19) \quad h_{11} = \partial_1^2 z g^{-1/2}, \quad h_{12} = \partial_1^2 z g^{-1/2}, \quad h_{22} = \partial_2^2 z g^{-1/2};$$

quindi il relativo determinante è $h = [\partial_1^2 z \partial_2^2 z - (\partial_1^2 z)^2] g^{-1}$. Possiamo così determinare la curvatura gaussiana:

$$(20) \quad K = h/g = [\partial_1^2 z \partial_2^2 z - (\partial_1^2 z)^2] g^{-2},$$

e la curvatura media

$$(21) \quad H = -h_{ik} g^{ik} = [2\partial_1 z \partial_2 z \partial_1^2 z - (1 + (\partial_1 z)^2) \partial_2^2 z - (1 + (\partial_2 z)^2) \partial_1^2 z] g^{-3/2}.$$

Infine, se l'orientamento del versore normale a Σ , che denotiamo qui N , è quello per cui N_z (\equiv proiezione di N sull'asse (z)) è positivo, le componenti di N sono

$$(22) \quad N_1 = -\partial_1 z g^{-1/2}, \quad N_2 = -\partial_2 z g^{-1/2}, \quad N_z = g^{-1/2}.$$

Restano da calcolare i coefficienti di Christoffel, ciò che si può fare ormai in più di un modo. Una possibilità è offerta dalle (verificare!)

$$(23) \quad \Gamma_{ik}^r = g^{rh} \partial_h z \partial_{ik}^2 z.$$

In particolare, $\Gamma_{ik}^2 = (g^{21} \partial_1 z + g^{22} \partial_2 z) \partial_{ik}^2 z$. Sostituendo in quest'ultima le (18), il contenuto della parentesi risulta uguale a $g^{-1} \partial_2 z$, per cui

$$(24) \quad \Gamma_{ik}^2 = g^{-1} \partial_2 z \partial_{ik}^2 z.$$

Similmente, risulta $\Gamma_{ik}^1 = g^{-1} \partial_1 z \partial_{ik}^2 z$.

Scriviamo adesso la EDO (del 2° ordine, in forma normale) delle geodetiche di Σ rappresentate nella forma $y = y(x)$, $z = z(x,y(x))$, cioè servendoci della x come parametro indipendente. Queste geodetiche sono naturalmente in Σ , per cui la precedente $y = y(x)$ ne dà la

proiezione sul piano $z = 0$. Basterà scrivere (cfr. la (5)) $0 = d_x^2 y + \Gamma_2^2 d_{xy}^2 + 2\Gamma_1^2 d_{xy} + \Gamma_1^2$; e quindi, in base ai risultati precedenti,

$$(25) \quad d_x^2 y = -\partial_2 z [\partial_2^2 z (d_{xy})^2 + 2\partial_{12}^2 z d_{xy} + \partial_1^2 z] / [1 + (\partial_1 z)^2 + (\partial_2 z)^2].$$

Qui le derivate prime e seconde di z sono funzioni date di (x,y) e dunque la (25) ha la prevista struttura (del 2° ordine in forma normale) $d_x^2 y = g(x,y,d_{xy}) = 0$, dove g è il 2° membro della (25). Si noti che se z è funzione lineare di x e y (cioè se Σ è un piano), tutte le derivate seconde di z sono identicamente nulle. Secondo la (25), risulta allora $d_x^2 y \equiv 0$, e quindi le geodetiche sono rette del piano Σ , come ovviamente ci si aspettava.

6.3) DINAMICA ANALITICA I

6.3.1) DALLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI ALLA DINAMICA LAGRANGIANA

Con $\mathbf{x} \equiv (x,y,z) \in U$ (\equiv un aperto di \mathbb{R}^3) e $\mathbf{x}' \equiv (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, sia $L = L(\mathbf{x},\mathbf{x}')^1 =: T(\mathbf{x}') - V(\mathbf{x})$, ove $T(\mathbf{x}') =: (1/2)m|\mathbf{x}'|^2$ e m è una costante positiva data, e $V(\mathbf{x})$ è una funzione data in U di classe CdC 1. Si supponga poi \mathbf{x} funzione derivabile di $t \in (0,1)$, e si interpreti (\cdot) come d/dt . Sotto la più forte richiesta che $\mathbf{x}(t)$ sia $C^2(0,1)$, si può allora formulare il problema variazionale nell'incognita $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$

$$(1) \quad \int_{t=0}^1 L(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}'(t))dt = \text{staz!}$$

sotto le condizioni agli estremi $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_1$, dove \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 sono vettori distinti dati ad arbitrio in U . Sviluppando le corrispondenti equazioni di EL $[L]_{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{x}} - d_t L_{\mathbf{x}'} = 0$, troviamo $m\mathbf{x}'' = -\nabla V(\mathbf{x})$, con $\nabla = \partial/\partial\mathbf{x}$. Interpretando in questa la \mathbf{x} come posizione di un punto materiale (PM), m come sua massa, e t come tempo, abbiamo quindi l'equazione vettoriale newtoniana della dinamica di quel punto, sotto l'azione di un campo di **forza posizionale** $-\nabla V(\mathbf{x})$ derivabile da una energia potenziale $V(\mathbf{x})$. Il numero delle componenti di \mathbf{x} è in realtà inessenziale, ed abbiamo usato la *terna* (x,y,z) soltanto per riferirci ad un usuale PM immerso nello spazio fisico 3-dim.

Il fatto che la traiettoria di un tale PM, in U e tra le sue posizioni estreme \mathbf{x}_0 e \mathbf{x}_1 , sia estrema del funzionale integrale $\int_{t=0}^1 L(\mathbf{x},\mathbf{x}')dt$ avente come integranda la *differenza* tra la sua energia cinetica $\frac{1}{2} m|\mathbf{x}'|^2$ e la sua energia potenziale $V(\mathbf{x})$ fu presto riconosciuto come qualcosa di più profondo di una semplice curiosità matematica; e con gli opportuni adattamenti della lagrangiana L , fu generalizzato a principio-base della dinamica di *sistemi* di PM, possibilmente soggetti a vincoli olonomi (come ad esempio nel caso di sistemi rigidi di PM). Con convenienti ulteriori generalizzazioni della definizione di L , questo principio fu poi esteso ad altri sistemi fisici (sempre con numero finito di componenti di \mathbf{x}).

Il funzionale estremando nella (1) si usa dire (**integrale di azione**), perché esso ha appunto le dimensioni di una azione \equiv energia \times tempo \equiv quantità di moto \times lunghezza. Inizialmente collegata con il principio del minimo cammino ottico, e già presente in Lagrange² e in Poisson³, la

¹ La lettera L fa riferimento a Lagrange. Anche oltre, essa sarà usata in luogo della generica F per denotare una funzione integranda, nell'integrale (1), il cui significato fisico è quello di differenza tra energia cinetica e energia potenziale del sistema considerato, o sua "lagrangiana" in senso stretto.

² J.L. Lagrange, "Mécanique analytique", 1788, 2^a ed. 1811-15, ed. postuma 1853, 4^a ed. (in due volumi), Gauthier-Villars, 1889.

³ S.D. Poisson, in Journ. de l'École Polytechn., VIII, 266-344, 1809.

stazionarietà dell'integrale di azione è nota come **principio di Hamilton**.⁴ Questo principio, e gli sviluppi che ne seguirono ad opera dello stesso Hamilton con la sua “dinamica hamiltoniana”, e poi di Jacobi⁵ e di molti altri, sono a fondamento di un ormai solidissimo legame tra la cosiddetta Dinamica lagrangiana e l'Analisi Variazionale (la disciplina che su di esso si fonda si dice appunto “Dinamica Analitica”). Il caso appena illustrato del punto materiale in un campo di forza posizionale derivabile da una energia potenziale $V(\mathbf{x})$ ha anche sollevato la questione di quali equazioni o sistemi differenziali di interesse fisico-matematico si possano interpretare come conseguenze di corrispondenti principi variazionali (**problema inverso del CDV**).

Naturalmente è difficile ricostruire i processi induttivi che condussero alla elaborazione di quel formidabile oggetto fisico-matematico che è diventato la dinamica analitica verso la fine del XIX secolo; al più, se ne possono indicare alcune tappe logiche. Per cominciare, si noterà che nella precedente lagrangiana $L = T - V$, assegnata in un intorno della traiettoria del PM tra gli estremi $\mathbf{x}(t=0)$ e $\mathbf{x}(t=1)$, le due energie – cinetica T e potenziale V – sono coinvolte *separatamente* nei due termini di cui consta la differenza euleriana

$$(2) \quad [L]_{\mathbf{x}} = \partial L / \partial \mathbf{x} - d_t(\partial L / \partial \mathbf{x}') = -\partial V / \partial \mathbf{x} - m\mathbf{x}'';$$

la V in $\partial L / \partial \mathbf{x}$, e la T in $d_t(\partial L / \partial \mathbf{x}')$. È quindi naturale pensare ad un tipo di forza più generale della forza posizionale di componenti cartesiane $F_i = -\partial V / \partial x^i$, $i = 1, 2, 3$; di una forza cioè del tipo:

$$(3) \quad F_i = -\partial V / \partial x^i + d_t(\partial V / \partial x'^i)$$

dove V è ora una **energia potenziale generalizzata** $V = V(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$, funzione data di CdC 2 dei suoi sette argomenti $(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}')$ in $I \times U \times \mathbb{R}^3$, $I = (0, 1)$, $U \subset \mathbb{R}^3$. L'equazione vettoriale di moto conserva in questo caso la struttura (2) con $L = T - V$. Una tale possibilità ha interesse concreto: l'esempio fondamentale è quello in cui \mathbf{F} è la forza di Lorentz dovuta al 4-potenziale elettromagnetico (EM) $(\alpha(t, \mathbf{x}), \mathbf{A}(t, \mathbf{x}))$ agente su un PM di carica q (oltre che di massa m). In questo caso, l'energia potenziale generalizzata V è

$$(4) \quad V = V(t, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = q[\alpha(t, \mathbf{x}) - \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' / c],$$

dove (\cdot) è l'usuale prodotto scalare in \mathbb{R}^3 . Come sappiamo, α è il potenziale EM scalare e \mathbf{A} il potenziale EM vettore, da supporre dati come funzioni di CdC 2 dei loro argomenti. Rinunciando alla notazione in grassetto dei 3-vettori, la forza di Lorentz sulla carica q è $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H} / c)$, con \mathbf{E} = campo elettrico, \mathbf{H} = campo magnetico, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x}'$ = velocità del punto. La (4) si giustifica ponendo come si deve $\mathbf{E} = -\nabla\alpha - (1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ e $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, e notando che $\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - d\mathbf{A}/dt + \partial\mathbf{A}/\partial t$. Si ottiene così $\mathbf{F}/q = -\nabla\alpha - (d\mathbf{A}/dt - \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{v})/c$. Secondo la (4), il contributo

⁴ W.R. Hamilton, Phil. Trans., parte I, 95-144, 1835; anche in “Mathematical Papers” dello stesso, II, 103-211.

⁵ K.G.J. Jacobi, Journ. für Mathematik, XVII, 97-162, e poi in “Vorlesungen über Dynamik”, 1866, rist. in Chelsea, 1968.

$d_t(\partial V/\partial x^i)$ a F_i nella (3) è allora $-q(1/c)dA_i/dt$, e quello di $-\partial V/\partial x^i$ è $-q\partial/\partial x^i(\alpha - A \cdot v/c)$. (Ovviamente, in quest'ultima si deve fare $\partial/\partial x^i(A \cdot v) \equiv \partial A/\partial x^i \cdot v$.)

Si considerino due lagrangiane $L_1(t,x,x')$ e $L_2(t,y,y')$, dove x e y sono generici vettori di \mathbb{R}^n , e al solito $(\cdot) \equiv d_t$. Le equazioni di EL corrispondenti ai due problemi variazionali $(*)_1 \int L_1(t,x,x')dt = \text{staz!}$ e $(*)_2 \int L_2(t,y,y')dt = \text{staz!}$ ⁶ sono $\partial L_1/\partial x - d_t(\partial L_1/\partial x') = 0$ e $\partial L_2/\partial y - d_t(\partial L_2/\partial y') = 0$ (queste vanno lette interpretandovi $x [y]$ come l' n -pla delle sue componenti $x^{1 \leq i \leq n} [y^{1 \leq i \leq n}]$). Sia poi L una combinazione lineare di L_1 e di L_2 , cioè $L = L(t,x,x',y,y') =: a_1 L_1(t,x,x') + a_2 L_2(t,y,y')$, con a_1 e a_2 costanti non nulle. Le $2n$ equazioni di EL corrispondenti al problema $(*) \int L(t,x,x',y,y')dt = \text{staz!}$ sono $\partial L/\partial x - d_t(\partial L/\partial x') = 0$ e rispettivamente $\partial L/\partial y - d_t(\partial L/\partial y') = 0$, ed equivalgono alle precedenti equazioni di EL per L_1 e L_2 . ⁷ In questo caso banalmente “disaccoppiato”, il sistema delle *due* equazioni variazionali $(*_1, *_2)$ (ciascuna con n incognite) e *l'unica* equazione variazionale $(*)$ (con $2n$ incognite) sono dunque equivalenti per quanto riguarda le equazioni di EL che ne conseguono. In ultima analisi, ciò scende dalla indipendenza lineare delle variazioni virtuali delle incognite $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Su questa base, si verifica subito che la dinamica di un sistema di N punti materiali indicizzati (j) (con $J = 1, \dots, N$), di masse m_j , posizioni x_j e velocità x_j' (da interpretare come *terne* delle loro componenti cartesiane) e soggetti alle forze F_j (id. id.) derivabili dalle energie potenziali generalizzate $V_j = V_j(t,x,x')$ secondo le

$$(5) \quad -F_j = \partial V_j/\partial x_j - d_t(\partial V_j/\partial x_j')$$

è governata dalle $3N$ equazioni di EL

$$(5') \quad \partial L/\partial x_j - d_t(\partial L/\partial x_j') = 0,$$

dove $L =: T - V$, $T =: \sum_j T_j$ ($T_j \equiv$ energia cinetica del PM $(j) = \frac{1}{2} m_j |x_j'|^2$) e $V =: \sum_j V_j$.

Concettualmente, questa situazione corrisponde al caso del sistema delle due equazioni variazionali disaccoppiate considerato più sopra.

Diverso sarebbe tuttavia il significato delle $3N$ equazioni (5') se la forza F_j sul PM (j) fosse esprimibile come

$$(6) \quad -F_j = \partial V/\partial x_j - d_t(\partial V/\partial x_j'),$$

V essendo un'unica funzione data di classe C^2 di t , di $x \equiv \langle x_1, \dots, x_N \rangle$ (le posizioni di *tutti* i PM) e $x' \equiv \langle x_1', \dots, x_N' \rangle$ (le velocità di *tutti* i PM), continuando a porvi $T = \sum_j T_j$ e (naturalmente) $L =$

⁶ Qui e nel seguito non ci curiamo più di indicare esplicitamente il dominio di questi integrali, l'intervallo-base sul quale varia t (ad es. $(0,1)$).

⁷ Ciò è completamente analogo a quanto avviene per i punti di stazionarietà di una *funzione* $h = h(x,y) =: a_1 f(x) + a_2 g(y)$, che sono individuati dalla *coppia* di equazioni $(\partial h/\partial x = 0) \Leftrightarrow (\partial f/\partial x = 0)$ e $(\partial h/\partial y = 0) \Leftrightarrow (\partial g/\partial y = 0)$.

$= T - V$.⁸ Riacciacciandoci alle considerazioni illustrate nella S.sez. 2.1.2, è chiaro che dare della forza F_J un'espressione del tipo (6) significa proporre un *modello*; mentre la forza stessa “esce dal gioco” come soggetto dinamico. Se, con una conveniente scelta della energia potenziale generalizzata $V = V(t, x, x')$ (ove le x, x' sono N -ple), e alla luce dell'esperienza, il modello (6) funziona – cioè se le $3N$ equazioni (6), e con esse l'unica equazione variazionale in $3N$ incognite $(^\circ) \int L(t, x, x') dt = \text{staz!}$ che le implica, descrivono effettivamente il moto del sistema considerato – la $(^\circ)$ costituisce un modello variazionale generale della dinamica di un sistema di N PM “monopotenziati” (\equiv soggetti a forze monogeniche, vedi la nota precedente) compatibile con lo sviluppo di un formalismo lagrangiano.

È ovvio che se il numero N è grande le equazioni (6) hanno scarso interesse dal punto di vista pratico. Può tuttavia avvenire che tra le posizioni x_1, \dots, x_N degli N PM sussistano $0 < k < 3N$ vincoli *olonomi* indipendenti. Il numero positivo $n =: 3N - k$ è quello dei **gradi di libertà** del sistema originario. L'esistenza dei k vincoli si potrà esprimere mediante $3N$ relazioni del tipo

$$(7) \quad x_J(t) = g_J(t, q_1(t), \dots, q_n(t)),$$

($J = 1, \dots, N$), dove i *vettori* g_J sono supposti di CdC 2 nei loro argomenti, e la $(3N \times n)$ -matrice jacobiana della trasformazione (7) si suppone di rango massimale, cioè n (che è $< 3N$). Le $q \equiv (q_1, \dots, q_n)$ si dicono **coordinate generalizzate** (non vincolate) del sistema, ed il moto di questo è descritto dalle n funzioni $q(t)$ nell'intervallo-base di t . Una caso particolarmente importante di vincoli tra N punti (cinematici) è quella della *rigidità* del loro insieme, con la quale si prescrive la distanza, costante durante il moto, tra *ogni* coppia di punti. Il numero k dei vincoli di rigidità indipendenti di un sistema di N punti non uguaglia in generale quello delle coppie di punti. Inoltre, se la dimensione v dello spazio ove i punti sono immersi è supposta in generale $\neq 3$, oltre che da N esso dipende anche da v . (Comunque, per $v = 3$, $k = 3N - 6$ se $N > 2$, e $k = 1$ se $N = 2$.)⁹

Fisicamente, dobbiamo presupporre che il vincolo sul punto (J) agisca attraverso una **forza vincolare** f_J ; ma se tale f_J opera idealmente senza attrito (**vincolo liscio**), potremo presumere che essa “non lavori” (cioè che sia perpendicolare al moto permesso al punto (J)) e che quindi *non si debba tenerne conto* nella espressione della lagrangiana. Questo si dimostra facilmente, in particolare, nel caso della rigidità. La forza totale agente sul punto (J) non deve allora includere la

⁸ Secondo un suggerimento di C. Lanczos, le forze F_J espresse dalle (5) ($\forall J = 1, \dots, N$), con la sopravvista definizione di L , si possono dire **monogeniche**, in quanto derivabili da *un'unica* funzione di $t, x_{1 \leq J \leq N}, x'_{1 \leq J \leq N}$.

⁹ In generale, il numero dei gradi di libertà di un sistema *rigido* di $N \geq 2$ punti in uno spazio v -dim è $n = v(v+1)/2$ se $N \geq v$, e $n = v + (v-1) + \dots + (v-(N-1))$ se $N < v$. Il caso $N = 1$ non ha molto senso, ma le formule danno il risultato corretto $n = v$. Per $v = 3$, se $N > 2$, $n = 6$ e $k = 3N - 6$; se $N = 2$, $n = 3 + 2 = 5$, e $k = 6 - 5 = 1$. (Questo è in accordo con quanto riportato nel testo.)

forza vincolare f_j , riducendosi alla forza “attiva” F_j (5) se la posizione x_j è data dalla (7) e la sua velocità v_j dalla t-derivata della (7) stessa.

È facile dimostrare che in questo caso le q soddisfano a loro volta ad equazioni del tipo EL. Precisamente (spostando in alto l'indice delle q e scrivendolo in carattere greco minuscolo), dimostrare che è (per $\alpha = 1, \dots, n$):

$$(8) \quad \partial L^*/\partial q^\alpha - d_t(\partial L^*/\partial q^{\alpha'}) = 0,$$

dove si è posto

$$(9) \quad L^* = L^*(t, q, q') =: L(t, g(t, q), \partial g/\partial t(t, q)) + \sum_{\beta=1}^n \partial g/\partial q^\beta(t, q) q^{\beta'}.$$

Qui $L(t, x, x')$ è la lagrangiana del sistema dei punti liberi, e si è scritto g per $\langle g_1, \dots, g_N \rangle$. Se n è accettabilmente piccolo, le (8) hanno senz'altro un interesse pratico, a differenza delle (6) se $3N$ è molto maggiore di n .

Dim. Valendo le (6), si ha $0 = [\partial L/\partial x_j - d_t(\partial L/\partial x_j')] \cdot \partial x_j/\partial q^\alpha$ (somma su J da 1 a N , e $\forall \alpha = 1, \dots, n$) = $= \partial L/\partial x_j \cdot \partial x_j/\partial q^\alpha - d_t(\partial L/\partial x_j' \cdot \partial g_j/\partial q^\alpha) + \partial L/\partial x_j' \cdot d_t(\partial g_j/\partial q^\alpha)$. Ma $x_j' = \partial g_j/\partial t + \partial g_j/\partial q^\beta q^{\beta'}$ (somma su β da 1 a n), quindi $\partial g_j/\partial q^\alpha = \partial x_j'/\partial q^{\alpha'}$ e $d_t(\partial g_j/\partial q^\alpha) = \partial(d_t g_j)/\partial q^\alpha = \partial x_j'/\partial q^\alpha$. La precedente diventa così $0 = \partial L/\partial x_j \cdot \partial x_j/\partial q^\alpha + \partial L/\partial x_j' \cdot \partial x_j'/\partial q^\alpha - d_t(\partial L/\partial x_j' \cdot \partial x_j'/\partial q^\alpha) = \partial L^*/\partial q^\alpha - d_t(\partial L^*/\partial q^{\alpha'})$, qed. #

Si può anche osservare che le (7, 8, 9) nelle n q costituiscono un'alternativa naturale alla soluzione del problema variazionale con vincoli olonomi via moltiplicatori di Lagrange (vedi il teorema (T₂) della S.sez. 6.1.3); tanto più naturale in quanto il numero n delle incognite è ora sin dall'inizio ridotto alla differenza tra il numero delle $3N$ incognite originali e quello dei k vincoli supposti invertibili, e non aumentato alla loro somma ($3N$ incognite originali + k moltiplicatori di Lagrange). Questo vantaggio è pagato con la risoluzione preventiva rispetto alle x_j delle equazioni di vincolo. È infine importante tener presente che L e L^* hanno lo stesso valore numerico, e quindi che L^* ha lo stesso significato fisico di L (differenza tra energia cinetica ed energia potenziale generalizzata del sistema).

Come è ovvio, anche $T = T(x')$ e $V = V(t, x, x')$ possono essere analogamente trasformate in funzioni T^* e V^* di (t, q, q') . In particolare il calcolo di T^* può essere subito fatto in modo esplicito. Si ha: $T^* = \sum_{j=1}^N T_j = (1/2) \sum_{j=1}^N m_j (\partial g_j/\partial t + \sum_{\beta=1}^n \partial g_j/\partial q^\beta q^{\beta'})^2 \equiv T_{(0)} + \sum_{\beta=1}^n T_{(\beta)} q^{\beta'} + \sum_{\beta=1}^n \sum_{\gamma=1}^n T_{(\beta, \gamma)} q^{\beta'} q^{\gamma'}$, dove il quadrato è un prodotto scalare (\cdot) e si è posto

$$(10_0) \quad T_{(0)} =: (1/2) \sum_{j=1}^N m_j \partial g_j/\partial t \cdot \partial g_j/\partial t,$$

$$(10_1) \quad T_{(\beta)} =: \sum_{j=1}^N m_j \partial g_j/\partial t \cdot \partial g_j/\partial q^\beta,$$

$$(10_2) \quad T_{(\beta, \gamma)} =: (1/2) \sum_{j=1}^N m_j \partial g_j/\partial q^\beta \cdot \partial g_j/\partial q^\gamma \equiv T_{(\gamma, \beta)}.$$

Quindi T^* ($= T$) è un polinomio di 2° grado nelle q' con coefficiente di grado (0) uguale a $T_{(0)}$, coefficienti di grado (1) uguali a $T_{(\beta)}$, e coefficienti di grado (2) (simmetrici) uguali a $T_{(\beta,\gamma)} \equiv T_{(\gamma,\beta)}$, in generale tutti dipendenti da t e dalle q . Se in particolare le g_j non dipendono esplicitamente da t (**vincoli fissi**), questo polinomio si riduce al termine di 2° grado, una forma quadratica nelle q' (che per il suo significato deve essere definita positiva) con i relativi coefficienti (simmetrici) dipendenti al più dalle q . In ogni caso, la parte $\partial V^*/\partial q^\alpha - d_t \partial V^*/\partial q^{\alpha'}$ del 1° membro delle (8), portata a 2° membro col segno cambiato, si dice **forza generalizzata** (o **forza lagrangiana**) di **indice** α (in quanto corrispondente alla coordinata generalizzata dello stesso indice) agente sul sistema, e di solito si denota con Q_α . Con ciò le equazioni di moto del sistema dei PM vincolati diventano

$$(11) \quad \partial V^*/\partial q^\alpha - d_t(\partial V^*/\partial q^{\alpha'}) = -Q_\alpha$$

(per $\alpha = 1, \dots, n$), in completa analogia con quelle del sistema dei punti liberi (5).

Tornando al caso generale (delle $\partial g/\partial t$ non necessariamente nulle), abbiamo $\partial T^*/\partial q^{\alpha'} = T_{(\alpha)} + \sum_{\beta=1}^n T_{(\alpha,\beta)} q^{\beta'}$, e la d/dt di questa $\partial T^*/\partial q^{\alpha'}$ contiene linearmente le q'' nel termine $\sum_{\beta=1}^n T_{(\alpha,\beta)} q^{\beta''}$. Come è naturale, con le (11) abbiamo ancora un sistema differenziale ordinario del 2° ordine quasi-lineare (riducibile a forma normale se la matrice $\{T_{(\alpha,\beta)}\}$ è non singolare) nelle n incognite $q = q(t)$. Infine, le (8, 9) si riducono banalmente alle (6) se i vincoli non ci sono: basterà identificare le $3N x_j^{1 \leq j \leq 3}$ con *altrettante* coordinate lagrangiane q .

Sia ora $S = S(t, q)$ una arbitraria funzione di CdC 2 dei suoi argomenti. Se q è pensata come $q(t)$, la differenza euleriana $[d_t S]_q =: \partial d_t S / \partial q - d_t(\partial d_t S / \partial q')$ è identicamente nulla.¹⁰ Se viene introdotta nelle (8) al posto di L^* , la funzione $L^{*+} =: L^* - d_t S$ (il segno $-$ è convenzionale) fornisce dunque le stesse estremali. Si conclude che una dinamica fondata sulla $\int L^*(t, q, q') dt = \text{staz!}$ è una teoria in cui la “funzione pilota” (per così dirla) L^* è definita a meno di un sottraendo (diciamo) del tipo $d_t S$, con $S(t, q)$ di CdC 2 e per il resto arbitraria. Un complemento a questo asserto è nel teorema che enunciamo qui appresso. Sia $L = L(t, q, q')$ la lagrangiana (9) di CdC 2 (la scriviamo qui senza $*$ per brevità) e $r = \varphi(t, q)$ una trasformazione delle q della stessa classe, per ipotesi invertibile nelle $q = \psi(t, r)$. Definiamo $L_1 = L_1(t, r, r')$ come $L[t, \psi(t, r), \partial \psi / \partial t(t, t) + \partial \psi / \partial r(t, r) \cdot r']$, e calcoliamo la differenza euleriana $[L_1]_r$. Il risultato è $[L_1]_r = [L]_q \cdot \partial(\psi) / \partial(r)$, dove $\partial(\psi) / \partial(r)$ è la matrice jacobiana

¹⁰ Infatti $d_t S = \partial_t S + \partial S / \partial q \cdot q'$ si ha $\partial(d_t S) / \partial q' = \partial S / \partial q$, e $d_t(\partial(d_t S) / \partial q') = \partial^2 S / \partial t \partial q + \partial^2 S / \partial q^\beta \partial q^\gamma q^{\beta'}$; mentre $\partial(d_t S) / \partial q = \partial^2 S / \partial q \partial t + \partial^2 S / \partial q \partial q^\beta q^{\beta'}$, da cui la tesi. Questo fatto poteva essere previsto osservando che le equazioni di EL conseguenti dalla $\int L^* dt = \text{staz!}$, e che $\int L^{*+} dt = \int L^* dt - [S]$, ove con $[S]$ si è denotata la differenza tra i valori di S agli estremi dell'intervallo-base. Essendo questi prefissati, $[S]$ è una costante che non può avere influenza sulla soluzione del problema variazionale; ovvero, un addendo del tipo $-d_t S$ in L^* lascia invariate non soltanto le estremali ma anche le estremanti (se esistono) del relativo problema variazionale.

della trasformazione ψ da r a q , per ipotesi non singolare. Quindi “[L] $_q = 0$ ” (v. le (8)) equivale a “[L] $_r = 0$ ”: il moto trasformato attraverso φ del moto $q = q(t)$ soluzione delle [L] $_q = 0$, $r(t) = \varphi(t, q(t))$, è quello fornito dalle equazioni di EL [L] $_r = 0$ sotto condizioni accessorie *consistenti*,¹¹ e viceversa.

Illustriamo ancora una semplice ed importante conseguenza delle equazioni di moto (8). Abolendo d’ora innanzi l’asterisco (*) sia su L che su T e V , da una parte abbiamo $d_t L = \partial_t L + \sum_{\beta=1}^n (\partial L / \partial q^\beta q^{\beta'} + \partial L / \partial q^{\beta'} q^{\beta''})$ e dall’altra, in forza della (8), $\sum_{\beta=1}^n [\partial L / \partial q^\beta - d_t(\partial L / \partial q^{\beta'})] q^{\beta'} = 0$. Dal confronto di queste otteniamo $d_t L = \partial_t L + d_t(\sum_{\beta=1}^n \partial L / \partial q^{\beta'} q^{\beta'})$, ovvero:

$$(12) \quad d_t H_1 + \partial_t L = 0,$$

avendo posto

$$(13) \quad H_1(t, q, q') =: \sum_{\beta=1}^n \partial L / \partial q^{\beta'}(t, q, q') q^{\beta'} - L(t, q, q').$$

Secondo la (12), la funzione H_1 è una costante del moto se $\partial_t L \equiv 0$, un fatto al quale talvolta ci si riferisce come alla **identità di Beltrami**. La condizione $\partial_t L \equiv 0$ è certamente soddisfatta se i vincoli sono fissi ($\partial_t g \equiv 0$) e V non dipende esplicitamente da t , $\partial_t V \equiv 0$. Ma se i vincoli sono fissi, T è una forma quadratica omogenea nelle q' con coefficienti indipendenti da t ; per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, è allora $\sum_{\beta=1}^n \partial T / \partial q^{\beta'} q^{\beta'} \equiv 2T$, e così $H_1 + \sum_{\beta=1}^n \partial V / \partial q^{\beta'} q^{\beta'} = 2T - (T - V) = T + V$. In definitiva, se i vincoli sono fissi e V *dipende soltanto dalle* q (energia potenziale *di posizione*), la *costante del moto* H_1 è pari alla *somma* dell’energia cinetica T e dell’energia potenziale (di posizione) V del sistema. Come tale, essa si dice sua **energia totale**, e si denota usualmente con E .

Resta da segnalare il fatto che, con un processo di ulteriore astrazione, da molto tempo i fisici-matematici *identificano* la nozione di “sistema dinamico” con quella della sua lagrangiana $L(t, q, q')$, introdotta assiomaticamente. In quest’ottica, il sistema dinamico (in particolare il sistema di PM soggetti a forze monogeniche di cui ci siamo fin qui occupati) esce dal gioco come soggetto della teoria, ed al suo posto subentra la lagrangiana: ogni processo di giustificazione induttiva della natura di questa funzione è così rimosso (o meglio sottinteso). Con ciò anche la fisica sottostante il modello è sostanzialmente messa da parte, e tutta l’attenzione si concentra sul problema variazionale $\int L(t, q, q') dt = \text{staz!}$ e sulle sue conseguenze, in particolare sulle associate equazioni di EL.

¹¹ Ad esempio, se nel primo problema si assegnavano i valori delle q agli estremi, nel secondo i valori delle Q agli estremi devono essere i trasformati secondo φ dei precedenti.

6.3.2) LE BASI CONCETTUALI DELLA DINAMICA HAMILTONIANA

In accordo con quanto abbiamo segnalato sin dalla S.sez 2.1.2, è naturale proporsi di trasformare il sistema (6.3.1, 8) di n equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine quasi-lineari in n incognite q in un equivalente sistema del 1° ordine di $2n$ equazioni in $2n$ incognite. Sempre supponendo L di CdC 2, sotto certe condizioni che specificheremo ciò si realizza in modo ricco di nuove implicazioni e sviluppi introducendo come incognite addizionali (oltre alle q , e in luogo delle q' come sembrerebbe più ovvio) le n

$$(1) \quad p =: \partial L / \partial q'(t, q, q') \equiv \psi(t, q, q')$$

e passando ad una conveniente nuova funzione di (t, p, q) legata biunivocamente a L . Precisamente, sotto l'ipotesi che le (1) siano (almeno localmente) invertibili rispetto alle q' , cioè equivalenti, per certe φ , alle

$$(1bis) \quad q' = \varphi(t, q, p)$$

nel dominio di definizione delle ψ (e quindi le (1bis) invertibili rispetto alle p nel dominio delle φ), questa nuova funzione, che diremo $H = H(t, q, p)$, è definita da $H(t, q, p) =: H_1(t, q, \varphi(t, q, p))$, H_1 essendo la funzione introdotta con la (6.3.1, 13); ovvero dalla

$$(2) \quad L(t, q, \varphi(t, q, p)) + H(t, q, p) = \sum_{\beta=1}^n p_{\beta} q^{\beta'} \equiv p \cdot \varphi(t, q, p).$$

Si noti che la (2) implica le

$$(2') \quad \partial L / \partial q + \partial H / \partial q = 0$$

se le q' in L sono espresse dalle (1bis). Simmetricamente, la (2) può interpretarsi come definizione di L in termini di H (da pensare come funzione data di classe CdC 2 dei suoi argomenti (t, q, p)), quando le p vi siano eliminate mediante le (1), cioè

$$(3) \quad L(t, q, q') + H(t, q, \psi(t, q, q')) = \psi(t, q, q') \cdot q'.$$

È chiaro che le variabili (t, q) non giocano alcun ruolo nella trasformazione sopra illustrata, potendosi a questo riguardo considerare come “passive”: variabili “attive” sono le q' e le p . Potremo quindi descrivere la trasformazione biunivoca $L \leftrightarrow H$ in modo più essenziale come segue. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione di classe $C^{s \geq 2}(\Omega)$, con $\Omega \equiv$ aperto di $\mathbb{R}^{n \geq 1}$; e sia $Df \equiv \varphi$ l'applicazione gradiente di f , $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diciamo Ω^* l'immagine di Ω attraverso φ , $\Omega^* = \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ (per la continuità di φ anche Ω^* è aperto). Supponiamo ora che φ sia invertibile (per semplicità globalmente (IG)), cioè tale che esista una (unica) applicazione $\psi: \Omega^* \rightarrow \Omega$ per cui $x = \psi(\varphi(x))$ per ogni $x \in \Omega$ (e quindi $\xi = \varphi(\psi(\xi))$ per ogni $\xi \in \Omega^*$). Converrà usare come al solito indici soprascritti per denotare le n componenti di $x \equiv (x^1, \dots, x^n)$, e indici sottoscritti per le n componenti di $\xi \equiv (\xi_1, \dots, \xi_n) =: (\partial / \partial x^1, \dots, \partial / \partial x^n) f$. Risulta allora, se φ è IG, $\delta_i^j \equiv \partial x^j / \partial x^i = \partial \psi^j / \partial \xi_h (\xi = \varphi(x)) \partial \varphi^h / \partial x^i$ in Ω (o

equivalentemente la stessa con ξ al posto di x , ψ al posto di φ e Ω^* al posto di Ω : le matrici jacobiane $\partial(\psi)/\partial(\xi)$ e $\partial(\varphi)/\partial(x)$ sono una inversa dell'altra, e quindi φ e ψ sono $(s-1)$ -diffeomorfismi reciproci, di Ω su Ω^* e viceversa. In questo caso, definiamo l'applicazione $f^*: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$, **duale di Legendre**, o L-duale, di f , mediante la

$$(4) \quad f(\psi(\xi)) + f^*(\xi) =: \psi^h(\xi)\varphi_h(\psi(\xi)) \text{ (somma su } h) \equiv \psi(\xi) \cdot \varphi(\psi(\xi))$$

in Ω^* .

Si dimostra subito che, se φ è IG, f^* è $C^s(\Omega^*)$ come f è $C^s(\Omega)$. Differenziando la (4) rispetto a ξ_j abbiamo infatti $\partial f/\partial x^h \partial \psi^h/\partial \xi_j + \partial f^*/\partial \xi_j = \partial \psi^h/\partial \xi_j \varphi_h + \psi^h \partial \varphi_h/\partial x^i \partial \psi^i/\partial \xi_j = \partial \psi^h/\partial \xi_j \varphi_h + \psi^j$, e quindi, essendo $\partial f/\partial x^h = \varphi_h$,

$$(5) \quad \partial f^*/\partial \xi_j = \psi^j.$$

Questa mostra che l'inversa ψ di φ è il gradiente della L-duale f^* di f . Ma essendo reciproco di φ , il diffeomorfismo ψ è $C^{s-1}(\Omega^*)$, e la tesi scende dalla (5). Ciò stabilisce una completa simmetria tra la $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e la $f^*: \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$. Vale a dire, $x = (\partial/\partial \xi_1, \dots, \partial/\partial \xi_n) f^*$ proprio come $\xi = (\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n) f$, e la (4) è equivalente alla sua duale

$$(6) \quad f^*(\varphi(x)) + f(x) = \varphi_h(x)\psi^h(\varphi(x)) \equiv \varphi(x) \cdot \psi(\varphi(x))$$

in Ω . Quindi il passaggio da f a f^* è *involutorio*, e si realizza come quello da f^* alla sua duale $(f^*)^* \equiv f$.

Una condizione *sufficiente* a che il gradiente di f , $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega^*$, sia IG, è la seguente: (i) Ω è convesso (\equiv se x_1 e x_2 sono punti distinti di Ω , allora tutto il segmento $x_1 + t(x_2 - x_1)$, $0 \leq t \leq 1$, è in Ω); (ii) la matrice hessiana di f , $\{f_{ij}\}$, con $f_{ij} =: \partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$, è definita positiva [negativa], in Ω . Allora f si dice **uniformemente convessa [concava]**. Infatti, sotto le (i,ii), ponendo per brevità $\Delta \equiv x_2 - x_1$ ($\neq 0$), risulta $\Delta \cdot d_t \varphi(x_1 + t\Delta) = f_{ij}(x_1 + t\Delta) \Delta^i \Delta^j > 0$ [< 0]; e d'altra parte, $\Delta \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) = \Delta \cdot \int_{t=0}^1 d_t \varphi(x_1 + t\Delta) dt = \Delta^i \Delta^j \int_{t=0}^1 f_{ij}(x_1 + t\Delta) dt > 0$ [< 0] perché $x_1 + t\Delta \in \Omega \forall t$ in $[0,1]$. Segue che sotto uniforme convessità [concavità] di f , " $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 0$ " \Rightarrow " $\Delta = 0$ "; cioè φ è iniettiva, qed.¹² Si deve anche rimarcare che se f è uniformemente convessa [concava], e quindi IG, non è detto che $\Omega^* = f(\Omega)$ sia convesso. Sebbene le matrici hessiane di f e di f^* siano reciproche, e quindi siano (possibilmente) definite positive [negative] insieme, questo comporta che f^* non sia di necessità uniformemente convessa [concava] se f lo è, appunto perché manca la garanzia di convessità di Ω^* . La cosiddetta "Analisi Convessa" gioca ormai un ruolo importante nello studio di problemi di estremo in molte aree della matematica applicata¹³; ma l'ipotesi di uniforme convessità [concavità]

¹² L'uniforme convessità [concavità] di f implica la sua convessità [concavità] in senso stretto, cioè la condizione $f(\tau x + (1-\tau)z) < [>] \tau f(x) + (1-\tau)f(z)$ per $0 < \tau < 1$, e $x, z \in \Omega$, $x \neq z$.

¹³ Un trattato di riferimento è quello di R.T. Rockafellar, "Convex Analysis", Princeton Un. Pr. 1970.

che abbiamo sopra formulato per garantirci la invertibilità globale (IG) di φ è in generale troppo restrittiva per i nostri scopi, per cui nel seguito continueremo a riferirci a quest'ultima come ipotesi primaria ed autonoma.¹⁴

È immediato vedere che H , così come è stata definita sotto l'ipotesi di IG della (1), non è altro che la duale di Legendre di L rispetto alle variabili attive (q', p) . Traiamo esplicitamente le conseguenze di questo fatto. Derivando parzialmente la (3) rispetto a $q^{\alpha'}$, abbiamo

$$(7) \quad \partial L / \partial q^{\alpha'} + \partial H / \partial p_{\beta} \partial p_{\beta} / \partial q^{\alpha'} = p_{\alpha} + \partial p_{\beta} / \partial q^{\alpha'} q^{\beta'},$$

ovvero, in forza della (1)

$$(7') \quad (\partial H / \partial p_{\beta} - q^{\beta'}) \partial p_{\beta} / \partial q^{\alpha'} = 0.$$

Ma la matrice $\{\partial p_{\beta} / \partial q^{\alpha'}\} = \{\partial^2 L / \partial q^{\beta'} \partial q^{\alpha'}\}$ è non singolare per la supposta IG del gradiente di L rispetto alle q' (IG \Rightarrow invertibilità locale $\Leftrightarrow \det\{\partial^2 L / \partial q^{\beta'} \partial q^{\alpha'}\} \neq 0$ in tutto il dominio di interesse), per cui

$$(8_1) \quad q^{\beta'} = \partial H / \partial p_{\beta}.$$

D'altra parte t -derivando totalmente la (1), e tenendo conto delle equazioni di EL nelle (2'), otteniamo $-\partial H / \partial q^{\alpha} = \partial L / \partial q^{\alpha} = d_t(\partial L / \partial q^{\alpha'})$, ovvero

$$(8_2) \quad p_{\alpha'} = -\partial H / \partial q^{\alpha}.$$

Le $2n$ equazioni differenziali ordinarie (8), del 1° ordine e in forma normale, si dicono **equazioni canoniche** (o **di Hamilton**, o **hamiltoniane**). t -derivando totalmente H , in forza delle (8) abbiamo poi:

$$(9) \quad d_t H = \partial H / \partial q^{\alpha} q^{\alpha'} + \partial H / \partial p_{\beta} p_{\beta}' + \partial H / \partial t = \partial H / \partial t.$$

Quest'ultima poteva anche ottenersi a partire dalla (6.3.1, 12). Derivando parzialmente la (2) rispetto a t , abbiamo infatti:

$$(10) \quad \partial_t L + \partial_t H = 0,$$

e quindi, tenendo conto della uguaglianza di H_1 e H , $d_t H = d_t H_1 = -\partial_t L$ (v. (6.3.1, 12)) = $\partial_t H$, qed. Ovviamente la lettera H è ispirata a Hamilton.

Le equazioni canoniche (8) sono automaticamente normali e descrivono il moto del sistema con i dati iniziali tipici $q(\underline{t})$, $p(\underline{t})$, $\underline{t} \in (0, 1)$. Forse anche più radicalmente che nei confronti della lagrangiana $L = L(t, q, q')$, si tende ormai ad identificare la sua L -duale $H = H(t, q, p)$ con la nozione di sistema dinamico, introducendola assiomaticamente come oggetto primario della teoria. In certo senso, se questo è possibile, si mette così da parte *anche* il formalismo lagrangiano in favore di

¹⁴ Un'ovvia alternativa a questa ipotesi, praticata in molta della manualistica che conosciamo, è quella di accontentarsi della **invertibilità locale** di Df , che come è noto equivale a che il determinante della hessiana di f sia diverso da zero in Ω (senza nessuna altra richiesta su Ω , aperto di \mathbb{R}^n). In questo caso anche il determinante della hessiana di f^* (reciproco del precedente) è diverso da zero in Ω^* , e la teoria viene sviluppata su base locale invece che globale.

quello hamiltoniano; se interessa, la lagrangiana L si recupera come L -duale della hamiltoniana H , sempre sotto la solita ipotesi di IG delle (8₁) rispetto alle p .

Se lo si confronta con un generico sistema differenziale ordinario normale del 1° ordine, il sistema (8) presenta alcune peculiarità evidenti, e cioè: (i) le variabili canoniche (q,p) e le associate equazioni di evoluzione sono in numero pari $= 2n$; (ii) esse sono ripartite in due distinte serie: quelle “della prima serie” (di solito, le q), le cui t -derivate sono *uguali* alle derivate parziali di H rispetto alle variabili omologhe della seconda serie, e quelle della seconda serie, le cui t -derivate sono *opposte* alle derivate parziali di H rispetto alle variabili omologhe della prima serie; (iii) se si accetta questo criterio di assegnazione alla serie, si vede che le due serie si scambiano tra loro se si inverte il segno di H , e quindi da un punto di vista formale (cioè prescindendo dal possibile significato fisico di H) il criterio stesso equivale ad una convenzione; (iv) la proprietà incorporata nel “teorema di Liouville” di cui al penultimo paragrafo di questa sottosezione.

Per la data H , di norma le variabili della prima serie si dicono **coordinate** (canoniche) **generalizzate**, e quelle della seconda serie **momenti** (canonici) **generalizzati**. Variabili delle due serie con lo stesso indice si dicono **coniugate**, piuttosto che “omologhe” come abbiamo fatto più sopra. Lo spazio R^n delle q si dice **spazio delle configurazioni**, e lo spazio $R \times R^n$ delle (t,q) **spazio delle configurazioni esteso**; lo spazio R^{2n} delle (q,q') si dice **spazio delle fasi**, mentre quello delle (q,p) si dice **spazio delle cofasi**. Questi spazi (delle fasi e delle cofasi) si dicono poi **estesi**, essendo in tal caso $(1+2n)$ -dim, quando alle (q,q') o (q,p) si aggiunga la variabile t .¹⁵

Ovviamente le equazioni lagrangiane (6.3.1, 8) e quelle hamiltoniane (8) della dinamica di un sistema sono equivalenti, nel senso standard dei sistemi differenziali ordinari del 1° ordine normali “equivalenti per sostituzione invertibile” (sotto condizioni accessorie consistenti). Definiamo più accuratamente questa nozione generale. Sotto le consuete condizioni di regolarità, si consideri il SDO normale del 1° ordine

$$(11) \quad x' = \alpha(t,x),$$

e la trasformazione invertibile

$$(12) \quad y = \beta(t,x) \Leftrightarrow x = \gamma(t,y);$$

allora $y' = \partial\beta/\partial t + x' \partial\beta/\partial x$. Se in questa la x in $\partial\beta/\partial t$ e $\partial\beta/\partial x$ viene espressa come $\gamma(t,y)$, e la x' come $\alpha(t,\gamma(t,y))$, si ottiene un altro SDO normale:

$$(13) \quad y' = \partial\beta/\partial t(t,\gamma(t,y)) + \alpha(t,\gamma(t,y)) \partial\beta/\partial x(t,\gamma(t,y)) \equiv \delta(t,y).$$

Sia poi, per un certo $t = \underline{t}$, $x = x(t|\underline{x})$ la soluzione delle (11) sotto la condizione $x(\underline{t}) = \underline{x}$, e $y = y(t|\underline{y})$ quella delle (13) sotto la condizione $y(\underline{t}) = \underline{y}$. Allora $y(t|\underline{y}) \equiv \beta(t,x(t|\underline{x})) \Leftrightarrow x(t|\underline{x}) \equiv \gamma(t,y(t|\underline{y}))$ in un

¹⁵ Questa terminologia non è unanimemente condivisa: ad esempio, la maggior parte dei fisici (seguendo J. Gibbs) chiama “spazio delle fasi” quello che qui è stato detto “delle cofasi”.

conveniente intorno di \underline{t} sse $\underline{y} = \beta(\underline{t}, \underline{x}) \Leftrightarrow \underline{x} = \gamma(\underline{t}, \underline{y})$. Nel caso di presente interesse, possiamo porre le equazioni di EL nella forma $q' = z$, $z' = \varphi(t, q, z)$, perché l'hessiana di L è per ipotesi non singolare. D'altra parte $z = \psi(t, q, p)$ (con ψ invertibile rispetto alle $p = \psi^{-1}(t, q, z)$) in forza della assunta IG della (1). Si ricade così nel caso generale appena considerato: le equazioni di EL e quelle di Hamilton sono equivalenti sotto condizioni accessorie consistenti $\underline{p} = \psi^{-1}(\underline{t}, \underline{q}, \underline{q}')$.

Una semplice ma importante conseguenza delle equazioni hamiltoniane (8) è che, scrivendole nella forma abbreviata

$$(14) \quad z' = f(t, z),$$

dove al solito $' \equiv d_t$ e z sta per l'intero insieme delle $2n$ (q, p) , diciamo $z_\gamma =: q'_\gamma$, $z_{\gamma+n} =: p_\gamma$ per $\gamma = 1, \dots, n$, risulta immediatamente

$$(15) \quad \sum_{\gamma=1}^{2n} \partial f_\gamma / \partial z_\gamma = \sum_{\alpha=1}^n \partial^2 H / \partial q^\alpha \partial p_\alpha - \sum_{\alpha=1}^n \partial^2 H / \partial p_\alpha \partial q^\alpha \equiv 0$$

Quindi il moto governato dalle (14), diciamo $\underline{z} = z(t) \equiv (q, p)(t) \mapsto z(t) \equiv (q, p)(t)$ intorno a \underline{t} , è *incompressibile* (\equiv conserva il volume nello spazio (q, p)). Esistono più giustificazioni di questo ultimo fatto, spesso intuitive o semiintuitive, e talvolta collegate con il teorema della divergenza, vedi (5.2.1, 7). Una prova formale è la seguente. Sotto le usuali condizioni di regolarità, e posto per semplicità $\underline{t} = 0$, la trasformata al tempo t di $z_0 \equiv z(0)$ in base a un generico SDO del tipo (14) è (*) $z = z(t) = z_0 + f_0 t + O(t^2)$, ove f_0 sta per $f|_{t=0} \equiv f(0, z_0)$; mentre quella del volume (che denoteremo $|\cdot|$) di un dominio $\Omega_0 \equiv \Omega(0)$ dello spazio (z) contenente (z_0) è

$$(16) \quad |\Omega| = |\Omega(t)| = \int_{\Omega_0} \det\{\partial(z)/\partial(z_0)\}(t) d(z_0).$$

Sostituendo la (*) nella (16), anzitutto abbiamo $\det\{\partial(z)/\partial(z_0)\}(t) = 1 + t \sum_{\gamma=1}^{2n} \partial f_\gamma / \partial z_\gamma|_{t=0} + O(t^2)$, dove similmente $\partial f_\gamma / \partial z_\gamma|_{t=0}$ sta per $\partial f_\gamma / \partial z_\gamma(0, z_0)$; quindi,

$$(17) \quad d|\Omega|/dt|_{t=0} = \int_{\Omega_0} \sum_{\gamma=1}^{2n} \partial f_\gamma / \partial z_\gamma|_{t=0} d(z_0),$$

e in definitiva “ $\sum_{\gamma=1}^{2n} \partial f_\gamma / \partial z_\gamma|_{t=0} = 0$ in Ω_0 ” \Rightarrow “ $d|\Omega|/dt|_{t=0} = 0$ ”. Questo risultato, quando sia riferito ad un sistema hamiltoniano (per cui vale la (15)), è nominato come **teorema di Liouville**. Esso afferma che $d|\Omega|/dt|_{t=0} = 0$ per quel sistema, ed ha implicazioni di grande portata in meccanica statistica. Si ha allora a che fare con una folla (“ensemble”) di moltissimi sistemi identici, e ovviamente si rinuncia ad una descrizione del moto di tale folla “sistema per sistema”. Ciò che si conosce, o si vuole conoscere, è al più la densità statistica ρ dei sistemi della folla, cioè il numero $\rho|\Omega|$ dei sistemi che sono nel dominio Ω di piccolo volume $|\Omega|$, considerata come funzione di (t, q, p) . Se nessun sistema si crea o si distrugge durante il moto, $d(\rho|\Omega|)/dt = 0$; e quindi, in forza del teorema di Liouville, $0 = d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + q' \cdot \partial\rho/\partial q + p' \cdot \partial\rho/\partial p$ (dove il (\cdot) significa al solito somma da 1 a n). La somma degli ultimi due addendi a 2° membro di questa non è altro che la “parentesi di

Poisson” di ρ e H , $[\rho, H]$, di cui si dirà in generale nella S.sez. 6.3.4, e che compare così in modo naturale nella equazione di evoluzione di ρ secondo la

$$(18) \quad \partial\rho/\partial t + [\rho, H] = 0.$$

Sotto la richiesta che le (1) siano IG, il passare dalle equazioni di EL a quelle di Hamilton (o viceversa) costituisce un approccio alternativo – ma non necessariamente più efficace in casi specifici – alla soluzione delle equazioni di moto del sistema. Il particolare tipo di (anti)simmetria che caratterizza le equazioni hamiltoniane (potremmo sintetizzarlo con “ q è in corrispondenza con p come p è in corrispondenza con $-q$ ”) ha peraltro assai presto sollecitato l’immaginazione dei matematici, portandoli a formulazioni più astratte (e talvolta più potenti) della teoria dinamica dei sistemi con numero di gradi libertà finito (sistemi “discreti”). Su questo punto torneremo nelle prossime sezioni. La stessa tendenza si è poi diffusa ad altre aree della fisica teorica, e in particolare alla dinamica dei sistemi “continui”, con l’uso del CDV multidim.¹⁶

6.3.3) TRASFORMAZIONI CANONICHE I¹⁷

La situazione descritta nel terzultimo paragrafo della precedente sottosezione può rendersi più stringente richiedendo che il nuovo SDO normale (6.3.2, 13) sia dello stesso tipo, in forma, di quello di partenza (6.3.2, 11). Applicata al sistema delle equazioni hamiltoniane (6.3.2, 8), questa idea porta a supporre che una data dinamica hamiltoniana $2n$ -dim possa essere equivalentemente descritta da diversi insiemi di n coordinate e n momenti *canonici*; vale a dire, che sia possibile passare dalle variabili canoniche (q, p) soddisfacenti alle (6.3.2, 8) (per data $H(t, q, p)$), ad altre variabili canoniche (Q, P) trasformate di CdC 2 e “indefinitamente”¹⁸ invertibili

$$(1) \quad Q = Q(t, q, p), \quad P = P(t, q, p)$$

soddisfacenti ad equazioni hamiltoniane

¹⁶ Rimarchiamo che nella deduzione delle equazioni canoniche (8) si è tenuto conto del legame tra le q e le p costituito dalle (1) e loro inverse (1bis) (le q' sono ben definite funzioni delle (t, q, p) !). È dunque naturale chiedersi cosa si otterrebbe per le equazioni di Eulero associate al problema variazionale $(\dagger) \int (q' \cdot p - H(t, q, p)) dt = \text{staz!}$ trattandovi le p e le q come variabili autonome con valori prefissati agli estremi. Denotando con $\Lambda = \Lambda(t, q, p, q', p')$ l’integranda nella precedente (\dagger) (in cui in realtà le p' *non* compaiono), e ricordando il significato del simbolo $[\]_x \equiv \partial_x - d_t \partial / \partial x'$ di cui alla Sez. 6.1, abbiamo: $0 = [\Lambda]_q = -\partial H / \partial q - p'$, e $0 = [\Lambda]_p = -\partial H / \partial p + q'$; vale a dire, ancora le (8). Alle stesse condizioni, il problema variazionale $(*) \int (q \cdot p' + H(t, q, p)) dt = \text{staz!}$ porta alle equazioni di EL $0 = [\Lambda^*]_q = \partial H / \partial q + p'$ e $0 = [\Lambda^*]_p = \partial H / \partial p - q'$ avendo posto $\Lambda^* =: q \cdot p' + H(t, q, p)$; ma questo è naturale, perché $\Lambda + \Lambda^* = d_t(q \cdot p)$. Si conclude che i problemi variazionali (\dagger) e $(*)$, con le p e le q autonome, sono equivalenti, e portano entrambi alle equazioni canoniche

¹⁷ Le notazioni in questa sottosezione sono per lo più quelle usate da H. Goldstein in “Classical Mechanics”, Addison-Wesley 1980, che abbiamo stimato particolarmente felici.

¹⁸ Con questo avverbio intendiamo che l’invertibilità è da riferire a sottoinsiemi arbitrari delle $2n$ variabili: ad esempio, la $Q^\alpha = Q^\alpha(t, q, p)$ deve potersi equivalentemente invertire rispetto ad una qualsiasi delle q o delle p . L’invertibilità potrà poi supporre globale o locale a seconda del carattere globale o locale della teoria che si intende sviluppare.

$$(2) \quad Q^{\beta'} = \partial K / \partial P_{\beta}, \quad P_{\alpha'} = -\partial K / \partial Q^{\alpha},$$

per una conveniente hamiltoniana $K = K(t, Q, P)$ (generalmente diversa dalla $H(t, q(t, Q, P), p(t, Q, P))$), in modo da assicurare l'equivalenza per sostituzione invertibile delle (6.3.2, 8) e delle (2) (cioè in modo che $(Q, P)(t) = (Q, P)(t, q(t), p(t))$ in tutto l'intervallo-base se queste valgono in un suo punto arbitrario.) Una trasformazione del tipo (1) soddisfacente a queste condizioni si dice una **trasformazione canonica** (TC) (o anche “trasformazione di contatto”). Se opportuno, nel seguito ci riferiremo a questa definizione di TC come alla sua definizione “standard”.

È innanzitutto legittimo chiedersi se TC diverse dall'identità (che è banalmente canonica, con $H = K$) esistano; e se esistono, come si possano esibire/produrre. Le precedenti considerazioni suggeriscono di imporre, ad esempio, che l'uguaglianza

$$(3) \quad q' \cdot p - H(t, q, p) = Q' \cdot P - K(t, Q, P) + d_t G^{19}$$

ove G è funzione arbitraria di CdC 2 di (t, q, Q) , e K è una funzione di CdC 2 di (t, Q, P) da determinare, valga identicamente rispetto a q, Q, q', Q' e t . Sviluppando la $d_t G$, abbiamo:

$$(4) \quad q' \cdot p - Q' \cdot P - H + K = \partial G / \partial t + \partial G / \partial q \cdot q' + \partial G / \partial Q \cdot Q';$$

e quindi, per la supposta indipendenza delle q', Q' ,

$$(5_1) \quad p = \partial G / \partial q,$$

$$(5_2) \quad P = -\partial G / \partial Q,$$

$$(5_3) \quad K - H = \partial G / \partial t,$$

identicamente rispetto alle (t, q, Q) (avendo eliminato le (p, P) in H e risp. in K mediante le $(5_1, 5_2)$). Supponendo le (5_1) invertibili rispetto alle Q (cioè che $\det\{\partial^2 G / \partial q \partial Q\} \neq 0$ nel dominio di interesse), queste (5) ci danno per l'appunto una trasformazione del tipo (1) che verificheremo essere canonica. Invertendo infatti le (5_1) rispetto alle Q , abbiamo $Q = Q(t, q, p)$ (le prime (1)); e sostituendo queste Q nelle (5_2) , $P = P(t, q, p)$ (le seconde (1)). Infine invertendo le (1) rispetto alle (q, p) , secondo l'ipotesi di invertibilità fatta all'inizio, abbiamo

$$(1bis) \quad q = q(t, Q, P), \quad p = p(t, Q, P),$$

che sostituite nella (5_3) danno K come funzione di (t, Q, P) , secondo quanto richiesto. Verifichiamo ora l'effettivo carattere canonico delle (Q, P) definito dalle (1) cioè la validità delle (2). Tenendo in conto le $(5_{1,2})$, la (5_3) si scrive come

$$(5_{3bis}) \quad K(t, Q, -\partial G / \partial Q) - H(t, q, \partial G / \partial q) = \partial G / \partial t.$$

Derivando questa rispetto alle q , abbiamo (rinunciando ad indicare gli argomenti)

$$(6) \quad \partial K / \partial P_{\beta} (-\partial^2 G / \partial q \partial Q^{\beta}) - \partial H / \partial q - \partial H / \partial p_{\beta} \partial^2 G / \partial q \partial q^{\beta} = \partial^2 G / \partial q \partial t,$$

¹⁹ Una generalizzazione banale della (3) consiste nel moltiplicarne il 1° membro (ad es.) per una costante. Ciò corrisponde ad un semplice cambiamento di scala per le nuove coordinate/momenti, e può sempre neutralizzarsi in infiniti modi. Che una trasformazione come la (3) debba soddisfare alle condizioni di canonicità è del tutto intuitivo riferendosi al problema variazionale associato.

ovvero, sommando ai due membri $Q^{\beta'} \partial^2 G / \partial q \partial Q^{\beta}$, e portando a 2° membro il terzo addendo del 1° membro,

$$(6') \quad -\partial^2 G / \partial q \partial Q^{\beta} (\partial K / \partial P_{\beta} - Q^{\beta'}) - \partial H / \partial q = \partial^2 G / \partial q \partial t + q^{\beta'} \partial^2 G / \partial q \partial q^{\beta} + Q^{\beta'} \partial^2 G / \partial q \partial Q^{\beta} = \\ = \partial / \partial q (d_t G) = d_t (\partial G / \partial q) = p';$$

e infine, per la (6.3.2, 8₂), $\partial^2 G / \partial q \partial Q^{\beta} (\partial K / \partial P_{\beta} - Q^{\beta'}) = 0$. La matrice $\{\partial^2 G / \partial q \partial Q^{\beta}\}$ è non singolare per ipotesi, e si conclude che $\partial K / \partial P_{\beta} - Q^{\beta'} = 0$, in accordo con le prime (2). Similmente derivando la (5_{3bis}) rispetto a Q, abbiamo

$$(7) \quad \partial K / \partial Q + \partial K / \partial P_{\beta} (-\partial^2 G / \partial Q \partial Q^{\beta}) - \partial H / \partial p_{\beta} \partial^2 G / \partial Q \partial q^{\beta} = \partial^2 G / \partial Q \partial t,$$

quindi

$$(7') \quad \partial K / \partial Q + (\partial K / \partial P_{\beta} - Q^{\beta'}) (-\partial^2 G / \partial Q \partial Q^{\beta}) = \partial^2 G / \partial Q \partial t + q^{\beta'} \partial^2 G / \partial Q \partial q^{\beta} + Q^{\beta'} \partial^2 G / \partial Q \partial Q^{\beta} = \\ = \partial / \partial Q (d_t G) = d_t (\partial G / \partial Q) = -P',$$

e in forza delle prime (2) (già verificate), $\partial K / \partial Q + P' = 0$, in accordo con le seconde (2). (La correttezza della penultima uguaglianza, cioè la commutabilità di $\partial / \partial Q$ e d_t è materia di immediata verifica sotto le condizioni di regolarità stipulate su G.) La tesi è così dimostrata.

Vi sono tre naturali alternative a questa procedura di produzione di TC. Ad esempio, possiamo riproporre la (3) nella forma equivalente:

$$(8) \quad q' \cdot p + Q \cdot P' - H + K = d_t (G_1 + Q \cdot P),$$

dove per maggior chiarezza abbiamo ora scritto la precedente G come G_1 . Posto allora $G_2 = G_1 + Q \cdot P$, ed esprimendo questa G_2 come funzione di (t, q, P) (per questo basta invertire le seconde (1) rispetto alle p e sostituire le $Q = Q(t, q, P)$ in G_2), e infine sviluppando $d_t G_2$, con analoghi sviluppi otteniamo:

$$(9_1) \quad p = \partial G_2 / \partial q,$$

$$(9_2) \quad Q = \partial G_2 / \partial P,$$

$$(9_3) \quad K - H = \partial G_2 / \partial t.$$

Anche queste (9) ci danno una trasformazione del tipo (1): basta supporre le (9₁) invertibili rispetto alle P, ottenendo $P = P(t, q, p)$ (le seconde (1)), e sostituirle nelle (9₂), ottenendo $Q = Q(t, q, p)$ (le prime (1)). Mediante inversione delle (1), infine, si sostituiscono le (q, p) in H e le q in $\partial G_2 / \partial t$ nella (9₃) per avere K come funzione di (t, Q, P) . La validità delle (2) si dimostra infine con procedure simili a quelle del caso precedente.²⁰

Le rimanenti due alternative partono dalla versione

²⁰ Precisamente, derivando la (9₃) rispetto alle q si ha $\partial K / \partial Q \cdot \partial^2 G_2 / \partial q \partial P = \partial H / \partial q + \partial H / \partial p \cdot \partial^2 G_2 / \partial q \partial q + \partial^2 G_2 / \partial q \partial t$; o equivalentemente, $(\partial K / \partial Q + P') \cdot \partial^2 G_2 / \partial q \partial P = -p' + \partial / \partial q (\partial G_2 / \partial t + \partial G_2 / \partial q \cdot q' + \partial G_2 / \partial P \cdot P') = -p' + d_t (\partial G_2 / \partial q) = 0$ in forza delle (9₁). Seguono le $\partial K / \partial Q + P' = 0$ (le 2° (2)) per l'assunta regolarità della matrice $\partial^2 G_2 / \partial q \partial P$. Similmente derivando la (9₃) rispetto alle P, abbiamo $(K / \partial Q + P') \cdot \partial^2 G_2 / \partial P \partial P = d_t (\partial G_2 / \partial P) - \partial K / \partial P = Q' - \partial K / \partial P$. Ma i 1° membri di queste sono nulli per i precedenti risultati, e seguono le $Q' = \partial K / \partial P$ (le 1° (2)), qed.

$$(10) \quad -q \cdot p' - Q' \cdot P - H + K = d_t(G_1 - q \cdot p),$$

e rispettivamente

$$(11) \quad -q \cdot p' + Q \cdot P' - H + K = d_t(G_1 - q \cdot p + Q \cdot P)$$

della (3). Posto $G_3 = G_3(t, Q, p) =: G_1 - q \cdot p$ nella (10) [Posto $G_4 = G_4(t, p, P) =: G_1 - q \cdot p + Q \cdot P$ nella (11)], ed eliminando le q e le P [le q e le Q], con i soliti sviluppi otteniamo:

$$(12_1) \quad q = -\partial g_3 / \partial p,$$

$$(12_2) \quad P = -\partial G_3 / \partial Q,$$

$$(12_3) \quad K - H = \partial G_3 / \partial t,$$

e rispettivamente:

$$(13_1) \quad q = -\partial G_4 / \partial p,$$

$$(13_2) \quad Q = \partial G_4 / \partial P,$$

$$(13_3) \quad K - H = \partial G_4 / \partial t.$$

Come è ormai ovvio, da queste (12) o (13) si hanno ancora le (1), l'espressione di K , e la prova che valgono le (2), ossia che le (1) sono effettivamente canoniche. Ciò esaurisce l'esame dei sopravvisti quattro tipi "standard" di TC.

Caso per caso, le funzioni G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) si dicono **generatrici** della corrispondente TC standard. È interessante osservare che la TC "identità" $(Q, P) = (q, p)$ ricade nel 2° tipo di TC standard: basta infatti porre $G_2 =: q \cdot P$ per avere (attraverso le (9)) $p = P$, $Q = q$, $K = H$. Ponendo invece $G_1 =: q \cdot Q$ (TC del 1° tipo), attraverso le (5) otteniamo $p = Q$, $P = -q$, $K = H$; cioè, in questo caso le vecchie coordinate sono opposte ai nuovi momenti e i vecchi momenti sono uguali alle nuove coordinate.²¹

Certamente le TC testé esaminate non esauriscono tutte le possibilità, perché trattano "in blocco" le quattro serie delle variabili canoniche vecchie e nuove, e questo non è affatto necessario. Limitandoci ad un esempio elementare, per $n = 2$ si può considerare una funzione generatrice G^* legata a G_1 dalla

$$(14) \quad G^* =: G_1 + Q^1 P_1 - q^2 p_2.$$

Si trova allora:

$$(14') \quad \partial G^* / \partial q^2 = \partial G_1 / \partial q^2 - p_2 = 0; \quad \partial G^* / \partial P_2 = 0; \quad \partial G^* / \partial Q^1 = \partial G_1 / \partial Q^1 + P_1 = 0; \quad \partial G^* / \partial p_1 = 0;$$

quindi G^* dipende al più da (q^1, p_2, P_1, Q^2) . Si ottiene così la TC:

$$(14_2) \quad \partial G^* / \partial q^1 = p_1; \quad \partial G^* / \partial p_2 = -q^2; \quad Q^1 = \partial G^* / \partial P_1; \quad P_2 = -\partial G^* / \partial Q^2;$$

e inoltre

$$(14_3) \quad \partial G^* / \partial t = \partial G / \partial t = K - H$$

²¹ Lo stesso risultato si otterrebbe ponendo $G_4 =: p \cdot P$ ed applicando le (13); mentre ponendo $G_1 = -q \cdot Q$ [$G_4 = -p \cdot P$] ed applicando le (5) [le (13)] si avrebbe ovviamente il risultato opposto ($P = q$, $p = -Q$).

Ma anche in tal senso allargato, non è ancora dimostrato che l'insieme delle TC così ottenute sia l'insieme di *tutte* le possibili TC.

Una caratterizzazione completa delle TC è stata ottenuta nel 1877 da Lie (Sophus, Nordfjordeide Norv. 1842, Kristiania 1899)²²; ma fu probabilmente Jacobi (Karl, Potsdam 1804 - Berlino 1851) a considerare per primo certe trasformazioni regolari e invertibili di (coppie di) variabili destinate a giocare un ruolo fondamentale nella teoria delle EDP, nonché nella meccanica e nell'ottica geometrica, e che si sarebbero poi chiamate canoniche. È innanzitutto opportuno stabilire una notevole semplificazione formale nel concetto di sistema di equazioni canoniche. Con essa si identifica il parametro t come una 0-ma coordinata q^0 , introducendo un 0-mo momento coniugato p_0 ed una nuova hamiltoniana definita come $\Phi =: p_0 + H(q^0, q, p)$ (qui q è l' n -pla (q^1, \dots, q^n) e p l' n -pla (p_1, \dots, p_n)). Le equazioni di evoluzione per q e p restano allora invariate, mentre quella per q^0 è $q^{0'} = \partial\Phi/\partial p_0 = 1$ (in accordo con la $t = q^0$), e quella per p_0 è $p_0' = -\partial\Phi/\partial q^0 = -\partial H/\partial t = -d_t H$ (in accordo con la $\Phi = p_0 + H = \text{costante}$). In questo modo le equazioni [le trasformazioni] canoniche si riducono formalmente alla loro versione di equazioni [di trasformazioni] cosiddette **canoniche ristrette**; cioè del tipo autonomo, in cui t *non compare esplicitamente*. Segue da ciò che una TC generica può sempre pensarsi come TC ristretta (TCR) $(Q,P) = (Q,P)(q,p)$ semplicemente *aumentando di una unità* entrambe le serie di variabili, e trattando la relativa hamiltoniana come costante del moto, in particolare nulla.

In questo ordine di idee, si intuisce che la teoria delle TC come definite nel primo paragrafo di questa sottosezione (definizione "standard"), possa ridursi a quella delle trasformazioni del tipo $(Q,P) = (Q,P)(q,p)$ di CdC 2 per le quali esiste una funzione $\Psi = \Psi(q,p)$ (detta ancora "generatrice" e anch'essa di CdC 2) tale che l'equazione pfaffiana

$$(15) \quad P \cdot dQ = p \cdot dq + d\Psi,$$

(o se si preferisce

$$(15') \quad Q \cdot dP = q \cdot dp + d\Psi^*$$

con $\Psi^* =: P \cdot Q - p \cdot q - \Psi$, ecc.) sia identicamente soddisfatta nel dominio di interesse (in generale un aperto dello spazio R^{2n}). Ciò si giustifica considerando che le due hamiltoniane nella (3), H e K , sono adesso costanti, e si possono pertanto assumere nulle.²³ La teoria che si sviluppa a partire dalla (15) è esposta nella S.sez. 6.3.4. Le trasformazioni $(Q,P) = (Q,P)(q,p)$ per cui vale la (15) si dicono ancora "canoniche"; ma non vi è rischio di confusione con quelle del tipo $(Q,P) = (Q,P)(t,q,p)$ (definizione standard), nel senso che le seconde possono sempre considerarsi come caso particolare delle prime. Sarà anche conveniente, per brevità, dire "TC secondo la definizione

²² S. Lie, "Die Störungstheorie und die Berührungstransformationen", Arch. Math, Bd. II, p. 129, 1877.

²³ Il segno + davanti a $d\Psi$ - in contrasto col segno - davanti a $d_t G$ nella (11) - non ha rilevanza, e si deve alla tradizione.

(α)”, “ α -TC”, le trasformazioni definite come canoniche nel presente paragrafo. La teoria generale delle α -TC (vedi S.sez. 6.3.4) dà tra l’altro risposta alla questione, rimasta fin qui aperta, se *ogni* TC possa essere prodotta con le procedure del tipo fin qui illustrato (vedi le (3, 8, 10, 11, 14)). Un’altra proprietà importante delle TC, che qui ci limitiamo ad enunciare, è che il loro insieme costituisce un gruppo sotto l’operazione di composizione (vedi S.sez. 6.3.4).

Ancora una conveniente semplificazione addirittura elimina (formalmente) la ripartizione delle variabili canoniche in due serie distinte. Tornando al caso base di $1 + 2n$ variabili (t, q, p) , introduciamo innanzitutto la $(2n \times 2n)$ -matrice antisimmetrica J costituita da quattro $(n \times n)$ -matrici su due “righe” e due “colonne” secondo lo schema $J_{(11)} = J_{(22)} =: 0_{(n)}$ (\equiv la $(n \times n)$ -matrice nulla) e $J_{(12)} = -J_{(21)} =: \delta_{(n)}$ (\equiv la $(n \times n)$ -matrice unitaria). (Qui $J_{(11)}$ è la $(n \times n)$ -matrice sulla prima “riga” e sulla prima “colonna” di J , ecc.).²⁴ Basta ancora scrivere q^i come z_i e p_i come z_{n+i} per $i = 1, \dots, n$ (cfr. S.sez 6.3.2) per unificare la scrittura delle equazioni canoniche nelle

$$(16) \quad z'_j = J_{jh} \partial H / \partial z_h,$$

dove $j, h = 1, \dots, 2n$, e si somma su h (e dove J_{jh} denota l’elemento (j, h) di J); ovvero, con notazione non indiciale,

$$(16\text{bis}) \quad z' = J \partial H / \partial z.$$

Con un attributo introdotto da Weyl, la forma (16) (o (16bis)) delle equazioni canoniche viene comunemente detta **simplettica**²⁵ (anche la matrice J e le stesse equazioni canoniche potrebbero ugualmente qualificarsi allo stesso titolo). La particolare struttura delle (16) ha indotto i matematici a sviluppare la nozione di **varietà simplettica**, che è una varietà $2n$ -dim differenziabile (di solito supposta liscia) dotata di una particolare struttura (**struttura simplettica**) nel suo fibrato cotangente. Si è così prodotta una teoria dinamica molto astratta ed elegante, che tuttavia può attingere a risultati non diversamente accessibili soltanto nel caso importante in cui la detta varietà simplettica *non sia elementare*. L’idea alla base di queste astrazioni si intuisce facilmente. Per cominciare, le equazioni (6.3.1, 7) rappresentano parametricamente una varietà n -dim immersa in \mathbb{R}^{3N} , e ne costituiscono una carta se le q variano in un dato aperto di \mathbb{R}^n . Equivalentemente, le (6.3.1, 7) unite alle $v_i = f_i(t, q, r)$, con $r =: q'$, rappresentano parametricamente una varietà $2n$ -dim immersa in \mathbb{R}^{6N} , di cui le espressioni di x_i e v_i costituiscono una carta se le (q, r) variano in un aperto di \mathbb{R}^{2n} . Il naturale passo successivo verso la generalizzazione consiste dunque nel sostituire a tale varietà $2n$ -dim *immersa* una varietà $2n$ -dim *astratta*, con un genuino atlante a più carte.

²⁴ Si provano facilmente le seguenti proprietà della $(2n \times 2n)$ -matrice J : (a): $-J^2 = \delta_{(2n)}$ (la $(2n \times 2n)$ -matrice unitaria); (b): ${}^t J J = J {}^t J = \delta_{(2n)}$ (con ${}^t(\) \equiv$ matrice trasposta della $(\)$); (c): ${}^t J = J^{-1}$; (d): $J^{-1} = -J$; (e): $\det J = 1$.

²⁵ Nella sua nota monografia “The Classical Groups” Princeton Un. Pr. 1939, 2^a ed. 1946, Chpt. VI, Weyl introduce l’aggettivo in questione translitterandolo dal greco $\sigma\mu\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa\omicron\varsigma \equiv$ “intrecciante”. Non di rado il significato di $\sigma\mu\pi\lambda\epsilon\kappa\tau\iota\kappa\omicron\varsigma$ viene erroneamente tradotto al passivo, tipicamente in inglese come “intertwined”.

Quest'ultima varietà è dotata "in modo naturale" di una speciale struttura differenziale nel suo fibrato cotangente, legata all'essere le (q,r) soluzioni del sistema di EL (ormai trascritto in un equivalente sistema del 1° ordine in $2n$ incognite). Analoghe considerazioni valgono per la varietà $2n$ -dim delle cofasi immersa in \mathbb{R}^{6N} , che viene sostituita da una corrispondente varietà astratta $2n$ -dim con la struttura simplettica, a sua volta legata all'essere le (q,p) soluzioni del sistema di Hamilton. La teoria delle varietà simplettiche, e con essa l'istituzione di una vera e propria "geometria simplettica", è un esempio assai cospicuo di geometrizzazione della meccanica.²⁶

Sia ora

$$(17) \quad Z = Z(z)$$

una trasformazione t -indipendente delle variabili canoniche in notazione simplettica, e quindi per cui $Z' = Sz'$, avendo denotato con S la matrice jacobiana della (17), $S_{ij} = \partial Z_i / \partial z_j$. Se z evolve secondo la (16bis), poiché $\partial H / \partial z = {}^t S \partial H / \partial Z$, sempre con ${}^t() \equiv$ trasposta di $()$, abbiamo $Z' = S J {}^t S \partial H / \partial Z$. Segue che se la trasformazione (17) è canonica ristretta, deve anche aversi $Z' = J \partial H / \partial Z$, perché l'hamiltoniana è invariata in questo caso. Essendo le $\partial H / \partial Z$ arbitrarie, si conclude con l'equivalenza "la (17) è canonica ristretta" \Leftrightarrow " $S J {}^t S = J$ ". L'ultima uguaglianza risulta così *caratteristica* della canonicità ristretta della trasformazione t -indipendente (17). Poiché infine " $S J {}^t S = J$ " \Rightarrow " $(\det S)^2 = 1$ ", quest'ultima uguaglianza vale per le TCR, anche se (ovviamente) non ne è una caratterizzazione.

Una trasformazione **infinitesimale** è il saldo all'identità di una trasformazione da essa diversa infinitamente poco. Ricordando che la trasformazione identica tra variabili canoniche si ottiene mediante la funzione generatrice del 2° tipo $G_2 = q \cdot P$, dovremo quindi usare, come generatrice di una trasformazione infinitesimale tra variabili canoniche, la $G_2 = G_2(t,q,P) = q \cdot P + \varepsilon T(t,q,P)$, dove ε è infinitesimo e T è una funzione arbitraria di classe C^2 dei suoi argomenti. Secondo le (9) è allora $Q = \partial G_2 / \partial P = q + \varepsilon \partial T / \partial P$, e $p = \partial G_2 / \partial q = P + \varepsilon \partial T / \partial q$, ovvero, in notazione simplettica,

$$(18) \quad Z = z + \varepsilon J \partial T / \partial z.$$

La matrice jacobiana di questa trasformazione è evidentemente $S = (\delta)_{2n} + \varepsilon J (\partial^2 T / \partial z \partial z)$, dove $(\delta)_{2n}$ è sempre la $(2n \times 2n)$ -matrice unitaria; e la sua trasposta, in forza della simmetria della $(\partial^2 T / \partial z \partial z)$, è ${}^t S = (\delta)_{2n} - \varepsilon J (\partial^2 T / \partial z \partial z)$. La (18) è una trasformazione infinitesimale, ma in generale non

²⁶ Tra le monografie di riferimento sulla meccanica simplettica (a volte così "immerse" nella geometria delle varietà $2n$ -dim simplettiche astratte da riuscire per certi versi estranee agli occhi del matematico, e a maggior ragione del fisico, non specialista) citiamo: il già menzionato (vedi Pres. (0,0)) "Foundations of Mechanics" di Abraham e Marsden, 2ª ed. allargata Addison-Wesley 1978, 6ª ristampa 1987, 1ª ed. Benjamin, 1967; J-M. Souriau, "Structure des systèmes dynamiques", Dunod Un. 1970; Y. Choquet-Bruhat et al., "Analysis, Manifolds and Physics", North-Holland 1977; V.I. Arnold, ed. originale russa Nauka 1974, MIR 1979, trad. inglese "Mathematical methods of classical mechanics", Springer 2ª ed. 1989, trad. ital. "Metodi matematici della meccanica classica", Editori Riuniti 2ª ristampa 1988.

t-indipendente né canonica.. Se quindi supponiamo T indipendente da t e *richiediamo* la canonicità della (18), possiamo usare la condizione $SJ^tS = J$; sostituendo in questa la presente espressione di S, abbiamo la condizione di canonicità $[(\delta)_{2n} + \varepsilon J(\partial^2 T/\partial z \partial z)] J [(\delta)_{2n} - \varepsilon J(\partial^2 T/\partial z \partial z)] = J$. Ma il 1° membro di questa è identicamente uguale a $J + O(\varepsilon^2)$ (il termine $O(\varepsilon^2)$ si calcola subito, ma non ha importanza renderlo esplicito). Si conclude che la trasformazione infinitesimale t-indipendente (18) è automaticamente canonica a meno di un termine del *secondo ordine in ε* . Questo fatto non era del tutto evidente a priori, perché la (18) è una trasformazione canonica (l'identità) a meno di un termine del *primo ordine in ε* .

Consideriamo adesso la trasformazione infinitesimale che fa passare da $z = z(t)$ a $Z(t) = z(t+\Delta t) = z(t) + \Delta t J z'(t) + O(\Delta t^2)$, per Δt infinitesimo. Pensandovi t come fisso, questa è del tipo (18) con Δt in luogo di ε , quindi è canonica a meno di un termine $O(\Delta t^2)$. Dividiamo poi l'intervallo-base $[0,1]$ in N sub-intervalli $[t_0=0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N=1]$, $t_i - t_{i-1} > 0$, $i = 1, \dots, N$, e consideriamo la trasformazione $z(0) \mapsto z(1)$ come prodotto delle $z(0) \mapsto z(t_1) \mapsto \dots \mapsto z(t_{N-1}) \mapsto z(1)$, ciascuna delle quali è canonica a meno di un termine del 2° ordine in $\delta =: \max_{i=1 \dots N} (t_i - t_{i-1})$. Affermiamo che la trasformazione $z(0) \mapsto z(1)$ (o tra arbitrari t_1 e $t_2 > t_1$ nell'intervallo-base) è canonica nel limite $\delta \rightarrow 0$. La situazione è simile a quella in cui la differenza $z(1) - z(0)$ è rappresentata come $\int_{t=0}^1 z'(t) dt$, e la dimostrazione è pertanto quasi banale. Basta osservare che la jacobiana della $z(0) \mapsto z(1)$ è il prodotto delle jacobiane delle trasformazioni della sopraddetta catena di trasformazioni, quindi è del tipo $S_N S_{N-1} \dots S_1$. La condizione di canonicità di questa catena è così equivalente alla $S_N S_{N-1} \dots S_1 J^t (S_N S_{N-1} \dots S_1) = J$; ma il 1° membro di quest'ultima uguaglianza è $S_N S_{N-1} \dots S_1 J^t S_1 \dots S_N = J +$ la somma di N termini $O(\delta^2)$, ovvero è uguale a $J +$ un termine $O(\delta)$, perché $N = O(\delta)^{-1}$. La tesi è così dimostrata facendo $\delta \rightarrow 0$.²⁷

6.3.4) TRASFORMAZIONI CANONICHE II (PARENTESI DI LAGRANGE E DI POISSON)

§1. Si considerino due serie di n indeterminate $(q^i, p_j)_{i,j=1 \dots n} \equiv (q, p)$, entrambe funzioni di classe C^1 delle due variabili (u, v) in un aperto V di \mathbb{R}^2 . La funzione di (u, v)

$$(1) \quad \{u, v\}_{q,p} =: \partial q^i / \partial u \partial p_i / \partial v - \partial q^i / \partial v \partial p_i / \partial u$$

²⁷ Nelle parole di Whittaker (Edmund, Southport Ingh. 1873, Edinburgh 1956): «L'intera evoluzione di un sistema dinamico si può riguardare come il graduale auto-dispiegamento (self-unfolding) di una trasformazione canonica.» (in "A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies", Cambridge Un. Press 1937, repr. in Dover 1944). Qui per "sistema dinamico" si intende ovviamente un sistema la cui evoluzione sia retta da equazioni hamiltoniane.

(somma da 1 a n su i), continua in V (anche denotata con $\{u,v\}$ se la specificazione delle (q,p) a pedice può sottintendersi, come ad esempio nelle (2) che seguono), si dice **parentesi di Lagrange di (u,v)**. Banalmente, vale la

$$(2) \quad \{u,v\} = -\{v,u\},$$

se (u,v) e (v,u) appartengono a V (anticommutatività di $\{ , \}$) e quindi

$$(2bis) \quad \{u,u\} = 0$$

se (u,u) appartiene a V.

Ciò premesso, vale il seguente teorema:

T₁. «Sia $q = q(t,u,v)$, $p = p(t,u,v)$ una famiglia a due parametri (u,v) (t-indipendenti) di funzioni di CdC 1 soluzioni delle equazioni di Hamilton con hamiltoniana $H = H(t,q,p)$ di CdC 2. Allora $d_t\{u,v\}_{q,p} = 0$ ».

Dim. Si ha:

$$(i) \quad d_t(\partial q^i / \partial u) = \partial q^i / \partial u = \partial(\partial H / \partial p_i) / \partial u = \partial^2 H / \partial q^s \partial p_i \partial q^s / \partial u + \partial^2 H / \partial p_r \partial p_i \partial p_r / \partial u,$$

e similmente

$$(ii) \quad d_t(\partial p_i / \partial v) = \partial p_i / \partial v = -\partial(\partial H / \partial q_i) / \partial v = -\partial^2 H / \partial q^s \partial q^i \partial q^s / \partial v - \partial^2 H / \partial p_r \partial q^i \partial p_r / \partial v.$$

Contraiamo la (i) con $\partial p_i / \partial v$ e la (ii) con $\partial q^i / \partial u$ e sommiamo. Il risultato è

$$(iii) \quad d_t(\partial q^i / \partial u \partial p_i / \partial v) = \partial^2 H / \partial p_r \partial p_i \partial p_r / \partial u \partial p_i / \partial v - \partial^2 H / \partial q^s \partial q^i \partial q^s / \partial v \partial q^i / \partial u.$$

Entrambi i termini della differenza a 2° membro della (iii) sono simmetrici rispetto allo scambio di u con v, da cui segue la tesi. # §

§2. Sia $\mathcal{A}^1(U,R)$ l'anello (su R) delle funzioni reali di CdC 1 di (q,p) definite in U (un aperto di R^{2n}), e siano $A \in \mathcal{A}^1(U,R)$, $B \in \mathcal{A}^1(U,R)$. La funzione di (q,p)

$$(3) \quad [A,B]_{q,p} =: \partial A / \partial q^i \partial B / \partial p_i - \partial B / \partial q^i \partial A / \partial p_i,^{28}$$

(somma su i da 1 a n), continua in U (anche denotata con $[A,B]$ se la specificazione delle (q,p) a pedice può sottintendersi), si dice **parentesi di Poisson di (A,B)**. Anche la parentesi di Poisson è banalmente anticommutativa in $\mathcal{A}^1(U,R)$:

$$(4) \quad [A,B] = -[B,A], \quad [A,A] = 0.$$

Inoltre, per ogni terna (A_1, A_2, A_3) di funzioni di $\mathcal{A}^1(U,R)$ sussistono le identità (in U):

$$(5) \quad [aA_1 + bA_2, A_3] = a[A_1, A_3] + b[A_2, A_3]$$

per arbitrarie costanti reali (a,b) (distributività a sinistra di $[,]$ e dunque per la (4) distributività a destra);

$$(6) \quad [A_1 A_2, A_3] = A_1 [A_2, A_3] + A_2 [A_1, A_3]$$

(proprietà leibniziana di $[,]$); e infine,

²⁸ Talvolta la $[F,G]_{q,p}$ è definita come l'opposta di questa.

$$(7) \quad [A_1, [A_2, A_3]] + [A_2, [A_3, A_1]] + [A_3, [A_1, A_2]] = 0$$

(identità di Jacobi di [,]). Le giustificazioni delle (5, 6, 7) sono tutte elementari, sebbene quella della (7) comporti alcune noiose manipolazioni. Interpretandovi $[A, B]$ come “prodotto di A per B”, nelle (4, 5, 7) si ravvisano gli assiomi di un’**algebra di Lie**.²⁹ (La (6) è soltanto una proprietà addizionale della [,] che non interferisce con la sua natura di algebra di Lie.) Della parentesi di Poisson abbiamo dato una anticipazione alla fine della S.sez. 6.3.2, quando abbiamo introdotto alcune nozioni elementari di meccanica statistica (teorema di Liouville). §³⁰

Si verifica immediatamente che le $\{q^h, q^k\}_{q,p} = 0$, $\{p_h, p_k\}_{q,p} = 0$, $\{q^h, p_k\}_{q,p} = \delta^h_k$, e simili con [,] in luogo di { , }, valgono identicamente $\forall (q,p)$. Queste particolari parentesi (di Lagrange e rispettivamente di Poisson) si dicono **parentesi fondamentali**. È così provato che le parentesi fondamentali di Lagrange e le parentesi fondamentali di Poisson con gli stessi argomenti hanno gli stessi valori numerici.

Le parentesi di Lagrange possono convenientemente scriversi in notazione simplettica come

$$(8) \quad \{u, v\}_z = \partial z_i / \partial u \, J_{ij} \, \partial z_j / \partial v \equiv {}^t(\partial z / \partial u) J \partial z / \partial v,$$

con la definizione di z e della matrice simplettica J data a suo tempo (v. S.sez. 6.3.3). (Al solito, ${}^t(\)$ denota la riga trasposta della colonna ().) In modo simile si trova che

$$(9) \quad [A, B]_z = \partial A / \partial z_i \, J_{ij} \, \partial B / \partial z_j \equiv {}^t(\partial A / \partial z) J \partial B / \partial z.$$

Passiamo ora a considerare una trasformata $Z = Z(z)$ di z di CdC 1 e di jacobiana $S \equiv \partial(Z) / \partial(z)$. Essendo $\partial Z / \partial u = S \partial z / \partial u$ (e simile con v in luogo di u), abbiamo $\{u, v\}_Z = {}^t(\partial z / \partial u) {}^t S J S \partial z / \partial v$. Se dunque ${}^t S J S = J$ (caratterizzazione delle TCR data nella S.sez. 6.3.3), abbiamo:

$$(10) \quad \{u, v\}_Z = \{u, v\}_z.$$

Analogamente, $[A, B]_Z = {}^t(\partial A / \partial Z) {}^t S J S \partial B / \partial Z$; e quindi, ancora se ${}^t S J S = J$,

$$(11) \quad [A, B]_Z = [A, B]_z.$$

Le (10) e le (11) provano l’invarianza delle parentesi di Lagrange, e rispettivamente di Poisson, sotto la condizione ${}^t S J S = J$. Salvo che nella sua ultima parte, nella presente sottosezione non faremo più riferimento a questa caratterizzazione della canonicità ristretta.

Per comodità del lettore, ripetiamo qui appresso la definizione (α) di canonicità (v. S.sez. 6.3.3): “la trasformazione

$$(12) \quad (Q, P) = (Q, P)(q, p)$$

²⁹ Un’algebra di Lie è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} munito di un prodotto anticommutativo (vedi (4)), distributivo (vedi (5)) e non associativo nel senso della (7). Si noti che l’associatività di tale prodotto comporterebbe che $[A_1, [A_2, A_3]] + [A_3, [A_1, A_2]]$ fosse uguale a zero, ciò che è negato dalla (7) proprio perché sulla base di questa la precedente somma vale $[[A_3, A_1], A_2]$ (che è diversa da zero in generale). Riprenderemo l’argomento nella terza parte del libro.

³⁰ Nonostante le molte affinità che illustreremo più oltre tra i due tipi di parentesi, non avrebbe senso tentare di attribuire alle { , } proprietà in qualche modo analoghe ad alcuna delle (5, 6, 7).

di CdC 2 è α -canonica se esiste una funzione $\Psi(q,p)$ di CdC 2 tale che la (6.3.3, 15) sia soddisfatta identicamente nel dominio delle (q,p) ". Per miglior convenienza, riproduciamo qui la (6.3.3, 15) come

$$(13) \quad P \cdot dQ = p \cdot dq + d\Psi$$

Mostreremo ora come sia possibile esprimere la α -canonicità della (12) (di CdC 2) per mezzo delle parentesi di Lagrange $\{q^h, q^k\}_{Q,P}$, $\{p_h, p_k\}_{Q,P}$ e $\{q^h, p_k\}_{Q,P}$. È innanzitutto chiaro che la relazione (13) equivale alle

$$(13'_1) \quad P_i \partial Q^i / \partial q^h = p_h + \partial \Psi / \partial q^h$$

$$(13'_2) \quad P_i \partial Q^i / \partial p_h = \partial \Psi / \partial p_h,$$

dove (ricordiamo) anche Ψ è supposta di CdC 2. Queste EDP richiedono che siano soddisfatte certe condizioni di integrabilità che ora ricaveremo. Derivando la (13'_1) rispetto a q^k , scambiando nel risultato h con k e sottraendo termine a termine, in forza dell'assunta continuità delle derivate seconde troviamo:

$$(14_1) \quad \{q^h, q^k\}_{Q,P} = 0,$$

per ogni $h, k = 1, \dots, n$. Similmente derivando la (13'_2) rispetto a p_k , ancora scambiando h con k e sottraendo termine a termine troviamo:

$$(14_2) \quad \{p_h, p_k\}_{Q,P} = 0$$

sempre per ogni $h, k = 1, \dots, n$. Infine derivando la (13'_1) rispetto a p_k e la (13'_2), scritta con k in luogo di h , rispetto a q^h , e sottraendo la seconda dalla prima, troviamo (per ogni $h, k = 1, \dots, n$):

$$(14_3) \quad \{q^h, p_k\}_{Q,P} = \delta_k^h.$$

Le tre (14) sono le condizioni di integrabilità ricercate, conseguenza delle (13') e della ipotesi che le derivate seconde miste coinvolte nella dimostrazione (quelle delle Q e di Ψ) siano continue.

Alle stesse condizioni sulle Q vale anche il viceversa: cioè dalle (14₁) si trae che $\partial / \partial q^h (P^i \partial Q^i / \partial q^k)$ è simmetrica rispetto allo scambio di h con k , ovvero, che esiste una funzione di CdC 2, diciamo $\varphi = \varphi(q,p)$, per cui $\partial \varphi / \partial q^k = P_i \partial Q^i / \partial q^k$. Per ragioni simili, se valgono le (14₂) esiste una funzione di CdC 2, diciamo $\psi = \psi(q,p)$, per cui $\partial \psi / \partial p_h = P_i \partial Q^i / \partial p_h$. Infine se valgono (14₃) risulta $0 = \partial / \partial p_h (P_i \partial Q^i / \partial q^k) - \partial / \partial q^k (P_i \partial Q^i / \partial p_h) - \delta_k^h = \partial / \partial p_h (\partial \varphi / \partial q^k - p_k) - \partial / \partial q^k \partial \psi / \partial p_h$; e queste significano che esiste una funzione di CdC 2, diciamo $\Psi = \Psi(q,p)$, per cui $\partial \Psi / \partial q^k = \partial \varphi / \partial q^k - p_k$ e $\partial \Psi / \partial p_h = \partial \psi / \partial p_h$. In definitiva vale la relazione (13), e dunque (13') \Leftrightarrow (14) se le Q e Ψ sono di CdC 2. Ciò è come dire che sotto questa condizione le (14) *caratterizzano* la α -canonicità della trasformazione (12). Si sottolinea che la precedente analisi è *locale*, cioè che gli asserti di *esistenza* delle φ, ψ, Ψ sono validi in un intorno aperto di un punto arbitrario (q,p) del dominio delle (q,p) .

Diciamo adesso M la $(2n \times 2n)$ -matrice formata dai quattro $(n \times n)$ -blocchi $\{q^r, p_s\}_{Q,P}$ in posizione (11) e (22) (sotto l'usuale metafora), $\{q^r, q^s\}_{Q,P}$ in posizione (12), e $\{p_r, p_s\}_{Q,P}$ in posizione (21), e sia al solito S la $(2n \times 2n)$ -jacobiana della trasformazione $(q,p) \mapsto (Q,P)$. Con qualche semplice passaggio si verifica che $(\det S)^2 = \det M$; e quindi, se la trasformazione in oggetto è canonica, sostituendo in M i valori (14) si ha

$$(15) \quad (\det S)^2 = 1,$$

come avevamo già accertato mediante altra procedura (v. S.sez. 6.3.3). Questo permette di affermare che S è non singolare, cioè che la (12) ha un'inversa (locale).

Partendo dall'esistenza di questa inversa, si dimostra che le (14) implicano le seguenti relazioni di forma "mista"³¹

$$(16) \quad \partial Q^h / \partial q^k = \partial p_k / \partial P_h, \quad \partial Q^h / \partial p_k = -\partial q^k / \partial P_h, \quad \partial P_h / \partial q^k = -\partial p_k / \partial Q^h, \quad \partial P_h / \partial p_k = \partial q^k / \partial Q^h:$$

basta esprimere i differenziali dQ e dP in termini dei dq e dp e viceversa i dq e dp in termini dei dQ e dP , e applicare le (14). Si ottiene: $\partial q / \partial Q^i dQ^i + \partial q / \partial P^i dP^i = \partial P_i / \partial p dQ^i - \partial Q^i / \partial p dP_i = -\partial P_i / \partial q dQ^i + \partial Q^i / \partial q dP_i$ da cui le (16) scendono per l'arbitrarietà dei dQ^i e dP_i . Viceversa, sostituendo le (16) nelle parentesi di Lagrange $\{q^h, q^k\}_{Q,P}$, ecc., si ritrovano le (14). Abbiamo così dimostrato l'equivalenza $(14) \Leftrightarrow (16)$.

Infine le (16) implicano le relazioni che si ottengono dalle (14) scambiandovi le $\{ , \}$ con le $[,]$ e le maiuscole con le minuscole, cioè le

$$(17) \quad [P_h, P_k]_{q,p} = [Q^h, Q^k]_{q,p} = 0, \quad [Q^h, P_k]_{q,p} = \delta_k^h.$$

Per dimostrarlo, basta verificare che dalle (16) derivano le seguenti relazioni "duali" tra parentesi di Lagrange e parentesi di Poisson:

$$(18) \quad \{Q^h, Q^k\}_{q,p} = [P_h, P_k]_{q,p}, \quad \{P_h, P_k\}_{q,p} = [Q^h, Q^k]_{q,p}, \quad \{Q^h, P_k\}_{q,p} = [Q^k, P_h]_{q,p} \quad ^{32}$$

(si noti l'inversione dell'ordine $h \rightarrow k$ nell'ultima $[,]$!). Ma come abbiamo appena visto le (16) implicano le (14), e queste ultime equivalgono a quelle che da esse si ottengono scambiandovi le maiuscole con le minuscole. La conclusione è che $(16) \Rightarrow (17)$. Viceversa è anche vero che $(17) \Rightarrow (16)$: ad es. contraendo la terza (17) con $\partial q^i / \partial P_k$ abbiamo

$$(19) \quad \partial q^i / \partial P_h = -\partial Q^h / \partial q^j \partial q^j / \partial Q^s \partial Q^s / \partial p_j - \partial Q^h / \partial p_j (\delta_j^i - \partial q^i / \partial Q^s \partial Q^s / \partial q^j) = \\ = -\partial Q^h / \partial p_i + \partial q^i / \partial Q_s [Q^s, Q^i] = -\partial Q^h / \partial p_i$$

in forza della seconda (17); e questa è per l'appunto la seconda delle (16). In definitiva $(16) \Leftrightarrow (17)$.

³¹ Misto in quanto coinvolge ad un tempo derivate delle maiuscole rispetto alle minuscole e delle minuscole rispetto alle maiuscole.

³² Una caratterizzazione generale del legame tra le parentesi di Lagrange e quelle di Poisson è la seguente. Siano u_i , $1 \leq i \leq 2n$, funzioni arbitrarie di classe C^1 delle (q,p) , e con esse si formino le due $(2n \times 2n)$ -matrici di elementi (ij) $\{u_i, u_j\}_{q,p}$ e $[u_i, u_j]_{q,p}$. Allora (si dimostra) la matrice-prodotto $\{u_i, u_j\}_{q,p} [u_j, u_k]_{q,p}$ è identicamente uguale a $-\delta_{ik}$ (opposto della $(2n \times 2n)$ -matrice unitaria).

Le (16) hanno un'altra interessante conseguenza: se calcoliamo la matrice inversa della jacobiana $\partial(Q,P)/\partial(q,p)$ con le regole standard dell'algebra matriciale, uguagliamo il risultato alla matrice jacobiana $\partial(q,p)/\partial(Q,P)$ e teniamo conto delle (16) in quest'ultima uguaglianza, troviamo che, sotto le (17) (o equivalenti, ad es. le (14)),

$$(20) \quad \det S = 1.$$

Questa (20) non solo conferma, ma rinforza la (15).

Ancora un importante risultato, la cui facile verifica lasciamo al lettore, è quello della invarianza delle parentesi di Lagrange $\{u,v\}$ [di Poisson $[A,B]$], secondo equazioni del tipo (10) [(11)], a fronte di TC nel senso delle (14) [delle (17)]; non solo, ma si prova altrettanto facilmente che se le (10) [le (11)] valgono per *ogni* coppia $(u,v) \in V$ [per *ogni* coppia $(A,B) \in \mathcal{A}^1(U,R)$], allora valgono le (14) [le (17)].

Non sarà sfuggito al lettore che le dimostrazioni (più o meno laboriose, ma elementari) delle equivalenze $(14) \Leftrightarrow (16) \Leftrightarrow (17)$, nonché della (20), non hanno richiesto altro che la differenziabilità continua delle $Q(q,p)$, $P(q,p)$. Per contro, come abbiamo rimarcato più sopra, la precedente dimostrazione della equivalenza $(13) \Leftrightarrow (14)$ presuppone che le Q e la Ψ siano di CdC 2. A questo punto diventa legittimo sondare la possibilità di abbandonare la definizione (α) di canonicità della (12) (di CdC 2) in favore di quella che valgono le (14) o equivalenti (“definizione (β) di canonicità” della (12), supposta soltanto di CdC 1). Secondo questo programma, si tratterebbe quindi di provare che se le (12) sono β -canoniche allora soddisfano la relazione (13) pur essendo soltanto di CdC 1. (La dimostrazione del contrario è già stata data).

Proveremo che è proprio così, cioè che la β -canonicità implica effettivamente la α -canonicità. Per cominciare, ci limiteremo a trasformazioni (12) (di CdC 1) per cui la matrice $\partial(Q)/\partial(p)$ è non singolare, cioè per le quali le $Q = Q(q,p)$ sono (localmente) invertibili rispetto alle p secondo certe

$$(21) \quad p = \chi(q,Q),$$

e quindi

$$(22) \quad P(q,p) = P(q,\chi(q,Q)) \equiv \sigma(q,Q).$$

Posto $Q(q,p) = Q(q,\chi(q,Q)) \equiv \tau(q,Q)$, derivando rispetto a q^k la

$$(23) \quad Q = \tau(q,Q)$$

si ha $0 = \partial\tau^s/\partial q^k = \partial Q^s/\partial q^k + \partial Q^s/\partial p_j \partial\chi_j/\partial q^k$, quindi $-\partial Q^r/\partial p_k \partial Q^s/\partial q^k = \partial Q^r/\partial p_k \partial Q^s/\partial p_j \partial\chi_j/\partial q^k$.

Scambiando in questa r con s , per differenza si ha $[Q^r, Q^s]_{q,p} = \partial Q^r/\partial p_k \partial Q^s/\partial p^j (\partial\chi_j/\partial q^k - \partial\chi_k/\partial q^j) = 0$. Ma per ipotesi la $[Q^r, Q^s]_{q,p}$ a 1° membro è nulla e la matrice $\partial(Q)/\partial(p)$ è non singolare; quindi si conclude che

$$(24) \quad \partial\chi_j/\partial q^k = \partial\chi_k/\partial q^j. \quad {}^{33}$$

Prima di proseguire, enunciamo due lemmi la cui facile dimostrazione lasciamo al lettore.

L₁. Se la (12) è β -canonica, per una generica funzione di CdC 1 $G = G(q, Q)$ risulta $[G, Q^h]_{q,p} = \partial G/\partial q^j \partial Q^h/\partial p_j$. Se in particolare G è uguale alla Ψ della (α), troviamo $[\Psi, Q^h]_{q,p} = -p_j \partial Q^h/\partial p_j$, e quindi più in particolare, che

$$(25) \quad p_j \partial Q^h/\partial p_j = 0$$

se $\Psi = \text{cost.}$ #

L₂. Alle stesse condizioni di L₁, $[G, P_h]_{q,p} = \partial G/\partial Q^h + \partial G/\partial q^j \partial P_h/\partial p_j$. Se ancora poniamo $G = \Psi$, troviamo $[\Psi, P_h]_{q,p} = P_h - p_j \partial P_h/\partial p_j$, e quindi che

$$(26) \quad P_h = p_j \partial P_h/\partial p_j$$

se $\Psi = \text{cost.}$ # ³⁴

Trasformazioni β -canoniche con $\Psi = \text{cost}$ si dicono **omogenee**. La ragione è semplice, perché in tal caso le (25) affermano che le Q^h sono omogenee di grado zero, e rispettivamente le (26) che le P_h sono omogenee di grado 1 nelle p .

Ciò premesso, tornando alla (23) ne ricaviamo $\delta_k^i = \partial\tau^i/\partial p_j \partial\chi_j/\partial Q^k$ per derivazione rispetto a Q^k . D'altra parte, utilizzando L₁ e ponendovi σ_k in luogo di G , abbiamo $[\sigma_k, Q^h]_{q,p} = \partial\sigma_k/\partial q^j \partial Q^h/\partial p_j$. In forza della (22), per ipotesi è $[\sigma_k, Q^h]_{q,p} = -\delta_k^h$, e quindi $\partial Q^h/\partial p_j (\partial\sigma_k/\partial q^j + \partial\chi_j/\partial Q^k) = 0$; per la solita assunta non-singularità della $\partial(Q)/\partial(p)$, abbiamo dunque

$$(27) \quad \partial\sigma_k/\partial q^j + \partial\chi_j/\partial Q^k = 0.$$

Ancora ponendovi σ_k in luogo di G , utilizziamo ora L₂. Tenendo conto della (27) nell'ultimo passaggio, otteniamo $[\sigma_k, P_h]_{q,p} = \partial\sigma_k/\partial Q^h + \partial\sigma_k/\partial q^j \partial P_h/\partial p_j = \partial\sigma_k/\partial Q^h - \partial\chi_j/\partial Q^k \partial P_h/\partial p_j$. Ma ancora in forza della (22), $[\sigma_k, P_h]_{q,p} = 0$, e quindi $\partial\sigma_k/\partial Q^h = \partial\chi_j/\partial Q^k \partial P_h/\partial p_j$. D'altra parte, derivando rispetto a Q^k la (22) abbiamo $\partial\sigma_h/\partial Q^k = \partial\chi_j/\partial Q^k \partial P_h/\partial p_j$; ovvero, per confronto con la precedente,

$$(28) \quad \partial\sigma_k/\partial Q^h = \partial\sigma_h/\partial Q^k.$$

Le (24, 27, 28) sono manifestamente necessarie e sufficienti a che esista (localmente) una funzione di CdC 2 di (q, Q) , diciamo $\Omega = \Omega(q, Q)$, per la quale

$$(29_1) \quad \chi_i = -\partial\Omega/\partial q^i,$$

³³ Per la verità, il problema lineare omogeneo che conduce alla conclusione (24) non ha la struttura standard in cui una matrice quadrata non singolare è moltiplicata a destra per una colonna e la colonna risultante è uguagliata a zero, secondo il familiare schema $L_{ik}x_k = 0 \Rightarrow x_k = 0$. Invece, esso ha la struttura $(\circ) L_{jh}L_{ik}x_{kh} = 0$, dove x_{kh} sono elementi di una matrice quadrata. Un momento di riflessione prova tuttavia che sotto la stessa condizione (non-singularità della matrice $\{L_{ik}\}$), la (\circ) implica $x_{kh} = 0$. Lo stesso varrebbe se a moltiplicare x_{kh} ci fossero *due* diverse matrici non singolari (diciamo, secondo la $M_{jh}L_{ik}x_{kh} = 0$); oppure tre di tali matrici non singolari moltiplicassero un oggetto a tre indici (secondo la $N_{pr}M_{jh}L_{ik}x_{khr} = 0$); ... e così via.

³⁴ Va da sé che se G fosse funzione di (p, P) invece che di (q, Q) , varrebbero versioni "duali" di L₁ e L₂, cioè $[G, Q^h]_{q,p} = -\partial G/\partial P^h - \partial G/\partial p^j \partial Q^h/\partial q_j$ (L₃), e rispettivamente $[G, P_h]_{q,p} = -\partial G/\partial p_j \partial P_h/\partial q^j$ (L₄).

$$(29_2) \quad \sigma_k = \partial\Omega/\partial Q^k,$$

e che è quindi determinabile per quadrature (a meno di una costante additiva) in termini delle χ e delle σ . Per tale Ω , risulta $d\Omega = \partial\Omega/\partial q^i dq^i + \partial\Omega/\partial Q^k dQ^k = -\chi_i dq^i + \sigma_k dQ^k$, ovvero, sempre in forza delle (21, 22), $P_k dQ^k = p_i dq^i + d\Omega$. Ma questa è precisamente la (13), avendovi identificato $\Psi(q,p)$ con $\Omega(q, Q(q,p))$. L'implicazione "β-canonicità" \Rightarrow "α-canonicità" è così provata sotto la condizione $\det\{\partial(Q)/\partial(p)\} \neq 0$.

Quanto a quest'ultima condizione, si può dimostrare che essa *non* è essenzialmente restrittiva. Una discussione completa di questo problema è al di là dei nostri scopi presenti, per cui ci limiteremo ad illustrarne i punti essenziali.³⁵ Premettiamo i due seguenti lemmi:

M₁. Sia $(\gamma(1), \dots, \gamma(n))$ una arbitraria permutazione di $(1, \dots, n)$, e si ponga:

$$(30_1) \quad Q^i =: q^{\gamma(i)},$$

$$(30_2) \quad P_k =: p_{\gamma(k)},$$

per $i = 1, \dots, n$. Si verifica subito che la trasformazione (30) è β-canonica, e che il suo determinante jacobiano è uguale a 1 (indipendentemente dal fatto già accertato che lo sarebbe comunque per una trasformazione β-canonica, vedi la (20)); #

M₂. Sia π un intero $\leq n$ e ≥ 0 , e si ponga

$$(31_1) \quad Q^i =: p_i \quad \text{e} \quad P_i =: -q^i$$

per $1 \leq i \leq \pi$ (se $\pi = 0$ la (30₁) è vuota); e

$$(31_2) \quad Q^j =: q^j \quad \text{e} \quad P_j =: p_j$$

per $\pi + 1 \leq j \leq n$ (se $\pi = n$ la (31₂) è vuota). Ancora, si verifica subito che la trasformazione (31) è β-canonica, e che il suo determinante jacobiano è uguale a 1 (indipendentemente dalla (20)). #

Trasformazioni del tipo (30) [(31)] si dicono **trasformazioni canoniche elementari del primo [del secondo] tipo**. Si verifica facilmente che l'insieme di tutte le trasformazioni canoniche elementari (TCE) (del primo o del secondo tipo) costituisce un gruppo sotto composizione. Sussiste allora il seguente teorema:

T₂. «Se le funzioni $Q = Q(q,p)$ appartengono ad una trasformazione β-canonica, esiste una TCE delle (q,p) , diciamo $q^*(q,p)$ e $p^*(q,p)$, per la quale, posto $\mathcal{Q}(q^*,p^*) \equiv Q(q(q^*,p^*),p(q^*,p^*))$, risulta $\det\{\partial(\mathcal{Q})/\partial(p^*)\} \neq 0$.»

Quindi la precedente condizione $\det\{\partial(Q)/\partial(q)\} \neq 0$ non è essenzialmente restrittiva, nel senso che ad essa ci si può comunque ridurre mediante una conveniente TCE. Un esame abbastanza approfondito della situazione permette allora di *ridurre* il caso generale a quello più sopra

³⁵ Per i necessari dettagli, rinviamo il lettore al Cap. 6 del trattato di C. Caratheodory "Variationsrechnung und Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung", Band 1, engl. transl. Holden-Day 1965; al quale capitolo la presente sintesi è sostanzialmente ispirata.

considerato, in cui le (29) si sono ottenute partendo dalla $\det\{\partial(Q)/\partial(p)\} \neq 0$. Si perviene così alla conclusione che *la β -canonicità equivale alla α -canonicità* anche nel caso generale.^{36, 37} Un facile lavoro di completamento permette anche, a questo punto, di asserire che *l'insieme di tutte le TC (secondo $(\alpha \equiv \beta)$) costituisce un gruppo sotto composizione*.³⁸

Giunti alla fine di questa lunga sezione 6.3, non è difficile riallacciare la teoria delle trasformazioni $(\alpha \equiv \beta)$ -canoniche a quella delle TC della S.sez. 6.3.3 (definizione standard). Il teorema che lo stabilisce è il seguente.

T₃. «Con t appartenente ad un intervallo-base, sia

$$(32) \quad (Q,P) = (Q,P)(t,q,p)$$

una famiglia di trasformazioni con parametro t , di CdC 1 e localmente invertibile rispetto alle $(q,p) \forall t$. Supponiamo poi che, $\forall t$, valgano le $d_t q = 0$, $d_t p = 0$ e le (17); allora le funzioni di t (32) evolvono secondo equazioni di Hamilton con hamiltoniana $K = K(t,Q,P)$ determinata unicamente a meno di un addendo funzione del solo t . Viceversa, si considerino le (32) come funzioni di t a $2n$ parametri (q,p) , e si supponga che esse evolvano secondo le equazioni di Hamilton con hamiltoniana K . Allora la (32) è canonica $\forall t$.»

Dim. Poiché $\det\partial(Q,P)/\partial(q,p) \neq 0 \forall t$ per ipotesi, eliminando le (q,p) in favore delle (Q,P) nelle loro t -derivate possiamo scrivere queste ultime come $\partial Q/\partial t = \varphi(t,Q,P)$ e rispettivamente $\partial P/\partial t = \psi(t,Q,P)$, dove φ e ψ sono ben definite funzioni di CdC 1 dei loro argomenti. Valendo le (17), abbiamo $[\varphi, Q^j] = -\partial\varphi/\partial P_j$, $[\varphi, P_j] = \partial\varphi/\partial Q^j$, e le stesse con ψ in luogo di φ (per brevità, scriviamo qui le $[\ ,]_{q,p}$ come $[\ ,]$). t -derivando le (17) abbiamo $[\varphi^i, Q^j] + [Q^j, \varphi^i] = 0$, $[\psi_i, P_j] + [P_i, \psi_j] = 0$ e $[\psi_i, Q^j] + [P_i, \varphi^j] = 0$, quindi $\partial\varphi^i/\partial P_j = \partial\varphi^j/\partial P_i = 0$, $\partial\psi_i/\partial Q^j = \partial\psi_j/\partial Q^i$, e $\partial\psi_i/\partial P_j + \partial\varphi^i/\partial Q^j = 0$. Queste sono le condizioni necessarie e sufficienti all'esistenza di una funzione $K = K(t,Q,P)$ determinata (localmente) per quadrature dalle $\partial K/\partial P_i = \varphi^i (= Q')$ e $-\partial K/\partial Q^j = \psi_j (= P')$ a meno di un addendo funzione della sola t , secondo la tesi. Viceversa, se le funzioni (32) evolvono secondo equazioni

³⁶ Nelle parole di Caratheodory (Constantin, Berlino 1873, Monaco 1950), questo risultato «non ha soltanto un importante significato teorico, ma forma la base per la derivazione di formule che si prestano a numerose applicazioni» (ad esempio, in meccanica celeste). Non a torto, alcuni chiamano «teorema di Caratheodory» l'equivalenza in oggetto.

³⁷ È anche interessante osservare che $\det\partial(p)/\partial(Q) = (-1)^n \det\{\partial^2\Omega/\partial q\partial Q\}$, per cui essendo il primo determinante $\neq 0$ (è reciproco di $\det\partial(Q)/\partial(p)$), anche il secondo lo è. Ma $\det\partial(q,p)/\partial(q,Q) = \det\partial(p)/\partial(Q) = (-1)^n \det\{\partial^2\Omega/\partial q\partial Q\}$ (vedi le (29₁)): possiamo quindi scrivere $\det\partial(Q,P)/\partial(q,p)$ come $[\det\partial(Q,P)/\partial(q,Q)] : [\det\partial(q,p)/\partial(q,Q)]$. Il numeratore di questa è $\det\partial(Q,P)/\partial(q,Q) = (-1)^n \det\partial(Q,P)/\partial(Q,q) = (-1)^n \det\partial(P)/\partial(q) = (-1)^n \det\{\partial^2\Omega/\partial q\partial Q\}$ (vedi le (29₂)), uguale perciò al denominatore. Si conclude che $\det\partial(Q,P)/\partial(q,p) = 1$, secondo un risultato già noto per altra via.

³⁸ Limitato a trasformazioni α -canoniche omogenee (\equiv con Ψ costante), questo fondamentale teorema si trova già in S. Lie, F. Engel «Theorie der Transformationsgruppen», 2 Bände, Teubner 1888, neue Ausg. 1930. Il punto di partenza della presente dimostrazione è abbastanza banale, e consiste nel verificare che, se $(q,p) \mapsto (Q,P)$ e $(Q,P) \mapsto (Q^*,P^*)$ sono $(\alpha \equiv \beta)$ -canoniche anche $(q,p) \mapsto (Q^*,P^*)$ lo è. Siano infatti A e B funzioni arbitrarie di classe C^1 di (q,p) , e si ponga $A_2(Q^*,P^*) = A_1(Q,P) = A(q,p)$, $B_2(Q^*,P^*) = B_1(Q,P) = B(q,p)$; allora da $[A,B]_{q,p} = [A_1,B_1]_{Q,P}$ e $[A_1,B_1]_{Q,P} = [A_2,B_2]_{Q^*,P^*}$ segue subito $[A,B]_{q,p} = [A_2,B_2]_{Q^*,P^*}$. L'equivalenza della canonicità alle precedenti uguaglianze tra parentesi di Poisson (per arbitrarie funzioni (A,B)) è già stata richiamata (vedi la (11)).

canoniche di hamiltoniana K , le parentesi di Lagrange $\{q^i, q^j\}_{Q,P}$, $\{p_i, p_j\}_{Q,P}$, $\{q^i, p_j\}_{Q,P}$ non dipendono da t , cfr. teorema (T₁). Basta dare a queste parentesi i valori (14) in $t = \underline{t}$ per garantire la canonicità della trasformazione $\forall t$. In particolare questa è assicurata se $(q,p) = (Q,P)(\underline{t},q,p)$, perché la trasformazione è allora l'identità in $t = \underline{t}$, e le parentesi di Lagrange diventano le corrispondenti parentesi fondamentali. #

Tornando alla uguaglianza (13), questa deve ora scriversi $P \cdot dQ = d\Psi$ in $2n + 2$ variabili, avendo introdotto le due nuove variabili $q^0 = t$ e p_0 . Consideriamo la trasformazione

$$(33) \quad Q^0 =: q^0, \quad Q^h = Q^h(q^0, q, p), \quad P_0 = p_0, \quad P_h = P_h(q^0, q, p),$$

ove (q, p, Q^h, P_h) hanno l'usuale significato. Quindi la (13) si scrive $P_0 dt + P_i dQ^i = \partial_t \Psi dt + \partial \Psi / \partial Q^i dQ^i$, dalla quale risulta subito $P_0 = \partial_t \Psi$ e $P_i = \partial \Psi / \partial Q^i$. Queste ultime non sono altro che la (6.3.3, 5₃) e rispettivamente le (6.3.3, 5₂) se si identificano Ψ con $-G$ e P_0 con $-K$.

Chiudiamo ricordando che le equazioni (17) hanno avuto un ruolo importante nella induzione dei fondamenti della meccanica quantistica, fornendo con ciò un esempio tra i più significativi della funzione euristica che una analogia formale può avere nella elaborazione di un nuovo modello fisico-matematico. Il ben noto **principio di corrispondenza** al quale ci riferiamo è descritto dalla

$$(34) \quad [A, B]_{q,p} \leftrightarrow 2\pi(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})/(ih),$$

dove A, B nella parentesi di Poisson a 1° membro sono *funzioni* delle variabili canoniche, mentre \mathcal{A}, \mathcal{B} nel commutatore a 2° membro sono gli associati *operatori* quantistici (con $i = \sqrt{-1}$ e $h \equiv$ costante di Planck).

6.4) DINAMICA ANALITICA II

6.4.1) L'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI

Torniamo alla procedura di generazione di trasformazioni canoniche (TC) di cui alla S.sez. 6.3.3 per dato sistema dinamico $H = H(t, q, p)$, $q \equiv \langle q^1, \dots, q^n \rangle$, $p \equiv \langle p_1, \dots, p_n \rangle$, in particolare mediante funzione generatrice (di CdC 2) del 2° tipo, vedi (6.3.3, 9), cioè $G_2 = G_2(t, q, P)$, $P \equiv \langle P_1, \dots, P_n \rangle$. La logica di questa procedura si può in certo senso rovesciare *imponendo* che la nuova hamiltoniana $K = H + \partial G_2 / \partial t = K(t, Q, P)$, con $Q \equiv \langle Q^1, \dots, Q^n \rangle =: \partial G_2 / \partial P$, sia una costante. Senza limitazioni di generalità (nella presente prospettiva), questa costante può porsi uguale a zero. Tenendo conto della (6.3.3, 9₁), la (6.3.3, 9₃) diventa allora, scrivendo per brevità W in luogo di G_2 ,

$$(1) \quad H(t, q, \partial W / \partial q) + \partial W / \partial t = K = 0,$$

identicamente in un aperto di \mathbb{R}^{2n+1} intorno ad un suo punto-base $(\underline{t}, \underline{q}, \underline{P})$. L'equazione (1) nella incognita W è universalmente nota come **equazione di Hamilton-Jacobi** (EHJ). Sottolineiamo che la EHJ impone di essere identicamente nulla ad una funzione di (t, q, P) ; infatti, i due addendi di cui si compone il suo 1° membro sono, per la data H , funzioni di (t, q, P) perché $\partial W / \partial q$ e $\partial W / \partial t$ lo sono.

La EHJ è una EDP del 1° ordine nella incognita $W = W(t, q, P)$. Innanzitutto, le equazioni canoniche $d_t Q = \partial K / \partial P = 0$, $d_t P = -\partial K / \partial Q = 0$ ci assicurano che le Q e le P sono costanti sostanziali rispetto a t (nel seguito, “costanti del moto” o semplicemente “costanti”), $d_t Q = 0$, $d_t P = 0$. Osserviamo anche che W non compare esplicitamente nella (1) come tale, ma soltanto attraverso le sue $n + 1$ derivate parziali $\partial W / \partial q$, $\partial W / \partial t$; quindi siamo nel secondo dei casi considerati nella S.sez 5.4.3, e ivi espresso dalla (5.4.3, 19). Si vede dunque che se

$$(2) \quad \Delta =: \det \{ \partial^2 W / \partial q^i \partial P_j \}_{i,j=1 \div n} \neq 0$$

in $(\underline{t}, \underline{q}, \underline{P})$, W è un integrale completo della (1) in un aperto intorno a quel punto di riferimento. Le variabili indipendenti nella (1) sono infatti $n + 1$ (la t e le q) ed un suo integrale completo deve contenere “essenzialmente” n parametri secondo la richiesta enunciata nella S.sez. 5.4.3 come “la matrice $\{ \phi^*_{x a'} \}_{x, a'}$ ha rango $n - 1$ ”, cfr. (5.4.3, 20); ma la (2) equivale appunto a questa richiesta, avendo posto W in luogo di ϕ^* , q in luogo di x' e P in luogo di a' . Se esiste come definita, la $W = W(t, q, P)$ si dice una **funzione principale** (di Hamilton) **associata a H**.

La (2) è la condizione che garantisce l'invertibilità *locale* delle n equazioni (6.3.3, 9₁) che qui riscriviamo come

$$(3) \quad p = \partial W / \partial q,$$

rispetto agli n parametri P . Sono quindi unicamente ¹ definite n *funzioni* $P(t,q,p)$ con *valori* costanti $\beta \equiv \langle \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ quando alle (q,p) si sostituiscano soluzioni $(q,p)(t)$ delle equazioni canoniche

$$(4) \quad d_t q = \partial H / \partial p, \quad d_t p = -\partial H / \partial q.$$

Vale a dire, se $q = q(t)$, $p = p(t)$ sono soluzioni delle (4), abbiamo

$$(5_1) \quad P(t, q(t), p(t)) = \beta.$$

Sostituendo poi le $P(t,q,p)$ nelle (6.3.3, 9₂), sono definite n altre *funzioni* $Q(t,q,p) =: \partial W / \partial P(t,q,P(t,q,p))$, anch'esse con *valori* costanti $\alpha \equiv \langle \alpha^1, \dots, \alpha^n \rangle$, quando alle (q,p) ancora si sostituiscano soluzioni $(q,p)(t)$ delle (4), cioè

$$(5_2) \quad Q(t, q(t), p(t)) = \alpha.$$

In definitiva, essendo la trasformazione canonica $(t, Q, P) \leftrightarrow (t, q, p)$ (localmente) 1-diffeomorfa, le (q,p) sono espresse come funzioni di (t, α, β) . Ciò fornisce la soluzione delle (4), che è unica, ad esempio, sotto le condizioni iniziali (\equiv in $t = \underline{t}$) $q(\underline{t}) = \underline{q}$, $p(\underline{t}) = \underline{p}$, una volta che le $2n$ costanti (α, β) siano determinate dalle condizioni iniziali stesse (localmente) invertibili rispetto alle (α, β) , secondo la $(\underline{t}, \alpha, \beta) \leftrightarrow (\underline{t}, \underline{q}, \underline{p})$. La soluzione del SDO canonico (4), sotto le date condizioni accessorie, è così costruita in termini di una funzione principale di Hamilton $W(t, q, P)$ associata a H , integrale completo di una EDP, ignorando ogni procedura diretta di soluzione del SDO (4) stesso.

Il caso in cui H non dipende esplicitamente da t nell'aperto intorno al punto di riferimento $(\underline{t}, \underline{q}, \underline{p})$ (caso cosiddetto "conservativo") presenta un interesse speciale. Allora, la precedente procedura può (ma non necessariamente deve) ricevere una formulazione specifica: poiché infatti è $d_t H = \partial_t H = 0$, H è una delle $2n$ costanti del moto, diciamo E , che (seguendo Jacobi) potremo identificare con una delle β ; diciamo, con β_n se $\partial H / \partial p_n \neq 0$ ² in $(\underline{t}, \underline{q}, \underline{p})$. Evidentemente, E è interpretata come l'energia totale del sistema. In questo caso, l'EHJ dice che $\partial W / \partial t = -E$, ossia che

$$(6) \quad W(t, q, P) = -Et + w(q, P)$$

dove $w(q, P) =: W(0, q, P)$. Con questa posizione, la condizione (2) che W sia un integrale completo della (1) si riscrive con w al posto di W , ed è soggetta ad una notevole semplificazione. Precisamente, si verifica senza difficoltà che $\Delta = (\partial H / \partial p_n)^{-1} \Delta'$, dove $\Delta' =: \det \{ \partial^2 w / \partial q^i \partial P_j \}_{i,j=1, \dots, n-1}$ ³. Quindi la condizione di completezza è ora, equivalentemente, la

¹ Qui e in situazioni analoghe l'esistenza/unicità è soltanto *locale*, ma non lo ricorderemo in ogni occasione.

² È ovvio che ciò debba esser vero per almeno una p , perché in caso contrario la EHJ cesserebbe di essere differenziale. Il rapporto tra la scelta di β_n come costante da identificare con E e la condizione $\partial H / \partial p_n \neq 0$ sarà chiarito tra un momento.

³ Se $\partial H / \partial p_n \neq 0$, Δ può scriversi come $(\partial H / \partial p_n)^{-1} \Delta''$, dove Δ'' si ottiene da Δ moltiplicandone l'ultima riga per $\partial H / \partial p_n$. Δ'' può poi essere modificato, senza alterarne il valore, sostituendo alla sua ultima riga la riga $\partial H / \partial p_n \partial^2 w / \partial q^h \partial P_1$, $\partial H / \partial p_n \partial^2 w / \partial q^h \partial P_2$, ..., $\partial H / \partial p_n \partial^2 w / \partial q^h \partial E$ (somma da 1 a n su h), cioè la $\partial H / \partial p_n \partial p_h / \partial P_1$, $\partial H / \partial p_n \partial p_h / \partial P_2$, ..., $\partial H / \partial p_n \partial p_h / \partial E$. Poiché $p = \partial W / \partial q = \partial w / \partial q = p(q, P)$, quest'ultima riga coincide quindi con $\partial P_n / \partial P_1$, $\partial P_n / \partial P_2$, ..., $\partial P_n / \partial P_n$, cioè con 0, 0, ..., 1. Segue che $\Delta' = \Delta''$, da cui la tesi.

$$(2') \quad \Delta' \neq 0.$$

Quanto alle (3), o a questo punto le

$$(3') \quad p = \partial w / \partial q,$$

esse equivalgono (localmente) alle $P = P(q,p) = \beta$ perché w non contiene t (questa è la presente versione delle (5₁)), in particolare con $P_n \equiv E = P_n(q,p) \equiv H(q,p)$. Le (5₂) sono poi da una parte le $n - 1$

$$(7) \quad Q^- = Q^-(q,p) = \partial w / \partial P^- = \alpha^-,$$

con $Q^- \equiv \langle Q^1, \dots, Q^{n-1} \rangle$, $P^- \equiv \langle P_1, \dots, P_{n-1} \rangle$, $\alpha^- \equiv \langle \alpha^1, \dots, \alpha^{n-1} \rangle$, e dall'altra la

$$(7_n) \quad Q^n = Q^n(t,q,p) = \partial W / \partial P_n = \partial w / \partial P_n - t = \alpha^n.$$

Le $n - 1$ equazioni (7) sono relazioni tra le q in cui non compare t , e che possono univocamente risolversi rispetto alle $q^- \equiv \langle q^1, \dots, q^{n-1} \rangle$ esprimendole come funzioni di q^n e delle $2n - 1$ costanti (α^-, β) , perché la matrice ottenuta dalla $\{\partial^2 w / \partial q^i \partial P_j\}_{i,j=1=n}$ sopprimendovi l'ultima riga ha rango $n - 1$. Queste $n - 1$ funzioni di q^n e delle $2n - 1$ costanti α^-, β ,

$$(8) \quad q^- = q^-(q^n, \alpha^-, \beta)$$

danno quindi (localmente) la “traiettoria” del punto q nel relativo spazio R^n . La (7_n), invece, dà (sempre localmente) la “legge oraria” del moto nella forma *implicita* $\alpha^n + t = \partial w / \partial P_n(q,P) = \partial w / \partial P_n(q^-(q^n, \alpha^-, \beta), q^n, \beta)$. Se quest'ultima è invertibile rispetto a q^n , q^n è espressa come funzione di $\alpha^n + t$ e delle (α^-, β) , secondo la legge oraria *esplicita*

$$(8_n) \quad q^n = q^n(\alpha^n + t, \alpha^-, \beta).$$

Quanto a α^n , essa si determina mediante la condizione iniziale $\alpha^n + \underline{t} = \partial w / \partial P_n(q, \alpha^-, \beta)$. Nella disponibilità della (8_n), il moto nella forma esplicita $q = q(\alpha^n + t, \alpha^-, \beta)$ si ha poi sostituendo la (8_n) nelle (8). Le $2n - 1$ costanti (α^-, β) si ottengono infine dalle altrettante condizioni iniziali $q^- = q^-(q^n, \alpha^-, \beta)$ e $p = \partial w / \partial q(q^-, q^n, \beta)$. Le due procedure, quella “generale” che parte dalla (1), e quella “speciale” che, se $\partial H / \partial t \equiv 0$, parte dalla cosiddetta **equazione di Hamilton-Jacobi (EHJ) ridotta**

$$(9) \quad H(q, \partial w / \partial q) = E,$$

sono ovviamente equivalenti. L'omogeneità del problema rispetto al tempo permette di scegliere ad arbitrio il tempo iniziale \underline{t} , ad es. $\underline{t} = 0$, nel qual caso $\alpha^n = Q^n \partial w / \partial P_n(q, \beta)$. Questa libertà riflette il carattere *autonomo* delle equazioni differenziali di evoluzione nel caso conservativo. Si noti anche che, sotto la (2'), la soluzione $w = w(q, P^-, \beta_n)$ della (9) è un integrale completo di questa, perché un n -mo parametro è additivo in w e può ignorarsi, mentre la costante β_n , l'energia E del sistema, è presente nella stessa (9) e da essa deve dipendere ogni soluzione. Se esiste come definita, $w = w(q, P^-, E)$ si dice **funzione caratteristica** (di Hamilton) **associata a H** (indipendente da t).

In generale, non ci si dovrebbero attendere speciali vantaggi dalla prospettiva di risolvere il SDO canonico (4) a partire da un integrale completo $W(t,q,P)$ della (1) – oppure di risolvere lo stesso SDO per sistemi conservativi (che in tal caso sarà *autonomo*) a partire da un integrale completo $w(q,P,E)$ della (9); e ciò, anche perché la *disponibilità* di un tale integrale completo è a priori alquanto aleatoria. In particolare riferendoci alla (9), una possibilità del genere sussiste se – e in pratica soltanto se – la (9) stessa può essere risolta “per separazione (completa) delle variabili”. Applicata alla (9), una tale procedura prevede da una parte che la soluzione $w(q)$ sia esprimibile come somma di addendi $w_{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) ciascuno dei quali dipendente al più dalla corrispondente q^i , cioè che $w(q) = \sum_{i=1}^n w_{(i)}(q^i)$; e dall'altra, che anche $H(q,p)$ sia similmente esprimibile come somma di addendi $H_{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) ciascuno dipendente al più da q^i e da $p_i = \partial w / \partial q^i \equiv dw_{(i)} / dq^i$,⁴ cioè che $H(q, \partial w / \partial q) = \sum_{i=1}^n H_{(i)}(q^i, dw_{(i)} / dq^i)$. In tal caso la (9) si riduce evidentemente alla

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n H_{(i)}(q^i, dw_{(i)} / dq^i) = E,$$

la quale implica che ogni addendo $H_{(i)}$ sia uguale ad una corrispondente costante $C_{(i)}$ (“costante di separazione”) sotto il vincolo

$$(10') \quad \sum_{i=1}^n C_{(i)} = E.$$

Ognuna delle equazioni differenziali $H_{(i)}(q^i, dw_{(i)} / dq^i) = C_{(i)}$ è ordinaria (non normale) del 1° ordine in $w_{(i)}$; *supposta invertibile rispetto a $dw_{(i)} / dq^i$* , essa fornisce $w_{(i)}$ *mediante una quadratura* a meno di una costante del moto additiva. In conclusione la $w = \sum_{i=1}^n w_{(i)}$ contiene n costanti (le costanti di separazione sotto la (10'), più la E), e se le contiene “essenzialmente” (vedi la (2')), è un integrale completo della (9). Tipicamente, tuttavia, $dw_{(i)} / dq^i$ compare in $H_{(i)}$ al quadrato; allora nel miglior caso essa è determinata a meno del segno. Raramente segnalato, questo inconveniente dà luogo a prevedibili complicazioni (dovendosi selezionare il segno corretto caso per caso) se l'obiettivo è quello di costruire soluzioni non strettamente locali. Ciò a parte, la separabilità completa della (9) fornisce la soluzione mediante quadrature, e questo può essere un significativo vantaggio di fronte alla prospettiva di risolvere direttamente il SDO canonico (4). L'importanza di questa possibilità è stata poi amplificata dal successo che essa ha assicurato in poche ma fondamentali applicazioni (vedi il proseguimento di questa sezione).⁵

⁴ Qui e più avanti scriviamo $dw_{(i)} / dq^i$, piuttosto che $\partial w_{(i)} / \partial q^i$, ignorando il fatto che $w_{(i)}$ può dipendere anche da costanti del moto, al solo scopo di ricordare che essa *non* dipende dalle q_j per $j \neq i$. Naturalmente non si deve sommare su i in tali $dw_{(i)} / dq^i$, e questo è ricordato dalle parentesi in $w_{(i)}$.

⁵ A parte l'importanza concettuale della cosiddetta “Teoria di Hamilton-Jacobi” (vedi S.sez. 7.2.1), si può affermare che l'enfasi ancor oggi riservata dalla manualistica istituzionale al metodo di H.J. per la soluzione del SDO canonico (4) è giustificata da ragioni quasi soltanto storiche. La bassa universalità del metodo da una parte, e il suo essere fondato su idee essenzialmente localistiche – proprio quando si mira invece a soluzioni “in grande” – lo rendono assai meno importante, a fini pratici generali, di un approccio diretto (alla soluzione dello stesso SDO) mediante tecniche standard

La stessa transizione dalla (1) alla (9) (se H non contiene esplicitamente t) può considerarsi ottenuta mediante una procedura di “separazione parziale” di t dalle q ; anzi tale procedura si può pensare applicabile ad una equazione anche più generale della (1), cioè ad una equazione del tipo (*) $H(q, \partial W / \partial q) + H^*(t, \partial W / \partial t) = 0$, dove H^* è una funzione data (di CdC 2) dei suoi due argomenti, nella ipotesi che $W(t, q)$ sia somma di un addendo $W_{\neq}(q)$ dipendente dalle sole q e di un addendo $W_{=}(t)$ dipendente dalla sola t . La (*) implica infatti che i due termini a 1° membro siano entrambi costanti ed opposti, diciamo uguali a $-C$ e rispettivamente a C , avendosi così (+) $H(q, \partial W_{\neq} / \partial q) = -C$ e $H^*(t, dW_{=} / dt) = C$. La seconda di queste equazioni differenziali è ordinaria, e fornisce $W_{=}$ (a meno della solita costante additiva) mediante una inversione rispetto a $dW_{=} / dt$ (se possibile) ed una quadratura, come funzione di t e di C . Se poi, come è nel nostro caso, è semplicemente $H^*(t, dW_{=} / dt) \equiv dW_{=} / dt$, trascurando la costante additiva in $W_{=}$ abbiamo $W_{=} = Ct$, e la (*) si riduce immediatamente alla (+), ossia alla (9) identificando W_{\neq} con w e $-C$ con E .

È importante sottolineare che la possibile separabilità completa della (9) non dipende soltanto dalla natura del problema fisico, ma anche dalla scelta del sistema di coordinate generalizzate q con il quale si opera. Ad esempio, nel classico “problema di Keplero” di cui alla prossima sottosezione, le coordinate cartesiane non permettono la separazione completa, mentre la permettono le coordinate sferiche, e a maggior ragione le coordinate polari 2-dim se si tiene conto a priori della planeità del moto. Un altro esempio è quello del cosiddetto “problema dei tre corpi” in interazione gravitazionale (newtoniana), nel quale non vi è scelta di coordinate con la quale si possa ottenere la separazione completa. Questa è una delle ragioni per cui il problema dei tre corpi ha sfidato le capacità dei migliori matematici del tempo, ed è ritenuto generalmente irrisolvibile nel senso standard dell’analisi. Per converso esistono sistemi fisici per i quali la separazione si ottiene in più d’un sistema di coordinate. Condizioni *sufficienti* alla separabilità completa della EHJ ridotta sono state indicate da Stäckel (Paul, 1863-1920), nella ipotesi che l’energia cinetica del sistema sia una forma quadratica *ortogonale* (\equiv senza termini rettangolari) nelle $d_t q$.⁶ Appare quindi in qualche misura inaspettato che la separabilità completa della EHJ ridotta sussista in alcuni problemi molto importanti, per una conveniente scelta delle coordinate q .

Chiudiamo questa prima sottosezione illustrando il significato di una soluzione $W = W(t, q)$ della EHJ dal punto di vista del calcolo delle variazioni. Derivando sostanzialmente rispetto a t (lungo il moto) tale W , in forza delle (3) e della prima serie delle equazioni canoniche abbiamo:

$$(11) \quad d_t W = \partial_t W + \partial_q W \cdot d_t q = -H + p \cdot \partial_p H \equiv L,$$

di approssimazione (come ad esempio quella di Cauchy-Lipschitz o quella di Picard-Lindelöf, vedi App. Gen. D. Questo è più che mai vero oggi, dopo il massiccio avvento del calcolo numerico automatico.

⁶ P. Stäckel, Math. Annalen, Bd. XLII, 1893.

dove L è la corrispondente lagrangiana, Legendre-duale di H . Beninteso, lungo il moto del sistema il 1° membro della (11) dipende da t esplicitamente e attraverso le $q(t)$; e similmente la $L = L(t, q, \dot{q}) \equiv L(t, q(t), \partial_p H(t, q(t), \partial_q W(t, q(t))))$ dipende da t esplicitamente e attraverso le $q(t)$, secondo quanto indicato. Se dunque le $q(t)$ sono soluzioni del SDO di EL sotto le condizioni agli estremi $q(t_0) = q_0$ e $q(t_1) = q_1$, integrando la (11) lungo il moto tra t_0 e t_1 abbiamo:

$$(12) \quad W(t_1, q_1) - W(t_0, q_0) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \partial_p H(t, q(t), \partial_q W(t, q(t)))) dt;$$

vale a dire, la differenza a 1° membro della (12) uguaglia l'integrale di azione hamiltoniana (vedi S.sez. 6.3.1). Naturalmente la (12) continua a valere se al posto della generica soluzione della EHJ vi è un suo integrale completo, in tal caso identicamente rispetto alle costanti P da cui esso dipende essenzialmente.

6.4.2) APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI

Dedichiamo questa sottosezione a due applicazioni esemplificative della EHJ. La prima è poco più di un esercizio elementare, e riguarda la dinamica di un punto materiale di massa m , mobile lungo una retta (orientata) di coordinata x ed attratto verso un punto fisso (diciamo, l'origine $x = 0$) da una forza "elastica" (\equiv proporzionale alla distanza della sua posizione x da esso), quindi del tipo $-kx$ con k costante > 0 (oscillatore armonico 1-dim). Posto $\omega^2 = k/m$, la EDO newtoniana del moto è evidentemente $d_t^2 x + \omega^2 x = 0$. La ben nota soluzione di questa è:

$$(1) \quad x = x(t) = A \sin[\omega(t+\gamma)],$$

dove $\omega = (k/m)^{1/2} > 0$ è la "pulsazione" dell'oscillazione, mentre A (la sua "ampiezza") e γ (la sua "fase") sono costanti di integrazione da determinare, ad esempio, mediante le condizioni $x(t=0) = x_0$ (posizione iniziale) e $d_t x(t=0) = p_0/m$ (con $p_0 \equiv$ momento iniziale); vale a dire, mediante le

$$(2) \quad A \sin(\omega\gamma) = x_0, \quad A \cos(\omega\gamma) = p_0/(m\omega).^7$$

Quanto sopra evidentemente prescinde dall'impiego della EHJ. Partiamo invece dall'"hamiltoniana dell'oscillatore armonico", cioè dalla

$$(3) \quad H(t, q, p) = (mkx^2 + p^2)/(2m)$$

(la forza è infatti gradiente del potenziale $-kx^2/2$). Questa hamiltoniana non contiene esplicitamente t , ed è quindi uguale alla costante (≥ 0) del moto $E \equiv$ energia dell'oscillatore, da pensare come

⁷ Benché sia elementare, ricordiamo ugualmente come si determinano A e γ in funzione di x_0 e p_0 . Possiamo sempre richiedere $A \geq 0$ senza limitare la generalità. Quadrande e sommando le (2) abbiamo $A = [x_0^2 + (p_0/(m\omega))^2]^{1/2}$. Supposto $p_0 \neq 0$, dividendo la prima per la seconda, abbiamo $\text{tg}(\omega\gamma) = x_0 m \omega / p_0$, che ha un'unica soluzione γ in $(-\pi/(2\omega), \pi/(2\omega))$. Se invece $p_0 = 0$, e $x_0 \neq 0$, si pone $\gamma = x_0 \pi / (2|x_0| \omega)$. Se poi anche $x_0 = 0$, γ resta indeterminata; ma ciò poco importa perché allora è $A = 0$.

sistema conservativo. Possiamo così scrivere la EHJ ridotta, che è $[mkx^2 + (\partial w/\partial x)^2]/(2m) = E$. Escludendo il caso banale $E = 0$, questa si risolve mediante una quadratura. Si ottiene così $w(x,E) \doteq \pm(2mE)^{1/2} \int [1-kx^2/(2E)]^{1/2} dx$, dove \doteq significa “uguale a meno di una costante additiva” e $\int \{ \dots \} dx$ denota una primitiva di $\{ \dots \}$.⁸ La funzione principale di Hamilton è $W(t,x,E) = w(x,E) - Et$, e quindi la costante $\alpha^1 = \partial W/\partial E$ è $\partial w/\partial E - t \doteq \pm [m/(2E)]^{1/2} \int [1-kx^2/(2E)]^{-1/2} dx - t$. Poiché una primitiva di $[1-kx^2/(2E)]^{-1/2}$ è $(2E/k)^{1/2} \arcsin[x(k/(2E))^{1/2}]$ con $\arcsin x =: \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt$, si conclude che

$$(4) \quad x = x(t|E,\alpha) = (2E/k)^{1/2} \sin[\omega(t+\alpha)],$$

dove abbiamo incorporato in α sia la costante additiva che l'effetto del doppio segno. Questa (4) coincide con la (1) se si identifica A con $(2E/k)^{1/2}$ (l'ampiezza dell'oscillazione è così correlata alla sua energia per data k) e γ con α . Esprimendo x^2 e $(d_t x)^2$ mediante la (4) si ha poi, come ci si aspetta, $2E = m(d_t x)^2 + kx^2$. Il doppio segno ricompare nel momento p se lo si calcola come $p = \partial w/\partial x = \pm [2mE(1-kx^2/(2E))]^{1/2}$. Eliminando x^2 mediante la (4) si trova infatti $p = \pm (2mE)^{1/2} [\cos^2 \omega(t+\alpha)]^{1/2}$, ed occorre quindi valutare la radice quadrata di \cos^2 come $\pm \cos$ a seconda che nella precedente espressione si sia scelto il segno $+$ o il $-$, per ottenere il risultato corretto $p = m d_t x$. Anche se sono banali, le complicazioni legate alla non-invertibilità globale della $H = E$ rispetto a p si incontrano dunque persino in un problema elementare come il presente. Resta il fatto che la soluzione è stata costruita senza ricorrere alla EDO newtoniana, ma semplicemente risolvendo con una quadratura la EHJ ridotta associata all'hamiltoniana (3). Per quanto semplice, questo esempio dà una idea del metodo di Hamilton-Jacobi per la soluzione di certi problemi dinamici: un vantaggio che potrà meglio apprezzarsi in altre occasioni, perché in questo caso la EDO newtoniana si integra elementarmente.⁹

La seconda applicazione riguarda un problema decisamente più impegnativo del precedente, forse il problema per eccellenza della dinamica del punto materiale. Premettiamo alcune definizioni e deduzioni che ci condurranno ad una sua sostanziale “semplificazione a priori”. Se O è un punto fisso (o **polo**) di \mathbb{R}^3 e $X = X(t)$ è un moto di CdC 1 in \mathbb{R}^3 ($\forall t$ in un intervallo-base I), il vettore (che ha dimensioni di un'area divisa per un tempo) $A =: (X-O) \times d_t X/2$ si dice **velocità areale vettoriale** di X rispetto a O . Elementari considerazioni cinematiche provano infatti che $(X-O) \times d_t X$ è la

⁸ La $h \doteq \int \{ \dots \} dx$ è cioè un modo diverso, e talvolta più espressivo, di scrivere la relazione $dh = \{ \dots \} dx$.

⁹ Molte delle formule che precedono sono ingombrate dalla presenza della costante m , la quale vi compare in modo da “sparire” quando venga posta uguale a 1. Le formule “a m manifesta” riportate nel testo si possono facilmente riottenere dalle più snelle formule “a m nascosta” (cioè con $m \equiv 1$) sostituendo in queste ultime alle (E,H,k,p,w,W) le stesse quantità divise per m . La validità di questa semplice regola, nel caso in oggetto, potrebbe giustificarsi a priori mediante l'Analisi Dimensionale, notoriamente fondata sulla omogeneità *dimensionale* di tutte le uguaglianze della fisica matematica.

t-derivata del doppio dell'area generata (o come anche si dice, "spazzata") dal vettore $X-O$ durante il moto di X . Va da sé che la nozione stessa di velocità areale vettoriale è relativa, dovendosi essa riferire al polo O . Se $X(t)$ è di CdC 2, è distinto da O e ha accelerazione $d_t^2 X$ parallela a $X-O \forall t$ in I , il moto di X si dice **centrale rispetto a O** . Sempre $\forall t \in I$, per un moto centrale rispetto a O si ha dunque, per definizione,

$$(5) \quad (X-O) \times d_t^2 X = 0;$$

e da questa, denotando per brevità con v la velocità $d_t X$ di X e con a la sua accelerazione $d_t^2 X$,

$$(5bis) \quad 0 = (X-O) \times a = d_t((X-O) \times v) \equiv 2d_t A$$

(in quanto $d_t X \times v = 0$ e $d_t v = a$). La velocità areale vettoriale A (rispetto a O) del punto X in moto centrale di centro O è perciò un vettore costante che denoteremo $C/2$, per il quale

$$(5ter) \quad (X-O) \times v = C.$$

Secondo le (5bis,5ter), C è una costante del moto centrale governato dalla (5). Se $C = 0$, il moto centrale si dice **degenere**, e avviene lungo la retta *fissa* r passante per O e X_0 (posizione iniziale di X) e parallela alla velocità iniziale v_0 . Infatti dovendo l'accelerazione essere parallela a $X-O$, anche $v = \int_0^t a dt + v_0$ è parallela a r , e $X = \int_0^t v dt + X_0$ è sempre su r . Escluso questo caso, quindi supponendo $C \neq 0$, il moto centrale si dice **proprio**, ed è contenuto propriamente (\equiv non soltanto in una sua retta) nel piano fisso passante per O e perpendicolare al vettore costante C , perché $(X-O) \cdot C = 0$. Nota la velocità iniziale v_0 , per ipotesi non nulla e non parallela a $X_0 - O$, C è determinato come $(X_0 - O) \times v_0$. Se, per un moto centrale proprio di polo O (quindi con $A = \text{cost} = C/2 \neq 0$) si orienta il piano del moto, cioè se si fissa un verso per la sua normale n , si può considerare la componente di C su n , $C \cdot n$. Questo numero, che è pari a $\pm |C|$ a seconda che C sia equiverso o antiverso a n , può dunque definirsi come il doppio della **velocità areale scalare** (o velocità areale tout court), costante, "rispetto a O e all'orientamento del piano del moto". Vedremo più avanti che se viceversa un moto piano $X = X(t)$ ha velocità areale rispetto a O – un punto fisso del piano orientato del moto – costante $\neq 0$ [$\neq 0$], allora la sua accelerazione è sempre parallela a $X-O$, ovvero il moto è centrale proprio [centrale degenere].

Il nostro problema dinamico consiste nello studio del moto di un punto materiale \mathcal{P} di massa m soggetto ad una forza "centrale di polo O " (\equiv parallela alla retta che lo congiunge con O , fisso). In virtù della equazione fondamentale della dinamica, questo moto è dunque centrale di polo O , e se non è degenere, è contenuto propriamente in un piano fisso passante per O . Si è così ridotti ad un problema dinamico piano, in un piano orientato Π che si supporrà individuato dalle condizioni iniziali. Il moto di \mathcal{P} , di cui denoteremo con X la posizione, si presta ad essere studiato mediante la EHJ ridotta 2-dim se la forza centrale è il gradiente di uno scalare V funzione $C^1(0, \infty)$ di $|X-O|$, e si

riferisce Π a coordinate polari standard (ρ, θ) di polo O (avendo scelto l'orientamento dell'anomalia θ congruamente a quello di Π , cioè di n , secondo l'usuale regola del cavatappi). Detto $-V(\rho)$ il potenziale, per ipotesi $C^1(0, \infty)$, della forza, questa è $-\nabla V$, e quindi ha componente su $\text{vers}(X-O)$ uguale a $-d_\rho V$. Se ad esempio $-V = \rho^{-1}$, questa componente è $-\rho^{-2}$, e quindi la forza è diretta verso O (forza attrattiva).

Denotando con p_ρ e p_θ le componenti radiale e rispettivamente tangenziale della quantità di moto di \mathcal{P} , la sua hamiltoniana è evidentemente

$$(6) \quad H = H(t, \rho, \theta, p_\rho, p_\theta) = (p_\rho^2 + p_\theta^2/\rho^2)/(2m) + V(\rho),$$

dove il primo addendo è la sua energia cinetica, e V è la sua energia potenziale. Poiché non dipende esplicitamente da t , H è costante, pari all'energia totale E del moto. Ma H non dipende esplicitamente nemmeno da θ , e quindi il momento coniugato p_θ è un'altra costante del moto, che denoteremo Θ . Secondo la (6.4.1, 3), la funzione caratteristica $w = w(\rho, \theta|\Theta, E)$ ha dunque $\partial w/\partial \theta = p_\theta = \Theta$, ovvero è del tipo

$$(7) \quad w(\rho, \theta|\Theta, E) = R(\rho|\Theta, E) + \Theta\theta,$$

dove $R \equiv w(\rho, \theta=0|\Theta, E)$. $\Theta = \beta_1$ e $E = \beta_2$ sono le costanti “di tipo β ” del problema, vedi S.sez 6.4.1.

Allora la EHJ ridotta è (scrivendo ormai $\partial_\rho R$ come $d_\rho R$):

$$(8) \quad (d_\rho R)^2 + \Theta^2/\rho^2 + 2mV(\rho) = 2mE,$$

che comunque presuppone $E - V(\rho) \geq 0$. Se V è positiva $\forall \rho$, E deve essere abbastanza positiva da assicurare questa disuguaglianza; se invece V è negativa $\forall \rho$, E può essere sia positiva o nulla che negativa (nel secondo caso non troppo grande in valore assoluto).

La EDO (8) in R si risolve mediante una quadratura ottenendo R a meno del segno e di una costante additiva del moto. Precisamente, ricordando le notazioni più sopra introdotte, si ha

$$(8\text{bis}) \quad R(\rho|\Theta, E) \doteq \pm \int [2m(E - V(\rho)) - \Theta^2/\rho^2]^{1/2} d\rho,$$

per cui (vedi la (7))

$$(8\text{ter}) \quad w(\rho, \theta|\Theta, E) \doteq \pm \int [2m(E - V(\rho)) - \Theta^2/\rho^2]^{1/2} d\rho + \Theta\theta.$$

L'equazione della traiettoria si ottiene uguagliando la $\partial w/\partial \Theta$ (l'integrale è derivabile sotto il segno rispetto a Θ) alla costante “del tipo α ” (vedi S.sez. 6.4.1) $\alpha^1 \equiv \theta_0$, cioè

$$(9) \quad \theta_0 = (\partial w/\partial \Theta)(\rho, \theta|\Theta, E) \doteq \mp \int [2m(E - V(\rho)) - \Theta^2/\rho^2]^{-1/2} \Theta/\rho^2 d\rho + \theta.$$

Si noti che l'integrale nella (9) può essere riscritto passando dalla variabile di integrazione ρ alla $v = 1/\rho$. Si ottiene così la

$$(9\text{bis}) \quad \theta - \theta_0 \doteq \mp \int [2m(E - V(v^{-1}))/\Theta^2 - v^2]^{-1/2} dv$$

in luogo della (9), e di questa formalmente un po' più semplice.

Quanto alla legge oraria riferita a ρ , essa si ha derivando sotto il segno rispetto a E la (8ter). Si trova così, essendo $\alpha^3 \equiv -t_0$ (vedi ancora S.sez. 6.4.1):

$$(10) \quad t - t_0 = \partial w / \partial E \doteq \pm m \int [2m(E - V(\rho)) - \Theta^2 / \rho^2]^{-1/2} d\rho.$$

A parte la presenza del doppio segno, l'angolo θ_0 [il tempo t_0] non è univocamente collegato al 2° membro della (9) o (9bis) [della (10)], perché questa, come le (8bis, 8ter) da cui deriva, è un'uguaglianza a meno di costante additiva.

Come abbiamo anticipato, la presenza del doppio segno nelle (9) (o (9bis)) e (10) crea delle complicazioni che cercheremo di illustrare qui appresso. Considerando ad esempio la (9), sia $F(\rho)$ una primitiva particolare dell'integranda; allora la traiettoria ha le due determinazioni $\theta_{\pm}(\rho) - \theta_0 = \pm F(\rho) + \text{cost}_{\pm}$. Se esiste ρ_0 tale che $\theta_+(\rho_0) = \theta_-(\rho_0) = \theta_0$, abbiamo $\text{cost}_{\pm} = \mp F(\rho_0)$, per cui $\theta_{\pm}(\rho) - \theta_0 = \pm \int_{\rho'=\rho_0}^{\rho} [\dots]' d\rho'$, dove $[\dots]$ è l'integranda nella (9) in ρ' . Ciò evidenzia che le due determinazioni $\theta_{\pm}(\rho)$ della traiettoria sono simmetriche rispetto alla retta (passante per O) e di anomalia $\theta = \theta_0$ di Π . Se poi la traiettoria è simmetrica rispetto ad un asse e *regolare* nel punto di intersezione con tale asse, dove $\theta = \theta_0$, si deve avere $dp/d\theta|_{\theta_0} = 0$: il valore ρ_0 di ρ in θ_0 deve essere stazionario. Considerazioni analoghe valgono per la legge oraria (10), che deve essere simmetrica rispetto a $t = t_0$; ed è naturale richiedere che il valore (stazionario) di ρ per $t = t_0$ sia lo stesso ρ_0 precedente, ad esempio il minimo assoluto della distanza $|X-O|$. Poiché le integrande nelle (9) e (10) sono positive, alternando convenientemente i due segni, cioè scegliendone uno quando ρ cresce e l'altro quando decresce, le risultanti quantità $\theta - \theta_0$ e $t - t_0$ risultano monotone lungo la traiettoria, e quindi *invertibili* rispetto a ρ , portando così a $\rho = \rho_1(\theta - \theta_0)$ e a $\rho = \rho_2(t - t_0)$, con ρ_1 e ρ_2 funzioni *pari* del loro argomento ($\theta - \theta_0$ e rispettivamente $t - t_0$), e $\rho_1(0) = \rho_2(0) = \rho_0$. Segue anche che $d\theta$ e dt devono avere segni costantemente uguali (se $\Theta > 0$) od opposti (se $\Theta < 0$) lungo la traiettoria, un fatto in accordo con la (*) $d\theta/dt = \Theta/(m\rho^2)$. Se integriamo la (*) supponendo di disporre della funzione ρ_2 , otteniamo

$$(11_1) \quad \theta(t) - \theta_0 = (\Theta/m) \int_{t'=t_0}^t [\rho_2(t'-t_0)]^{-2} dt',$$

in cui non vi è doppio segno. Questa è la legge oraria *esplicita* riferita all'anomalia θ , che cresce con t se $\Theta > 0$. In modo simile, usando la reciproca della (*) e supponendo di disporre di ρ_1 , abbiamo:

$$(11_2) \quad t(\theta) - t_0 = (m/\Theta) \int_{\theta'=\theta_0}^{\theta} [\rho_1(\theta' - \theta_0)]^2 d\theta'.$$

In definitiva la scelta delle coordinate polari permette la *separazione completa* della EHI ridotta 2-dim per il problema del punto materiale \mathcal{P} soggetto a forza centrale di centro O derivabile

dal potenziale $-V(|X-O|)$, problema che è così *ricondotto a quadrature*. La EDO vettoriale newtoniana che governa il moto, la $m d_t^2 X = -\nabla V(|X-O|)$, può ignorarsi.

Quanto sopra vale per qualunque dipendenza di CdC 1 di V da ρ . È naturale porsi la questione di quali tipi di dipendenza di V da ρ diano luogo ad integrali nelle (9, 9bis, 10) esprimibili in termini di funzioni non troppo esotiche. Si prova che questo è effettivamente il caso per $V(\rho)$ proporzionale a ρ^{n+1} per certi n : ad esempio, l'integrale di traiettoria nella (9bis) si esprime in termini della funzione, definita e analitica in $(-1,+1)$,¹⁰ $\arccos \equiv \cos^{-1}$ (con $\cos^{-1}x =: \pi/2 - \int_{t=0}^x (1-t^2)^{-1/2} dt$) per $n = 1, -2, -3$; e per $n = -4, -5$, in termini di funzioni ellittiche. Se poi $V(\rho) = k\rho^2/2$ con $k > 0$, quindi per $n = 1$, abbiamo la generalizzazione a due dimensioni del moto dell'oscillatore armonico 1-dim: la traiettoria è una ellisse di centro O , come si vede subito sommando vettorialmente due moti armonici della stessa frequenza che avvengono lungo assi ortogonali con origine in O . Le 4 costanti di integrazione (due ampiezze e due fasi) sono fornite dando la posizione e la velocità del punto a $t = 0$ (purché non parallele, pena la riduzione al caso 1-dim). È questo il **moto elastico attrattivo piano**. Nell'analogo caso del **moto elastico repulsivo piano**, basta supporre negativa la costante k ; allora la frequenza diventa immaginaria, e le funzioni iperboliche prendono il posto di quelle circolari. Il moto diventa così iperbolico, lungo un ramo di iperbole di centro O . Come nel caso dell'oscillatore armonico 1-dim, questi problemi di moto elastico non sono molto significativi come applicazioni della EHJ, perché le relative equazioni newtoniane del 2° ordine sono ancora facilmente integrabili.

Problemi di importanza speciale si hanno invece per $n = -2$, sia con energia potenziale newtoniana $V(\rho) = -k/\rho$ ($k > 0$, forza attrattiva) che coulombiana tra cariche dello stesso segno $V(\rho) = h/\rho$ ($h > 0$, forza repulsiva). Se $E < 0$, il primo caso configura il **problema di Keplero** (o Kepler, Johannes, Weil der Stadt Germ. 1751 - Regensburg Germ. 1630), certamente il più famoso ed importante problema della dinamica celeste. Per quanto abbiamo visto più sopra, se $V(\rho) = -k/\rho$ (caso che diremo "newtoniano"), l'energia totale E può essere sia positiva o nulla che negativa. Se in generale diciamo un'**orbita** una traiettoria percorsa sempre nello stesso senso, semplice e *chiusa*, vedremo che per $n = -2$, la traiettoria è un'orbita nel caso newtoniano con $E < 0$ (cioè nel problema di Keplero), e soltanto in esso.

Nel caso newtoniano, l'integrale indefinito nella (9bis) è standard per $E \geq -(m/2)(k/\Theta)^2$; allora l'equazione è risolvibile rispetto a ρ secondo la

¹⁰ Oltre che in tutto il piano complesso tagliato lungo l'asse reale tra -1 e $-\infty$ e tra $+1$ e $+\infty$.

$$(12) \quad \rho = \Theta^2(mk)^{-1}[1 + \varepsilon \cos(\theta - \underline{\theta})]^{-1},^{11}$$

dove $\underline{\theta}$ è un angolo arbitrario costante (generalmente diverso da θ_0), e

$$(12bis) \quad \varepsilon =: [1 + 2(E/m)(\Theta/k)^2]^{1/2} \geq 0.$$

Se in particolare $\varepsilon = 0$, la traiettoria-orbita è un cerchio di centro O e raggio $\Theta^2/(mk)$. Più in generale, la (12) si riconosce come l'equazione, in coordinate polari (ρ, θ) di polo O, di una **conica** avente un **fuoco** (o *il* fuoco nel caso di una parabola) in O, e di **eccentricità** $\varepsilon > 0$. La rappresentazione di una conica in coordinate polari è rivisitata nell'App. Spec. 6.A. Poiché $\Theta^2/(mk) > 0$, la (12) coincide con la (6.A, 1) ponendovi $\underline{\theta} = \pi$ e $\Theta^2/(mk) = p$ ¹² (“semilatus rectum”), e si riconosce pertanto come l'equazione di un'ellisse propria (\equiv non circolare) per $0 < \varepsilon < 1$ (cioè per $-(m/2)(k/\Theta)^2 < E < 0$), di una parabola per $\varepsilon = 1$ ($E = 0$), e del ramo di un'iperbole, quello concavo verso il fuoco O che abbiamo detto “primo ramo” nella App. Spec. 6.A, per $\varepsilon > 1$ ($E > 0$). In modo analogo si ottiene la legge oraria implicita riferita a ρ , secondo la (10).

Nel caso $V(\rho) = h/\rho$, che diremo “coulombiano repulsivo”, in luogo della (12) troviamo ovviamente $m h \rho = -\Theta^2 [1 + \varepsilon \cos(\theta - \underline{\theta})]^{-1}$; ovvero, poiché è ora $E > 0$ e quindi $\varepsilon > 1$, siamo alla (6.A, 4) con il segno (–) dell'alternativa (\pm), avendovi posto $\underline{\theta} = 0$ e $\Theta^2/(mh) = p$. La traiettoria è il ramo d'iperbole convesso verso O, o “secondo ramo” nel linguaggio della App. Spec 6.A. La traiettoria parabolica si ha come comune limite per $\varepsilon \rightarrow 1-$, e rispettivamente $\varepsilon \rightarrow 1+$ (con lo stesso p), dei due casi precedenti. Confrontando le traiettorie newtoniana iperbolica (primo ramo) e coulombiana repulsiva (secondo ramo), vediamo che nel primo caso il punto materiale si avvicina al polo O, lo *aggira* “passandogli dietro” (perché la traiettoria è concava verso O) e si allontana poi lungo l'altro braccio del ramo d'iperbole; mentre nel secondo caso si avvicina ad O *senza aggirarlo* (la traiettoria è convessa verso O), per poi ancora allontanarsi lungo l'altro braccio del ramo. La traiettoria parabolica è il limite di quella newtoniana iperbolica lungo il primo ramo, o di quella coulombiana repulsiva lungo il secondo ramo, per $\varepsilon \rightarrow 1\mp$. Con questi risultati, il problema del punto soggetto a forza centrale derivata del potenziale attrattivo k/ρ , o repulsivo $-h/\rho$, è risolto in

¹¹ Basta partire dalla formula di differenziazione $d_x \arccos x = -(1-x^2)^{-1/2}$ valida per $-1 < x < 1$. Per $a > 0$, b, c costanti reali, e $D =: b^2 + 4ac$ assunto > 0 , semplici sostituzioni provano che $d_x \arccos [(2ax-b)/D^{1/2}] = -a^{1/2} [\mathcal{T}(x)]^{-1/2}$, dove $\mathcal{T}(x)$ è il trinomio $-ax^2 + bx + c$ (del quale D è il discriminante che abbiamo supposto positivo). Questa relazione permette di calcolare il 2° membro della (9bis) per $V(\rho) = -k/\rho$. L'integranda nella (9bis) è infatti uguale a $a^{1/2} [\mathcal{T}(x)]^{-1/2}$ per $a = 1$, $b = 2mk/\Theta^2$ e $c = 2mE/\Theta^2$, e dunque una sua primitiva è $-\arccos[(x\Theta^2/(mk)-1)/\varepsilon]$, ove $\varepsilon =: [1 + 2E\Theta^2/(mk^2)]^{1/2}$ e $\varepsilon \geq 0$ per l'ipotesi $E \geq -(m/2)(k/\Theta)^2$. La (9bis) diventa così $\pm(\theta - \theta_0) \div \arccos[(x\Theta^2/(mk) - 1)/\varepsilon]$; ovvero, ricordando che $x = 1/\rho$, $mk\rho/\Theta^2 = [1 + \varepsilon \cos(\theta - \underline{\theta})]^{-1}$, dove $\underline{\theta}$ è un angolo costante legato additivamente a θ_0 (cioè $\underline{\theta} = \theta_0 + \text{cost}$) che tiene conto della costante additiva nella (9bis), e il doppio segno sparisce in forza della parità di \cos . La (12) è così dimostrata. Lasciamo al lettore l'ormai facile verifica della possibilità di esprimere l'integrale nella (9bis) in termini di \arccos anche per $n = 1$ e $n = -3$, incluso il caso di forza repulsiva (per forza repulsiva con $n = -2$ la traiettoria è un ramo d'iperbole, quello che offre la sua *convessità* verso il polo O, come è mostrato nel paragrafo seguente).

¹² La scelta della lettera p , iniziale di “parametro”, non è molto avveduta trattandosi di una costante del moto, ma è consolidata dall'uso.

forma esplicita rispetto a ρ come funzione di $\theta - \underline{\theta}$. Le quattro costanti del moto si possono identificare con $\underline{\theta}$ (che fissa l'orientamento della traiettoria), con il valore di ρ per $\theta = \underline{\theta}$ (che ne fissa la scala), con il momento angolare Θ rispetto a O , e infine con l'energia totale E .

I due vertici di una traiettoria kepleriana (o come anche si dice, per chiari motivi, traiettoria newtoniana “legata”, $E < 0$), sono detti suoi **punti apsidali**: **perielio** il vertice prossimale, e **afelio** quello distale. La ragione di queste denominazioni è ovvia pensando al moto di un pianeta attorno al *sole* (beninteso considerati entrambi come *punti materiali*) posto in un fuoco dell'ellisse. Per estensione, si dice ancora **perielio** il vertice di una traiettoria newtoniana parabolica.¹³ È poi evidente che i moti newtoniani iperbolici/parabolici si possono avere soltanto per energia cinetica “remota” (cioè, per $\rho \rightarrow \infty$) abbastanza grande.

La disponibilità della (12) offre la legge oraria implicita nella forma (11₂). Si trova subito

$$(13_1) \quad t(\theta) - \underline{t} = \Theta^3 / (mk^2) \int_{\theta'=\underline{\theta}}^{\theta} [1 + \varepsilon \cos(\theta' - \underline{\theta})] d\theta',$$

dove \underline{t} è l'istante in cui $\theta = \underline{\theta}$. Qui non c'è doppio segno perché, come abbiamo già osservato, t e θ sono equiversi o antiversi a seconda che Θ sia positivo o negativo. Il doppio segno è invece presente nella legge oraria implicita riferita a ρ ; fissato il senso di percorrenza della traiettoria, nella

$$(13_2) \quad dt = \pm m [2m(E + k/\rho) - \Theta^2/\rho^2]^{-1/2} d\rho$$

va usato il segno $+$ o il $-$ a seconda che $d\rho$ sia positivo o negativo lungo il moto. Gli integrali nella (13₁), o nella versione integrata della (13₂), sono facilmente valutabili, ma il problema di *invertire* la risultante relazione $t = t(\theta)$ [$t = t(\rho)$] rispetto a θ [rispetto a ρ] presenta qualche difficoltà se non si ricorre ad un calcolo numerico diretto.¹⁴

Tornando al problema del moto centrale con potenziale $-V(\rho)$ generico, è istruttivo affrontarlo – sempre per mezzo della EHJ ridotta – *senza* sfruttare la conoscenza a priori della sua

¹³ I raggi apsidali possono ottenersi come i valori di ρ per i quali l'energia cinetica è tutta tangenziale. Per $E \neq 0$, l'equazione in ρ da usare nel caso newtoniano è la (*) $\rho^2 + k\rho/E - \Theta^2/(2mE) = 0$. Se $E < 0$ (caso kepleriano, ellittico) la (*) ha due radici positive, le $\rho_V = -k(1-\varepsilon)/(2E) \equiv \Theta^2/(km(1+\varepsilon))$ e $\rho_{V'} = -k(1+\varepsilon)/(2E) \equiv \Theta^2/(km(1-\varepsilon))$, che coincidono con quelli ricavati in App. Spec. 6.A perché $p = \Theta^2/(mk)$. La loro somma, cioè il doppio del semiasse maggiore a dell'ellisse, è $-k/E$, ovvero $E = -k/(2a)$. Se invece $E > 0$ (caso newtoniano iperbolico), la (*) ha una sola radice positiva, la $\rho_V = k(\varepsilon-1)/(2E) \equiv \Theta^2/(km(1+\varepsilon))$; l'altra radice è inaccettabile perché negativa, e infatti non appartiene alla traiettoria. Nel caso coulombiano repulsivo, a k si deve sostituire $-h < 0$; allora $E > 0$, $\varepsilon > 1$, e la sola radice positiva è $\rho_{V'} = \Theta^2/(km(\varepsilon-1))$. Infine la (*) degenera per $E = 0$; ma trascrivendola come $E\rho^2 + k\rho - \Theta^2/(2m) = 0$, e poi facendo in questa $E \rightarrow 0$, abbiamo $\rho = \Theta^2/(2mk)$, cioè la distanza fuoco-vertice nella parabola. Questo valore può anche ritrovarsi come $-k/2$ volte il $\lim_{E \rightarrow 0^-} (1-\varepsilon)/E$, oppure come $k/2$ volte il $\lim_{E \rightarrow 0^+} (\varepsilon-1)/E$, avendovi espresso in prima approssimazione ε come $1 + E\Theta^2/(mk^2)$.

¹⁴ Limitatamente al caso della traiettoria parabolica ($\varepsilon = 1$), partendo dalla (13₁) e ponendovi $\underline{\theta} \equiv$ anomalia del perielio = $= 0$ e $\underline{t} = 0$, alcuni facili passaggi portano alla (*) $t = \Theta^3/(2mk^2) [\text{tg}(\theta/2) + \text{tg}^3(\theta/2)/3]$, dove θ è contato appunto a partire dal(l'anomalia del) perielio, e t dal(l'istante del) passaggio per il perielio stesso. L'inversione della (*) rispetto a $\text{tg}(\theta/2)$ comporta dunque, in questo particolare caso, soltanto la soluzione di una equazione cubica, e la legge oraria *esplicita* riferita a θ si ha in modo relativamente semplice.

planeità, e facendo uso di coordinate sferiche standard di polo O (ρ = distanza da O, ψ \equiv colatitudine ¹⁵, φ \equiv longitudine). L'hamiltoniana è allora espressa come

$$(14) \quad H = [p_\rho^2 + p_\psi^2/\rho^2 + p_\varphi^2/(\rho^2 \sin^2 \psi)]/(2m) + V(\rho),$$

dove p_ρ , p_ψ e p_φ sono i momenti coniugati alle variabili ρ , ψ , φ . Qui la coordinata assente in H è la φ , e quindi il momento longitudinale $\partial w/\partial \varphi$ è una costante del moto, diciamo Φ ; ovvero $w(\rho, \psi, \varphi) = w_0(\rho, \psi) + \Phi \varphi$, dove $w_0(\rho, \psi) = w(\rho, \psi, \varphi=0)$. Se anche w_0 è separabile secondo la $w_0(\rho, \psi) = R(\rho) + \Psi(\psi)$, abbiamo

$$(15) \quad w(\rho, \psi, \varphi) = R(\rho) + \Psi(\psi) + \Phi \varphi,$$

(non rendiamo qui esplicita la dipendenza dalle costanti del moto). Con questa posizione, la EHJ ridotta diventa:

$$(16) \quad \rho^2 (d_\rho R)^2 + (d_\psi \Psi)^2 + \Phi^2/\sin^2 \psi + 2m\rho^2 V(\rho) = 2m\rho^2 E,$$

ovvero

$$(16') \quad (d_\rho R)^2 + C^2/\rho^2 + 2mV(\rho) = 2mE,$$

$$(16'') \quad (d_\psi \Psi)^2 + \Phi^2/\sin^2 \psi = C^2,$$

dove C^2 è una costante di separazione ≥ 0 . La (16') si identifica con la (8) semplicemente ponendovi $C = \sqrt{C^2} \equiv \Theta$, mentre R è data dalla (8bis) con la stessa identificazione, $R = R(\rho|C, E)$. Quanto alla Ψ , si ottiene anch'essa con una quadratura come

$$(17) \quad \Psi(\psi) \doteq \pm \int [C^2 - \Phi^2/\sin^2 \psi]^{1/2} d\psi \equiv \Psi(\psi|C, \Phi).$$

Con ciò la EHJ 3-dim ridotta è completamente separata, $w = R(\rho|C, E) + \Psi(\psi|C, \Phi) + \Phi \varphi$, e la sua soluzione è ricondotta a quadrature. Le equazioni della traiettoria si ottengono uguagliando $\partial w/\partial \Phi$ ad una costante φ_0 (di tipo α), cioè

$$(18_1) \quad \partial \Psi/\partial \Phi + \varphi = \varphi_0$$

(relazione tra ψ e φ), e contemporaneamente $\partial w/\partial C$ ad un'altra costante ψ_0 (sempre di tipo α), cioè

$$(18_2) \quad \partial R/\partial C + \partial \Psi/\partial C = \psi_0$$

(relazione tra ρ e ψ). La traiettoria è data dunque, come deve, da due relazioni tra le tre coordinate sferiche. La scelta tra i due doppi segni in fronte a R e a Ψ si deve decidere considerando il senso di percorrenza (locale) della traiettoria. È utile riportare a questo scopo la versione differenziale delle (18), cioè, come si verifica senza difficoltà, le

$$(19_1) \quad (\Phi/\sin^2 \psi)[C^2 - \Phi^2/\sin^2 \psi]^{-1/2} d\psi = \pm d\varphi,$$

$$(19_2) \quad [(C^2 - \Phi^2/\sin^2 \psi)/(2m(E - V(\rho)) - C^2/\rho^2)]^{1/2} \rho^{-2} d\rho = \pm d\psi.$$

¹⁵ In luogo della colatitudine, in astronomia è anche comune l'uso della latitudine (pari alla colatitudine meno $\pi/2$), simmetrica rispetto all'equatore.

Ad esempio il segno corretto in fronte a Ψ si ottiene dalla (19₁): il segno è il + dove $\Phi d\psi/d\varphi$ è > 0 , e viceversa.

La legge oraria riferita a ρ è sempre data dalla (10) e la sua versione differenziale è

$$(10\text{bis}) \quad m[2m(E-V(\rho))-C^2/\rho^2]^{-1/2}d\rho = \pm dt,$$

cfr. la (13₂). Poiché la traiettoria deve essere piana, ci si aspetta che la relazione tra φ e ψ rappresenti un cerchio massimo sulla sfera unitaria; ma questo non si vede immediatamente, salvo che nel caso in cui il momento longitudinale è nullo ($\Phi = 0$). Infatti allora $\Psi \doteq \pm C\psi$, quindi $\partial\Psi/\partial\Phi = 0$ e $\varphi = \varphi_0$: come ben naturale, il piano del moto è un piano meridiano.¹⁶ Quanto all'altra equazione, essa può scriversi come $\partial R/\partial C + \psi = \psi_0$, che abbiamo già incontrato con diverse notazioni nella trattazione 2-dim del problema. Almeno in linea di principio, il problema 3-dim è così completamente risolto se trascuriamo il non aver esplicitato la condizione che assicura la completezza dell'integrale w così costruito.¹⁷

Concludiamo la sottosezione con una semplice osservazione di natura dimensionale sulle equazioni hamiltoniane. Secondo queste equazioni, il prodotto di una variabile di una serie con la sua partner dell'altra serie è, dimensionalmente, una energia moltiplicata per un tempo, cioè un'azione. Quindi se una delle due variabili è già di per sé un'azione, l'altra deve essere adimensionale, cioè essere (tipicamente) un angolo. Coppie siffatte di variabili coniugate si dicono appunto coppie del tipo (**azione, angolo**). Tornando per un momento al moto centrale in tre dimensioni, si noterà che le due costanti del moto di tipo (β), $\beta_1 = C$ e $\beta_2 = \Phi$ sono, dimensionalmente, momenti angolari \equiv azioni. Segue quindi che le costanti coniugate di tipo (α), $\alpha^1 = \psi_0$ e $\alpha^2 = \varphi_0$, devono essere, come effettivamente sono, angoli. Come vedremo verso la fine del capitolo, la scelta di coppie del tipo (azione, angolo) ha giocato un ruolo significativo negli sviluppi post-newtoniani della dinamica celeste.

6.4.3) ELEMENTI DI DINAMICA CELESTE I

La precedente illustrazione del problema di Keplero e problemi affini si conformava strettamente, come è norma in questo libro, al punto di vista deduttivo; ma naturalmente la storia ebbe un corso alquanto diverso. La cospicua massa di osservazioni dovute a Brahe (Tycho,

¹⁶ Usualmente la longitudine individua un *semipiano* meridiano. Tuttavia nulla vieta di estendere la definizione della colatitudine al dominio $[0,2\pi)$ limitando al contempo il dominio della longitudine a $[0,\pi)$. Questa seconda convenzione è preferibile per riportarci alla trattazione precedente in modo naturale, identificando ψ con θ .

¹⁷ Nella prossima sottosezione il problema di Keplero sarà anche trattato facendo uso della EDO dinamica radiale di Newton (e ignorando la EHJ); tenuto conto a priori, tuttavia, della planeità del moto, nonché della costanza del momento angolare (rispetto al polo) e della energia totale.

Knudstrup Dan. 1546 - Praga 1601), più tardi a fondo meditate ed elaborate insieme alle sue proprie da Keplero, portò quest'ultimo a tre leggi empiriche puramente *cinematiche* riguardanti il moto dei pianeti, note appunto come **leggi di Keplero**,¹⁸ le quali confermarono e precisarono le fondamentali intuizioni di N. Copernico.¹⁹ Da esse prese finalmente avvio la moderna astronomia: non soltanto la terra non è l'immobile centro dei cieli, ma tanto essa quanto i pianeti, che le sono in questo del tutto assimilabili, oltre a ruotare su se stessi intorno ai propri assi, viaggiano lungo orbite *ellittiche* intorno al sole, *che occupa un fuoco delle ellissi*. (Tutto ciò, come fu chiaro più tardi, in prima approssimazione.) Il dogma pre-kepleriano in base al quale le sole orbite ammissibili erano quelle circolari – in quanto “perfette e immutabili” – implicava l'uniformità della velocità lungo la traiettoria; ma questa uniformità, fondata su un preconcetto metafisico, risultava incompatibile con le effettive osservazioni, e Keplero dovette rassegnarsi a metterla da parte. Tuttavia egli vide con gioia che l'uniformità era in qualche modo preservata sostituendo agli archi le aree: vale a dire, scoprì che il generico pianeta “spazzava” (rispetto al sole, cfr. S.sez. 6.4.2) aree uguali in tempi uguali nel percorrere la sua traiettoria ellittica (costanza della velocità areale).

In modo preciso, ed assimilando come al solito sia il sole che i pianeti a *punti* cinematici, le leggi di Keplero affermano:

- 1) “Ogni pianeta si muove lungo una sua orbita ellittica avente il sole in uno dei due fuochi”;
- 2) “La velocità areale (rispetto al sole) del moto ellittico di ogni pianeta è costante nel tempo”;
- 3) “Il rapporto tra il quadrato del tempo impiegato a percorrere l'ellisse (tempo che si dice “periodo” dell'orbita) e il cubo del relativo (semi)asse maggiore è comune a tutti i pianeti osservati”.

¹⁸ Vedi J. Kepler, “Astronomia nova” o anche “Commentariis de motibus stellæ Martis”, 1609, per le prime due leggi, e “Harmonices mundi”, 1619, per la terza.

¹⁹ Nicolaus Copernicus (1473-1543, in polacco Mikolaj Kopernik, fu sapiente di molte cose, ma il suo interesse prevalente fu per l'astronomia. La cultura occidentale gli deve uno dei suoi passaggi cruciali, e cioè quella transizione *dal geocentrismo aristotelico-tolemaico all'eliocentrismo le cui implicazioni sono alla base della nascita della scienza moderna* (“De revolutionibus orbium coelestium libri VI”, pubblicati nel 1543, lo stesso anno della morte dell'autore). Uomo di chiesa (fu canonico della cattedrale di Frauenberg fino alla morte), e quindi affrancato da preoccupazioni economiche, seppe muoversi abilmente nei confronti della gerarchia: nonostante la natura dirompente (ma non del tutto nuova: vedi Eraclide Pontico, IV Sec. a.C., Aristarco di Samo, III Sec. a.C., ecc.) delle sue idee, che minavano alla base un'autorità della Chiesa fondata sul presunto rapporto privilegiato tra Dio e l'uomo, riuscì ad evitarne le reazioni che un secolo più tardi colpirono inflessibilmente Galileo (per l'appunto colpevole di essere copernicano). Le sue osservazioni – relativamente poche, ed effettuate con mezzi rudimentali – ed i suoi calcoli gli consentirono comunque di determinare con sorprendente precisione alcune grandezze relative ai cinque pianeti noti ai suoi tempi, ad esempio i periodi di rivoluzione e i raggi delle orbite, ancora supposte circolari, con il sole immobile al loro centro. Un'altra sua audace e corretta ipotesi traeva spunto dall'assenza di parallasse osservabile nei confronti delle cosiddette stelle fisse, e portava la stima della loro distanza a valori all'epoca impensati, moltiplicando a dismisura le dimensioni del cosmo. Quando, qualche tempo dopo la morte di Copernico, quest'altra conseguenza della sua riflessione divenne pienamente chiara, essa urtò e disorientò del tutto la Chiesa cattolica, che da allora e per molto tempo condannò violentemente il copernicanesimo. Copernico fu a lungo in Italia durante gli anni della formazione, frequentando le università di Bologna, Padova (quattro anni) e Ferrara.

Derivare da queste leggi che il moto che le soddisfa è quello di un punto cinematico X (da identificare con la posizione del pianeta) con accelerazione puntata verso un polo fisso O (da identificare con la posizione del sole) e *inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza* (> 0) *da esso*, è oggi un esercizio non troppo difficile. Tuttavia occorre oltre mezzo secolo, ed il calcolo differenziale e integrale che Newton e Leibniz avevano nel frattempo iniziato a forgiare quasi indipendentemente l'uno dall'altro, nonché alcune audaci induzioni, per ottenere da esse la formidabile sintesi nota come “teoria della gravitazione universale” (Newton, 1687). Segue la descrizione del ragionamento che conduce alla tesi anzidetta.

Se un moto è piano e di velocità areale rispetto a O costante, si deduce innanzitutto, come abbiamo anticipato ma non giustificato nella S.sez. 6.4.2, che il moto è centrale di polo O . Per provare questo asserto è conveniente rappresentare il vettore $X-O$ del piano orientato Π del moto come numero complesso $\rho \exp(i\theta)$, (ρ, θ) essendo le usuali coordinate polari di polo O in Π , con n (\equiv normale a Π) e θ mutuamente orientate secondo la regola del cavatappi. Per un moto di CdC 2 $X = X(t)$, cioè $(\rho, \theta) = (\rho, \theta)(t)$, la velocità $v \equiv d_t X$ di X è data allora da

$$(1) \quad d_t X = (d_t \rho + i \rho d_t \theta) \exp(i\theta).$$

Secondo questa, v ha una componente su $\exp(i\theta) \equiv \text{vers}(X-O)$, o componente “radiale” $v_\rho = d_t \rho$, e una componente su $i \exp(i\theta) \equiv n \times \text{vers}(X-O)$, o componente “tangenziale” $v_\tau = \rho d_t \theta$. Similmente si calcola l'accelerazione $a \equiv d_t^2 X$ di X , che è data da

$$(2) \quad d_t^2 X = [d_t^2 \rho - \rho (d_t \theta)^2 + i(2d_t \rho d_t \theta + \rho d_t^2 \theta)] \exp(i\theta).$$

Segue che la componente radiale di a è

$$(3_\rho) \quad a_\rho = d_t^2 \rho - \rho (d_t \theta)^2,$$

e quella tangenziale è

$$(3_\tau) \quad a_\tau = 2d_t \rho d_t \theta + \rho d_t^2 \theta.$$

D'altra parte la velocità areale (scalare) di X rispetto a O , che al solito denotiamo con $A \equiv C/2$ (cfr. S.sez. 3.4.2) è data dalla

$$(4) \quad A = \rho^2 d_t \theta / 2,$$

(quindi è positiva se la traiettoria orientata avvolge O in senso antiorario guardando a Π dalla parte verso cui punta n). Dalla (4) si ha allora

$$(5) \quad d_t A = \rho [d_t \rho d_t \theta + \rho d_t^2 \theta / 2] = \rho a_\tau / 2.$$

Poiché $\rho > 0$, segue che “velocità areale costante” equivale a “componente tangenziale a_τ nulla”. L'accelerazione è dunque tutta radiale, che è come dire che il moto è centrale di polo O , qed.

Supponiamo adesso che l'equazione di questa traiettoria nel piano (ρ, θ) sia nota nella forma $\rho = \rho(\theta)$; ci è allora permesso esprimere le t-derivate di ρ in termini di quelle di θ . Poiché $A \equiv C/2$ costante, la (4) si scrive

$$(6_1) \quad d_t \theta = C/\rho^2.$$

Possiamo così calcolare

$$(6_2) \quad d_t \rho = d_\theta \rho d_t \theta = d_\theta \rho (C/\rho^2) = -C d_\theta (1/\rho),$$

$$(6_3) \quad d_t^2 \rho = -C d_\theta^2 (1/\rho) d_t \theta = -(C/\rho)^2 d_\theta^2 (1/\rho).$$

Sostituendo le espressioni (6₁,6₃) nella (3 _{ρ}) abbiamo così:

$$(7) \quad a_\rho = -(C/\rho)^2 [d_\theta^2 (1/\rho) + 1/\rho].$$

La (7) è nota come **formula di Binet**, sebbene Newton l'abbia ricavata per suo conto, e con i mezzi analitici ancora rudimentali di cui disponeva, con largo anticipo sul matematico francese. Fino a questo punto, sono state sfruttate soltanto le ipotesi della planeità del moto e della costanza della sua velocità areale (oltre alla possibilità di rappresentare la traiettoria nella forma $\rho = \rho(\theta)$, come è certamente lecito localmente). Le prime due leggi di Keplero contengono tutto questo, e *in più*, affermano che la traiettoria è ellittica.

Siano ora p il semilatus rectum ed ε l'eccentricità dell'ellisse percorsa da X (v. App. Spec. 6.A). Allora la rappresentazione dell'ellisse stessa in coordinate polari (ρ, θ) di polo O (\equiv un suo fuoco) e di semiretta-origine puntata verso l'afelio, è data dalla (6.A, 1), $1/\rho = (1/p)(1 - \varepsilon \cos \theta)$. Sostituendo questa posizione nella formula di Binet (7), alcuni facili passaggi portano alla

$$(8) \quad a_\rho = -(C^2/p)\rho^{-2},$$

che non dipende più né da ε né da θ : cioè l'accelerazione di X , tutta radiale e diretta verso O , è inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza da O , con fattore $-C^2/p$.

La terza legge di Keplero permette a questo punto di provare che il fattore C^2/p nella (8) è indipendente dal pianeta preso in considerazione. Indicando infatti con \mathcal{T} il periodo dell'orbita, evidentemente è $|C| = 2\pi ab/\mathcal{T}$ (dove a e b sono i semiassi maggiore e minore dell'ellisse, e quindi πab la sua area). Ricordando che $p = b^2/a$ (vedi ancora App. Spec. 6.A) risulta così:

$$(9) \quad C^2/p = 4\pi^2 a^2 b^2 / \mathcal{T}^2 (a/b^2) \equiv 4\pi^2 a^3 / \mathcal{T}^2;$$

ma il rapporto a^3/\mathcal{T}^2 è comune a tutti i pianeti (terza legge di Keplero) ed altrettanto è quindi vero per C^2/p , qed.

Si può ancora osservare che, t-derivando la (6.4.2, 13₁) e tenendo conto della (6.4.2,12) e della (4), abbiamo:

$$(10) \quad 1 = \Theta^3 / (mk^2) (\rho/p)^2 d_t \theta = 2A\Theta^3 / (mk^2 p^2);$$

ma $p = \Theta^2 / (mk)$ (cfr. S.sez 6.4.2), e dunque

$$(10bis) \quad 1 = 2Am/\Theta.$$

Questa conferma la costanza di $A \equiv C/2$ in forza dell'analogia costanza di Θ , e fornisce il legame $\Theta = mC$. Questo si poteva anticipare ricordando che $\Theta = m\rho^2 d_t\theta$, e usando la (4).

Naturalmente il problema di Keplero può essere studiato anche partendo dall'equazione del moto, ciò che certamente ci avvicina al percorso concettuale dello stesso Newton. Per esaminare la situazione da questo punto di vista, per semplicità di scrittura conviene porre momentaneamente uguale a 1 la massa m del punto in oggetto, continuando tuttavia ad usare i simboli standard per quantità che in effetti dipendono da m . Terremo qui conto a priori della planeità del moto, della costanza del momento angolare Θ rispetto al polo O e della costanza dell'energia totale E . Riferendoci alle solite coordinate polari di polo O , abbiamo $\Theta = \rho^2 d_t\theta$, A (\equiv velocità areale) = $\rho^2 d_t\theta/2$, quindi (per la costanza di Θ) $A = \text{cost} \equiv C/2$, come appena visto. Posto $v =: \rho^{-1}$, l'energia cinetica risulta poi $T = [(d_t\rho)^2 + \rho^2(d_t\theta)^2]/2 = \Theta^2[(d_\theta v)^2 + v^2]/2$. Quindi l'equazione di conservazione dell'energia, per una generica energia potenziale $V(v^{-1})$, è

$$(11) \quad (d_\theta v)^2 + v^2 = 2[E - V(v^{-1})]/\Theta^2.$$

Ponendo Θ in luogo di C (vedi la (10bis) per $m = 1$) nella formula di Binet, abbiamo $a_p = -\Theta^2 v^2 (d_\theta^2 v + v)$. Ma nel caso kepleriano ($V = -kv$) $a_p = -kv^2$, e in definitiva l'equazione dinamica è ($m = 1$):

$$(12) \quad d_\theta^2 v + v = k/\Theta^2 = \text{cost.}$$

La soluzione della (12) è $v = k/\Theta^2 + D\cos(\theta - \underline{\theta})$, dove D (ampiezza) e $\underline{\theta}$ (fase) sono due costanti di integrazione; quindi $(d_\theta v)^2 = D^2 \sin^2(\theta - \underline{\theta})$ e $v^2 = k^2/\Theta^4 + D^2 \cos^2(\theta - \underline{\theta}) + 2Dk/\Theta^2 \cos(\theta - \underline{\theta})$. Sostituite queste ultime espressioni nella (11) con $V = -kv$, alcuni passaggi portano alla $D^2 = (2E + k^2/\Theta^2)/\Theta^2$. Scegliendo la determinazione positiva di D (il che non limita la generalità), otteniamo quindi $v = (k/\Theta^2)[1 + \varepsilon \cos(\theta - \underline{\theta})]$, ove (cfr. (6.4.2, 12bis)) $\varepsilon =: (1 + 2E\Theta^2/k^2)^{1/2}$. Ponendo infine $p =: \Theta^2/k$, concludiamo che

$$(13) \quad v = [1 + \varepsilon \cos(\theta - \underline{\theta})]/p.$$

Per restaurare in questa (13) la presenza della massa m , occorre e basta modificare le quantità denotate con (E, k, Θ) in $(E/m, k/m, \Theta/m)$ (cfr. 6.4.2 nota ⁹). Con tali sostituzioni ε e p acquistano le espressioni appropriate e la (13) coincide con la (6.A, 1), avendo posto $\underline{\theta} = \pi$ per uniformarci alla precedente scelta della semiretta-origine della θ .

Ciò che ancora occorre a Newton per giungere alla sua legge di gravitazione universale non fu poco, e può descriversi come segue. Innanzitutto (i) Newton riscrive la (8) moltiplicata per m nella forma

$$(14) \quad f = -k^*m/\rho^2,$$

dove f è la componente su $\text{vers}(X-O)$ della forza agente sul punto, $k^* = C^2/p$ è la costante indipendente dal pianeta considerato (ma possibilmente dipendente dal centro di attrazione O , in fattispecie, dal sole), e il segno $-$ segnala che la forza è attrattiva. Si deve qui sottolineare che la massa m del pianeta nella (14) va pensata come massa *inerziale* (\equiv quella che figura nella equazione fondamentale della dinamica). In secondo luogo (ii) Newton generalizza induttivamente la (14) ponendo $k^* \equiv \kappa M$, dove M è la massa del sole e κ è una costante *universale* (**costante di Cavendish**, pari a $6.6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{sec}^{-2}$ secondo misure relativamente recenti, vedi anche S.sez 9.1.3), così ottenendo

$$(15) \quad f = -\kappa m M / \rho^2.$$

Di fatto, la transizione induttiva (14) \rightarrow (15) comporta tre passaggi critici che illustriamo e commentiamo appresso, e dei quali sarebbe difficile sopravvalutare l'audacia ai tempi di Newton.

1) Il ruolo delle masse m , M nella (15) è completamente diverso da quello di m nella (14): nella (15), m ed M sono infatti masse *gravitazionali*, cioè masse che sono oggetto, e rispettivamente soggetto, di una azione gravitazionale, e come tali andrebbero denotate con simboli diversi, diciamo con m ed \mathcal{M} . È soltanto un principio "di equivalenza debole", all'epoca ben lontano dall'essere verificato sperimentalmente con la necessaria precisione, o addirittura formulato in modo chiaro ed esplicito (vedi S.sez. 9.1.3), che autorizza ad identificare le masse gravitazionali m ed \mathcal{M} con le loro rispettive accezioni *inerziali* m ed M ; #

2) Il secondo passaggio è fondato sul principio di azione e reazione e su quello di simmetria: se la forza attrattiva esercitata dal sole sul pianeta è, secondo la (14), proporzionale a $m \equiv m$, quella ad essa uguale esercitata dal pianeta sul sole deve essere proporzionale a $\mathcal{M} \equiv M$. In definitiva quella forza deve essere proporzionale ad *entrambe le masse*, e quindi il fattore di proporzionalità κ tra f e $-mM/\rho^2$ deve essere indipendente dal pianeta considerato (ma possibilmente propria del sistema solare!); ovvero, la funzione $k^*(M)$ dell'"altra" massa nella (14) deve essere *proporzionale a M* , o $k^*(M) = \kappa M$; #

3) Il terzo passaggio critico consiste infine nell'affrancare il fattore κ da ogni rapporto con il sistema solare, *rendendolo genuinamente e completamente universale*. #

La (15) si può anche scrivere in forma vettoriale-intrinseca. Se $f_{1 \rightarrow 2}$ denota la forza-vettore esercitata dalla massa puntiforme m_1 sulla m_2 , quindi diretta da x_2 verso x_1 , essa diventa

$$(16) \quad f_{1 \rightarrow 2} = -\kappa m_1 m_2 (x_2 - x_1) / |x_2 - x_1|^3.$$

Scambiando in quest'ultima gli indici (1) e (2), otteniamo $f_{1 \rightarrow 2} + f_{2 \rightarrow 1} = 0$, in accordo con il principio di azione e reazione. La (16) descrive completamente l'interazione gravitazionale tra due punti materiali, ed è alla base della teoria newtoniana della gravitazione universale. Unita alla legge

fondamentale della dinamica e alle convenienti condizioni accessorie, essa consente di descrivere predittivamente il moto dei due punti materiali in questione nella ipotesi che (o nella approssimazione in cui) essi non siano soggetti a forze diverse da quella della loro mutua interazione. Il calcolo di questo moto costituisce il problema cosiddetto **dei due corpi** (supposti puntiformi²⁰) in interazione gravitazionale (newtoniana).

Questo problema può generalizzarsi in diverse direzioni, soltanto la prima delle quali è di interesse per la dinamica celeste in senso stretto.²¹ Vale a dire, si può passare da 2 a $N > 2$ corpi (in interazione gravitazionale); oppure si può passare ad interazioni binarie derivabili da un generico potenziale $U(\rho)$ (ρ essendo la distanza tra i due corpi considerati) in luogo del potenziale newtoniano; oppure ancora, ad interazioni binarie meramente “interne” all’insieme di $N \geq 2$ PM (punti materiali) di masse m_1, \dots, m_N (insieme che denoteremo Σ_N), per i quali valga il principio di azione e reazione. In quest’ultimo caso, denotando con x_μ la posizione del punto μ -mo, le equazioni di moto sono (per $\mu = 1, \dots, N$):

$$(17) \quad m_\mu d_t^2 x_\mu = \sum'_{v=1}^N f_{v \rightarrow \mu},$$

dove $f_{v \rightarrow \mu}$ è ancora la forza esercitata dal punto v -mo sul punto μ -mo, la somma va da 1 a N , e l’apice (') significa che si salta l’addendo $v = \mu$. Riferita a $N > 2$ corpi, la (17) contiene un’altra ipotesi, e cioè un **principio di additività delle forze** (che si assume valido per le forze gravitazionali) e che si enuncia: “la forza esercitata sul corpo (μ) da parte degli altri $N - 1$ corpi è pari alla somma vettoriale delle forze che questi ultimi eserciterebbero separatamente sul corpo (μ) stesso”. L’attributo “binarie” con cui si è soliti qualificare le forze tra più di 2 corpi è sinonimo di un tale principio di additività. L’ipotesi della natura binaria delle interazioni gravitazionali tra *più* di due corpi è ancora un passaggio critico (anche se a prima vista sembra assai naturale) sulla via della teoria newtoniana della gravitazione universale.

Come sappiamo, il risultante e il momento totale rispetto ad un qualunque polo O di un sistema di forze *interne* sono nulli (cfr. S.sez 2.1.2), e quindi, scrivendo \sum in luogo di $\sum_{v=1}^N$

$$(18_1) \quad \sum m_\mu d_t^2 x_\mu = 0.$$

Abbiamo poi similmente, ad esempio identificando il polo con l’origine $x = 0$,

$$(18_2) \quad \sum m_\mu x_\mu \times d_t^2 x_\mu = 0.$$

La (18₁) implica che

²⁰ Nella dinamica celeste le distanze tra oggetti materiali sono sempre molto maggiori delle loro dimensioni, e quindi il termine “corpo” va di norma inteso come sinonimo di “punto materiale”.

²¹ Una eccezione è ad esempio quella in cui si considerano interazioni gravitazionali tra due corpi (almeno) uno dei quali è esteso rispetto alla loro distanza, come succede nel caso di un satellite artificiale potenziato dalla terra (che è uno sferoide oblato, e genera un potenziale leggermente diverso da quello inversamente proporzionale alla distanza dal suo centro.)

$$(19) \quad \sum m_{\mu} x_{\mu} = \alpha t + \beta,$$

dove α e β sono certi vettori indipendenti da t . Il 1° membro della (19) può scriversi come $m\mathbf{x}$, dove m è la massa totale di Σ_N e \mathbf{x} è la posizione del suo baricentro; quindi quest'ultimo si muove di moto uniforme con velocità α/m ed è in β/m nell'istante $t = 0$. La $\sum m_{\mu} d_t x_{\mu} = m d_t \mathbf{x} = \alpha$ esprime la conservazione della quantità di moto di Σ_N .

Quanto alla (18₂), essa può scriversi $0 = \sum m_{\mu} x_{\mu} \times d_t^2 x_{\mu} = \sum m_{\mu} d_t(x_{\mu} \times d_t x_{\mu})$, e quindi $\sum m_{\mu} x_{\mu} \times d_t x_{\mu}$ è anch'esso un vettore indipendente da t , diciamo:

$$(20) \quad \sum m_{\mu} x_{\mu} \times d_t x_{\mu} = \gamma.$$

La (20) esprime la conservazione del momento della quantità di moto (o momento angolare) rispetto all'origine di Σ_N . Poiché le (17) sono invarianti rispetto a traslazioni uniformi del riferimento, possiamo passare ad un altro riferimento *inerziale* con l'origine nel baricentro del sistema (e con assi paralleli a quelli del riferimento "fisso"). In questo nuovo riferimento inerziale le nove costanti (α, β, γ) diventano altrettante costanti $(\alpha', \beta', \gamma')$ delle quali α' e β' sono nulle (ovviamente) e $\gamma' = \gamma + (\alpha \times \beta)/m$ ²². Una conveniente rotazione una tantum di questo riferimento rende infine $\text{vers}(\gamma')$ uguale (ad es.) a $\text{vers}(3)$, e porta ad una configurazione in cui otto delle nove iniziali costanti sono nulle, mentre la nona è ≥ 0 (momento angolare intorno all'asse (3)). Il piano (1,2) del riferimento inerziale così definito (o **riferimento intrinseco**) è detto **piano invariante** di Σ_N .²³ Queste conclusioni restano valide per interazioni binarie di qualunque tipo tra i punti di Σ_N .

Tornando ad un riferimento generico, l'energia cinetica di Σ_N , $T = \sum m_{\mu} (d_t x_{\mu})^2/2$, risulta uguale a $m(d_t \mathbf{x})^2/2 + \sum m_{\mu} (d_t x_{\mu}^*)^2/2$, dove $x_{\mu}^* =: x_{\mu} - \mathbf{x}$; vale a dire, essa è la somma dell'energia cinetica della massa m posta nel baricentro in moto con velocità $d_t \mathbf{x}$, e di quelle dei singoli punti dovute al loro moto "relativo al baricentro". La dimostrazione è elementare. Poiché $d_t x_{\mu} = d_t \mathbf{x} + d_t x_{\mu}^* \quad \forall \mu$, abbiamo $2T = \sum m_{\mu} (d_t x_{\mu})^2 = m(d_t \mathbf{x})^2 + 2d_t \mathbf{x} \cdot \sum m_{\mu} d_t x_{\mu}^* + \sum m_{\mu} (d_t x_{\mu}^*)^2$; ma l'addendo intermedio è nullo perché lo è $\sum m_{\mu} d_t x_{\mu}^*$ (definizione di baricentro), e da questo scende la tesi sopraenunciata, nota come **teorema di König**.²⁴ Valendo la conservazione della quantità di moto, il primo addendo nella precedente espressione di $2T$ è la costante α^2/m , ed è nullo in un riferimento inerziale con origine nel baricentro del sistema: in tal caso, $2T$ si riduce a $\sum m_{\mu} (d_t x_{\mu}^*)^2$.

²² Questo si verifica subito ponendo $x_{\mu} - \mathbf{x}$ in luogo di x_{μ} nella (20). Si ha $\gamma' = \sum m_{\mu} (x_{\mu} - \mathbf{x}) \times d_t (x_{\mu} - \mathbf{x}) = \sum m_{\mu} (x_{\mu} \times d_t x_{\mu} - \mathbf{x} \times d_t x_{\mu} - x_{\mu} \times d_t \mathbf{x} + \mathbf{x} \times d_t \mathbf{x}) = \gamma - m\mathbf{x} \times d_t \mathbf{x} = \gamma - (\alpha t + \beta) \times \alpha/m = \gamma + (\alpha \times \beta)/m$.

²³ Nel caso del sistema solare, i piani orbitali dei vari pianeti non sono inclinati per più di qualche grado sul piano invariante del sistema, e le orbite sono percorse tutte nello stesso verso. In altre parole, i contributi al momento angolare totale da parte dei singoli pianeti sono vettori di versori quasi uguali.

²⁴ Samuel König, olandese, Isenburg 1712 – Zuikestein 1757, allievo di J. Bernouilli.

Supponiamo adesso che la forza sul punto materiale (μ) si possa esprimere come $\nabla_{\mu}U$, dove U è una funzione di classe C^1 delle $N(N-1)/2$ distanze (per ipotesi > 0) $|x_{\mu}-x_{\nu}| \equiv \rho_{\mu,\nu} \equiv \rho_{\nu,\mu}$ ($\mu \neq \nu$), e conveniamo di denotare con $\nabla_{\mu}g$ il gradiente di una generica funzione g di (x_1, \dots, x_N) rispetto alla x_{μ} , cioè il vettore la cui i -componente è la derivata parziale di g rispetto a x_{μ}^i . Le (17) si riscrivono allora come (sempre per $\mu = 1, \dots, N$)

$$(17bis) \quad m_{\mu}d_t^2x_{\mu} = \nabla_{\mu}U.$$

Un facile calcolo mostra che il risultante delle forze $\nabla_{\mu}U$, $\sum \nabla_{\mu}U$, e il loro momento rispetto all'origine del riferimento, $\sum(x_{\mu} \times \nabla_{\mu}U)$, sono entrambi nulli. Oltre che dal fatto che U genera forze *interne* al sistema Σ_N , questo segue anche dalla invarianza di U rispetto a traslazioni del riferimento e a sue rotazioni intorno all'origine. Si hanno quindi le stesse nove costanti di moto del sistema (17) (posizione iniziale del baricentro di Σ_N , sua quantità di moto e suo momento angolare); ma adesso ne emerge una decima, l'energia totale. La dimostrazione è immediata: basta moltiplicare scalarmente la (17bis) per $d_t x_{\mu}$ e sommare rispetto a μ , per avere da una parte $d_t(\sum m_{\mu}(d_t x_{\mu})^2)/2 = d_t T$ e dall'altra $\sum d_t x_{\mu} \cdot \nabla_{\mu}U = d_t U$. Si conclude che $d_t(T-U) = 0$, ovvero che

$$(21) \quad T + V = E,$$

ove $V = -U$ è l'energia potenziale di Σ_N ed E la sua energia totale (costante del moto). Si noti ancora che nel caso di interazione gravitazionale risulta

$$(22) \quad 2U = \kappa \sum'_{\mu,\nu} m_{\mu}m_{\nu}/\rho_{\mu,\nu},$$

dove al solito l'apice significa $\mu \neq \nu$; e che in base a questa (22) la forza f_{μ} sul punto (μ) è data dalla

$$(16') \quad f_{\mu} = \nabla_{\mu}U = -\kappa m_{\mu} \sum_{\nu \neq \mu} m_{\nu} (x_{\mu} - x_{\nu}) / |x_{\mu} - x_{\nu}|^3,$$

per cui $\sum_{\mu=1}^N f_{\mu} = 0$. Le (16') generalizzano la (16) ad un numero > 2 di punti materiali.

A parte la E , che contiene le x_{μ} attraverso la U , le altre nove costanti del moto sono dei polinomi nelle x_{μ} e $d_t x_{\mu}$. È stato dimostrato (Bruns, 1887²⁵) che non esistono altre costanti di moto del sistema (17bis) di questo tipo, o addirittura (Poincaré, 1889²⁶) di tipo analitico-intero. Assieme alla non-separabilità della EHJ, questo fatto è alla base della non-risolubilità analitica (a meno che non si facciano ipotesi semplificatrici molto particolari) delle equazioni (17bis) per $N > 2$.

Il caso $N = 2$ delle (17bis) può invece essere facilmente ridotto ad un problema "a un solo corpo". Posto $x =: x_2 - x_1$, sottraendo la prima delle due equazioni (17bis) ($\mu = 1, 2$) dalla seconda, si ha:

$$(23) \quad d_t^2 x = \nabla_2 U / m_2 - \nabla_1 U / m_1 = (1/m_2 + 1/m_1) \nabla_2 U \equiv \nabla_2 U / \mu,$$

²⁵ H. Bruns, Acta Math., **11**, 25 (1887); Berichte sachs. Gesell. Wiss. Leipzig **1**, 55 (1887).

²⁶ H. Poincaré, Acta Math. **13**, 1 (1889), anche in "Œuvres de H. P.", VII, 286, Gauthier-Villars (1952).

dove la seconda uguaglianza scende dalla $\nabla_1 U + \nabla_2 U = 0$, e si è posto $1/\mu =: 1/m_2 + 1/m_1$. Questa massa μ , minore sia di m_1 che di m_2 , si dice **massa ridotta** dell'insieme dei due punti. Poiché U è funzione di $\rho_{1,2} = \rho_{2,1} = |x|$, il suo $\nabla_2 U$ è semplicemente il gradiente rispetto a x di $U(|x|)$, che denotiamo ∇U ; per cui in definitiva abbiamo

$$(23bis) \quad \mu d_t^2 x = \nabla U.$$

La (23bis) governa il moto di un unico punto (fittizio) di massa μ e posizione x , soggetto alla forza ∇U con $U \equiv$ funzione della sua distanza $|x|$ dall'origine del riferimento. La forza ∇U è diretta come il vettore x (infatti $\nabla U = x/|x| dU/d|x|$), e quindi il moto è centrale con polo nell'origine. Nel caso gravitazionale, secondo la (22) $U = \kappa m_1 m_2 / |x|$. Poiché $d(1/|x|)/d|x| = -1/|x|^2$, il punto è *attratto* dall'origine con forza $\kappa m_1 m_2 x / |x|^3$, come in un problema di Keplero in cui k sia uguale a $\kappa m_1 m_2$ e il punto in questione abbia massa μ .

Per calcolare l'energia cinetica T di un insieme Σ_2 di due punti materiali mediante il teorema di König, dobbiamo procurarci le $(d_t x_1^*)^2$ e $(d_t x_2^*)^2$. Un facile calcolo prova che $(d_t x_\mu^*)^2 = (m_{\mu+1}/m)^2 (d_t x)^2$ (leggi $\mu \bmod 2$), dove $m = m_1 + m_2$, e al solito $x =: x_2 - x_1$. Si trova così $\sum_{\mu=1}^2 m_\mu (d_t x_\mu^*)^2 = \mu (d_t x)^2$, quindi $2T = m (d_t x)^2 + \mu (d_t x)^2$. Se la quantità di moto del sistema è conservata, il primo addendo è la costante α^2/m . Se poi la forza agente su m_μ è $\nabla_\mu U$ come nelle (17bis), possiamo identificare la lagrangiana di Σ_2 con $\mu (d_t x)^2 / 2 + U$, perché la costante α^2/m può evidentemente essere ignorata. Le tre equazioni di EL per questa lagrangiana sono dunque $\partial U / \partial x^i - \mu d_t^2 x^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$), e ritroviamo la (23bis). Avendo risolto il problema per x , cioè avendo calcolato $x = x(t)$, poiché x è in moto uniforme ($m\dot{x} = \alpha t + \beta$) le traiettorie $x_1 = x_1(t)$ e $x_2 = x_2(t)$ si ricavano immediatamente dal sistema lineare (di determinante uguale a m) $x_1 - x_2 = -x$, $m_1 x_1 + m_2 x_2 = \alpha t + \beta$, secondo le $x_1 = x - m_2 x / m$ e $x_2 = x + m_1 x / m$. Le lunghezze $y_1 =: -m_2 x / m$ e $y_2 =: m_1 x / m$ si dicono talvolta **coordinate** (di (1) e risp. (2)) **ridotte al baricentro**. Una elementare verifica prova che $(d_t y_\mu)^2 = (d_t x_\mu^*)^2$, (per $\mu = 1, 2$), e dunque $\sum_{\mu=1}^2 m_\mu (d_t x_\mu^*)^2 = \sum_{\mu=1}^2 m_\mu (d_t y_\mu)^2$. Se vale la (22), e si suppone $x = 0$ (origine del riferimento) sia (1) che (2) percorrono ellissi coplanari aventi un fuoco nell'origine e legate l'una all'altra dalla $x_1 = -(m_2/m_1)x_2$. Se in particolare $m_1 \gg m_2$, allora $m \approx m_1$, $\mu \approx m_2$, $d_t x_1 \approx -(\mu/m)d_t x$, e $d_t x_2 \approx d_t x$: vale a dire, con un errore dell'ordine di $\mu/m \approx m_2/m_1$, il punto (2) percorre una ellisse con fuoco nell'origine, dove è invece fermo il molto più massivo punto (1).

Dal momento che la legge newtoniana (16) incorpora alcune induzioni, ci si aspetta che essa vada *al di là* delle leggi di Keplero pur avendo da esse preso le mosse. È quindi naturale chiedersi in che approssimazione quelle leggi siano effettivamente valide alla luce della (16). Secondo la

precedente analisi, innanzitutto il generico pianeta, pur considerato in interazione con il sole soltanto (problema a due corpi), percorre un'ellisse avente per fuoco il baricentro (che può considerarsi fisso) del sistema sole-pianeta, *e non il sole*; e ancora, la sua velocità areale costante è quella rispetto a questo baricentro, *e non quella rispetto al sole*. Quindi se m è al solito la massa del pianeta e M quella del sole, le prime due leggi di Keplero valgono a meno di un errore dell'ordine di m/M . Quanto alla terza legge, tornando alla (6.4.2, 13₁) si prova (vedi la prossima sottosezione!) che essa può scriversi equivalentemente come

$$(24) \quad t(\eta) - \underline{t} = (ma^3/k)^{1/2} \int_{\eta'=\underline{\eta}}^{\eta} (1-\varepsilon \cos \eta') d\eta',$$

dove a e ε sono al solito il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'ellisse, η è la cosiddetta **anomalia eccentrica** – un angolo per il quale $\rho = a(1-\varepsilon \cos \eta) - e \underline{t} = t(\underline{\eta})$. Il periodo \mathcal{T} dell'orbita si ha quindi ponendo $\eta = \underline{\eta} + 2\pi$ nella (17), per cui $\mathcal{T} = t(\underline{\eta}+2\pi) - \underline{t} = 2\pi(ma^3/k)^{1/2}$. Quest'ultima relazione va ora modificata tenendo conto che in realtà abbiamo un problema a due corpi, e che perciò si deve sostituire m con $\mu = mM/(m+M)$ e k con κmM , dove M è la massa del sole. Il risultato è

$$(25) \quad \mathcal{T}^2 = 4\pi^2 \mu a^3 / (\kappa mM) = (1+m/M)^{-1} 4\pi^2 a^3 / (\kappa M);$$

cioè il rapporto \mathcal{T}^2/a^3 *non è strettamente comune ai vari pianeti*, ma dipende dalla loro massa come $(1+m/M)^{-1}$. In conclusione, pur non contando le interazioni del pianeta con corpi diversi dal sole, anche la terza legge vale a meno di un errore dell'ordine di m/M . Ricordando che m/M è dell'ordine di 10^{-3} già per Giove (il più massivo dei pianeti), possiamo tributare a Brahe e Keplero tutta la reputazione dovuta loro come osservatori di eccezionale talento.²⁷

6.4.4) ELEMENTI DI DINAMICA CELESTE II

La trattazione 3-dim del problema di un moto centrale con potenziale $-V(\rho)$ a partire dall'hamiltoniana (6.4.2, 14) prova che la relativa EHJ ridotta è separabile in coordinate sferiche (ρ, ψ, φ) . Tuttavia essa mal si presta a calcoli pratici (è poco naturale rappresentare un cerchio massimo della sfera unitaria come relazione tra φ e ψ , salvo il caso banale $\varphi = \text{cost.}$), per cui si è affermata una versione della costruzione della funzione caratteristica w alquanto diversa da quella illustrata nella S. sez 6.4.2, e che è opportuno conoscere – almeno per un moto kepleriano – per

²⁷ Non va dimenticato che, in pratica, Brahe guardava il cielo ad occhio nudo. Keplero cominciò le sue osservazioni “in proprio” qualche tempo dopo la morte di Brahe, e verso la fine della sua attività usava telescopi di discreta potenza. Fatti uguali a 1 il periodo e il raggio medio dell'orbita terrestre, Keplero trovava per (\mathcal{T}^2, a^3) i valori (0.058, 0.058) per Mercurio, (0.378, 0.378) per Venere, (3.54, 3.54) per Marte, (140.7, 140.8) per Giove, e (867.7, 867.9) per Saturno. Nelle sue parole, la terza legge era dunque cosa «certissima exatissimaque».

meglio orientarsi nella letteratura astronomica classica. Le sei costanti del moto centrale di un punto materiale \mathcal{P} nello spazio possono di fatto scegliersi con ampio margine di libertà. L'idea di identificarle con le posizioni e le velocità di \mathcal{P} in un istante iniziale t_0 (peraltro scelto arbitrariamente) è soltanto la più ovvia. Come vedremo, nella presente versione del problema kepleriano, cinque costanti servono ad individuare l'orbita di \mathcal{P} , mentre la sesta dà l'istante del passaggio di \mathcal{P} per un punto iniziale di posizione X_0 (a sua volta scelto arbitrariamente) della traiettoria. Per cominciare, il piano (orientato) del moto Π , passante per O , è determinato dalla sua giacitura (\equiv il suo versore normale n), quindi da due costanti. La traiettoria in Π è poi individuata da altre tre costanti, che nel caso kepleriano possono identificarsi con la sua "scala" (ad es. il semiasse maggiore dell'ellisse), la sua "forma" (ad es. l'eccentricità della stessa), e il suo "orientamento" (ad es. l'anomalia del perielio, contata a partire da un convenuto asse orientato di Π passante per O). Infine la sesta costante è l'istante t_0 in cui \mathcal{P} passa per X_0 (ad es. l'istante in cui \mathcal{P} passa per il perielio). In luogo della coppia (semiasse maggiore a , eccentricità ε) dell'ellisse, si può usare con vantaggio la coppia ((momento angolare rispetto a O intorno all'asse n – che denoteremo ora con una più tradizionale G invece che con Θ), energia E), legata alla prima coppia dalle ormai familiari relazioni $G = [amk(1-\varepsilon^2)]^{1/2}$, $E = -k/(2a)$, o dalle inverse $a = -k/(2E)$, $\varepsilon = [1-G^2/(amk)]^{1/2}$.

Sia (x,y,z) una terna cartesiana standard con origine in O e con asse (z) per ipotesi *trasverso* al piano Π . Quest'ultimo può essere allora individuato da (i) la colatitudine $\iota \in (0,\pi)$ di n , per la quale è quindi $n_z = \cos \iota$; e (ii) la longitudine $\gamma \in [0,2\pi)$ di N , definito come il punto del piano (x,y) in cui la traiettoria di \mathcal{P} lo attraversa procedendo "dal basso verso l'alto" (cioè verso il semispazio $z > 0$). N si dice **nodo ascendente** della traiettoria, e γ ne è perciò la longitudine secondo la $[\text{vers}(N-O)]_x = \cos \gamma$. La posizione X di \mathcal{P} in Π (e quindi nello spazio (x,y,z)) si definisce a questo punto assegnandone la distanza da O , $\rho = |X-O|$ e l'anomalia ϕ contata a partire dall'asse orientato ON (e nel verso di Π). Converterà riferirsi alla sfera unitaria di centro O e alla proiezione X^* di X su di essa ($\text{vers}(X-O) = \text{vers}(X^*-O)$ e $|X^*-O| = 1$). Siano ψ la colatitudine e φ la longitudine di X^* riferite alla terna (x,y,z) . Sussistono allora le seguenti due relazioni (facilmente verificabili) tra $\phi, \psi, \varphi, \iota$ e γ :

$$(1) \quad \cos \phi = \sin \psi \cos(\varphi - \gamma),$$

$$(2) \quad \sin \phi \cos \iota = \sin \psi \sin(\varphi - \gamma). \quad ^{28}$$

(Non è difficile capire perché φ e γ compaiono soltanto attraverso la loro differenza nelle (1,2).) Se ϕ viene eliminata tra tali (1,2), si resta con una relazione tra ψ e φ per il dato Π (cioè per i dati ι e

²⁸ Ad esempio se Π è il piano meridiano (x,z) si ha $\cos \iota = 0$, $\gamma = 0$ e $\phi + \psi = \pi/2$, quindi $\cos \phi = \sin \psi$. Per la (1) è allora $\cos \phi = 1$, mentre entrambi i membri della (2) sono nulli, il primo perché $\cos \iota = 0$, e il secondo perché $\sin \phi = 0$.

γ), che è l'equazione del cerchio massimo sezione di $\Pi(t, \gamma)$ con la sfera unitaria. Derivando poi la (1) rispetto a γ (con X^* fisso) si trova $-\sin\phi\partial\phi/\partial\gamma = \sin\psi\sin(\phi-\gamma) = \sin\phi\cos t$ (in forza della (2)), Poiché quest'ultima vale $\forall\phi$, si conclude che

$$(3) \quad \partial\phi/\partial\gamma = -\cos t.$$

Alla luce della trattazione 2-dim del problema con V generica, la funzione caratteristica w è data dalla (6.4.2, 7), che si riscrive ora come

$$(4) \quad w = w(\rho, \phi|G, E) = R(\rho|G, E) + G\phi,$$

dove R è data dalla (6.4.2, 8bis) con G in luogo di Θ . Convieni denotare con $|R$ la primitiva a 2° membro della (6.4.2, 8bis), riscrivendo la (4) come $w_{\pm} \doteq \pm|R + G\phi$. Il 2° membro di questa uguaglianza a meno di costante additiva non può essere usato come integrale completo della EHJ nella trattazione 3-dim del problema, perché contiene due soli parametri di tipo β , G ed E . Tenendo presente che secondo la (1) $\phi = \phi(\psi, \varphi|\gamma)$, si può tuttavia usare la costante γ come secondo parametro di tipo β (E è il terzo parametro di tipo (β)), ottenendo:

$$(4') \quad w_{\pm}(\rho, \psi, \varphi|G, \gamma, E) \doteq \pm|R(\rho|G, E) + G\phi(\psi, \varphi|\gamma).$$

Il determinante Δ' (v. 6.4.1, 2') si calcola facilmente con la scelta di γ come parametro, e risulta $\Delta' = -G^2\partial^2\phi/\partial\psi\partial\gamma/(\rho^2 d_{\rho}R)$. La w_{\pm} soluzione della EHJ ridotta è dunque un integrale completo, e quindi funzione caratteristica, sse $\Delta' \neq 0$ nel punto di riferimento (banalmente, il doppio segno in $d_{\rho}R$ non ha importanza in questa condizione).

Scrivendo G come β_1 , γ come β_2 ed E come β_3 , in definitiva abbiamo le tre equazioni (cfr. le (6.4.1, 7, 7_{n=3})):

$$(5_1) \quad \partial w_{\pm}/\partial\beta_1 \equiv \partial w_{\pm}/\partial G = \alpha^1,$$

$$(5_2) \quad \partial w_{\pm}/\partial\beta_2 \equiv G\partial\phi/\partial\gamma = \alpha^2,$$

$$(5_3) \quad \pm\partial w/\partial\beta_3 \equiv \pm\partial w/\partial E = \alpha^3 + t,$$

nell'ultima delle quali w sta per w_+ . Dobbiamo ora procurarci il significato delle costanti α^1 , α^2 e α^3 . La prima di esse si può calcolare in un punto arbitrario \underline{X} della traiettoria facendo uso della (4) e della (6.4.2, 9) con G in luogo di Θ e ϕ in luogo di θ . Ponendo il limite inferiore dell'integrale nella (6.4.2, 9) uguale a $\underline{\rho} = |\underline{X}-O|$, l'integrale si annulla in \underline{X} , e dunque risulta $\alpha^1 = \phi|_{\underline{X}}$; cioè α^1 è l'anomalia ϕ del punto \underline{X} (indipendentemente dal segno in fronte a $|R$). Quanto alla costante α^2 , basta ricordare che $\partial\phi/\partial\gamma = -\cos t$: quindi α^2 è il prodotto del momento angolare G intorno a n per l'opposto della componente di n su (z) , $n_z = \cos t$. Infine α^3 si ha dalla (6.4.2, 10) (al solito con G in luogo di Θ); se ancora si pone $\underline{\rho}$ per il limite inferiore dell'integrale che vi figura, l'integrale si annulla in \underline{X} , e si resta con $-\alpha^3 = t(\rho|G, E)|_{\underline{X}} \equiv$ istante del passaggio di X per \underline{X} . Il segno nella (5₃) è

quello che assicura $dt > 0$ lungo la traiettoria. Si noti che queste considerazioni valgono per una $V(\rho)$ generica e non soltanto per la $V(\rho) = -k/\rho$ kepleriana. In quest'ultimo caso, che è quello di maggior interesse, si usa scegliere il *perielio* dell'ellisse come punto \underline{X} . Riassumendo, e riferendoci ormai definitivamente al problema di Keplero, abbiamo

(5₁') $\alpha^1 =$ anomalia ϕ del perielio (dimensionalmente, un angolo);

(5₂') $\alpha^2 = -Gn_z$ (dimensionalmente, un momento angolare \equiv azione);

(5₃') $-\alpha^3 = t|_{\underline{X}} =$ istante del passaggio di X per il perielio (dimensionalmente, un tempo).

Tradizionalmente, ma le notazioni non sono uniformi, l'angolo α^1 si denota con g e l'azione α^2 con $-\Gamma$ (mentre α^3 è definito come $-t|_{\underline{X}}$). In forza della omogeneità della coordinata t , senza limitazione di generalità si può porre $t|_{\underline{X}} = 0$, e così sarà fatto qui di seguito. Infine, e come sappiamo, nel problema di Keplero la doppia determinazione di w nella (5₁) è riassorbita dalla parità di \cos , per cui potremo scrivere w in luogo di w_{\pm} anche in questa equazione. La stessa doppia determinazione di w può ovviamente ignorarsi anche nella (5₂).

Le due terne (G, γ, E) e $(g, -\Gamma, t)$ sono “associate” nel senso che $\partial w / \partial G = g$, $\partial w / \partial \gamma = -\Gamma$, $\pm \partial w / \partial E = t$. Dimensionalmente, la prima terna è del tipo (momento angolare \equiv azione, angolo, energia) mentre la seconda è del tipo (angolo, azione, tempo). Oltre che inelegante, questa dissimetria è scomoda: sarebbe preferibile avere una doppia terna del tipo (azione, azione, azione), (angolo, angolo, angolo), vedi i commenti alla fine della S.sez. 6.4.2. Questo si realizza facilmente. Innanzitutto si pone (cfr. S.sez 6.3.3) $w^* =: w + \Gamma\gamma$: allora $\partial w^* / \partial \gamma = \partial w / \partial \gamma + \Gamma = 0$ e $(^\circ) \partial w^* / \partial \Gamma = \gamma$. Quindi la nuova w^* è indipendente da γ e dipende da Γ in modo da soddisfare la $(^\circ)$. Riscritte con w^* in luogo di w , le (5₁, 5₃) restano ovviamente invariate, mentre la (5₂) è sostituita dalla $(^\circ)$. Vale a dire, le due terne (G, Γ, E) e (g, γ, t) sono ora associate nel senso delle equazioni (5₁), $(^\circ)$, (5₃), e sono dimensionalmente del tipo (azione, azione, energia), (angolo, angolo, tempo). L'ultima modifica per pervenire al nostro obiettivo si ottiene introducendo la nuova costante (funzione di E) $L =: (kma)^{1/2} \equiv k(m/2)^{1/2}(-E)^{-1/2}$ in luogo di E . Come si verifica immediatamente, L è un'azione, e un calcolo banale mostra che $dL/dE = L^3/(mk^2)$. Il primo membro di questa ha dimensione azione/energia = tempo. Segue che anche $L^3/(mk^2)$ è un tempo; ed effettivamente, $L^3/(mk^2) = k^{3/2}m^{3/2}a^{3/2}/(mk^2) = (m/k)^{1/2}a^{3/2} = \mathcal{T}/(2\pi)$, \mathcal{T} essendo il periodo dell'orbita (terza legge di Keplero, $a^{3/2} = (k/m)^{1/2} \mathcal{T}/(2\pi)$). In definitiva si ha $dL/dE = \mathcal{T}/(2\pi) \equiv 1/\langle \omega \rangle$, se $\langle \omega \rangle =: 2\pi/\mathcal{T}$ è la **velocità angolare media** (intorno al polo), e $\pm \partial w^* / \partial E (\equiv \pm \partial w / \partial E) = \pm \partial w^* / \partial L dL/dE = t$, o $\pm \partial w^* / \partial L = \langle \omega \rangle t$. L'angolo $\langle \omega \rangle t$, proporzionale a t , si denota λ e si dice **anomalia media** di \mathcal{P} ; esso si può considerare come una misura del tempo trascorso dal passaggio di \mathcal{P} per il perielio. La nuova doppia terna di

variabili associate (G, Γ, L) , (g, γ, λ) ²⁹ ha le desiderabili proprietà di simmetria (tre azioni, tre angoli), ed è nota come doppia terna (o sestupla) delle **variabili kepleriane canoniche** (o degli **elementi kepleriani**).

L'uso dell'anomalia eccentrica η (per la quale $\rho = a(1 - \varepsilon \cos \eta)$, cfr. S.sez. 6.4.3) come coordinata lungo l'orbita ha avuto un notevole successo pratico, perché essa si confonde con l'anomalia standard θ diminuita di π per piccole eccentricità, $\eta \approx \theta - \pi$. Sia infatti X il punto dell'ellisse con l'usuale anomalia θ (rispetto al fuoco $F \equiv O$, e al solito con semiasse-origine rivolto verso l'afelio), e sia X' la sua proiezione normale (all'asse apsidale) e dalla stessa banda di X , sul cerchio concentrico³⁰ all'ellisse e di raggio uguale al suo semiasse maggiore a . Sia poi η' l'anomalia *rispetto al centro* C (comune all'ellisse e al cerchio) di X' , e X'' la proiezione di X sull'asse apsidale. Si ha così $C - X'' = C - F - \rho \cos \theta = -a \cos \eta'$. Ma $C - F = a\varepsilon$, e $\varepsilon \rho \cos \theta = \rho - a(1 - \varepsilon^2)$ (v. App. 6.A, 1, e_5). Da queste relazioni si trae subito che $\rho = a(1 + \varepsilon \cos \eta')$, e quindi che è semplicemente $\eta = \eta' - \pi$ se si vuole che η e η' siano equiversi ($d\eta = d\eta'$). È anche chiaro che θ e η' sono insieme 0 (all'afelio) o π (al perielio). Riferendo ora il piano del moto alle usuali coordinate (x, y) con origine nel fuoco F , abbiamo $C_z = (X \times d_t X)_z = x d_t y - y d_t x$. Se passiamo a coordinate riferite al *centro* dell'ellisse, diciamo $x^\circ = x - a\varepsilon$ e $y^\circ = y$, allora le $x^\circ = a \cos \eta'$, $y^\circ = b \sin \eta'$ sono le equazioni dell'ellisse con parametro η' . Infatti $(x^\circ/a)^2 + (y^\circ/b)^2 = 1$, equazione canonica dell'ellisse (vedi App. Spec. 6.A). Trascrivendo la precedente espressione di C_z in termini delle coordinate (x°, y°) , abbiamo $C_z = (x^\circ + a\varepsilon) d_t y^\circ - y^\circ d_t x^\circ = a b d_t (\eta' + \varepsilon \sin \eta')$. D'altra parte $C_z = 2\pi a b / \mathcal{T}$; ricordando la definizione di velocità angolare media dell'orbita, $\langle \omega \rangle = 2\pi / \mathcal{T}$, ricaviamo così $C_z / a b = \langle \omega \rangle = d_t (\eta' + \varepsilon \sin \eta')$. Ma $\eta' = \eta + \pi$, quindi $\langle \omega \rangle dt (\equiv d\lambda) = d(\eta - \varepsilon \sin \eta)$. Integrando quest'ultima a partire dal perielio, ove $t = 0$ e $\eta' = \pi$, quindi $\eta = 0$,

$$(6) \quad \langle \omega \rangle t (\equiv \lambda) = \eta - \varepsilon \sin \eta.$$

La (6) è la cosiddetta **equazione di Keplero**, la cui inversione rispetto a η costituì all'epoca un piccolo "caso computazionale". Essa attrasse tuttavia per la sua estrema semplicità, che evidenzia nel miglior modo la dipendenza della legge oraria dall'eccentricità. In particolare essa dà $\eta = \lambda$ per $\varepsilon = 0$, come è ben naturale. Inoltre è chiaro che per piccole eccentricità F e C si confondono, nel senso che $\eta' = \theta + O(\varepsilon^2)$, ovvero $\eta = \theta - \pi + O(\varepsilon^2)$.

Dobbiamo ancora giustificare la (6.4.3, 24). Questo si può fare partendo dalla legge oraria scritta in forma differenziale (6.4.2, 10bis), dove si deve usare il segno $+$ o il segno $-$ a seconda che $d\rho$ sia positivo (punto mobile in allontanamento da O) o negativo. Nella (6.4.2, 10bis), si sostituirà

²⁹ Si è scritto λ , e non "elle minuscolo" ("l"), perché in Word quest'ultimo non si distingue da "uno" ("1").

³⁰ Vedi App. 6.A, dove il centro dell'ellisse è definito come il punto di mezzo tra i suoi due fuochi.

ρ con $a(1 - \varepsilon \cos \psi)$ ove ψ è un angolo per il momento definito a meno del segno, e quindi $d\rho$ con $a \varepsilon \sin \psi d\psi$. Se si richiede che sia *comunque* $d\psi > 0$, allora nella (6.4.2, 10bis) si deve usare il segno + o il segno - a seconda che $\sin \psi$ sia positivo o negativo. L'equazione si riscrive dunque come

$$(20) \quad dt = \pm (ma^3/k)^{1/2} (1 - \varepsilon \cos \psi) \varepsilon \sin \psi [2(1 - \varepsilon \cos \psi) - (1 - \varepsilon \cos \psi)^2 - (1 - \varepsilon^2)]^{-1/2} d\psi.$$

Sviluppando il contenuto delle [] nella (20) abbiamo

$$(20') \quad dt = \pm (ma^3/k)^{1/2} (1 - \varepsilon \cos \psi) \sin \psi / |\sin \psi| d\psi \equiv (ma^3/k)^{1/2} (1 - \varepsilon \cos \psi) d\psi,$$

dalla quale ultima è sparito il doppio segno. Essa è precisamente la (3.4.2, 13₂). Se integriamo il 1° membro della (6.4.2, 10bis) da t a t , e quindi il suo 2° membro da $\underline{\rho} = \rho(t)$ a ρ , ciò corrisponde a integrare il 2° membro della (20') da $\underline{\psi}$ a ψ , con $\underline{\rho} = a(1 - \varepsilon \cos \underline{\psi})$. Se $\underline{\rho}$ è minimo, $\cos \underline{\psi}$ è massimo, quindi $\underline{\psi} = 0$ al perielio. In conclusione, l'integrale su ψ della (20') riproduce la (6.4.3, 24) (che è così provata), e mostra che l'angolo ψ , qui introdotto come colatitudine di X^* rispetto a (x, y, z) , coincide con l'anomalia eccentrica.³¹

Per quanto importanti di per sé, i problemi dinamico-celesti suscettibili di una soluzione analitica esatta sono davvero pochi: i metodi di soluzione approssimata, e in particolare i cosiddetti “metodi perturbativi”, hanno riempito sostanzialmente questo vuoto. Ciò vale del resto per la dinamica classica in generale; ma si può a buona ragione affermare che fu proprio la dinamica celeste a promuovere la nascita, e a spingere lo sviluppo, di quel grande corpo dell'Analisi oggi noto come “Teoria analitica dell'Approssimazione”. L'argomento è ad un tempo troppo vasto e troppo specialistico per essere introdotto in questa sezione 6.4, per cui si è preferito diffonderci in qualche misura su di esso, e su altre analoghe questioni, nella App. Gen. D.

Osserviamo ancora che, a partire da circa la metà del secolo scorso, il calcolo numerico automatico ha profondamente trasformato l'approccio ai problemi dinamici non risolvibili con metodi analitici esatti, che ne sono la grande maggioranza; beninteso, per la produzione di *soluzioni numeriche*, quindi specifiche e non generali. Lo stesso si è del resto verificato in tutti i settori della scienza applicata e della tecnologia. Per fortuna il lungo periodo precedente l'avvento del calcolatore aveva già dato il meglio di sé con la messa a punto di innumerevoli e sofisticate tecniche per la soluzione approssimata di una larga varietà di problemi fisico-matematici. Queste tecniche sono al cuore della moderna analisi funzionale-numerica (vedi ancora l'App. Gen. D); ma soltanto in pochi casi esse sono state realmente sfruttate. La disponibilità di un hardware sempre più potente

³¹ Non possiamo passare qui sotto silenzio l'importante ruolo euristico che i metodi ispirati alla EHJ svolsero durante la prima fase di sviluppo della teoria quantistica (la cosiddetta “old quantum theory”, ca. 1915-25): attraverso le classiche condizioni di Sommerfeld-Wilson, il metodo delle variabili di azione-angolo fornì infatti una vera e propria «via del re verso la quantizzazione» (Sommerfeld). Precisamente, se il moto di un dato sistema classico era calcolato in termini di quelle variabili, la “regola” di quantizzazione consisteva nel sostituire le variabili di azione con (multipli del)la costante di Planck.

e a buon mercato ha fatto sì che la forza bruta (cioè l'uso di tecniche di calcolo concettualmente poco impegnative) prevalesse nella grande maggioranza dei casi. Questo era prevedibile, e del resto anche sostanzialmente giustificato.

APP. SPEC. CAP 6

APP 6.A SULLA RAPPRESENTAZIONE POLARE DELLE CONICHE

Ovviamente la teoria analitica delle **coniche** è parte della cultura matematica di base, e può sembrar strano che se ne parli in questo libro; ma secondo la personale esperienza dell'autore, la rappresentazione *polare* (cioè in coordinate polari standard) di queste curve piane – le più generali rappresentabili in coordinate cartesiane (per es. ortogonali) annullando un polinomio di 2° grado in due variabili – non gode della popolarità che meriterebbe *tenendo conto del suo ruolo nella dinamica celeste*. Proponiamo quindi qui appresso una breve rivisitazione dell'argomento a complemento di quanto esposto nella Sez. 6.4.

Come ognuno sa, vi sono tre tipi di coniche: le **ellissi** (curve piane chiuse, limitate e connesse), le **parabole** (aperte, illimitate e connesse), e le **iperboli** (aperte, illimitate e sconnesse, in quanto costituite da due rami distinti). Ellissi ed iperboli sono simmetriche rispetto a due rette tra loro ortogonali, i loro **assi**, e quindi anche rispetto alla loro intersezione, o loro **centro**. Le parabole, che sono coniche a mezza strada tra le ellissi e le iperboli, hanno un solo asse di simmetria, detto anch'esso il loro **asse**.

Usualmente un'ellisse [una iperbole] è definita come

(α) “il luogo dei punti (del piano) le cui distanze da due punti fissi (i suoi **fuochi**) hanno somma [differenza assoluta] pari ad una costante > 0 ”. Questa definizione è compatibile con la possibilità che i due fuochi di un'ellisse coincidano, dando luogo a quel tipo particolare di ellisse che è un **cerchio**. Informalmente, una parabola può invece considerarsi come un'ellisse-limite, o un'iperbole-limite, della quale uno dei due fuochi è rimosso all'infinito; ma in queste condizioni, la definizione (α) è evidentemente inapplicabile. #

Va anche ricordata la definizione “proiettiva” delle coniche – vecchia di oltre due millenni – che si trova descritta in tutti i manuali elementari di geometria. Sebbene la teoria proiettiva delle coniche risalga certamente ad un'epoca anteriore ad Apollonio (Perga, 262 – 190 a.C.), fu nell'opera di questo grande matematico greco che essa trovò una sistemazione quasi definitiva e completa¹. Secondo Apollonio, le coniche sono dunque definite come

¹ Nelle celebri “Sezioni coniche”, originalmente in otto libri, sette soltanto dei quali ci sono rimasti.

(β) “le sezioni di un cono (da cui il nome) circolare completo dello spazio tridimensionale con un piano”.² A differenza della precedente (α), questa definizione (β) è “universale”, nel senso che abbraccia tutti e tre i tipi di conica (cerchi compresi), oltre ai casi degeneri menzionati nella nota precedente. #

In questa appendice saremo interessati ad un'altra definizione universale di conica, la cosiddetta **definizione polare** (γ). Nel piano della conica, siano dati una retta d ed un punto O fuori di essa; e sia ξ la retta perpendicolare a d passante per O , e O^* l'intersezione (ξ, d). Orienteremo la retta ξ in modo che su di essa O segua O^* .³ O e ξ saranno ora usati come polo e rispettivamente come origine dell'anomalia di un riferimento polare standard (ρ, θ) , con θ crescente come usuale in senso antiorario. Ciò premesso, la definizione polare di una conica recita:

(γ) “ X è punto di una conica se $\rho(X)$ è uguale al prodotto di una costante $\varepsilon > 0$ data (l'**eccentricità** della conica) per la distanza di X da d ”. Detta δ la distanza tra O e O^* e X_d la distanza di X da d , per definizione è quindi $\rho(X) = \varepsilon X_d$; ma $X_d = \delta + \rho \cos \theta$ se X e O sono dalla stessa parte rispetto a d (caso “1”), e $X_d = -\delta - \rho \cos \theta$ nel caso contrario (caso “2”). Posto $p =: \delta \varepsilon (> 0)$ (il **parametro**, o **semi-latus rectum** della conica) risulta allora, scrivendo d'ora in avanti $\rho(X)$ semplicemente come ρ :

$$(1) \quad \rho(1 - \varepsilon \cos \theta) = p$$

nel caso “1”; e

$$(2) \quad \rho(-1 - \varepsilon \cos \theta) = p$$

nel caso “2”; cioè anche, unificando le due scritte,

$$(3) \quad \rho_{\pm}(\pm 1 - \varepsilon \cos \theta) = p,$$

dove il segno superiore si riferisce al caso “1”, e quello inferiore al caso “2”. #

Nel seguito, continueremo ad occuparci principalmente della definizione polare (γ) delle coniche. Poiché deve essere comunque $\rho_{\pm} > 0$, per data ε non tutti i valori di θ sono permessi nelle (3). Inoltre ci si potrebbe limitare a considerare il caso di parametro unitario, $p = 1$ (conica **normalizzata**), perché per p generico ρ_{\pm} varia in proporzione. La (1) è compatibile con la possibilità-limite che $\varepsilon \rightarrow 0+$ mentre $\delta \rightarrow +\infty$, e in modo tale che il loro prodotto resti finito (uguale a p). In questo caso-limite, che ammetteremo senz'altro, la (1) dà $\rho = p$, che è l'equazione di un cerchio di centro O e raggio p . Quindi un cerchio deve considerarsi come una conica con direttrice

² Se in particolare tale piano passa per il vertice del cono, la conica degenera in due rette (o in una retta contata due volte) passanti/e per il vertice del cono, o addirittura in tale vertice come suo unico punto.

³ Questa scelta è convenzionale, e presenta qualche blando vantaggio rispetto alla scelta contraria. Ad esempio, conservando l'orientamento antiorario di θ e orientando ξ in modo che O preceda O^* , in luogo della (1) (vedi appresso) avremmo la (1') $\rho(1 + \varepsilon \cos \theta) = p$.

infinitamente lontana e centro O: allora X e O sono certamente dalla stessa parte rispetto alla d (e infatti ci siamo riferiti alla (1)).

Le coniche si classificano in base al valore della loro eccentricità ε come segue:

- (e) per $0 < \varepsilon < 1$, abbiamo le ellissi, con la possibilità-limite di avere un cerchio se $\varepsilon \rightarrow 0+$;
- (p) per $\varepsilon = 1$, abbiamo la parabola;
- (h) per $\varepsilon > 1$, abbiamo le iperboli.

Cominceremo col considerare le ellissi. In questo caso la (1) dà un ρ positivo per qualunque θ , mentre la (2) darebbe un ρ negativo (inaccettabile) per qualunque θ . La (2) va dunque scartata nel caso delle ellissi, e la (1) è l'equazione polare di una ellisse con eccentricità $0 < \varepsilon < 1$ e parametro p. Essa (1) evidenzia subito le proprietà dell'ellisse di essere una curva chiusa, limitata e connessa, e di giacere tutta dalla stessa banda di O rispetto alla direttrice. (Le stesse proprietà ha ovviamente un cerchio.) Per la parità di \cos , l'ellisse risulta inoltre simmetrica rispetto alla retta per O perpendicolare a d, che per ragioni che saranno evidenti in un momento si dice suo **asse**, o **retta apsidale**. Sempre in forza della (1), si calcolano immediatamente la distanza da O del punto più vicino dell'ellisse, o **apside**, o **vertice prossimale**, V (per $\cos\theta = -1$), $\rho_V = p/(1+\varepsilon)$; e quella del punto più lontano, o **apside**, o **vertice distale** V' (per $\cos\theta = 1$), $\rho_{V'} = p/(1-\varepsilon)$. Il lettore può verificare che ρ_V e $\rho_{V'}$ si ricavano anche come valori di stazionarietà della funzione ρ data dalla (1). La semisomma $a =: (\rho_V + \rho_{V'})/2 = p[(1+\varepsilon)^{-1} + (1-\varepsilon)^{-1}]/2 = p/(1-\varepsilon^2)$, la metà della distanza tra i due vertici, si dice **semiasse maggiore** dell'ellisse. Il **centro** C dell'ellisse è poi il punto di mezzo del segmento avente per estremi i due vertici; quindi C e O giacciono dalla stessa parte rispetto a d, e la distanza $|C-O|$ è $a - \rho_V = \rho_{V'} - a = p\varepsilon/(1-\varepsilon^2) = a\varepsilon$, che si denota c. Mostriamo ora che la parallela alla direttrice passante per C è anch'essa asse di simmetria per l'ellisse. Riscriviamo la (1) nella forma

$$(1bis) \quad \rho = p + \varepsilon x,$$

in cui abbiamo espresso $\rho \cos\theta$ come x. Quadrando quest'ultima, e tenendo presente che $\rho^2 = x^2 + y^2$ se $y =: \rho \sin\theta$, otteniamo $(1-\varepsilon^2)x^2 - 2\varepsilon xp + y^2 = p^2$; e sommando $\varepsilon^2 p^2/(1-\varepsilon^2)$ ai due membri, $(1-\varepsilon^2)[x - p\varepsilon/(1-\varepsilon^2)]^2 + y^2 = p^2[1 + \varepsilon^2/(1-\varepsilon^2)] = p^2/(1-\varepsilon^2)$. Posto $b =: p/(1-\varepsilon^2)^{1/2}$, **semiasse minore** dell'ellisse (tale quindi che $b/a = (1-\varepsilon^2)^{1/2} < 1$), si vede subito che la distanza tra O e C è uguale a $(a^2 - b^2)^{1/2}$, cioè che $c = (a^2 - b^2)^{1/2}$, e che $p = b^2/a$ (quindi, per un cerchio p è uguale al raggio). Posto infine $x' =: x - c$, dividendo la (°) per b^2 si ottiene:

$$(4) \quad (x'/a)^2 + (y/b)^2 = 1,$$

che è la ben nota **equazione canonica dell'ellisse** di semiassi (a,b) in coordinate cartesiane ortogonali (x',y) di origine C e asse x' coincidente con la retta apsidale. La (4) mostra la annunciata

simmetria della curva rispetto alla parallela per C alla direttrice, asse y del riferimento “centrato” (x',y) . In particolare, questa simmetria implica che sulla retta apsidale esista un secondo punto O' simmetrico di O rispetto a C; e similmente, che esista una seconda direttrice d' parallela alla d e ad essa simmetrica rispetto a C, quindi rispetto alla quale l'ellisse giace tutta dalla stessa parte di O' . Ovviamente l'ellisse gode delle stesse proprietà metriche rispetto alle due coppie (O,d) e (O',d') .⁴ I due punti O e O' sulla retta apsidale si dicono i **fuochi** dell'ellisse; la loro distanza è evidentemente $2c \equiv 2a\varepsilon$, e si annulla per $\varepsilon \rightarrow 0+$: i due fuochi si fondono allora nel centro del risultante cerchio di raggio $p = a$. Sempre secondo la (1), la lunghezza p è infine uguale al valore di ρ per $\cos\theta = 0$, cioè è il comune valore assoluto delle quattro **ordinate ai fuochi** dell'ellisse.

Per riassumere, esprimendo le varie grandezze in termini delle lunghezze (a,b) dei due semiassi dell'ellisse abbiamo:

(e₁) eccentricità: $\varepsilon = (1-b^2/a^2)^{1/2}$;

(e₂) distanza centro-fuoco: $c = (a^2-b^2)^{1/2}$;

(e₃) distanza centro-direttrice: $c + \delta = (a^2-b^2)^{1/2} + p/\varepsilon \equiv a^2/(a^2-b^2)^{1/2} > c$;

(e₄) equazioni delle direttrici: $x' = \pm a^2/(a^2-b^2)^{1/2}$;

(e₅) semi-latus rectum: $p = a(1-\varepsilon^2) = b^2/a$.

Se lo giudicasse opportuno, il lettore potrà riguardarsi in un manuale di geometria analitica la dimostrazione della equivalenza delle definizioni (α) , (β) e (γ) dell'ellisse. Qui ci limiteremo a dimostrare, nella prossima nota (⁵), l'implicazione $(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$.

Quanto abbiamo ricordato a proposito della rappresentazione polare delle ellissi è elementare. Il caso delle iperboli, per definizione coniche con eccentricità $\varepsilon > 1$, presenta aspetti leggermente meno semplici, perché come si diceva esse constano di due rami sconnessi. I due casi contemplati dalle equazioni (3) diventano attuali. Nel caso “1” – X e O dalla stessa parte rispetto a d – vale la (1), salvo il fatto che è ora $\varepsilon > 1$. Peraltro la (1) è accettabile come equazione polare di una curva sse $\theta \in (\theta_{as}, 2\pi - \theta_{as})$, dove $\theta_{as} =: \arccos(1/\varepsilon)$ e \arccos è riferita alla sua prima diramazione positiva. Infatti $1 - \varepsilon \cos\theta$ è strettamente positivo soltanto in tale intervallo. Nell'intervallo $[-\theta_{as}, \theta_{as}]$ la (1) è priva di significato; vale a dire, la (1) descrive soltanto il ramo dell'iperbole concavo verso il fuoco O, che nel seguito nomineremo come suo “primo ramo”. Nel caso “2” (X e O da parti

⁴ Vi è un modo più radicale (ma meno astuto) per ricavare l'equazione canonica (2) partendo dalla (1), e che consiste nel formare la somma $(x-c)^2/a^2 + y^2/b^2$, sostituendovi poi x con $p\cos\theta$, y con $p\sin\theta$, e p con $a(1-\varepsilon^2)/(1-\varepsilon\cos\theta)$ (secondo la (1)). Se si moltiplica l'espressione risultante da queste sostituzioni per $(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\theta)^2$ (come è ragionevole allo scopo di eliminare i denominatori), si ottiene un polinomio in ε di 6° grado, del quale i coefficienti delle potenze di ε di grado $(0,1,2,3,4,5,6)$ risultano nell'ordine $(1, -2\cos\theta, \cos^2\theta-1, 2\cos\theta, -\cos^2\theta, 0, 0)$. Il polinomio è quindi uguale a $(1-\varepsilon^2)(1-2\varepsilon\cos\theta+\varepsilon^2\cos^2\theta) \equiv (1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon\cos\theta)^2$, e dunque vale la (2). Una procedura analoga, sui dettagli della quale non ci soffermiamo, è praticabile anche nel caso delle iperboli (vedi più avanti).

opposte rispetto a d), l'equazione polare da usare è la (2), che descrive il “secondo ramo” dell'iperbole per $\theta \in (\pi - \theta_{as}, \pi + \theta_{as})$. Così come la (1) riferita al primo ramo implica la divergenza di ρ per $\theta \rightarrow \theta_{as}+$ e per $\theta \rightarrow (2\pi - \theta_{as})-$, la (2) riferita al secondo ramo implica la divergenza di ρ per $\theta \rightarrow (\pi - \theta_{as})+$ e per $\theta \rightarrow (\pi + \theta_{as})-$. Per la parità di \cos , le (3) provano poi la simmetria dell'iperbole rispetto alla retta per O perpendicolare alla direttrice, che si dice **asse trasverso** dell'iperbole. Esse possono trascriversi eliminando $\rho_{\pm} \cos \theta$ come x_{\pm} , quindi nella forma $\rho_{\pm} = \pm(p + \epsilon x_{\pm})$ (cfr. la (1bis)). Elevando questa al quadrato, e posto ancora $y_{\pm} =: \rho_{\pm} \sin \theta$, si trova $x_{\pm}^2(\epsilon^2 - 1) + 2\epsilon x_{\pm} p - y_{\pm}^2 = -p^2$, ovvero $(^{\circ\circ}) (\epsilon^2 - 1)[x_{\pm}^2 + \epsilon^2 p^2 / (\epsilon^2 - 1)^2 + 2\epsilon p x_{\pm} / (\epsilon^2 - 1)] - y_{\pm}^2 = p^2(\epsilon^2 / (\epsilon^2 - 1) - 1) \equiv p^2 / (\epsilon^2 - 1)$, (cfr. la simile $(^{\circ})$ valida per l'ellisse). Le coordinate x e y affette dal doppio pedice (\pm) sono qui esattamente nella stessa situazione, per cui tale (\pm) potrà essere abolito nelle conseguenze della stessa $(^{\circ\circ})$. Posto adesso $b =: p / (\epsilon^2 - 1)^{1/2}$ (si noti la diversità della analoga definizione nel caso dell'ellisse), divisa per b^2 la $(^{\circ\circ})$ diventa

$$(5) \quad (x'/a)^2 - (y/b)^2 = 1,$$

dove $x' =: x + \epsilon p / (\epsilon^2 - 1)$ e $a =: p / (\epsilon^2 - 1) = b / (\epsilon^2 - 1)^{1/2}$. a e b sono la lunghezza del **semiasse trasverso** (o **maggiore**), e rispettivamente (ma impropriamente, perché il rapporto b/a vale $(\epsilon^2 - 1)^{1/2}$, e può quindi avere qualunque valore positivo) del **semiasse minore** dell'iperbole. La (5) è la nota **equazione canonica dell'iperbole** con semiassi (di lunghezze) (a, b) in coordinate cartesiane (x', y) di origine C, **centro** dell'iperbole (il quale ha ascissa $-\epsilon p / (\epsilon^2 - 1) < 0$ sull'asse trasverso orientato con origine in O). Si noti che C e O giacciono ora da parti opposte rispetto alla direttrice. In conclusione l'iperbole nel suo insieme è simmetrica rispetto alla parallela alla direttrice passante per il centro C (asse y del riferimento “centrato” (x', y)), esattamente come l'ellisse. Seguono argomentazioni simili circa l'esistenza di un secondo fuoco O' simmetrico rispetto a C del fuoco O, e di una seconda direttrice d' parallela alla prima e sua simmetrica rispetto a C. La semidistanza tra i due fuochi, che denoteremo ancora con c , è ora $c = \epsilon p / (\epsilon^2 - 1) = \epsilon b / (\epsilon^2 - 1)^{1/2} = \epsilon a = (a^2 + b^2)^{1/2}$. Quindi c è maggiore sia di a che di b . I due **vertici** V, V' dell'iperbole sono sul suo asse trasverso a distanza da O pari a $\rho_V = p / (\epsilon + 1)$ (per $\cos \theta = -1$, sul *primo* ramo, **vertice prossimale**) e rispettivamente $\rho_{V'} = p / (\epsilon - 1)$ (ancora per $\cos \theta = -1$ ma sul *secondo* ramo, **vertice distale**). Come ci si aspetta, è $\rho_{V'} - \rho_V = 2p / (\epsilon^2 - 1) = 2a$. Le due rette passanti per C di equazioni $\pm y/x' = \tan \theta_{as} = \sin \theta_{as} / \cos \theta_{as} = (1 - \epsilon^{-2})^{1/2} / \epsilon^{-1} = (\epsilon^2 - 1)^{1/2} = b/a$ sono gli **asintoti** dell'iperbole, e questo spiega il significato del pedice $_{as}$ in θ . Agli asintoti si avvicinano indefinitamente i rami dell'iperbole al divergere di ρ (in due coppie di punti impropri simmetrici rispetto a C). Come nel caso dell'ellisse, $p = b^2/a$ è il valore assoluto delle quattro **ordinate ai fuochi**, e si dice **parametro** (o **semi-latus rectum**) dell'iperbole.

Riassumendo, ed esprimendo ancora le varie grandezze in termini delle lunghezze (a,b) dei due semiassi dell'iperbole, abbiamo:

$$(h_1) \text{ eccentricità: } \varepsilon = (1+b^2/a^2)^{1/2};$$

$$(h_2) \text{ distanza centro-fuoco: } c = (a^2+b^2)^{1/2};$$

$$(h_3) \text{ distanza centro-direttrice: } c - \delta = -p/\varepsilon + (a^2+b^2)^{1/2} = a^2/(a^2+b^2)^{1/2};$$

$$(h_4) \text{ equazioni delle direttrici: } x' = \pm a^2/(a^2+b^2)^{1/2}$$

$$(h_5) \text{ semi-latus rectum: } p = a(\varepsilon^2-1) = b^2/a.$$

Il carattere complementare di queste formule ($h_1 \div h_5$) rispetto alle corrispondenti ($e_1 \div e_5$) riportate più sopra per l'ellisse è evidente.

Il lettore potrà similmente riguardare le definizioni di tipo (α), (β) e (γ) per l'iperbole e la dimostrazione della loro equivalenza; diamo tuttavia in nota, come anticipato, la dimostrazione della implicazione (γ) \Rightarrow (α), sia per l'ellisse che per l'iperbole.⁵

Infine dalle equazioni canoniche (2) e (5) si vede immediatamente che una possibile e naturale rappresentazione *parametrica* dell'ellisse [dell'iperbole] si ottiene ponendo $\cos\mu$ [Chv] in luogo di x'/a e $\sin\mu$ [Shv] in luogo di y/b , dove μ [v] è un parametro variabile nel conveniente dominio.

Resta da dire della rappresentazione polare delle parabole, le coniche che per definizione hanno eccentricità $\varepsilon = 1$. Con le solite convenzioni (cioè orientando il semiasse $\theta = 0$ in modo che O segua O*), l'equazione polare si ottiene ponendo uguale a 1 la ε nella (1), cioè:

$$(6) \quad \rho(1-\cos\theta) = \delta = p;$$

qui p è ancora il parametro, valore assoluto delle (due) ordinate al fuoco, e adesso uguale alla distanza fuoco-direttrice δ perché $\varepsilon = 1$. La distanza da O del vertice V si ha per $\cos\theta = -1$, e vale $p/2 \equiv a$. Il vertice si trova dunque a metà strada tra il fuoco e la direttrice. Secondo la (6), la parabola ammette la retta perpendicolare alla direttrice passante per O come asse di simmetria, o come già detto suo asse. La (6) si riscrive poi nella forma $\rho = p + x$, avendo al solito eliminato $\rho\cos\theta$ come x , e contando la x a partire da O e con il segno che le compete, negativo verso il

⁵ Partiamo dalle equazioni canoniche dell'ellisse e dell'iperbole, eq. (2) e rispettivamente (5) (nelle quali scriviamo qui x in luogo di x'), e che abbiamo dimostrato conseguire dalla definizione (γ). Sia ρ la distanza $|X-O|$ e ρ' la distanza $|X-O'|$. La nostra tesi è che $(\rho \pm \rho')^2 = \cos\theta = 4a^2$, dove il segno superiore vale per l'ellisse e quello inferiore per l'iperbole, ed a è in entrambi i casi la semidistanza tra i vertici. Eliminando y^2 mediante la relativa equazione canonica, si trova infatti, sia per l'ellisse che per l'iperbole, e avendo orientato l'asse x da O verso O', $\rho^2 = \varepsilon^2 x^2 + a^2 + 2cx$ e $\rho'^2 = \varepsilon^2 x^2 + a^2 - 2cx$, dove ε e c sono l'eccentricità e la semidistanza tra i fuochi, espresse in termini (delle lunghezze) dei semiassi a e b dalle formule riportate nel testo. In forza delle precedenti espressioni di ρ^2 e ρ'^2 , si ha poi $(\rho\rho')^2 = (\varepsilon^2 x^2 + a^2 + 2cx)(\varepsilon^2 x^2 + a^2 - 2cx) = (\varepsilon^2 x^2 + a^2)^2 - 4c^2 x^2$; e poiché sia per l'ellisse che per l'iperbole è $c = \varepsilon a$, $(\rho\rho')^2 = (a^2 - \varepsilon^2 x^2)^2$, ovvero $\rho\rho' = \pm (a^2 - \varepsilon^2 x^2)$, ove di nuovo il segno superiore vale per l'ellisse e quello inferiore per l'iperbole. In conclusione, $(\rho \pm \rho')^2 = \rho^2 + \rho'^2 \pm 2\rho\rho' = 2(\varepsilon^2 x^2 + a^2) + 2(a^2 - \varepsilon^2 x^2) = 4a^2$, qed. In particolare, sulla $\rho + \rho' = 2a$ è fondata la ben nota costruzione dell'ellisse mediante due chiodini, uno spago e una matita.

vertice. Con una procedura ormai familiare, quadrando e sostituendo con $x^2 + y^2$ la ρ^2 abbiamo $y^2 = 2px + p^2$, dalla quale x^2 manca essendosi elisa nei due membri. Si è così ridotti alla

$$(7) \quad y^2 = 2p(x+p/2),$$

o in termini di a , alla

$$(7') \quad y^2 = 4a(x+a).$$

Spostando l'origine del riferimento nel vertice (che è in $x = -a$ sull'asse della parabola con origine in O ed orientato in direzione opposta al suo vertice), e chiamando x' la nuova ascissa $x + a$, abbiamo infine l'**equazione canonica dalla parabola** riferita al suo vertice:

$$(8) \quad y^2 = 4ax'.$$

In questo riferimento (x',y) , il fuoco è in $(a,0)$ e la direttrice è la retta $x' = -a$.

Ricordiamo ancora che la normale ad un'ellisse nel suo punto X biseca l'angolo che X forma con i due fuochi O e O' , $\angle OXO'$ (il caso del cerchio rientra banalmente in questa situazione); in particolare, nel limite per $\varepsilon \rightarrow 1-$ la normale alla parabola in X biseca l'angolo che OX fa con la parallela all'asse della parabola passante per X . Di qui la nota proprietà che i raggi emessi da una sorgente luminosa puntiforme posta in un fuoco di un'ellisse *internamente* argentata si concentrano nell'altro fuoco; e al limite, che i raggi emessi da una sorgente posta a distanza infinita sull'asse di una parabola internamente argentata si concentrano nel suo fuoco.⁶ Nel caso dell'iperbole, invece, non è la normale bensì la tangente in X che biseca l'angolo $\angle OXO'$. Questa proprietà dell'iperbole implica che un fascio di raggi luminosi convergenti nel fuoco "interno" di un suo ramo (\equiv quello verso il quale il ramo è concavo), supposto *esternamente* argentato, siano riflessi nell'altro fuoco.⁷ Naturalmente queste proprietà "angolari" delle coniche derivano dalle definizioni, e sono comunemente dimostrate nei manuali di geometria analitica.

⁶ Del resto questo stesso termine è legato all'uso che degli specchi parabolici fece Archimede, secondo una tradizione forse leggendaria.

⁷ Essa è sfruttata nel disegno di telescopi catottrici particolarmente corti detti di tipo "Cassegrain", e costituiti da due specchi coassiali, uno parabolico e uno iperbolico (quest'ultimo semitrasparente, per lasciar passare i raggi che saranno poi riflessi dallo specchio parabolico), aventi comune fuoco F . I raggi assiali che sarebbero concentrati in F dallo specchio parabolico vengono invece intercettati dallo specchio iperbolico, e da questo riflessi nell'altro fuoco F' dell'iperbole, dove si trova l'oculare. A parità di lunghezza focale, l'ingombro longitudinale di questo telescopio è significativamente minore di quella di un comune telescopio newtoniano; ma anche un po' minore, a parità di diametri, è la sua luminosità. Beninteso qui e nella nota precedente il termine "specchio" va inteso nell'usuale senso della superficie assisimmetrica generata per rotazione intorno al suo asse polare dalla corrispondente conica.

APP. 6.B FORMULAZIONE LAGRANGIANA/HAMILTONIANA DELLA DINAMICA RELATIVISTICA DI UN PUNTO MATERIALE CARICO

Consideriamo un punto di massa (di quiete) m , la cui posizione e velocità denotiamo x e rispettivamente v , soggetto alla forza f . Come sappiamo (cfr. 2.2.2, 6) la legge che governa il suo moto in relatività speciale è $d\pi/dt = f$, ove π è il momento relativistico $m\gamma v$, e γ è il fattore $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$. Ricordiamo anche che l'energia totale E è $m\gamma c^2$ (per cui il suo quadrato può anche scriversi come $E^2 = c^2(m^2c^2 + \pi^2)$), e l'energia cinetica è $T = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$, ove mc^2 è la cosiddetta energia di quiete. Supponendo dapprima che f sia conservativa di potenziale posizionale $V = V(x)$, $f = -\nabla V$, vogliamo costruire una lagrangiana L tale che le associate equazioni di EL equivalgano alla $d\pi/dt = -\nabla V$. Cominceremo col ricercare uno scalare κ funzione di v (e soltanto di v) tale che $\partial\kappa/\partial v^i$ eguagli la corrispondente componente π_i del momento relativistico. Poiché $\delta\kappa = \partial\kappa/\partial v^i \delta v^i = m\gamma v_i \delta v^i = m\gamma \delta(v^2/2)$, integrando questa relazione si trova subito $\kappa = \kappa(v) = (mc^2/2) \int \gamma d(v/c)^2 = -mc^2/\gamma + \text{cost.}$ (In effetti $-2d\gamma^{-1}/d(v/c)^2 = \gamma$.) Se a questo punto si pone $L = \kappa - V$, le equazioni di EL sono $\partial V/\partial x^i + d_t(\partial\kappa/\partial v^i) = 0$, e quindi sono equivalenti alla $d\pi/dt = -\nabla V$, come volevamo. Evidentemente il valore della costante additiva in κ non ha importanza, e può porsi uguale a zero.

Le sopravvista espressione di E , $m\gamma c^2$, equivale all'equazione di Hamilton-Jacobi in S :

$$(1) \quad -S_t = mc^2 [1 + \sum_{i=1}^3 S_i^2 / (mc)^2]^{1/2},$$

dove S_t e S_i stanno per le derivate parziali di S rispetto a t e a x^i . Questo si verifica sostituendo $-S_t$ a E , esprimendo γ come funzione di π^2 , cioè $\gamma = (1 + \pi^2/(cm)^2)^{1/2}$, e infine sostituendo $\sum_{i=1}^3 S_i^2$ a π^2 . Più brevemente, si può anche sostituire S_t^2 a E^2 e ancora $\sum_{i=1}^3 S_i^2$ a π^2 , ottenendo

$$(1bis) \quad S_t^2 = mc^4 [1 + \sum_{i=1}^3 S_i^2 / (mc)^2],$$

nella quale tuttavia si perde traccia del segno corretto quando se ne estrae la radice. Se si valuta la (1) nel limite di grande c , si ha, a meno di termini di ordine superiore al secondo in $S_i/(mc)$:

$$(2) \quad -S_t = mc^2 + 1/(2m) \sum_{i=1}^3 S_i^2;$$

e se in questa si trascura l'ormai inessenziale *costante* mc^2 , si ritrova la versione classica della equazione di Hamilton-Jacobi, $S_t + 1/(2m) \sum_{i=1}^3 S_i^2 = 0$.

Supponiamo adesso che il punto in oggetto abbia carica q e sia immerso in un campo EM di 4-potenziale (α, A) ; e quindi, che V sia il potenziale generalizzato di Lorentz $q(\alpha - v \cdot A/c)$, vedi

(6.3.1, 4). Usando la lagrangiana $L = \kappa - V$, la componente (i) del momento canonico p è $p_i = \partial(\kappa - V)/\partial v^i = m\gamma v_i + qA_i/c \equiv \pi_i + qA_i/c$, e le equazioni di EL $\partial V/\partial x^i + d_t(\partial(\kappa - V)/\partial v^i) = 0$ danno

$$(3) \quad q\partial/\partial x^i(\alpha - v \cdot A/c) + d_t(\pi_i + qA_i/c) = 0.$$

Poiché $\partial/\partial x^i(v \cdot A)$ va ovviamente inteso come $v \cdot \partial A/\partial x^i$, le (3) si possono riscrivere nella forma

$$(4) \quad d_t\pi = q(-d_t A/c - \nabla\alpha + \nabla A \cdot v/c) = q(-\nabla\alpha - \partial_t A/c + \nabla A \cdot v/c - v \cdot \nabla A/c).$$

Ma $\nabla A \cdot v - v \cdot \nabla A = v \times \nabla \times A$, per cui a 2° membro c'è la forza di Lorentz $q(E + v \times H/c)$, E e H essendo il campo elettrico e rispettivamente quello magnetico. La (4) è dunque la versione relativistica dell'equazione di moto del punto di massa (di quiete) m e carica q nel campo EM (E, H) . Come si vede, la sola modifica è intervenuta nel 1° membro, con la comparsa di γ a fattore di m , cioè con la sostituzione della massa di quiete con la massa di moto.

L'hamiltoniana L -duale della L è $H = v^i \partial L/\partial v^i - L$ (escludiamo ogni possibilità di confonderla con il campo magnetico!). Tornando alla lagrangiana $L = \kappa - V$ e al 4-potenziale di Lorentz $q(\alpha - v \cdot A/c)$, calcoliamo $v^i \partial L/\partial v^i = v^i \partial(\kappa - V)/\partial v^i$. Abbiamo $v^i \partial \kappa/\partial v^i = (m\gamma/2)v^i \partial v^2/\partial v^i = m\gamma v^2$, e $-v^i \partial V/\partial v^i = qA \cdot v/c$; quindi $H = m\gamma v^2 + qA \cdot v/c + mc^2/\gamma + q(\alpha - A \cdot v/c) = m\gamma c^2 + q\alpha = mc^2 + T + q\alpha$. Il significato di questa uguaglianza è trasparente: H è la somma dell'energia di quiete mc^2 , dell'energia cinetica $T = mc^2(\gamma - 1)$ e dell'energia potenziale elettrica $q\alpha$.

Poiché $\partial(\kappa - V)/\partial v^i$ è la componente (i) del momento canonico p , la derivata di H rispetto a questa componente è v^i , come deve essere secondo le equazioni canoniche della 1ª serie. Infine le equazioni canoniche della 2ª serie coincidono con le equazioni del moto (1). Basta tener presente, oltre all'espressione del momento canonico $p = \pi + qA/c$, le identità generali $\partial/\partial x^i(H + L) = 0$ ed il fatto che $\partial \kappa/\partial x^i = 0$, quindi che $\partial/\partial x^i(L + V) = 0$. Si ha così $d_t(\pi_i + qA_i/c) = d_t p_i = -\partial H/\partial x^i = -\partial L/\partial x^i = -\partial V/\partial x^i = -q\partial/\partial x^i(\alpha - A \cdot v/c)$, secondo le (3).

Attenzione merita infine la formulazione variazionale della legge d'inerzia, sempre per un punto, in relatività speciale. Dal punto di vista classico, in un riferimento cartesiano-ortogonale inerziale standard (x^1, x^2, x^3, t) , la legge d'inerzia si ottiene dalla richiesta (°) $\int_{t_1}^{t_2} |v| dt = \text{extr!}$, dove l'integrale è tra tempi dati $t_1 < t_2$ (ai quali è fissata la posizione del punto), e $|v|$ sta per $\sqrt{[\sum_{i=1}^3 (d_t x^i)^2]}$. Le corrispondenti equazioni di EL sono

$$(5) \quad d_t(d_t x^i/|v|) = 0,$$

e la loro soluzione è $d_t x^i \equiv v^i = C^i$, C^i essendo delle costanti con dimensione velocità. In relatività speciale, l'integranda $|v|$ nella (°) va sostituita con $\sqrt{(c^2 - v^2)}$ (ove v^2 sta ancora per $\sum_{i=1}^3 (d_t x^i)^2$), e le nuove equazioni di EL sono

$$(6) \quad d_t[d_t x^i/\sqrt{(c^2 - v^2)}] = 0.$$

Ma come abbiamo già visto, le soluzioni delle (6) sono del tipo $d_t x^i \equiv v^i = C^i$, esattamente le stesse del caso classico.

È interessante formulare in modo variazionale la stessa legge d'inerzia in un riferimento qualsiasi (tipicamente non inerziale) S, per il quale potremo supporre $g_{i4} = 0$ senza sostanziali limitazioni di generalità.⁸ La pseudodistanza quadrata diventa con ciò $ds^2 = (\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} d_t x^i d_t x^k + g_{44} c^2) dt^2$, ed è negativa se le velocità $d_t x^i$ sono riferite ad un punto materiale, mentre è nulla se sono riferite ad un segnale luminoso localizzato (un fotone). Dicendo $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}^2(x^i, t) \leq c^2$ il quadrato di quest'ultima velocità (al quale si riduce allora la $\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} d_t x^i d_t x^k$), avremo $\mathcal{V}^2 = -c^2 g_{44}$. Questa ci dà il significato fisico di $-g_{44} \leq 1$: $-g_{44}$ è il quadrato del rapporto tra la celerità del fotone – vista dal riferimento S – e c, ed è ≤ 1 perché le velocità superluminali sono vietate. Denotando ancora con v^2 la velocità quadrata $\sum_{i,k=1}^3 g_{ik} d_t x^i d_t x^k$ nel caso di un punto materiale, avremo dunque $ds^2 = (v^2 - \mathcal{V}^2) dt^2 < 0$. Si noti che vi è dipendenza dalle coordinate sia in v^2 (attraverso le g_{ik}) che in \mathcal{V}^2 (attraverso g_{44}), soggetta al vincolo $v^2 < \mathcal{V}^2$. Le equazioni di EL corrispondenti alla richiesta $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\mathcal{V}^2 - v^2)} dt = \text{extr!}$ risultano essere:

$$(7) \quad d_t [d_t x^i / \sqrt{(\mathcal{V}^2 - v^2)}] = (1/2) \partial(\mathcal{V}^2 - v^2) / \partial x^i / \sqrt{(\mathcal{V}^2 - v^2)}.$$

Confrontando questa (7) con la (6), notiamo che si passa dal 1° membro della (6) a quello della (7) sostituendo c^2 con \mathcal{V}^2 , e che a 2° membro della (7) è comparso un termine avente a fattore $\partial(\mathcal{V}^2 - v^2) / \partial x^i$. Questo fattore è nullo se $(\mathcal{V}^2 - v^2)$ è indipendente dalle x^i , in particolare se $\mathcal{V}^2 = c^2$ (quindi se $g_{44} = -1$), e se le g_{ik} non dipendono dalle coordinate.

Se lo stesso problema si fosse presentato nell'ordine di idee classico, avremmo scritto le equazioni di Lagrange (6.3.1, 11), nella forma

$$(8) \quad m d_t (d_t x^i) - (m/2) \partial(v^2) / \partial x^i = Q_i,$$

dove m è la massa del punto e Q_i è la componente (i) di una forza lagrangiana “apparente”.

È naturale confrontare tra loro la (7) e la (8). Si vede allora che se si moltiplica la (7) per mc e in essa si scrive $mc / \sqrt{(\mathcal{V}^2 - v^2)}$ come μ^* , cioè

$$(9_1) \quad \mu^* = mc / \sqrt{(\mathcal{V}^2 - v^2)};$$

e nella (8) si sostituisce formalmente m con tale μ^* , e Q_i con $-(\mu^*/2) \partial \mathcal{V}^2 / \partial x^i$ secondo la

$$(9_2) \quad Q_i = -(\mu^*/2) \partial \mathcal{V}^2 / \partial x^i,$$

⁸ Le $g_{i4} = 0$ costituiscono tre vincoli per soddisfare i quali disponiamo di quattro funzioni arbitrarie.

allora la (7) e la (8) coincidono. Se in particolare $\mathcal{V}^2 = c^2$ (come avviene in un qualunque riferimento inerziale), secondo la (9₁) μ^* diventa la massa di moto μ , mentre secondo la (9₂) la forza lagrangiana apparente Q_i si annulla.⁹

⁹ Seppur in modo vago, quest'ultimo fatto suggerisce una prospettiva che dovette colpire Einstein. Q è una forza apparente che agisce su un punto materiale libero da forze attive. Diventa allora legittimo chiedersi se non sarebbe possibile identificare *anche* le forze attive sul punto in oggetto – o almeno le forze attive di un certo tipo, cioè le forze gravitazionali – con forze apparenti, disponendo opportunamente della metrica g_{ik} (comunque pseudoriemanniana). In tal caso il moto del punto soggetto a quelle forze apparirebbe ancora come *inerziale*, e la legge d'inerzia, da intendere come legge di moto lungo una geodetica della varietà con quella metrica, sarebbe la sola legge di moto – almeno in presenza di sole forze gravitazionali. Si ritiene che questa idea abbia agito sulle formidabili facoltà immaginative di Einstein come uno stimolo iniziale verso la sua elaborazione della teoria relativistica generale.

CAP 7

STRUMENTI MATEMATICI V

7.1) ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI II

Essendoci fin qui occupati di CDV unidim, in questo Cap. 7 – con l’eccezione dell’App. Spec. 7.A, dedicata ad un importante problema complementare di natura analitica/SDP – estenderemo ora la nostra attenzione a quel CDV multidim che abbiamo rudimentalmente introdotto nel §3 della S.sez. 6.1.1 (v. S.sez. 7.1.1), nonché ad alcune delle sue applicazioni più significative (v. S.sez. 7.1.2, 7.1.3). Come si diceva, l’essere nel CDV multidim la dimensione del dominio dell’integrale (6.1.1, 4) maggiore di 1 fa sì che il sistema differenziale che consegue dalla richiesta di renderlo stazionario non sia più ordinario, ma alle derivate parziali. Tenendo conto della distanza concettuale e metodologica che esiste tra la teoria dei SDO e quella dei SDP, questo fatto dà un’idea di quanto sostanziale sia la diversità delle due situazioni. Naturalmente ciò non toglie che tutti i teoremi del CDV unidim possano vedersi come specializzazioni delle loro corrispondenti versioni multidim; anche se, come spesso succede in questi casi, i primi possono godere di specifiche proprietà addizionali, non immediatamente estendibili ai corrispondenti teoremi multidim.

7.1.1) FONDAMENTI DEL CDV MULTIDIMENSIONALE

Nel CDV *strettamente* multidim ($m \geq 2$), oltre che dalla m -pla delle variabili indipendenti $x \equiv \langle x^1, \dots, x^m \rangle \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ e dalla n -pla $u \equiv \langle u^1, \dots, u^n \rangle = u(x)$ di funzioni di x , l’integranda F nell’integrale che bisognerà rendere stazionario dipende dalle derivate parziali di u rispetto a x di ordine compreso tra 1 e $p \geq 1$. (Come già nel caso unidim, il caso in cui F non dipenda da alcuna di tali derivate è privo di interesse.) Limitandoci per il momento al caso di *una sola funzione* u ($n = 1$), potremo dunque scrivere:

$$(1) \quad F = F(x, \partial^{0 \leq |\nu| \leq p} u / \partial x^\nu),$$

dove $\nu \equiv \langle \nu^1, \dots, \nu^m \rangle$, ν^1, \dots, ν^m sono interi ≥ 0 , $|\nu| =: \sum_{h=1}^m \nu^h$, $/\partial x^\nu$ è una abbreviazione per $/(\partial x^1)^{\nu^1} \dots (\partial x^m)^{\nu^m}$, e si suppone che F dipenda *sostanzialmente* da almeno una derivata parziale di u di ordine p . Ω è un prefissato *aperto* di \mathbb{R}^m , J -misurabile, semplicemente connesso e di contorno $\partial\Omega$

regolare quanto basta a legittimare i nostri ragionamenti. Tra i fisici teorici, è usuale nominare la funzione $u(x)$ (o le funzioni $u^{1 \leq \alpha \leq n}$ se $n > 1$) del CDV multidim come un **campo**.

Cominciando con i problemi del 1° ordine ($p = 1$), esamineremo ora le conseguenze della richiesta

$$(2) \quad \mathcal{F}[u|\Omega] = \int_{\Omega} F(x, u, \partial u / \partial x) d(x) = \text{staz!} \Leftrightarrow \delta \mathcal{F}[u|\Omega] = 0,$$

dove $\partial / \partial x$ sta per $\langle \partial / \partial x^1, \dots, \partial / \partial x^m \rangle$, $d(x) \equiv \prod_{i=1}^m dx^i$ e F è per ipotesi funzione di classe C^2 dei suoi $2m+1$ argomenti in un dominio $(2m+1)$ -dim $U \times \mathbb{R}^m$, U essendo un aperto di \mathbb{R}^{m+1} la cui proiezione U_x sullo spazio \mathbb{R}^m delle x include Ω . $\delta \mathcal{F}[u|\Omega]$ è la parte principale della variazione di $\mathcal{F}[u|\Omega]$ dovuta ad una variazione δu di u . La formulazione del problema si completa richiedendo che la variazione δu di u “sia nulla sul contorno $\partial\Omega$ ”, nel senso che il suo limite verso $\partial\Omega$ dall'interno esista e sia nullo. Scriveremo questo limite come $\delta u|_{\partial\Omega^+}$. Come vedremo, si tratterà di dedurre dalle condizioni “ $\delta \mathcal{F}[u|\Omega] = 0$ e $\delta u|_{\partial\Omega^+} = 0$ ” una conveniente EDP valida in Ω . Una soluzione u del problema, se esiste $C^2(\Omega)$, si dice ancora una **estremante** di \mathcal{F} .¹

Procedendo analogamente a quanto già visto nel Cap. 6 per il caso unidim, per brevità porremo $\eta = \eta(x) =: \delta u(x)$ e scriveremo $(\)_i$ per $\partial(\) / \partial x^i$ (per $i = 1, \dots, m$). Al 1° ordine in η , la variazione dell'integranda in (2) è $\eta \partial F / \partial u + \eta_i \partial F / \partial u_i$ (somma da 1 a m su i , e in generale sugli indici ripetuti), perché $\delta(\partial u / \partial x^i) = (\partial / \partial x^i) \delta u$ se u è abbastanza regolare. Scriveremo poi $\partial^* / \partial x^i$ per la derivata “sostanziale”² rispetto a x^i di funzioni di (u, u_i) oltre che di x (come è il caso di F), cioè

$$(3) \quad \partial^* / \partial x^i = \partial / \partial x^i + u_i \partial / \partial u + u_{ik} \partial / \partial u_k,$$

dove $u_{ik} = \partial^2 u / \partial x^i \partial x^k = u_{ki}$ (per il teorema di Schwarz, valido perché u è C^2). In queste condizioni, si verifica subito che la $\partial^* / \partial x^i$ è leibniziana, cioè che se f, g sono funzioni C^1 , $\partial^*(fg) / \partial x^i = \partial^* f / \partial x^i g + f \partial^* g / \partial x^i$. Essendo $\eta_i \equiv \partial \eta / \partial x^i \equiv \partial^* \eta / \partial x^i$, anche per questa proprietà di $\partial^* / \partial x^i$ avremo $\eta_i \partial F / \partial u_i = \partial^* / \partial x^i (\eta \partial F / \partial u_i) - \eta \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i)$; quindi la sopraddeata variazione al 1° ordine in η di $\mathcal{F}[u|\Omega]$ risulta

$$(4) \quad \delta \mathcal{F}[u|\Omega] = \int_{\Omega} \{ \eta [\partial F / \partial u - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i)] + \partial^* / \partial x^i (\eta \partial F / \partial u_i) \} d(x).$$

¹ La formulazione del problema variazionale m -dim del 1° ordine (e in generale di ordine p) che abbiamo abbozzato in (6.1.1, §3) è ovviamente appropriata, ma vale la pena di riconsiderare per un momento il problema del 1° ordine 1-dim ($x \equiv t$) in n incognite di cui in (6.1.1, §2), per il quale l'integranda è del tipo $F = F(t, u^{1 \leq \alpha \leq n}(t), d_t u^{1 \leq \alpha \leq n}(t))$. In questa, possiamo immaginare l'indice *discreto* α sostituito da un indice *continuo* $z \in \mathbb{R}^{m-1}$, e quindi $u^\alpha(t)$ da $u(t, z)$. Con questa generalizzazione si passa in modo naturale ad un funzionale del tipo $\mathcal{F}_*[u] = \int_{\Omega} F_*(t, u(t, z), \partial_t u(t, z)) d(z) dt$, dove $n = 1$ e il dominio di integrazione può ragionevolmente pensarsi come un cilindro compreso tra $t = t_1$ e $t = t_2 > t_1$ e di sezione (aperta) $\int d(z)$. Questo $\mathcal{F}_*[u]$ è un caso particolare dell'integrale $\int_{\Omega} F d(x)$ con la F data dalla (1) per $p = 1$; ma è anche ovvio che $\int_{\Omega} F d(x)$ è *essenzialmente più generale* di $\mathcal{F}_*[u]$. Vale a dire, la semplice sostituzione dell'indice discreto α , in $F(t, u^{1 \leq \alpha \leq n}(t), d_t u^{1 \leq \alpha \leq n}(t))$, con un indice continuo z , non basta per passare al vero e proprio CDV multidim.

² Di solito si usa la notazione blandamente autocontraddittoria d/dx^i in luogo di $\partial^* / \partial x^i$, oppure D_i , ecc.

Avendo assunto il contorno $\partial\Omega$ di Ω regolare (o regolare a pezzi) quanto basta, potremo applicare il teorema di GO al terzo addendo a 2° membro della (4), il cui contributo è pertanto $\int_{\partial\Omega} n_i [\eta \partial F / \partial u_i]_+ d(\partial\Omega)$, dove n è la normale a $\partial\Omega$ orientata verso l'esterno e $[\]_+$ significa ancora valore-limite dall'interno. Ma per ipotesi $\eta|_{\partial\Omega^+} = 0$, e dunque il contributo del terzo addendo è nullo. Restiamo così con

$$(4') \quad \int_{\Omega} \eta [\partial F / \partial u - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i)] d(x) = 0.$$

Qui $\eta \in C_0^2(\Omega)$ (\equiv insieme delle funzioni di CdC 2, o classe C^2 , in Ω il cui limite dall'interno su $\partial\Omega$ è zero), e per il resto è arbitraria. La (4') implica allora che la seguente EDP in u , che si dice ancora **equazione di Eulero-Lagrange (EL)** (del CDV m-dim del 1° ordine, $p = 1$), valga in Ω

$$(5) \quad \partial F / \partial u - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i) = 0.$$

La (5) è giustificata dal seguente lemma (**lemma fondamentale del CDV** (ora generalmente multidim), che si dimostra facilmente per assurdo, e di cui già si è accennato nella S.sez.6.1.1. «Sia $\Phi = \Phi(x)$ una funzione continua nell'aperto m-dim Ω ; e sia $\int_{\Omega} \Phi(x) f(x) d(x) = 0$ per ogni funzione $f(x)$ continua in Ω . Allora $\Phi \equiv 0$ in Ω .»³ Il lemma si applica qui alla funzione di x (dopo la sostituzione di u e di $\partial_x u$ con $u(x)$ e rispettivamente $\partial_x u(x)$) $\Phi = \partial F / \partial u - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i)$, che è continua in Ω sotto le ipotesi convenute, e alla $f = \eta \in C_0^2(\Omega)$.

È utile scrivere $E_{(1)} \equiv E$ per l'operatore lineare $\partial / \partial u - \partial^* / \partial x^i (\partial / \partial u_i)$ ⁴ (che si dice ancora **differenza euleriana** nel CDV multidim del 1° ordine), definito su funzioni derivabili di $(x, u, u_{1 \leq i \leq m})$. La (5) si trascrive allora come

$$(5bis) \quad EF = (EF)(x, u, u_{1 \leq i \leq m}, u_{1 \leq ij \leq m}) = 0,$$

dove $u_{1 \leq ij \leq m}$ è un'abbreviazione per $u_{1 \leq i \leq m} \ 1 \leq j \leq m$, e la dipendenza di EF dalle u_{ij} è lineare. (La riduzione della (5) alla corrispondente equazione di EL del CDV unidim è ovvia.) Il 1° membro EF della (5) si dice ancora **derivata variazionale di \mathcal{F} rispetto a u in x** , e ancora si denota $\delta\mathcal{F}/\delta u$ (essendo chiaro che $\delta\mathcal{F}/\delta u$ non ha dimensione $\mathcal{F}u^{-1}$ ma $\mathcal{F}u^{-1}\Omega^{-1} =_{\dim} \mathcal{F}u^{-1}$).

Come nel caso unidim, una funzione $C^2(\Omega)$ soddisfacente alla (5) si dice una **estremale di \mathcal{F}** . Più sopra abbiamo definito come estremante di \mathcal{F} una soluzione $C^2(\Omega)$ del problema « $\delta\mathcal{F}[u|\Omega] = 0$ e $\delta u|_{\partial\Omega^+} = 0$ »; quindi, se esiste in $C^2(\Omega)$, una estremante di \mathcal{F} è una sua estremale.⁵ Occorre sottolineare che la soluzione della (5) non costituisce di per sé un problema compiutamente

³ Il lemma fondamentale si trova spesso riferito in forme più deboli, per esempio richiedendo che $f \in C^r(\Omega)$ per qualche $r > 0$, o addirittura che $f \in C_0^r(\Omega)$. La dimostrazione consiste nel supporre Φ non identicamente nullo in Ω e nell'esibire una funzione continua f tale che $\int_{\Omega} \Phi(x) f(x) d(x)$ sia comunque diverso da zero.

⁴ Poiché essenzialmente interessa il caso $EF = 0$, spesso si usa l'opposto di E .

⁵ Diversamente dal caso unidim, non sembrano disponibili criteri semplici e generali che permettano di stabilire a priori la CdC di una soluzione della (5), se questa esiste. È per questo che abbiamo richiesto a priori la CdC della u .

formulato: occorre prescrivere convenienti condizioni accessorie. Diversamente da quanto vale nel caso unidim, sarebbe tuttavia fuorviante pensare che la corretta condizione accessoria da aggiungere alla (5) sia sempre quella di prescrivere l'incognita su $\partial\Omega_+$ (valori limite dall'interno), in accordo con la precedente condizione $\delta u|_{\partial\Omega_+} = 0$. Se i valori di u su $\partial\Omega_+$ sono effettivamente prescritti la (5) può, ma non necessariamente deve, costituire un problema differenziale del 2° ordine ben posto (dal punto di vista della esistenza/unicità della soluzione), quasi-lineare perché le derivate di ordine massimo u_{j_i} vi figurano linearmente.

Ancora come nel caso unidim, considereremo due direttrici di generalizzazione del precedente problema variazionale multidim. La prima generalizzazione consiste nell'estendere i nostri ragionamenti a valori di p maggiori di 1, supponendo che in questo caso F dipenda sostanzialmente da almeno una delle derivate di u di ordine p , e che non soltanto le variazioni di u ma anche quelle delle sue derivate fino all'ordine $p - 1$ abbiano valore-limite su $\partial\Omega_+$ nullo. Rifacendosi alla (6.1.2, 14), è facile vedere che la risultante equazione di EL è quasi-lineare di ordine $2p$; una sua soluzione u (estremale di \mathcal{F}) sarà dunque ricercata nella classe delle funzioni $C^{2p}(\Omega)$. Per semplicità, ci limitiamo qui a scrivere esplicitamente questa equazione di EL per $p = 2$:

$$(6) \quad \partial F / \partial u - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i) + \partial^{*2} / \partial x^i \partial x^j (\partial F / \partial u_{ij}) \equiv E_{(2)} F = 0$$

(somme sugli indici ripetuti da 1 a m), ove l'asterisco ricorda al solito il carattere sostanziale della relativa derivata parziale. Poiché le funzioni operande dipendono adesso da $(x, u, u_{1 \leq i \leq m}, u_{1 \leq i, j \leq m})$, avremo

$$(7) \quad \partial^* / \partial x^i \equiv \partial / \partial x^i + u_i \partial / \partial u + u_{ih} \partial / \partial u_h + u_{ihk} \partial / \partial u_{hk},$$

ove u_{ihk} sta per $\partial^3 u / \partial x^i \partial x^h \partial x^k$ (simmetrica rispetto ai tre pedici perché $u \in C^4(\Omega)$). Similmente, si vede subito che il terzo addendo a 1° membro della (6), $\partial^{*2} / \partial x^i \partial x^j (\partial F / \partial u_{ij})$, contiene linearmente derivate quarte di u , e quindi che la (6) è quasi-lineare del 4° ordine in u . Si prosegue analogamente per $p > 2$.

La seconda generalizzazione è banale, riducendosi a sostituire all'unica incognita u una colonna di $n \geq 1$ incognite $u^{1 \leq \alpha \leq n}$ (useremo indici greci a questo scopo). Per $p = 1$, e sempre supponendo i valori-limite su $\partial\Omega_+$ delle variazioni delle $u^{1 \leq \alpha \leq n}$ nulli, in luogo della (5) avremo il sistema di n equazioni di EL

$$(8) \quad \partial F / \partial u^\alpha - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial u_i^\alpha) \equiv E_\alpha F = 0,$$

(per $\alpha = 1, \dots, n$, somma su i da 1 a m), ove

$$(9) \quad \partial^* / \partial x^i \equiv \partial / \partial x^i + u_i^\beta \partial / \partial u^\beta + u_{ij}^\beta \partial / \partial u_j^\beta$$

(somme da 1 a n su β). Il sistema (8) (di n equazioni DP) del 2° ordine quasi-lineare in n incognite $u^{1 \leq \alpha \leq n}$ è quindi sostanzialmente sovrapponibile alla EDP (5): basta sottintendere in quest'ultima

l'indicizzazione (con indici greci) sulla u e la somma su tali indici se ripetuti. Non si incontrano difficoltà nel considerare simultaneamente i due precedenti tipi di generalizzazione, cioè ($p > 1$ e $n > 1$). Ci risparmiamo tuttavia formulazioni esplicite in tal senso; quello che conta è aver ben compreso il meccanismo che genera il relativo SDP di EL (quasi-lineare di ordine $2p$) di n equazioni in altrettante incognite.

Calcoliamo adesso $\partial^*F/\partial x^i$ nell'ipotesi che u sia soluzione delle (8). Abbiamo $\partial^*F/\partial x^i = \partial F/\partial x^i + u^\alpha_j \partial F/\partial u^\alpha + u^\alpha_{ji} \partial F/\partial u^\alpha_j$; quindi, eliminando $\partial F/\partial u^\alpha$ mediante le (8) e tenendo conto della $u^\alpha_{ji} = u^\alpha_{ij}$, abbiamo

$$(10) \quad \partial^*/\partial x^j (F \delta_i^j - u^\alpha_j \partial F/\partial u^\alpha_j) = \partial F/\partial x^i;$$

ovvero, denotando con T_i^j il contenuto delle () nella (10),

$$(10bis) \quad \partial^*T_i^j/\partial x^j = \partial F/\partial x^i.$$

Si vede facilmente che le T_i^j si comportano come componenti miste di un 2-tensore (generalmente non simmetrico) a fronte di trasformazioni 1-diffeomorfe $x \leftrightarrow x'$. Spesso si introduce una versione simmetrizzata $T_i^{\circ j}$ di T_i^j con la stessa “divergenza sostanziale”, per cui cioè $\partial^*T_i^{\circ j}/\partial x^j = \partial^*T_i^j/\partial x^j$. La (10bis) vale in tutto Ω , e per qualunque estemale della (8) in Ω . Se in particolare F non dipende esplicitamente da x^i , si conclude che la (seconda) divergenza sostanziale di ognuno dei vettori T_i ($\forall i = 1, \dots, m$) di componenti $(^j) T_i^j$ è nulla in Ω per qualunque estemale u .

Vale la seguente identità: «se $\Lambda^{1 \leq j \leq m}$ sono arbitrarie funzioni C^2 di (x, u) in $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ e le u sono C^2 in Ω , allora automaticamente

$$(11) \quad E_\alpha(\partial^*\Lambda^j/\partial x^j) \equiv 0$$

in Ω e per ogni $\alpha = 1, \dots, n$.»

Dim. $\partial^*\Lambda^j/\partial x^j = \partial \Lambda^j/\partial x^j + u^\alpha_j \partial \Lambda^j/\partial u^\alpha$, quindi $\partial/\partial u^\alpha(\partial^*\Lambda^j/\partial x^j) = \partial^*/\partial x^j(\partial \Lambda^j/\partial u^\alpha)$ e $\partial/\partial u^\alpha_h(\partial^*\Lambda^j/\partial x^j) = \partial \Lambda^h/\partial u^\alpha \forall h = 1 \div n$ Allora $\partial^*/\partial x^h[\partial/\partial u^\alpha_h(\partial^*\Lambda^j/\partial x^j)] = \partial^*/\partial x^h(\partial \Lambda^h/\partial u^\alpha) = \partial/\partial u^\alpha(\partial^*\Lambda^j/\partial x^j)$, cioè la tesi. #

La conclusione è che alle integrande $F(x, u, v)$ e $F(x, u, v) - (\partial^*\Lambda^j/\partial x^j)(x, u)$ (la scelta del segno – è convenzionale) competono le stesse estremali, e ciò per funzioni Λ^j di CdC 2 e per il resto arbitrarie. La divergenza sostanziale $(\partial^*\Lambda^j/\partial x^j)(x, u)$ non è tuttavia la più generale funzione di (x, u) che soddisfa identicamente la $E_\alpha(\dots) = 0$, come è vero nel caso $m = 1$, quando essa si riduce alla derivata (sostanziale) $d\Lambda/dx(x, u)$.

Non è difficile sviluppare un “formalismo canonico” equivalente alle equazioni di EL del 1° ordine (8) nel CDV multidim. I presupposti sono: (i) che si selezioni una delle variabili indipendenti x , ad esempio la x^1 , per fissare le idee pensandola e scrivendola come t ; (ii) denotando con $\nabla'u$ l'insieme delle derivate di u rispetto alle altre $m-1$ $x' \equiv x^{2 \leq i \leq m}$, che la dipendenza dalle u_t della F ,

che converrà nominare come **densità lagrangiana** denotandola come $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, x', u, u_t, \nabla' u)$, sia tale che le equazioni

$$(12) \quad \pi =: \partial \mathcal{L} / \partial u_t \equiv \psi(t, x', u, u_t, \nabla' u)$$

siano invertibili rispetto alle u_t in tutto il dominio di interesse $U (\subset \mathbb{R}^{m+n}) \times \mathbb{R}^{mn}$. Ciò implica che in tale dominio valga una **condizione di Legendre** (del CDV multidim):

$$(13) \quad \det \{ \partial^2 \mathcal{L} / \partial u_t^\alpha \partial u_t^\beta \}_{\alpha, \beta=1 \div n} \neq 0.$$

Le (12) definiscono gli n **momenti canonici** π coniugati alle u_t , e la supposta invertibilità identifica una n -pla di funzioni φ per le quali

$$(14) \quad u_t = \varphi(t, x', u, \nabla' u, \pi)$$

nello stesso $U \times \mathbb{R}^{mn}$.

A questo punto si introduce una **densità hamiltoniana** $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, x', u, \nabla' u, \pi)$, e si prosegue in analogia con il caso unidim. Precisamente, sottintendendo la dipendenza dalle “variabili passive” $(t, x', u, \nabla' u)$ dovunque esse occorrono, la definizione di \mathcal{H} è data da:

$$(15) \quad \mathcal{H}(\pi) + \mathcal{L}(\varphi(\pi)) = \pi \cdot \varphi(\pi),$$

o equivalentemente da

$$(15bis) \quad \mathcal{H}(\psi(u_t)) + \mathcal{L}(u_t) = \psi(u_t) \cdot u_t.$$

È immediato verificare che le $(n \times n)$ -matrici $\{ \partial^2 \mathcal{L} / \partial u_t^\alpha \partial u_t^\beta \} = \{ \partial \psi_\alpha / \partial u_t^\beta \}$ e $\{ \partial^2 \mathcal{H} / \partial \pi_\alpha \partial \pi_\beta \} = \{ \partial \varphi^\alpha / \partial \pi_\beta \}$ sono l'una inversa dell'altra, e quindi che

$$(13bis) \quad \det \{ \partial^2 \mathcal{H} / \partial \pi_\alpha \partial \pi_\beta \} = [\det \{ \partial^2 \mathcal{L} / \partial u_t^\alpha \partial u_t^\beta \}]^{-1},$$

dove il determinante a 2° membro è diverso da zero in virtù della (13).

Riportiamo qui appresso alcune formule di facile giustificazione e interpretazione. In primo luogo,

$$(16) \quad \partial \mathcal{H} / \partial \pi + \partial \mathcal{L} / \partial u_t \cdot \partial \varphi / \partial \pi = \varphi + \pi \cdot \partial \varphi / \partial \pi;$$

e in forza delle (12),

$$(17) \quad u_t (\equiv \partial^* u / \partial t) = \varphi = \partial \mathcal{H} / \partial \pi.$$

Le (17) si interpretano come le **equazioni canoniche della 1ª serie** per il caso multidim. In secondo luogo, dalla (15) abbiamo

$$(18) \quad \partial \mathcal{H} / \partial u + \partial \mathcal{L} / \partial u + \partial \mathcal{L} / \partial u_t \cdot \partial \varphi / \partial u = \pi \cdot \partial \varphi / \partial u,$$

e ancora in forza delle (12),

$$(18bis) \quad \partial \mathcal{H} / \partial u + \partial \mathcal{L} / \partial u = 0.$$

Relazioni simili alla (18bis) si hanno per le altre variabili passive t , x' o $\nabla' u$ in luogo di u .

Se valgono le equazioni di EL, alle $\partial \mathcal{L} / \partial u$ nelle (18bis) si sostituiscono le $\partial^* / \partial t (\partial \mathcal{L} / \partial u_t) + \partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{L} / \partial u_j)$ (dove si somma da 2 a m su j) e $\partial \mathcal{L} / \partial u_t = \pi$ secondo le (12). Si conclude così che

$$(19) \quad \pi_t (\equiv \partial^* \pi / \partial t) = -\partial \mathcal{H} / \partial u - \partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{L} / \partial u_{j'}) = -[\partial \mathcal{H} / \partial u - \partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'})],$$

dove la seconda uguaglianza segue dalle $\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'} + \partial \mathcal{L} / \partial u_{j'} = 0$ (perché le $u_{j'}$ sono variabili passive).

Le (19) si interpretano come **equazioni canoniche della 2^a serie** (nel caso multidim). Per la data densità hamiltoniana \mathcal{H} , le (17, 19), del 1° ordine, danno l'“evoluzione sostanziale” (cioè la $\partial^* / \partial t$) delle variabili u e dei momenti coniugati π come funzioni delle $x^1 \equiv t$, $u \equiv u^{1 \leq \alpha \leq n}$, $\pi \equiv \pi_{1 \leq \alpha \leq n}$; le altre variabili $x^i \equiv x^{2 \leq i \leq m}$ e $\nabla' u \equiv u^{1 \leq \alpha \leq n}_{2 \leq i \leq m}$ sono passive. Si noti che le (19) non presentano la stessa (anti)simmetria rispetto alle (17) del caso unidim, per la comparsa a 2° membro del termine $\partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'})$. Questa (anti)simmetria può tuttavia essere ristabilita mediante l'artificio di introdurre un operatore di “derivazione funzionale” $\delta / \delta \chi \equiv \partial / \partial \chi - \partial^* / \partial x^j (\partial / \partial \chi_{j'})$. Allora le (17) possono scriversi nella forma

$$(17') \quad u_t = \delta \mathcal{H} / \delta \pi$$

(perché \mathcal{H} non dipende da $\pi_{j'}$); mentre le (19) diventano evidentemente

$$(19') \quad \pi_t = -\delta \mathcal{H} / \delta u.$$

Lo stesso artificio conduce poi alla seguente notazione delle equazioni di EL:

$$(20) \quad \delta \mathcal{L} / \delta u - \partial^* / \partial t (\partial \mathcal{L} / \partial u_t) = 0,$$

ancora in analogia con il caso unidim.

L'analogia con il caso unidim può spingersi ulteriormente. Definiamo la **(funzione) hamiltoniana H del sistema** come

$$(21) \quad H \equiv \int_{\Omega'} \mathcal{H}(t, x', u, \nabla' u, \pi) d(x') \equiv H(t, u, \nabla' u, \pi),$$

dove Ω' è la proiezione di Ω nello spazio delle x' . Nelle condizioni di regolarità assunte, la (21) è derivabile sotto il segno, in particolare sostanzialmente, rispetto a t (d/dt). Si ha: $dH/dt = \partial \mathcal{H} / \partial t + \partial \mathcal{H} / \partial u \cdot u_t + \partial \mathcal{H} / \partial u_{j'} \cdot u_{j't} + \partial \mathcal{H} / \partial \pi \cdot \pi_t$, ove $u_{j't} = u_{j'}$ sono le derivate miste di u rispetto a t e x^j , e al solito si somma da 2 a m su j' . Qui si può scrivere $\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'} \cdot u_{j't} = \partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'} \cdot u_t) - \partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'}) \cdot u_t$. Sempre in forza del teorema di GO, quando si integra su Ω' , $\partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'} \cdot u_t)$ non dà contributi se le u_t sono assunte nulle su $\partial \Omega'_+$ (come sono le variazioni delle u). Allora

$$(22) \quad d_t H = \int_{\Omega'} \{ \partial \mathcal{H} / \partial t + [\partial \mathcal{H} / \partial u - \partial^* / \partial x^j (\partial \mathcal{H} / \partial u_{j'})] \cdot u_t + \partial \mathcal{H} / \partial \pi \cdot \pi_t \} d(x') = \\ = \int_{\Omega'} [\partial \mathcal{H} / \partial t - \pi_t \cdot u_t + u_t \cdot \pi_t] d(x') \equiv \int_{\Omega'} \partial \mathcal{H} / \partial t d(x');$$

quindi se \mathcal{H} non dipende esplicitamente da t è $d_t H = 0$. In tal caso H è una costante (rispetto a t) che si dice **energia del campo** $u(t, x')$. Questo risultato è analogo a quello offerto dalla (6.3.2, 7) del caso unidim.

Sulla falsariga di quanto precede possiamo anche introdurre una **(funzione) lagrangiana L** come

$$(23) \quad L =: \int_{\Omega'} \mathcal{L}(t, x', u, u_t, \nabla' u) d(x') \equiv L(t, u, u_t, \nabla' u).$$

Le equazioni di EL equivalgono allora alla stazionarietà dell'integrale $\int L dt$ esteso all'intervallo-base della variabile t , $\delta \int L dt = 0$, se oltre alle variazioni δu , anche le δu_t e le $\delta \nabla' u$ sono nulle agli estremi di tale intervallo, cioè se è ivi $\delta(d_t u) = d_t(\delta u)$ e $\delta(\nabla' u) = \nabla'(\delta u)$. La prima di queste condizioni è soddisfatta se la variazione δu è “sincrona”, cioè avviene a t invariato, mentre la seconda è comunque soddisfatta per u regolare. Sotto queste condizioni, la $\delta \int L dt = 0$ esprime il **principio di Hamilton** nel CDV multidim.

7.1.2) ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CDV MULTIDIMENSIONALE, I

Esiste una varietà di problemi variazionali strettamente multidim ($m \geq 2$) del tipo (6.5.1, 2), o del tipo (7.1.1, 2) “generalizzato” (cioè con $p > 1$ e/o $n > 1$), sia di natura autonomamente analitica che derivati da modelli fenomenologici o geometrici. Tra i primi è innanzitutto da ricordare il problema di rendere stazionario (di fatto, minimo) il

§1. funzionale (o integrale) di Dirichlet

$$(1) \quad \mathcal{D}[u|\Omega] =: \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m (u_i)^2 d(x),$$

per il quale $p = 1$, $n = 1$, $F = F(u_{1 \leq i \leq m}) = \sum_{i=1}^m (u_i)^2 \geq 0$, e Ω è il solito aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^{m \geq 1}$. La sua importanza è legata al fatto che la associata equazione di EL è, come si verifica immediatamente,

$$(1) \quad \sum_{i=1}^m u_{ii} \equiv \nabla_{(m)}^2 u = 0,$$

e quindi la relativa estrema è una funzione armonica in Ω . In questo caso il problema di risolvere la (1) imponendo a u valori-limite arbitrari (abbastanza regolari) su $\partial\Omega_+$ è ben posto: la soluzione non solo esiste ma è anche unica.

Come è ben noto, la (1) è il prototipo di EDP lineare ellittica. L'idea che $\mathcal{D}[u|\Omega]$ dovesse comunque avere un minimo per u nella classe funzionale ammissibile condusse Riemann ad affermare per vie brevi che il problema di Dirichlet “ $\nabla_{(m)}^2 u = 0$ in Ω , con $u|_{\partial\Omega_+}$ dato” avesse comunque una soluzione. La conclusione era corretta, ma il ragionamento andava precisato e completato. Infatti $\mathcal{D}[u|\Omega]$ può avere, in generale, un mero estremo inferiore che non viene attinto nella classe ammissibile.⁶

⁶ Fu soprattutto K. Weierstrass (nel 1870) a muovere critiche a quello che Riemann chiamava “Principio di Dirichlet” (\equiv “ $\mathcal{D}[u|\Omega]$ ha un minimo nella classe ammissibile”). La questione generale dell'esistenza di una soluzione del

Una versione più generale del funzionale di Dirichlet si ottiene ponendo

$$(2) \quad F = g^{1/2}(g^{ij}u_i u_j + bu^2),$$

dove g^{ij} ($i, j = 1, \dots, m$) sono elementi di una matrice simmetrica non singolare e $C^2(\Omega)$, g è l'inverso del suo determinante (cioè il determinante della matrice inversa di elementi g_{ij}), e b è una funzione $C^1(\Omega)$. (Ovviamente questa F si riduce alla precedente se $g^{ij} \equiv \delta^{ij}$ e $b \equiv 0$.) Se i g^{ij} sono identificati con le componenti controvarianti di un tensore metrico, allora $g^{1/2}d(x)$, e quindi $Fd(x)$, è invariante rispetto a trasformazioni diffeomorfe arbitrarie delle variabili indipendenti. Scriveremo $\mathcal{D}^*[u|\Omega]$ per il **funzionale di Dirichlet generalizzato** la cui integranda F è data dalla (2). La relativa equazione di EL (2) risulta essere (con $(/i)^i \equiv /i^i$):

$$(3) \quad u_i^i - bu = 0,$$

dove $/i$ sono derivate covarianti, e $/i^i$ derivate controvarianti (rispetto alla coordinata x^i e relativamente alla metrica $g_{(2)}$), per cui u_i^i è un invariante. Questa EDP lineare del 2° ordine è ellittica sse la forma (metrica) $g_{ij}dx^i dx^j$ (con $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$) è definita positiva. In questo caso, «se u e u' sono funzioni $C^2(\Omega)$ con gli stessi valori su $\partial\Omega_+$, e u è soluzione della (3) con $b \geq 0$, allora $\mathcal{D}^*[u|\Omega] \leq \mathcal{D}^*[u'|\Omega]$, e l'uguaglianza si ha sse $u \equiv u'$ in Ω »

Dim. Siano u e v entrambe $C^2(\Omega)$, e poniamo

$$(4) \quad D(u,v) =: \int_{\Omega} g^{1/2}(u_i v^i + buv)d(x) \equiv D(v,u).$$

Se $u \equiv v$, l'integranda è precisamente la (2), e $D(u,u) = \mathcal{D}^*[u|\Omega]$. Dalla (4) scende allora che, essendo la metrica definita positiva e $b \geq 0$, è $D(u,u) \geq 0$, con l'uguaglianza valida sse $u = 0$. Dal teorema di GO in coordinate generali scende che

$$(5) \quad \int_{\Omega} g^{1/2}(vu_i)^i d(x) = \int_{\partial\Omega} n^i [vu_i]_+ d(\partial\Omega) \equiv \int_{\partial\Omega} [v\partial_n u]_+ d(\partial\Omega)$$

dove n è al solito la normale (uscende) all'elemento $d(\partial\Omega)$, per cui

$$(6) \quad \int_{\Omega} g^{1/2}v(u_i^i - bu)d(x) + D(u,v) = \int_{\partial\Omega} [v\partial_n u]_+ d(\partial\Omega).$$

Siano ora u e u' entrambe $C^2(\Omega)$ e tali che $u|_{\partial\Omega_+} = u'|_{\partial\Omega_+}$; e inoltre, u sia soluzione della (3).

Posto $w =: u' - u$ in luogo di v nella (6), da essa abbiamo subito $D(u,w) = 0$ (infatti entrambi gli integrali sono zero perché sono zero le relative integrande). D'altra parte $D(u',u') = D(u,u) + 2D(u,w) + D(w,w) = D(u,u) + D(w,w)$; ma $D(w,w) \geq 0$ per qualunque w (per la (4), sotto le

problema di Dirichlet ed affini (vedi anche l'App. Spec. 5.A) tornò dunque in acque alte, sfidando alcuni dei migliori ingegneri matematici a cavallo tra i due secoli: Schwarz, Poincaré, Hilbert, Lebesgue, Zaremba, ed altri (oltre allo stesso Weierstrass). Una prima risposta soddisfacente fu data da Hilbert (Jahresber. der Deutsche Math. Verein. Bd. 8, 184, 1900), il quale fornì un esempio di restrizioni sufficienti all'esistenza della soluzione, riguardanti sia la natura di $\partial\Omega$ che del dato su di esso, nonché le precise proprietà delle funzioni ammissibili. Il problema ha trovato una sistemazione definitiva nell'ambito della moderna Analisi Funzionale, vedi ad es. in Yosida, "Functional Analysis" 3rd ed. Chpt. X, § 6, Bibl. Gen. A).

ipotesi convenute), e quindi $D(u,u) \leq D(u',u')$, l'uguaglianza valendo sse $u \equiv u'$ in Ω ; ovvero, $\mathcal{D}^*[u|\Omega] \leq \mathcal{D}^*[u'|\Omega]$, qed. ⁷ #

Sempre per metrica definita positiva, la (3) si dice **equazione di Helmholtz** se b è costante e $b < 0$, e si incontra in molti problemi fisico-matematici. Si verifica facilmente che la (3) con $b = \text{costante}$ è una equazione di Helmholtz se ha una soluzione u non nulla e soddisfacente ad una condizione al contorno omogenea di Dirichlet ($u|_{\partial\Omega^+} = 0$) o di Neumann ($\partial_n u|_{\partial\Omega^+} = 0$). Infatti, moltiplicandola per u e integrandola su Ω si ottiene $-\int_{\Omega} u_i u^i d(x) - b \int_{\Omega} u^2 d(x) = 0$ (teorema di GO), che implica $b < 0$. Ponendoci per semplicità nel caso $g_{ik} = \delta_{ik}$, la EDP ellittica (3) può ancora considerarsi come equazione di EL per il funzionale di Dirichlet (1) sotto un vincolo integrale del tipo $\int_{\Omega} u^2 d(x) = 1$. Infatti introducendo un moltiplicatore di Lagrange λ , e richiedendo la stazionarietà di $\int_{\Omega} [(\nabla u)^2 - \lambda u^2] d(x)$ si ricava l'equazione di EL $\nabla^2 u + \lambda u = 0$, che coincide con la (3) facendovi $\lambda = -b$.

Se invece la metrica è indefinita con segnatura lorentziana, la (3) è una equazione iperbolica tipica. Nel caso $g_{ik} = \delta_{ik}$ per $i,k = 1, \dots, m-1$, $g_{im} = -\delta_{im}$ per $i = 1, \dots, m$, essa diventa $\sum_{i=1}^{m-1} u_{ii} - u_{mm} - bu = 0$; oppure anche $\sum_{i=1}^m u_{ii} - bu = 0$ usando il comune artificio di scrivere ix^m in luogo di x^m , cioè trattando la coordinata m -ma come immaginaria. Beninteso questo non altera la natura della equazione, che era e resta iperbolica, ma può riuscire comodo in certe circostanze. §

§2. Un esempio significativo di applicazione geometrica del CDV 2-dim con $p = 1$ è quello della determinazione della superficie (semplice) di area estrema (presuntivamente, minima) dello spazio $R^3 \equiv (x,y,z)$ (coordinate cartesiane standard) bordata da una data curva chiusa semplice γ di CdC 1 la cui proiezione sul piano (x,y) sia il contorno di un dominio semplicemente connesso Ω dello stesso piano (**problema di Plateau** (Joseph, 1803-1883)). Rappresentando tale superficie mediante l'equazione $z = z(x,y)$, la funzione integranda nel funzionale di area è $F = (1+z_x^2+z_y^2)^{1/2}$ (con $z_x \equiv \partial z/\partial x$, ecc.), e quindi non dipende né dalle variabili indipendenti x,y né dall'incognita z , ma soltanto dalle due derivate parziali di questa. L'equazione di EL si ricava senza difficoltà, e risulta essere, per $\langle x,y \rangle \in \Omega$,

$$(7) \quad \partial^*/\partial x(z_x g^{-1/2}) + \partial^*/\partial y(z_y g^{-1/2}) = 0,$$

dove g sta brevemente per $1+z_x^2+z_y^2$.

Se in particolare supponiamo che la data curva γ di equazione $z = f(l)$, ove l ne è la lunghezza, si scosti poco dal piano (x,y) , e che la derivata df si conservi piccola (ossia che la norma

⁷ Si noti che, in base alla dimostrazione, lo stesso risultato si sarebbe ottenuto richiedendo che $(\partial_n u)|_{\partial\Omega^+} = (\partial_n u')|_{\partial\Omega^+}$, invece che $u|_{\partial\Omega^+} = u'|_{\partial\Omega^+}$.

uniforme del 1° ordine di f sia piccola rispetto a 1), si può presumere che la superficie incognita $z = z(x,y)$, il cui limite dall'interno uguaglia la f nei punti di γ , sia prossima a zero, nella norma $\| \cdot \|_2$ ⁸, nel dominio Ω , e quindi che le z_x^2, z_y^2 e le loro derivate siano ivi piccole rispetto a 1. Allora $g^{-1/2}$ può essere portato fuori dalle derivate $\partial^*/\partial x$ e $\partial^*/\partial y$ e sostituito con 1. In questa approssimazione, la (3) si riduce alla equazione di Laplace $z_{xx} + z_{yy} = 0$ in Ω . Si conclude che la superficie “quasi-piana” ricercata è data dalla soluzione (armonica) di un problema di Dirichlet con condizione al contorno $z|_{\partial\Omega} = f$ (soluzione che come sappiamo esiste sotto certe blande condizioni, ed è unica). Se in particolare $f = 0$, per l'unicità risulta $z(x,y) = 0$, e la superficie è piana nella stessa approssimazione.

Tornando alla (7), e rendendo esplicite le derivate parziali sostanziali rispetto a x e a y , il suo 1° membro risulta uguale a $g^{-3/2}$ volte $z_{xx}(1+z_y^2) - 2z_xz_yz_{xy} + z_{yy}(1+z_x^2)$; quindi la (7) si riscrive come

$$(7') \quad z_{xx}(1+z_y^2) - 2z_xz_yz_{xy} + z_{yy}(1+z_x^2) = 0,$$

che appunto si riduce all'equazione di Laplace per z_x e z_y molto minori di 1.

Una ispezione dell'esercizio illustrato nella App. 3.A mostra che per una superficie estremale soluzione della (7') è nulla la curvatura principale media $\langle \kappa_{pr} \rangle$ introdotta nella S.sez 3.5.3 (o se si preferisce la somma Σ delle due curvature principali della App. 3.A). Se γ è nel piano $z = 0$, ci si aspetta che la superficie di area estrema (minima) abbia equazione $z = 0$. In questo caso tutte le derivate di z (prime e seconde) sono nulle, e quindi sia Σ che K (\equiv curvatura gaussiana) sono nulle. Questa evidenza intuitiva sarebbe confermata disponendo di un teorema di unicità per la EDP non lineare (7') sotto la condizione al contorno $z = f$ (e in particolare sotto la $z = 0$) lungo γ . Un tale teorema esiste effettivamente, e quindi si conclude che *la superficie di area minima poggiate su un contorno piano γ è piana*. Questo è l'esatto analogo del teorema secondo cui le curve di lunghezza minima tra due punti dati di \mathbb{R}^2 , o di $\mathbb{R}^{m \geq 2}$, sono i segmenti rettilinei (\equiv a curvatura nulla) che uniscono quei due punti. Non è difficile generalizzare i precedenti asserti al caso di una ipersuperficie $(m-1)$ -dim immersa in $\mathbb{R}^{m \geq 3}$. §

Veniamo ora ai problemi variazionali multidim che traggono origine da un modello fisico – nel loro insieme, un vastissimo e fondamentale capitolo della fisica matematica – di cui descriveremo alcuni esempi. Come sempre, un tale modello si formula partendo da osservazioni e induzioni, ed esprime una legge fisica nella forma variazionale “ $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}[u|\Omega] = \text{staz!}$ e $\delta u|_{\partial\Omega^+}$ dato”. Se in questa forma il problema ammette una estremante, allora si passa alla associata equazione di

⁸ La norma uniforme $\| \cdot \|_p$ si definisce in un dominio D ($m > 1$)-dim in modo completamente analogo a quello visto nella precedente sezione per domini 1-dim: basta sostituire $\max_{x \in I} \max_{r \leq p} |d_x^r \cdot|$ con $\max_{x \in D} \max_{0 \leq |v| \leq p} |\partial^{|v|}/\partial x^v \cdot|$.

EL. In effetti, buona parte della fisica matematica del continuo (non tutta, ma certo quella “filosoficamente” più significativa) si può far discendere da principi variazionali multidim (nel linguaggio dei fisici, da **teorie di campo**). Come già a quello unidim, questo fatto conferisce al CDV ($m \geq 2$)-dim uno status particolare nell’ambito della fisica matematica, ed ha indotto alcune speculazioni filosofiche su una presunta “finalità” delle leggi di natura, in quanto esse sarebbero tese a rendere estremo (cioè, a minimizzare o massimizzare) un conveniente funzionale. Contro una tale interpretazione è naturale obiettare che il funzionale viene spesso scelto proprio in modo da risultare estremo in base alla legge fisica considerata. Insomma, ciò che conta è soltanto il potere predittivo del modello; e in questo senso, la formulazione variazionale della legge non è altro che una formulazione possibile, per quanto suggestiva possa apparire una sua interpretazione finalistica.

Ancor più che nel caso del CDV unidim, in alcune delle applicazioni illustrate nei §§ che seguono sono evidenti le due “filosofie” metodologiche che all’incirca da due secoli e mezzo danno vita agli aspetti fondativi della fisica matematica del continuo: da un lato, la ricerca “diretta” – per così dirla – delle equazioni (tipicamente differenzialparziali) in cui si formalizza il modello del fenomeno considerato, e dall’altro la possibile identificazione di una densità di lagrangiana tale che le associate equazioni di EL equivalgano alle equazioni del modello stesso. Di solito questa seconda procedura “indiretta” è meno intuitiva della prima, e le succede nel tempo; ma la sua importanza è confermata dagli sviluppi della fisica macroscopica, almeno da quando questa è diventata una genuina scienza matematizzata.

Nelle applicazioni alla geometria e alla fisica, spesso una famiglia di problemi variazionali multidim strettamente analoghi (al punto da poter essere trattati unitariamente) si genera da uno stesso modello, mentre sussiste un legame tra m (numero delle variabili indipendenti) e n (numero delle variabili dipendenti). Se ad esempio la variabile dipendente è un campo κ -tensoriale, che ha m^κ componenti in uno spazio m -dim, questo legame è del tipo $n = m^{\kappa \geq 0}$. Un altro caso, che ricorre tipicamente in certi problemi iperbolici, è quello in cui $n = (m-1)^{\kappa \geq 0}$; la variabile dipendente è allora un campo κ -tensoriale in uno “spazio” $(m-1)$ -dim, perché una delle variabili indipendenti, che usualmente si identifica con il “tempo”, gioca un ruolo diverso da quello delle rimanenti $m - 1$. Passiamo ora ad illustrare alcuni esempi notevoli di applicazioni fisiche del CdV multidim.

§3. Uno dei più semplici problemi variazionali ($m=2$)-dim di origine fisica è quello della dinamica “longitudinale” di piccola ampiezza di una barretta (di sezione trascurabile) rettilinea a riposo (diciamo, di lunghezza unitaria), massiva, elastica ed omogenea, fissata agli estremi e libera da azioni esterne. Sia x una coordinata longitudinale (quindi $x \in [0,1]$) lungo di essa, e $s = s(t,x)$ lo spostamento longitudinale del punto di coordinata a riposo x , al tempo t . Denotando con k ($\equiv \text{cost} > 0$) la densità (lineare) e con c ($\equiv \text{cost} > 0$) il parametro elastico del materiale, la densità di

energia cinetica è $(1/2)k(\partial s/\partial t)^2$, e quella di energia elastica è $(1/2)c(\partial s/\partial x)^2$.⁹ Il funzionale da estremare è dunque l'integrale da $x = 0$ a $x = 1$ della densità lagrangiana $\mathcal{L} =: (1/2)k(\partial s/\partial t)^2 - (1/2)c(\partial s/\partial x)^2$. Supponendo s prescritto agli estremi dell'intervallo temporale considerato, $t = 0$ e $t = 1$, usando il principio "energia cinetica - energia potenziale = staz!" esattamente come nel caso dei sistemi finiti di punti materiali, e infine tenendo conto delle condizioni $s(t,0) = s(t,1) \equiv 0$ per $t \in (t_1, t_2)$, ricaviamo l'equazione di EL, valida per $\langle t, x \rangle \in (t_1, t_2) \times (0, 1)$,

$$(8) \quad V^2 \partial^2 s / \partial x^2 - \partial^2 s / \partial t^2 = 0,$$

dove abbiamo posto $V^2 =: c/k$. V^2 ha la dimensione di una (velocità)² (\equiv energia/massa). La (8) è il prototipo di equazione lineare iperbolica in due variabili indipendenti (**equazione di d'Alembert**), la cui teoria elementare diamo per nota al lettore.^{10, 11} §

§4. Proprio per la sua estrema semplicità, il precedente esempio è alquanto artificiale dal punto di vista fisico. Tale non è invece la sua versione tridimensionale, con la quale si passa ad un solido massivo, elastico e omogeneo occupante un aperto (spaziale) Ω' a contorno fisso (o ivi soggetto a dislocazioni prescritte). Abbiamo allora un problema con $p = 1$, $m = 4$ (il tempo più le x, y, z) e $n = 3$ (le tre componenti dello spostamento $s = s(t, x)$ del punto di posizione a riposo x al tempo t). Ci limiteremo come al solito alla dinamica (libera) di *piccola* ampiezza del sistema, avendo prefissato il suo stato ai tempi iniziale e finale. Ponendoci nell'approssimazione delle piccole deformazioni, la densità di energia elastica è $(1/2)c_{ikrs}\xi^{ik}\xi^{rs}$, dove c_{ikrs} è il **4-tensore elastico** (per l'ipotesi di omogeneità costante e uniforme in Ω') e ξ^{ik} è il **2-tensore di deformazione**, parte simmetrica di $s^{i/k}$. Applicando ancora il principio precedente, e tenendo conto del fatto che s è prescritta sul contorno (limite dall'interno) di $\Omega \equiv (t_1, t_2) \times \Omega'$, otteniamo il SDP lineare del 2° ordine di EL (controparte (3+1)-dim della (8)):

$$(9) \quad k \partial^2 s_i / \partial t^2 + c_{ikrs} \xi^{rs/k} = 0,$$

dove k è ancora la densità (adesso massa per unità di volume, anch'essa uniforme in Ω' per l'assunta omogeneità). Il caso di maggior interesse è quello di un continuo materiale isotropo, nel quale

$$(10) \quad c_{ikrs} = -\lambda g_{ik} g_{rs} - \mu (g_{ir} g_{ks} + g_{is} g_{kr}).$$

⁹ In questo caso spazialmente unidim, c non è altro che l'unica componente c_{1111} del 4-tensore elastico moltiplicato per la piccola area (supposta costante) della sezione trasversale della barretta, ed ha la dimensione di una forza. $\partial s/\partial x$ è poi l'unica componente del 2-tensore di deformazione.

¹⁰ Se rinunciamo alla omogeneità della barretta, ponendo $k = k(x)$ e $c = c(x)$, la (8) si modifica nella $\partial(c\partial s/\partial x)/\partial x - k\partial^2 s/\partial t^2 = 0$, ancora lineare-iperbolica (la presenza del termine $\partial c/\partial x \partial s/\partial x$ non modifica infatti il carattere della equazione). Essa mostra che la (8) con $V^2 = V^2(x)$ resta una buona approssimazione se $(1/c)|\partial c/\partial x \partial s/\partial x|$ è molto minore di $|\partial^2 s/\partial x^2|$.

¹¹ Altrettanto frequentemente, si definisce come equazione di d'Alembert quella che in luogo dell'operatore lineare $V^2 \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2$ nel suo 1° membro ha il suo opposto. Si tratta di una convenzione priva di importanza.

Qui g_{ik} è il 2-tensore fondamentale e λ, μ sono due costanti > 0 (le **costanti elastiche di Lamé**) di comune dimensione forza/(unità di area) \equiv sforzo. In questo caso le equazioni dinamiche (9) diventano

$$(11) \quad k \partial^2 s_i / \partial t^2 = (\lambda + \mu) s_k /_{i}^k + \mu s_i /_k^k;$$

o in termini del *vettore* s ,

$$(11bis) \quad k \partial^2 s / \partial t^2 = (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot s + \mu \nabla^2 s,$$

ove $\nabla \cdot s$ è l'invariante scalare $g_{ik} \xi^{ik}$, o **coefficiente di dilatazione**. Si dimostra che anche il SDP (11) è iperbolico.¹²

A prima vista, le (11) \equiv (11bis) non pongono in evidenza celerità (\equiv moduli di velocità) caratteristiche come la (8). Se tuttavia si suppone che lo spostamento s sia uguale ad un gradiente (di uno scalare di CdC 3), o alternativamente ad un rotore (di un vettore di CdC 3), nel primo caso la (11bis) diventa

$$(12_1) \quad [(\lambda + 2\mu)/k] \nabla^2 s - \partial^2 s / \partial t^2 = 0,$$

perché $\nabla \nabla^2 \equiv \nabla^2 \nabla$, e nel secondo diventa

$$(12_2) \quad (\mu/k) \nabla^2 s - \partial^2 s / \partial t^2 = 0,$$

perché $\nabla \cdot (\nabla \times) \equiv 0$. Emergono così in modo naturale due **celerità caratteristiche**, la

$$(13_1) \quad |V_1| =: [(\lambda + 2\mu)/k]^{1/2},$$

e la

$$(13_2) \quad |V_2| =: (\mu/k)^{1/2};$$

e si intuisce che non ve ne possono essere altre, perché la rappresentazione di un campo vettoriale arbitrario come somma di un gradiente e di un rotore, pur non essendo univoca, è completa (Clebsch). Anche più semplicemente, le stesse celerità si evidenziano prendendo la divergenza o il rotore della (11bis). Posto $\theta =: \nabla \cdot s$ e $\omega =: \nabla \times s$, nel primo caso troviamo

$$(14_1) \quad \partial^2 \theta / \partial t^2 = |V_1|^2 \nabla^2 \theta,$$

e nel secondo

$$(14_2) \quad \partial^2 \omega / \partial t^2 = |V_2|^2 \nabla^2 \omega;$$

due equazioni di d'Alembert, scalare e rispettivamente vettoriale, nelle nuove incognite θ e ω . Le (14) dicono che sia la divergenza che il rotore dello spostamento sono armonici in condizioni statiche. §

¹² Qui e in altri casi simili forniamo le equazioni in coordinate generali, anche se lo spazio fisico euclideo ammette sempre, ovviamente, l'uso di coordinate cartesiane ortogonali. Coordinate diverse da queste sono in pratica necessarie per trattare efficacemente problemi specifici. Ad esempio, problemi a simmetria cilindrica si tratteranno usando coordinate cilindriche. Questo commento (in fondo banale) vale in circostanze generali.

§5. L'equazione (8) con $V^2 = \text{cost}$ è universalmente nota come **equazione della corda vibrante**. La denominazione si riferisce ai piccoli moti *normali* (o *trasversi*) di una **corda** (o **filo**) idealmente flessibile, *omogenea* a riposo, *tesa* tra i suoi estremi *fissi*, e sulla quale non agiscono forze esterne se non quelle ai suoi estremi. È evidente che per potersi muovere dalla sua condizione di riposo la corda deve essere *longitudinalmente deformabile*, diciamo in quanto elastica. Poiché gli estremi sono fissi, è altrettanto evidente che la corda non scambia energia con l'esterno; e poiché è elastica, la sua energia totale si deve conservare. L'elasticità gioca tuttavia un ruolo trascurabile nelle applicazioni comuni, nel senso che in esse l'energia (elastica) di deformazione è piccola rispetto al lavoro svolto dalla tensione (\equiv forza di *trazione* che una parte della corda esercita sull'altra, immaginando che le due parti siano state separate da un taglio). Come vedremo, il problema non ha un significato variazionale *immediato*, e viene qui trattato (in modo non del tutto convenzionale) a causa della sua importanza di prototipo, nonché storica e applicativa.

Siano A e B i punti di coordinate $(0,0,0)$ e rispettivamente $(1,0,0)$ ai quali sono fissati gli estremi della corda, che in assenza di sollecitazioni è supposta più corta di 1. Supporremo per semplicità che il moto sia piano, ad es. nel piano (x,y) , oltre che trasverso. *Adottando il punto di vista lagrangiano* (cfr. App. Spec. 2.G), riferiremo il generico punto \underline{P} della corda alla sua posizione *iniziale* $(x \in [0,1], y=0)$. Sia $\eta = \eta(t,x)$ la coordinata y , al tempo t , del punto \underline{P} di posizione iniziale $(x,0)$, e quindi $\eta(t,x) + \partial\eta/\partial x(t,x)\delta x$ ($\delta x > 0$) quella del punto $\underline{P} + \delta\underline{P}$ di posizione iniziale $(x+\delta x,0)$ allo stesso tempo t . Ne viene che $\delta\underline{P} = (1, \partial\eta/\partial x)\delta x$, quindi che la distanza tra i punti \underline{P} e $\underline{P} + \delta\underline{P}$, cioè il modulo di $\delta\underline{P}$, è $[1+(\partial\eta/\partial x)^2]^{1/2}\delta x \equiv \varepsilon\delta x$, e che il versore $\underline{\tau}$ tangente alla corda, orientato verso le x crescenti, è $(1, \partial\eta/\partial x)/\varepsilon$. La supposta flessibilità ideale implica che la tensione $\underline{T} = \underline{T}(t,x)$ (\equiv forza esercitata sulla parte di corda con coordinata $< x$ da quella con coordinata $> x$) sia parallela ed equiversa a $\underline{\tau}$. D'altra parte, se K è la costante elastica della corda (indipendente da t e da x , e pari al prodotto del modulo di Young del suo materiale per la sua sezione normale), il modulo T di \underline{T} è uguale alla tensione (costante) $T_0 > 0$ nello stato iniziale aumentata di K volte l'allungamento locale $\varepsilon-1$, ovvero $T = T_0 + K(\varepsilon-1)$. Segue che $\underline{T} = [T_0+K(\varepsilon-1)](1, \partial\eta/\partial x)/\varepsilon \equiv h(1, \partial\eta/\partial x)$. La forza cui è soggetto il tratto di corda tra \underline{P} e $\underline{P} + \delta\underline{P}$ è $\partial\underline{T}/\partial x\delta x$. La sua corrispondente accelerazione (lungo l'asse (y)) è $\partial^2\eta/\partial t^2$, mentre la sua massa è $\mu_0\delta x$, ove $\mu_0 > 0$ è la densità lineare iniziale della corda, costante. Secondo l'equazione di Newton, e per la trasversalità del moto, deve dunque essere

$$(15) \quad \partial\underline{T}/\partial x = \partial/\partial x[h(1, \partial\eta/\partial x)] = \mu_0(0, \partial^2\eta/\partial t^2).$$

Da questa segue che $\partial h/\partial x = 0$, e che

$$(16) \quad \partial^2\eta/\partial t^2 = (h/\mu_0)\partial^2\eta/\partial x^2.$$

Questa è l'equazione esatta del moto trasverso, iperbolica del 2° ordine quasi-lineare (perché h contiene $\partial\eta/\partial x$ attraverso ε). Essa va risolta sotto le condizioni agli estremi $\eta(t,0) = \eta(t,1) = 0 \forall t$ e le condizioni iniziali $\eta(0,x) = \text{dato}$, $\partial\eta/\partial t(0,x) = \text{dato} \forall x \in [0,1]$. Di solito, la (16) si linearizza supponendo $|\partial\eta/\partial x|$ molto minore di 1; si ha così $\varepsilon \approx 1$ e $h \approx T_0$, e si è ridotti alla equazione d'alembertiana standard

$$(16\text{bis}) \quad \partial^2\eta/\partial t^2 = (T_0/\mu_0)\partial^2\eta/\partial x^2,$$

con la celerità $\sqrt{(T_0/\mu_0)}$.

La precedente trattazione può facilmente generalizzarsi a moti piani non trasversi, in cui lo spostamento ha anche una componente $\xi = \xi(t,x)$ lungo l'asse (x). In tal caso $\delta\mathbf{P} = (1+\partial\xi/\partial x, \partial\eta/\partial x)\delta x$, $\varepsilon = [(1+\partial\xi/\partial x)^2 + (\partial\eta/\partial x)^2]^{1/2}$, $\underline{\tau} = (1+\partial\xi/\partial x, \partial\eta/\partial x)/\varepsilon$, $\underline{T} = h(1+\partial\xi/\partial x, \partial\eta/\partial x)$, $\partial\underline{T}/\partial x = \mu_0(\partial^2\xi/\partial t^2, \partial^2\eta/\partial t^2)$, e infine

$$(17_1) \quad \partial h/\partial x + \partial/\partial x(h\partial\xi/\partial x) = \mu_0\partial^2\xi/\partial t^2,$$

$$(17_2) \quad \partial/\partial x(h\partial\eta/\partial x) = \mu_0\partial^2\eta/\partial t^2.$$

Le (17) formano un sistema iperbolico di due EDP non lineari accoppiate nelle incognite ξ, η , da risolvere con le solite condizioni accessorie. Procedendo ad un analogo ordinamento asintotico per $|\partial\xi/\partial x|$ e $|\partial\eta/\partial x|$ entrambi molto minori di 1, si ha $\varepsilon-1 \approx \partial\xi/\partial x$, $h \approx T_0[1+(K/T_0)\partial\xi/\partial x]/(1+\partial\xi/\partial x) \approx T_0[1+(K/T_0-1)\partial\xi/\partial x]$, $\partial h/\partial x \approx (K-T_0)\partial^2\xi/\partial x^2$, e infine $\partial\underline{T}/\partial x \approx (K\partial^2\xi/\partial x^2, T_0\partial^2\eta/\partial x^2)$; ovvero, una volta linearizzate, le due equazioni (17) si disaccoppiano nelle due d'alembertiane

$$(17_{1\text{bis}}) \quad \partial^2\xi/\partial t^2 = (K/\mu_0)\partial^2\xi/\partial x^2,$$

$$(17_{2\text{bis}}) \quad \partial^2\eta/\partial t^2 = (T_0/\mu_0)\partial^2\eta/\partial x^2.$$

Queste mettono in evidenza due celerità, la $\sqrt{(K/\mu_0)}$ dei moti longitudinali, e la $\sqrt{(T_0/\mu_0)}$ dei moti trasversi. Il rapporto della seconda alla prima, $\sqrt{(T_0/K)}$, è solitamente piccolo. Ad esempio per una corda media di pianoforte, supposta idealmente flessibile (il che è ben lontano dalla realtà), $K \approx 10^4$ Kg, e $T_0 \approx 10^2$ Kg (ordini di grandezza).¹³ Il caso di moti non piani, in cui esistono entrambi gli spostamenti trasversi $\eta = \eta(t,x)$ (lungo l'asse (y)) e $\zeta = \zeta(t,x)$ (lungo l'asse (z)) costituisce una generalizzazione ormai banale. Naturalmente nulla vieta di interpretare una d'alembertiana come la (16bis) come equazione di EL associata ad una densità lagrangiana $\mathcal{L} = \mu_0(\partial\eta/\partial t)^2/2 - T_0(\partial\eta/\partial x)^2/2$, come se μ_0 fosse la densità attuale, e $T_0(\partial\eta/\partial x)^2/2$ fosse una "densità di energia potenziale". Proprio in questo senso abbiamo più sopra affermato che il problema della corda vibrante non ha un significato variazionale immediato. Tuttavia

¹³ Si noterà inoltre che la densità di energia elastica associata è $K(\varepsilon-1)^2/2$, mentre la densità di lavoro della tensione (costante) è $T_0(\varepsilon-1)$. Il rapporto della prima alla seconda è dunque $(K/T_0)(\varepsilon-1)/2$. Nel surriferito esempio della corda di pianoforte $\varepsilon-1$ è dell'ordine di 10^{-5} , e quindi $(K/T_0)(\varepsilon-1) \approx 10^{-3}$.

nell'approssimazione $|\partial\eta/\partial x| \ll 1$ questa interpretazione è corretta a meno di termini di ordine superiore a $|\partial\eta/\partial x|^2$. §

§5bis. Per la sua importanza, vale la pena di segnalare un approccio al problema della corda vibrante diverso da quello illustrato in §5. I moti trasversi-piani (lungo l'asse (y)) di una corda elastica omogenea a riposo e tesa tra due punti fissi $A = (0,0,0)$ e $B = (1,0,0)$ possono cioè studiarsi ponendosi dal punto di vista euleriano (cfr. App. Spec. 2.G) anziché da quello lagrangiano come è stato fatto in §5. Allora la posizione del generico punto \underline{P} della corda (nel piano (x,y), e al tempo t), è espressa come funzione della lunghezza *attuale* s, diciamo contata a partire dall'estremo A, ossia $\underline{P} = \underline{P}(t,s)$. Denotando con $T = T(t,s)$ la tensione attuale (tangente alla corda e orientata nel senso della s crescente) e con $\mu = \mu(t,s)$ la densità attuale, vale dunque l'equazione vettoriale dinamica

$$(18) \quad \mu \partial^2 \underline{P} / \partial t^2 = \partial \underline{T} / \partial s,$$

dove \underline{T} è parallela-equiversa al versore tangente alla corda $\partial \underline{P} / \partial s$ ($\underline{T} \times \partial \underline{P} / \partial s = 0$). Qui abbiamo sette incognite (μ , \underline{P} e \underline{T}) e sei equazioni (le tre (18), le due relazioni di parallelismo $\underline{T} \times \partial \underline{P} / \partial s = 0$, e la $|\partial \underline{P} / \partial s| = 1$). Come vedremo, una settima equazione si otterrà richiedendo la conservazione della massa.

Se come supposto il moto è nel piano (x,y), né \underline{P} né \underline{T} hanno z-componente. Denoteremo pertanto con $(X,Y) = (X(t,s), Y(t,s))$ le (x-,y-)componenti di \underline{P} , e con $(T_x, T_y) = (T_x(t,s), T_y(t,s))$ quelle di \underline{T} . La $|\partial \underline{P} / \partial s| = 1$ si soddisfa ponendo

$$(19_1) \quad \partial X / \partial s = \cos \alpha$$

$$(19_2) \quad \partial Y / \partial s = \sin \alpha,$$

dove $-\pi/2 < \alpha = \alpha(t, s) < \pi/2$ è l'angolo tra il versore $\partial \underline{P} / \partial s$ e l'asse (x). Le relazioni di parallelismo sono a loro volta soddisfatte ponendo

$$(20) \quad (T_x, T_y) = T \partial (X, Y) / \partial s,$$

dove con T si è denotato il modulo di \underline{T} . Poiché consideriamo moti trasversi, deve essere $\partial X / \partial t \equiv 0$, quindi anche $\partial^2 X / \partial t^2 \equiv 0$. Le due proiezioni sull'asse (x) e sull'asse (y) della (18) danno quindi

$$(21_1) \quad 0 = \partial T / \partial s \partial X / \partial s + T \partial^2 X / \partial s^2,$$

e rispettivamente

$$(21_2) \quad \mu \partial^2 Y / \partial t^2 = \partial T / \partial s \partial Y / \partial s + T \partial^2 Y / \partial s^2.$$

Eliminando $\partial T / \partial s$ tra le (21) otteniamo

$$(22) \quad \mu \partial^2 Y / \partial t^2 = T \partial^2 Y / \partial s^2 [1 - (\partial^2 X / \partial s^2 \partial Y / \partial s) / (\partial^2 Y / \partial s^2 \partial X / \partial s)],$$

dove le derivate di X rispetto a s potrebbero scriversi come ordinarie. Il sottraendo nella [] a 2° membro si calcola subito in base alle (19) e vale $-(\operatorname{tg} \alpha)^2$, per cui la (22) diventa

$$(22\text{bis}) \quad \mu \partial^2 Y / \partial t^2 = (\sec \alpha)^2 T \partial^2 Y / \partial s^2.$$

D'altra parte la (21₁) può riscriversi come $(1/T)\partial_s T = \operatorname{tg}\alpha\partial_s\alpha$, la quale implica che $T\cos\alpha = T_x$ sia costante rispetto a s , e quindi funzione della sola t . Denotando con $\underline{f}_A = \underline{f}_A(t)$ e $\underline{f}_B = \underline{f}_B(t)$ le reazioni esercitate dai vincoli sugli estremi della corda, risulta dunque $\underline{f}_A(t) = -\underline{T}(t,s=0)$ e $\underline{f}_B(t) = \underline{T}(t,s=L(t))$, dove $L(t)$ è la lunghezza della corda al tempo t . Proiettando queste ultime sull'asse (x) e tenendo conto della costanza rispetto a s di T_x , abbiamo $f_{Ax} + f_{Bx} = 0 \forall t$; come è naturale perché la x -componente della quantità di moto del sistema è identicamente nulla e quindi deve essere nulla la x -componente della risultante delle forze esterne ad esso applicate. Se per brevità denotiamo con $C = C(t)$ la T_x , possiamo riscrivere la (22bis) come

$$(22\text{ter}) \quad \mu\partial^2 Y/\partial t^2 = C(\sec\alpha)^3\partial^2 Y/\partial s^2.$$

Si verifica facilmente che $\partial^2 Y/\partial s^2 = (\cos\alpha)^4\partial^2 Y^+/\partial X^2$, dove $Y^+ = Y^+(t,X) =: Y(t,s)$. Infatti X e s sono evidentemente in corrispondenza biunivoca $\forall t$, e abbiamo $\partial X/\partial s\partial\cos\alpha/\partial X = \partial\cos\alpha/\partial s = \partial^2 X/\partial s^2$, ovvero $\partial\cos\alpha/\partial X = (\partial^2 X/\partial s^2)/(\partial X/\partial s)$. Essendo $\partial^2/\partial s^2 = (\cos\alpha)^2\partial^2/\partial X^2 + \partial\cos\alpha/\partial X\partial/\partial s$, risulta allora $\partial^2 Y/\partial s^2 = (\cos\alpha)^2\partial^2 Y^+/\partial X^2 + \partial Y/\partial s(\partial^2 X/\partial s^2)/(\partial X/\partial s)$, e quindi $(\cos\alpha)^2\partial^2 Y^+/\partial X^2 = [1+(\operatorname{tg}\alpha)^2]\partial^2 Y/\partial s^2 \equiv (\sec\alpha)^2\partial^2 Y/\partial s^2$, come preannunciato.¹⁴ Poiché $\partial^2 Y/\partial t^2 = \partial^2 Y^+/\partial t^2$ ($\partial X/\partial t \equiv 0!$), la (22ter) si riscrive come

$$(22\text{quater}) \quad \mu_0\partial^2 Y^+/\partial t^2 = C\partial^2 Y^+/\partial X^2,$$

perché $\mu = \mu_0\cos\alpha$ in accordo con la conservazione della massa. In questo modo μ è eliminata in favore del dato μ_0 . La (22quater) è l'EDP esatta dei moti trasversi-piani nella incognita $Y^+(t,X(s)) \equiv Y(t,s)$, nella quale $C = C(t)$ è tuttavia un funzionale non lineare di Y^+ , a sua volta incognito. Per determinare questo funzionale, partiamo dalla $C = T\cos\alpha = [T_0+K(1+(\partial Y^+/\partial X)^2)^{1/2}-1]\cos\alpha = (T_0-K)\cos\alpha + K$, dove K è al solito la costante elastica della corda. Da questa, integrando rispetto a s da 0 a $L(t)$ e ricordando che C non dipende da s , otteniamo

$$(23) \quad L(t)C(t) = (T_0-K)\int_0^{L(t)}\cos\alpha ds + L(t)K.$$

Qui $\cos\alpha ds = dX$, e quindi l'integrale nella (23) vale 1. In conclusione $C(t) = (T_0-K)/L(t) + K$, dove $L(t) = \int_0^{L(t)} ds = \int_0^1 [1+(\partial Y^+/\partial X(t,X))^2]^{1/2} dX$. In questo modo il coefficiente $C(t)$ è completamente determinato come funzionale di Y^+ . Sostituendovi l'espressione di $C(t)$, la (22quater) diventa una equazione integro-differenziale parziale non lineare nella incognita $Y^+(t,X)$, che si presta in modo naturale ad essere risolta per approssimazioni successive (sotto le solite condizioni accessorie).

Nella più bassa approssimazione, in cui $(\partial Y^+/\partial X(t,X))^2$ è trascurato rispetto a 1, è $L(t) = 1$ e

¹⁴ Alternativamente, ricordiamo che la curvatura con segno della curva piana $y = y(x)$, positiva dove la curva è concava verso l'alto, è data da $\Gamma = y_{xx}(1+y_x^2)^{-3/2} = y_{xx}(\cos\alpha)^3$; mentre se la curva è data nella forma $x = x(s)$, $y = y(s)$ (dove s è la sua lunghezza crescente nel verso in cui cresce x), la curvatura è data da $\Gamma = y_{ss}[1+(x_{ss}/y_{ss})^2]^{1/2}$. Poiché $x_s = \cos\alpha$ e $y_s = \sin\alpha$, risulta $x_{ss}/y_{ss} = -\operatorname{tg}\alpha$, ovvero $\Gamma = y_{ss}\sec\alpha$. Uguagliando le due espressioni, si ha $y_{xx}(\cos\alpha)^3 = y_{ss}\sec\alpha$, da cui la tesi identificando y_{xx} con $\partial^2 Y^+/\partial X^2$ e y_{ss} con $\partial^2 Y/\partial s^2$.

$C(t) = T_0$, come ci si aspetta. Ottenuta comunque la soluzione Y^+ della (22quater), si ha $T_y = C\partial Y^+/\partial X$ come funzione di (t,X) , e quindi si ricavano le y-componenti delle reazioni vincolari: $f_{Ay}(t) = -T_y(t,s=0) = -C(t)\partial Y^+/\partial X(t,X=0)$ e $f_{By}(t) = T_y(t,s=L(t)) = C(t)\partial Y^+/\partial X(t,X=1)$, che sono uguali e opposte come devono.

In definitiva si constata che, nella teoria “piana” *esatta* della corda vibrante, gli effetti di ordine $1 - \cos\alpha$ o superiore *si compensano* dando alla fine luogo ad una equazione (la 22quater) dello stesso tipo di quella che si sarebbe ottenuta trascurandoli fin dal principio (come si fa usualmente), *salvo la presenza del coefficiente* $C = C(t)$ a fattore di $\partial^2 Y^+/\partial X^2$, che è un funzionale integrale *non lineare* dell’incognita e non una costante come nel caso standard. È importante osservare che la determinazione di C come funzione di t coinvolge l’elasticità della corda attraverso la costante K . È facile, infine, generalizzare questi risultati a moti trasversi non piani, con $\underline{p} = (X, Y^+, Z^+)$, $\partial X/\partial t \equiv 0$, $(Y^+, Z^+) = (Y^+, Z^+)(t, X) = (Y, Z)(t, s)$. §

§6. Seguendo un approccio analogo a quello del §5, si può generalizzare la (16bis) a *due* dimensioni spaziali, considerando cioè le (piccole) dislocazioni *normali* di una **membrana**¹⁵ omogenea, massiva, piana a riposo, a contorno γ fisso nel piano (x,y) , tesa da una forza per unità di lunghezza $C > 0$ lungo γ e normale a γ , uniforme e costante. Sia Ω' il dominio (semplicemente connesso) della membrana a riposo nel piano (x,y) , e sia $z = z(t,x,y)$ la sua dislocazione normale. Supponendo il tensore degli sforzi superficiale *isotropo*, cioè localmente proporzionale al tensore fondamentale della superficie (come avviene in una membrana *fluida*), la densità di energia potenziale è uguale a $C[(\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2]$. Denotando con k' la densità *areale* della membrana a riposo, si ottiene l’equazione di EL (in $(t_1, t_2) \times D'$):

$$(24) \quad \partial^2 z/\partial t^2 = (C/k')(\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2),$$

dove $\sqrt{C/k'}$ è ancora una celerità. Le condizioni accessorie assegnano z in Ω' ai tempi iniziale e finale, e $z|_\gamma = 0$. Rinviamo alla letteratura specializzata per l’analisi del caso non isotropo. §

§7. Una equazione in $\varphi = \varphi(t, x \equiv x^{1 \leq i \leq m})$ del tipo

$$(25) \quad c^2 \nabla_{(m)}^2 \varphi - \partial_t^2 \varphi = f$$

dove c^2 è una costante positiva, $\nabla_{(m)}^2$ è il laplaciano m -dimensionale, e f è una funzione data di (t,x) , si dice genericamente **equazione delle onde m -dimensionali**, libere ($f \equiv 0$) o forzate (f generalmente $\neq 0$).

¹⁵ In fisica matematica, una membrana è la generalizzazione 2-dimensionale del filo: come il filo è quindi inestensibile e incomprimibile, e inoltre perfettamente flessibile.

La fisica matematica offre numerosi esempi di equazioni delle onde ($1 \leq m \leq 3$)-dimensionali, specialmente libere. Una naturale densità lagrangiana compatibile con la (25) omogenea è

$$(26) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial_t \varphi, \partial_x \varphi) = (1/2)[(\partial_t \varphi)^2 - c^2(\nabla_{(m)} \varphi)^2].$$

Un caso di notevole interesse pratico è quello delle onde libere (3-dim) in un fluido perfetto (\equiv con tensore degli sforzi isotropo) compressibile e barotropico (\equiv in cui la densità k dipende soltanto dalla pressione p) e i cui elementi si muovono con velocità abbastanza piccola, o **onde acustiche**. In assenza di forze esterne, le equazioni che governano il moto di un tale fluido sono, oltre alla $k = k(p)$,

$$(27_1) \quad k(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla p = 0,$$

(legge dinamica), dove \mathbf{v} è il vettore (campo di) velocità, e

$$(27_2) \quad d_t k + k \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

(conservazione della massa). Trascurando il termine bilineare in \mathbf{v} nella (27₁) per l'assunta piccolezza di \mathbf{v} , presumendo che k sia comunque > 0 , e ponendo $\mathcal{P} =: \int dp/k(p)$, la (27₁) diventa $\partial_t \mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P}$, e ci assicura della irrotazionalità del moto ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) se questa sussiste in un istante qualsiasi, come supporremo. In tali condizioni, \mathbf{v} è gradiente di un potenziale cinetico, $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, e quindi $\mathcal{P} + \partial_t \varphi$ è una funzione della sola t che può sempre pensarsi conglobata in φ , secondo la $\mathcal{P} + \partial_t \varphi = 0$. Passando alla (27₂), abbiamo $dk/dp(\partial_t p + \mathbf{v} \cdot \nabla p) + k \nabla^2 \varphi = 0$. Ma alla luce della (27₁), $\mathbf{v} \cdot \nabla p = k \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{P} = -k \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v}$; un termine che va dunque anch'esso trascurato (rispetto a $\partial_t p$), essendo bilineare in \mathbf{v} . Siamo così ridotti alla $0 = \partial_t \mathcal{P} + dp/dk \nabla^2 \varphi = -\partial_t^2 \varphi + dp/dk \nabla^2 \varphi$. Questa non è ancora un'equazione delle onde libere, perché dp/dk è una funzione incognita di (t, \mathbf{x}) ; tuttavia nella approssimazione più bassa è legittimo porre $k = k_0$ (densità imperturbata) e quindi sostituire a dp/dk il suo valore per $k = k_0$, $(dp/dk)_0$. Abbiamo così l'equazione delle onde libere per φ :

$$(28) \quad \partial_t^2 \varphi = (dp/dk)_0 \nabla^2 \varphi \equiv c^2 \nabla^2 \varphi.$$

Quanto all'equazione barotropica $k = k(p)$ da usare, si presume che la conduzione termica non riesca ad omogeneizzare la temperatura se le perturbazioni sono abbastanza deboli e rapide. Vigge quindi il regime opposto, adiabatico, in cui (come insegna la termodinamica elementare) ciò che si deve trattare come una costante è $C =: p k^{-\gamma}$, $\gamma > 1$ essendo il rapporto (costante) tra i calori specifici del fluido (a pressione e volume costante), e non $p k^{-1}$ come sarebbe corretto soltanto nel caso isoterma. Allora $dp/dk = C \gamma k^{\gamma-1} = \gamma p/k$. Segue che $(dp/dk)_0 = \gamma p_0/k_0$ ($p_0 =: p(k_0)$), per cui la celerità nella (28) è $c = \sqrt{(\gamma p_0/k_0)}$.¹⁶

¹⁶ Nell'aria in condizioni normali è $\gamma \approx 1,4$, $p_0 \approx 10^5 \text{ Kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$ e $k_0 \approx 1,3 \text{ Kgm}^{-3}$, quindi $c \approx 330 \text{ ms}^{-1}$, in buon accordo con i valori sperimentali. Vale la pena di ricordare che quando Newton si cimentò con una prima valutazione di c ottenne un risultato relativamente scorretto, perché fece uso della legge *isoterma* di Boyle $p/k = \text{cost}$.

Una densità lagrangiana compatibile con la (28) è data dalla (26) con $m = 3$, e quindi è proporzionale a $(\nabla\varphi)^2 - (\partial_t\varphi)^2/c^2$. Questa suggerisce che, almeno in prima approssimazione, $k_0(\partial_t\varphi)^2/(2c^2)$ sia la densità di energia potenziale “di compressione”. Ciò è a prima vista un po’ strano, perché associa la densità di energia cinetica alle derivate *spaziali*, e quella di energia potenziale alla derivata *temporale*, dell’incognita φ . La situazione si chiarisce come segue. Conviene assumere come variabile di stato del fluido il volume specifico $\tau = 1/k$. L’energia potenziale per unità di massa è allora $w = w(\tau) = -\int_{\tau_0}^{\tau} p(\tau)d\tau$, dove τ_0 è il valore imperturbato di τ . Sviluppando w in serie di potenze intorno a τ_0 , abbiamo $w(\tau) = (dw/d\tau)_0(\tau-\tau_0) + (d^2w/d\tau^2)_0(\tau-\tau_0)^2/2 + \dots = p_0\tau_0\sigma - (dp/d\tau)_0(\tau_0\sigma)^2/2 + \dots$, avendo posto per brevità $\sigma = -(\tau-\tau_0)/\tau_0$; o anche, poiché $dp/d\tau = -(1/\tau)^2 dp/dk$, e in forza delle definizioni (28) di c^2 , $w(\tau) = p_0\tau_0\sigma + c^2\sigma^2/2 + \dots$ (vedremo tra un momento perché bisogna andare almeno fino al secondo grado in questo sviluppo). D’altra parte, $-\partial_t\varphi = \mathcal{P} \approx c^2 \int_{k_0}^k dk/k = c^2 \ln(k/k_0) \approx c^2 \ln(1+\sigma) = c^2\sigma(1-\sigma/2 + \dots) \approx c^2\sigma$ (qui basta il primo grado in σ , perché il risultato $\sigma \approx -\partial_t\varphi/c^2$ dovrà essere sostituito in w). Sostituendo $\sigma \approx -\partial_t\varphi/c^2$ in w , troviamo per la densità (volumica) di energia potenziale $kw \approx -p_0\partial_t\varphi/c^2 + (k_0/2)(\partial_t\varphi)^2/c^2 + \dots$, e quindi per la densità lagrangiana $\mathcal{L} \approx (1/2)[k_0(\nabla\varphi)^2 + 2p_0\partial_t\varphi/c^2 - k_0(\partial_t\varphi)^2/c^2]$. Il termine di mezzo di questa espressione di \mathcal{L} non contribuisce all’associata equazione di EL perché $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\varphi)$ è la costante p_0/c^2 . Questo risponde alla precedente questione circa lo sviluppo di w .

Abbiamo qui un esempio significativo di come i due approcci ad un problema fisico-matematico, quello “diretto” e quello “indiretto” di cui si diceva tra il §2 e il §3, portano a risultati che si provano consistenti soltanto attraverso una analisi non superficiale. §

§8. Una semplice generalizzazione della (25) omogenea è la seguente. Come dalla densità lagrangiana $\mathcal{L} = (1/2)[(\partial u/\partial x^0)^2 - \sum_{i=1}^{m-1}(\partial u/\partial x^i)^2]$ si ottiene l’equazione di EL d’alembertiana “normalizzata” $(\nabla_{(m-1)}^2 - \partial^2/\partial x^{02})u = 0$ – in cui x^0 è il prodotto del tempo per una celerità costante c –, similmente dalla densità lagrangiana $\mathcal{L}' =: \mathcal{L} + (1/2)(u/L)^2$, dove L è una lunghezza costante positiva, si ottiene l’equazione di EL

$$(29) \quad (\nabla_{(m-1)}^2 - \partial^2/\partial x^{02} - L^{-2})u = 0.$$

In tutt’altro contesto, una equazione del tipo (29) è stata proposta da **Klein e Gordon** (nel caso m -dim); interpretandovi c come celerità della luce, essa descrive il campo scalare di una particella neutra priva di spin e di massa $\hbar L^{-1}/c$ (con $\hbar \equiv$ costante di Planck normalizzata). §

§9. Esamineremo adesso un esempio di problema variazionale 2-dim in una incognita con $p = 2$: quello delle piccole vibrazioni *trasversali* libere di una **verga** massiva, elastica ed omogenea, rettilinea a riposo (diciamo di lunghezza unitaria), di cui ci interessano le equazioni dinamiche indefinite. Sempre limitandoci al caso piano, sia x una coordinata lungo di essa e $s = s(t,x)$ la dislocazione *normale*, all'istante t , del punto di ascissa x a riposo. La densità di energia cinetica è ancora $k(\partial s/\partial t)^2/2$ (con $k =$ densità lineare), mentre la densità di energia elastica deve considerarsi puramente “flessoria”, quindi \approx proporzionale al quadrato della curvatura κ . Per s piccola e abbastanza regolare, tale densità di energia elastica proporzionale a $\kappa^2 \approx (\partial^2 s/\partial x^2)^2$, sarà scritta come $\chi(\partial^2 s/\partial x^2)^2/2$, dove χ è una costante con dimensione lunghezza \times energia. In definitiva abbiamo una densità lagrangiana del tipo $\mathcal{L} = k(\partial s/\partial t)^2/2 - \chi(\partial^2 s/\partial x^2)^2/2$, dipendente soltanto dalla t -derivata prima dell'incognita e dalla sua x -derivata seconda. Sotto l'ipotesi che s e le sue derivate prime siano prefissate sul contorno di $\Omega = (t_1, t_2) \times (x=0, x=1)$, a questa densità lagrangiana corrisponde l'equazione di EL, in Ω , e nella incognita $s = s(t,x)$,

$$(30) \quad k\partial^2 s/\partial t^2 + \chi\partial^4 s/\partial x^4 = 0,$$

nota come **equazione della verga vibrante**. Come prevedibile, l'equazione è del 4° ordine. Se s è nulla agli estremi, allora la verga deve essere deformabile longitudinalmente (perché i suoi estremi non si muovono). Il modello presuppone quindi che la densità di energia elastica associata a questa deformazione longitudinale, proporzionale a $(\partial s/\partial x)^4$, sia trascurabile rispetto a quella flessoria, proporzionale a $(\partial^2 s/\partial x^2)^2$; e per la stessa ragione, k è trattata come costante, perché la flessione non altera la densità nella stessa approssimazione.

In condizioni stazionarie ($\partial/\partial t \equiv 0$), la dislocazione normale soddisfa alla $d^4 s/dx^4 = 0$. La soluzione è un polinomio di quarto grado in x , quindi contenente cinque costanti. Quattro di queste costanti sono eliminate mediante le quattro condizioni agli estremi, due delle quali sono $s(0) = 0$, $s(1) = 0$. Di solito, agli estremi si assegnano anche le (piccole) pendenze ds/dx ; se queste sono nulle si trova $s(x) = ax^2(x-1)^2$, dove a è la quinta costante arbitraria, che possiamo pensare positiva. La verga stazionaria assume la forma di una gobba di cammello, con flessi simmetrici a distanza $\pm 1/\sqrt{12}$ dal centro. §

§10. Anche il caso della verga può generalizzarsi a due dimensioni spaziali, passando cioè a considerare le piccole vibrazioni normali libere di una **lastra** omogenea massiva, elastica, piana a riposo, fissata ed incastrata lungo il suo contorno (fisso).

Formalmente, basta sostituire alla curvatura κ della verga il *doppio* della curvatura principale media $\langle \kappa_{pr} \rangle$ della lastra nell'esprimere la relativa densità di energia elastica flessoria; e all'operatore ∂_x^4 , l'operatore $\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2 = s_{xxxx} + s_{yyyy} + 2s_{xxyy}$ nella equazione di EL. Vale a dire, le cose vanno come se alla densità (lineare) di energia elastica flessoria della verga $(\chi/2)\kappa^2$ si sostituisca $(\alpha/2)(2\langle \kappa_{pr} \rangle)^2$ (dove α è una costante > 0 di dimensione pari a quella di χ /lunghezza), mentre l'equazione di EL (30) per la verga diventa la $(k'\partial_t^2 + \alpha\nabla^4)s = 0$ per la lastra, dove k' è adesso la densità areale. Segue la dimostrazione.

Se vogliamo derivare una equazione di EL lineare per le piccole vibrazioni della lastra, dobbiamo esprimere la sua densità di energia elastica flessoria come forma quadratica nelle quattro derivate seconde dello spostamento normale, s_{xx} , s_{yy} , s_{xy} , e $s_{yx} = s_{xy}$. Questa forma deve essere del tipo

$$(31) \quad \mathcal{E} = (\alpha/2)(s_{xx} + s_{yy})^2 + (\beta/2)(s_{xx}s_{yy} - s_{xy}s_{yx})$$

ove α e β sono costanti > 0 , perché \mathcal{E} deve essere invariante per rotazione del riferimento (x,y) , ed i soli invarianti quadratici che si possono formare con le derivate seconde di s sono quelli che figurano nella (31), cioè la traccia e il determinante della matrice hessiana di s . L'equazione di EL associata alla densità lagrangiana $(k'/2)(s_t)^2 - \mathcal{E}$ si ricava dalle

$$(32_1) \quad \partial^{*2}/\partial x^2(\partial\mathcal{E}/\partial s_{xx}) = \alpha(s_{xxxx} + s_{yyxx}) + (\beta/2)s_{yyxx},$$

$$(32_2) \quad \partial^{*2}/\partial y^2(\partial\mathcal{E}/\partial s_{yy}) = \alpha(s_{yyyy} + s_{xxyy}) + (\beta/2)s_{xxyy},$$

$$(32_3) \quad \partial^{*2}/\partial x\partial y(\partial\mathcal{E}/\partial s_{xy}) = -(\beta/2)s_{xxyy},$$

$$(32_4) \quad \partial^{*2}/\partial y\partial x(\partial\mathcal{E}/\partial s_{yx}) = -(\beta/2)s_{yyxx}.$$

La somma dei quattro 2^1 membri delle (32) è $\alpha\nabla^4 s$; cioè, il termine in β sparisce dalla equazione di EL, e l'equazione stessa si riduce alla

$$(33) \quad \alpha\nabla^4 s + k's_{tt} = 0,$$

o **equazione della lastra vibrante**. La dimostrazione si completa ricordando che, dette κ_1 , κ_2 le curvature principali della superficie $s = s(x,y)$ (al tempo t), risulta $2\langle \kappa_{pr} \rangle \equiv \kappa_1 + \kappa_2 = s_{xx} + s_{yy}$, e K (\equiv curvatura gaussiana) $\equiv \kappa_1\kappa_2 = s_{xx}s_{yy} - s_{xy}s_{yx}$ ($\equiv s_{xx}s_{yy} - s_{xy}^2$). Quindi $\mathcal{E} = (\alpha/2)(2\langle \kappa_{pr} \rangle)^2 + (\beta/2)K$. In questa il termine in β si può ignorare perché non compare nella equazione di EL.¹⁷ §

§11. In questa § vogliamo dare alcune informazioni di massima sui fenomeni cosiddetti “diffusivi”. Il modello standard di detti fenomeni può descriversi come segue. Consideriamo una quantità fisica F che si conserva, della quale denotiamo con ρ la densità e con J il flusso, essendo quindi $\dim(\rho) = \dim(F)L^{-3}$, $\dim(J) = \dim(F)L^{-2}T^{-1}$ (dove L e T denotano come al solito la dimensione

¹⁷ Tale termine in β gioca invece un ruolo nelle condizioni accessorie.

“lunghezza” e rispettivamente la dimensione “tempo”), e perciò $\dim(J)/\dim(\rho) = LT^{-1}$. Supponiamo poi che valga una legge fenomenologica del tipo

$$(34) \quad J = -k\nabla\rho,$$

dove k è una costante *strettamente positiva* che prende il nome di **coefficiente di diffusione**, di dimensione L^2T^{-1} . La (34) è comunemente nominata come **legge di Fick**.¹⁸ Tale legge è in particolare confermata dal modello meccanico-statistico come conseguenza di prima approssimazione della equazione di Boltzmann.¹⁹ Se la legge di Fick è sostituita in quella di conservazione (per F)

$$(35) \quad \partial_t\rho + \nabla\cdot J = 0,$$

si ottiene il ben noto prototipo di EDP parabolica

$$(36) \quad \partial_t\rho = k\nabla^2\rho,$$

o **equazione di diffusione**. Pensata valida nel cilindro $(0, T) \times \Omega$ (dove Ω è il solito dominio spaziale semplicemente connesso), la (36) è una equazione evolutiva le cui soluzioni, sotto convenienti condizioni iniziali (\equiv a $t = 0$ (limite da $t > 0$)) e al contorno (\equiv su $\partial\Omega_+$ (limite dall'interno)), sono “essenzialmente irreversibili”. Con ciò intendiamo che le soluzioni ρ^* (anch'esse sotto le convenienti condizioni iniziali e al contorno) della **equazione di diffusione backward** (versione “invertita rispetto a t ” della (36)), cioè della

$$(36bis) \quad \partial_t\rho^* = -k\nabla^2\rho^*$$

pensata valida nello stesso cilindro $(0, T) \times \Omega$, *non* sono necessariamente continue (in una certa norma) rispetto alla condizione iniziale; o come anche si dice, sono “instabili nel senso di Hadamard” (Jacques, 1865-1963).

Insieme con le sue generalizzazioni che ne conservano il carattere di “asimmetria temporale” cui abbiamo appena accennato, una equazione evolutiva del tipo (36) governa, almeno in prima approssimazione, una grande varietà di fenomeni diffusivi: ad esempio la diffusione di un fluido attraverso un altro fluido, quella del calore attraverso un mezzo (termo)conduttivo (equazione di Fourier), quella di elettroni o ioni attraverso un gas, quella di un campo magnetico attraverso un

¹⁸ Fick (Adolf, Kassel 1829, Blankenberge (Bel.) 1901) fu uno dei primi biofisici nel senso moderno del termine, e nel 1856 propose la (34) come legge fondamentale dei fenomeni diffusivi, fondandola sulla sua analogia con quella della diffusione termica.

¹⁹ Vedi ad es. S. Chapman, T.G. Cowling, Chpt. 8, Bibl. Gen. (B). La t -irreversibilità della equazione di Boltzmann (Ludwig, Vienna 1844 – Duino (It.) 1906) in presenza di collisioni è provata dal cosiddetto “Teorema H” dovuto allo stesso Boltzmann. Esso afferma che esiste una quantità integrale H , esprimibile in termini di funzione di distribuzione della folla di particelle considerata, che non diminuisce col tempo e può considerarsi una misura della entropia della folla stessa.

mezzo elettricamente conduttore, quella di neutroni attraverso la materia, quella di neutroni in un mezzo “moderatore” che li rallenta per mezzo di successive collisioni ²⁰, ... e via menzionando.

Si intuisce che il carattere t-irreversibile (nel senso di Hadamard) delle soluzioni della (36) rende impossibile la sua identificazione con l’equazione di EL di una conveniente densità lagrangiana. Possiamo tuttavia segnalare un espediente formale che aggira questa difficoltà. Esso consiste nell’associare alla (36) la sua t-inversa (36bis) sotto le stesse condizioni iniziali e al contorno. Rimarchiamo che, nonostante l’instabilità delle sue soluzioni, la (36bis) è idealmente deterministica; in particolare, a parità di condizione iniziale e di condizioni al contorno, evidentemente risulta $\rho^*(t) = \rho(-t)$, dove $\rho(-t)$ è la soluzione della (36) nel cilindro $(-T,0) \times \Omega$ sotto la stessa condizione iniziale e condizioni al contorno simmetriche rispetto al “piano” $t = 0$. Di solito, le condizioni al contorno richiedono che siano nulli i flussi attraverso $\partial\Omega$ delle due correnti $J = -k\nabla\rho$ e $J^* = k\nabla\rho^*$, cioè che si abbia $(^\circ) \nabla\rho \cdot d\sigma = 0$, $\nabla\rho^* \cdot d\sigma = 0$, dove $d\sigma$ denota l’elemento di $\partial\Omega$. Sebbene le due equazioni (36, 36bis) siano disaccoppiate (e quindi non “facciano sistema” in senso stretto), si verifica subito che esse risultano generate (come equazioni di EL) dalla densità lagrangiana

$$(37) \quad \mathcal{L} =: -k\nabla\rho \cdot \nabla\rho^* + (1/2)(\rho\partial_t\rho^* - \rho^*\partial_t\rho);$$

precisamente, la (36) come $E_{\rho^*}\mathcal{L} = 0$, e la (36bis) come $E_{\rho}\mathcal{L} = 0$. La \mathcal{L} della (37) è evidentemente omogenea di grado 1 rispetto alle due derivate temporali, e quindi non dobbiamo attenderci la possibilità di sviluppare un formalismo canonico di tipo standard: il determinante della (2×2) -matrice di Legendre è nullo perché $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\rho) = -\rho^*/2$ e $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_t\rho^*) = \rho/2$. Esiste tuttavia, sotto le menzionate condizioni al contorno omogenee $(^\circ)$, una costante (rispetto a t) costruibile mediante le due soluzioni. Mostriamo che essa è proporzionale a $\int_{\Omega} \nabla\rho \cdot \nabla\rho^* d(x)$, cioè che $d/dt \int_{\Omega} \nabla\rho \cdot \nabla\rho^* d(x) = 0$. Ciò è quasi immediato. t -derivando il detto integrale sotto il segno si ottiene infatti $\int_{\Omega} [\nabla\partial_t\rho \cdot \nabla\rho^* + \nabla\rho \cdot \nabla\partial_t\rho^*] d(x) = \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\partial_t\rho \nabla\rho^*) - \partial_t\rho \nabla^2\rho^* + \nabla \cdot (\partial_t\rho^* \nabla\rho) - \partial_t\rho^* \nabla^2\rho] d(x)$; il contributo delle due divergenze è nullo in forza delle condizioni $(^\circ)$, e tenendo conto delle (36, 36bis), si resta con $k^{-1} \int_{\Omega} [\partial_t\rho \partial_t\rho^* - \partial_t\rho^* \partial_t\rho] d(x) \equiv 0$, ²¹ qed. §

Altri SDP di interesse per la fisica-matematica classica ammettono un formulazione variazionale multidim; ma riteniamo che gli esempi illustrati in questa sottosezione siano sufficienti

²⁰ In quest’ultimo caso il tempo va sostituito con la cosiddetta “età” dei neutroni (introdotta da Fermi, e che ha dimensione L^2), e il coefficiente di diffusione (che è dunque adimensionale) è normalizzato a 1.

²¹ È quasi superfluo segnalare che l’equazione quantistica fondamentale, l’equazione di Schrödinger, ha essenzialmente la stessa natura della (36) se si prescinde dalla unità immaginaria a fattore del tempo. *Da un punto di vista formale*, essa può inquadrarsi in uno schema variazionale simile a quello illustrato a proposito della (36), e cioè associandola ad una equazione “a tempo invertito”, come la (36) si è associata alla (36bis), e procedendo alla definizione di un conveniente integrale di azione con conveniente densità lagrangiana. Non ci occupiamo qui di questo problema in quanto esula dai nostri scopi dichiarati.

a dare un'idea dell'importanza generale dell'argomento. Fuori da questo quadro, resta il SDP dell'elettromagnetismo maxwelliano, al quale abbiamo dedicato la S.sez. 7.1.3 che segue.

7.1.3) ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL CDV MULTIDIMENSIONALE, II

Veniamo dunque alla formulazione variazionale dell'elettromagnetismo (EM) nel vuoto, cioè al sistema di equazioni di Maxwell in un dominio spaziale fisso Ω' , vuoto come “mezzo”, ma in generale in presenza di densità di carica in moto (sotto il vincolo di conservazione della carica). Questo modello “convettivo” dell'EM è quello al quale si fa solitamente riferimento in fisica matematica. Rappresenteremo il campo EM (E,H) in termini del 4-potenziale (A, α) secondo le (5.2.4, 1_{1,2}). Sotto la condizione di Lorenz (5.2.4, 3), tale (A, α) soddisfa alle (5.2.4, 5_{1,2}), in cui ρ e u sono da pensarsi come date entro la $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho u) = 0$. Come sappiamo, con questo le equazioni di Maxwell omogenee (o “libere”, vedi (2.5.1, 11a)) sono automaticamente soddisfatte.

Proveremo che le rimanenti equazioni di Maxwell non omogenee (o “forzate”, v. 2.5.1, 11b), o equivalentemente le (5.2.4, 5_{1,2}), si possono derivare da un principio variazionale del 1° ordine ($p = 1$) con $m = 4$, $n = 4$. Cominceremo con l'osservare che ρE è una densità di forza (v. (2.5.1, 8)), e quindi che $\rho E u$ è una densità di potenza. Alla luce della prima (2.5.1, 11b), ρu è dimensionalmente omogenea a $\partial_t E$, e quindi anche $E\cdot\partial_t E$ è una densità di potenza, per cui E^2 è una densità di energia. Lo stesso deve dirsi di H^2 , perché E e H hanno la stessa dimensione nelle unità di misura che stiamo usando. Inoltre, secondo le (5.2.4, 1_{1,2}) anche $\rho\alpha$ e $\rho A\cdot u/c$ sono delle densità di energia (a questo si arriva immediatamente anche considerando che il prodotto di una carica per un potenziale è una energia). In definitiva, ci si aspetta che combinando linearmente (con coefficienti adimensionali) in modo opportuno le quattro densità di energia tipiche E^2 , H^2 , $\rho\alpha$ e $\rho A\cdot u/c$ si possa ottenere, a meno di un fattore adimensionale arbitrario costante, una densità lagrangiana atta a rappresentare, con la stazionarietà del suo integrale sul cilindro 4-dim $(t_1, t_2)\times\Omega'$, le (2.5.1, 11b).

La risposta corretta è che per tale densità lagrangiana si deve assumere

$$(1) \quad \mathcal{L} = E^2/2 - H^2/2 + \rho(u\cdot A/c - \alpha).$$

A questo punto si dovrebbe esprimere (E,H) in termini di (A, α) servendosi delle (5.2.4, 1_{1,2}), e scrivere le relative equazioni di EL per ottenere le (5.2.4, 5_{1,2}). Questa procedura è un po' laboriosa, e conviene per il momento sostituirla con un'altra più diretta. Basta calcolare la variazione $\delta\mathcal{L}$ in termini di quella del 4-potenziale (α, A). Tenendo conto delle

$$(2_1) \quad \delta(E^2/2) = E\cdot\delta E = E\cdot(-\partial_t\delta A/c - \nabla\delta\alpha) = -\partial_t(E\cdot\delta A)/c + \partial_t E\cdot\delta A/c - \nabla\cdot(E\delta\alpha) + \nabla\cdot E\delta\alpha$$

$$(2_2) \quad \delta(H^2/2) = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} = \nabla \cdot (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \delta \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{H};$$

$$(2_3) \quad \delta(\rho \alpha) = \rho \delta \alpha;$$

$$(2_4) \quad \delta(\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}/c) = \rho \mathbf{u} \cdot c \cdot \delta \mathbf{A},$$

e ignorando le divergenze $\nabla \cdot (\delta \mathbf{A} \times \mathbf{H})$ e $\nabla \cdot (\mathbf{E} \delta \alpha)$, e la t-derivata $\partial_t(\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{A})/c$ (che non daranno contributi quando integrate su $(t_1, t_2) \times D'$ perché (α, \mathbf{A}) si assume prescritto sul contorno di questo cilindro), si ottiene:

$$(3) \quad \delta \mathcal{L} = (-\nabla \times \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{E}/c + \rho \mathbf{u}/c) \cdot \delta \mathbf{A} + (\nabla \cdot \mathbf{E} - \rho) \delta \alpha.$$

Integrando la (3) su $(t_1, t_2) \times \Omega'$, al cui *interno* le $\delta \mathbf{A}$, $\delta \alpha$ sono arbitrarie, ed uguagliando a zero il risultato secondo la richiesta $0 = \delta \iint_{(t_1, t_2) \times \Omega'} \mathcal{L} dt d\Omega' = \iint_{(t_1, t_2) \times \Omega'} \delta \mathcal{L} dt d\Omega'$, si ritrovano così le (2.5.1, 11b), qed. L'integrale $\iint_{(t_1, t_2) \times \Omega'} \mathcal{L} dt d\Omega'$ si dice (integrale di) **azione elettromagnetica** (EM) sul cilindro $(t_1, t_2) \times \Omega'$. Viceversa, dalle (2.5.1, 11b) si desume immediatamente il **principio dell'azione EM stazionaria**, perché $\delta \mathcal{L} = 0$.

Una discussione completa dell'EM classico dal punto di vista variazionale costa un piccolo sforzo, ma vale la pena di affrontarla perché proprio nell'EM classico abbiamo un esempio molto importante di teoria di campo. Ricordiamo la convenzione minkowskiana secondo cui la somma da 1 a 4 su indici ripetuti $(_{ii})$ va intesa come $(_{ii}) - (_{44})$, con $i = 1, 2, 3$. Benché non sia strettamente necessario, come in altre occasioni è più comodo e sicuro conservare il significato standard $(_{11}) + \dots + (_{44})$ di quella somma, sostituendo la 4^a coordinata t con $x^4 = ict$. Questo comporterà alcune semplici modifiche delle definizioni date nella Sez. 2.5 (che saranno menzionate man mano si renderà necessario), e sarà anche utile per familiarizzare il lettore con l'uso di questo artificio assai comune nell'analisi di problemi strettamente iperbolici.

Nella S.sez. 2.5.1 non compariva ancora il 4-potenziale (\mathbf{A}, α) (che tra l'altro rende superflua l'introduzione del 2° tensore EM χ_{ik} , vedi (2.5.2, 4)). Rappresenteremo questo (\mathbf{A}, α) come 4-vettore $\phi^k =: (\mathbf{A}^k, i\alpha)$, $k = 1, \dots, 4$, $\kappa = 1, 2, 3$. La definizione di 4-corrente di convezione, $\rho(\mathbf{u}, c)$, sarà ora modificata in

$$(4) \quad j^i =: \rho(u^i, ic),$$

di modo che, avendo posto, come è adesso naturale,

$$(5) \quad \partial_i =: (\partial_i, \partial_4) \equiv (\partial_i, \partial_{ict}),$$

si ha ancora (equazione di conservazione della carica)

$$(6) \quad \partial_j j^i = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \partial_t \rho = 0. \quad ^{22}$$

La condizione di Lorenz si scrive semplicemente come

²² Possiamo ormai usare la notazione standard, con indici di covarianza e controvarianza, per significare la somma su coppie di indici ripetuti.

$$(7) \quad \partial_i \phi^i = \nabla \cdot \mathbf{A} + (1/c) \partial_t \alpha = 0,$$

mentre le equazioni d'alembertiane (5.2.4, 5_{1,2}) sono riassunte nelle

$$(8) \quad \partial_i^i \phi^k = [\nabla^2 - (1/c^2) \partial_t^2] (A^k, i\alpha) = -j^k/c$$

Ricordiamo che le dette (5.2.4, 5_{1,2}) equivalgono alle equazioni di Maxwell forzate sotto la condizione di Lorenz. Per brevità, nel seguito scriveremo Φ per $\partial^i \phi_i = \nabla \cdot \mathbf{A} + (1/c) \partial_t \alpha$. Infine la definizione di 1° tensore (antisimmetrico) EM (vedi 2.5.2, 1) sarà modificata nelle

$$(9_1) \quad \psi_{i,t+1} =: H_{t+2}$$

$$(9_2) \quad \psi_{4t} =: -iE_t,$$

($t = 1, 2, 3$). Con ciò, la definizione di (A, α) (v. S.sez. 5.2.4) equivale alle

$$(10) \quad \psi_{ik} = \partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i,$$

che conferma il carattere antisimmetrico di ψ_{ik} . Si noti ancora che con la definizione (9) di ψ_{ik} in termini di (E, H) , le equazioni di Maxwell forzate si scrivono

$$(11) \quad \partial^i \psi_{ik} = -j_k/c.$$

Ricordiamo poi che le

$$(12) \quad \partial_i \psi_{jk} + \partial_k \psi_{ij} + \partial_j \psi_{ki} = 0$$

equivalgono alle equazioni di Maxwell libere. (Precisamente, se $i = 1, j = 2, k = 3$ si ottiene l'equazione scalare libera di Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$; se $i = 1, j = 2, k = 4$ si ottiene la componente (3) della equazione vettoriale libera di Maxwell; e similmente, per rotazione ciclica di i, j su $(1, 2, 3)$, le analoghe componenti (1) e (2). Le altre estrazioni di (i, j, k) tra $(1, 2, 3, 4)$ o riproducono una delle quattro precedenti equazioni, o sono delle identità.²³

Tutto ciò premesso, una densità lagrangiana che dà le equazioni di Maxwell come associate equazioni di EL è:

$$(13) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(x^{1 \leq h \leq 4}, \phi_{1 \leq i \leq 4}, \partial_{1 \leq j \leq 4} \phi_{1 \leq i \leq 4}) =: j_i \phi^i/c - (\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i)(\partial^i \phi^k - \partial^k \phi^i) - (1/2) \Phi^2,$$

dove al solito si deve sommare da 1 a 4 su ogni coppia di indici ripetuti. (La possibile dipendenza di \mathcal{L} dalle coordinate $x^{1 \leq h \leq 4}$ è dovuta alla presenza in essa del vettore forzante j_i , funzione data e arbitraria di x entro il vincolo di solenoidalità (6)). Un facile calcolo identifica infatti queste equazioni di EL nelle:

$$(14) \quad \partial^i (\partial_i \phi_k - \partial_k \phi_i) + \partial_k \Phi = -j_k/c,$$

²³ Così come è stato definito, il 4-vettore forzante j è (dimensionalmente) una densità di corrente. A conti fatti, sarebbe tuttavia più conveniente definirlo come $1/c$ volte il precedente, cioè come densità di carica $\rho(u/c, i)$. Così facendo, il fattore $1/c$ che moltiplica j in numerose equazioni (ad es. nella (8) o nella (11), ecc.) sparirebbe, e la presentazione sarebbe più economica ed elegante.

che si verificano equivalenti alle d'alembertiane (8). Si noti che l'ultimo addendo a 1° membro delle (14) è il gradiente di Φ , la cui nullità non è stata fin qui richiesta. Scrivendo invece le quattro (14) in termini del 1° tensore EM abbiamo

$$(14\text{bis}) \partial^i \psi_{ik} + \partial_k \Phi = -j_k/c;$$

queste coincidono con le (11), equivalendo quindi alle equazioni di Maxwell forzate, sse $\partial_k \Phi = 0$. Come sappiamo (v. S.sez. 5.2.4), la condizione di Lorenz può essere soddisfatta risolvendo la d'alembertiana forzata (5.2.4, 4) e cambiando gauge nel modo indicato (v. ancora S.sez. 5.2.4). Secondo la teoria delle EDP ellittiche, l'esistenza di una soluzione della (5.2.4, 4) è assicurata sotto blande condizioni sulla regolarità del suo termine forzante e di $\partial\Omega$. Esiste tuttavia una più semplice dimostrazione del fatto che il dare la condizione di Lorenz per soddisfatta non limita essenzialmente la generalità. Basta infatti supporre la funzione Φ analitica rispetto a t per poter considerare la $\Phi = 0$ alla stregua di una conveniente condizione iniziale. Precisamente, richiederemo (°) $\Phi|_{t=0} = 0$ e (°°) $\partial_t \Phi|_{t=0} = 0$ in tutto il dominio spaziale Ω di interesse. Poiché in forza delle (6) è $\square\Phi = 0$ (infatti $\square\Phi = \partial^i \square\phi_i = -\partial^i j_i/c = 0$), e la (°) implica $\nabla^2 \Phi|_{t=0} = 0$ in Ω , segue che anche $\partial_t^2 \Phi|_{t=0} = 0$ in Ω . Ma $\partial_t \square\Phi = \square \partial_t \Phi$, e la (°°) implica che anche $\partial_t^3 \Phi|_{t=0} = 0$ in Ω . Allo stesso modo si prova che $\partial_t^n \Phi|_{t=0} = 0$ in $\Omega \forall n$, e la tesi scende dall'assunta analiticità di Φ rispetto a t . Questo risultato conferma che in pratica la condizione di Lorenz può essere sempre data per soddisfatta. Allora le (14bis) coincidono con le equazioni di Maxwell forzate, mentre quelle libere sono comunque soddisfatte avendo espresso i campi (E,H) in termini del 4-potenziale. Infine sotto la condizione di Lorenz l'ultimo addendo a 2° membro della (13) sparisce, e una semplice verifica mostra che \mathcal{L} coincide con l'espressione (1) a meno di un fattore privo di importanza.

In questa presentazione, l'ultima parte della teoria variazionale dell'EM (modello convettivo) riguarda la **formulazione hamiltoniana delle equazioni del campo**. A questo scopo, cominceremo con l'introdurre i quattro **momenti canonici** $\pi_{1 \leq j \leq 4}$ come

$$(15) \quad \pi_j = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_t \phi^j) \equiv - (i/c) \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_4 \phi^j) = - (i/c) (\partial_j \phi^4 - \partial^4 \phi_j - \delta_j^4 \partial^h \phi_h),$$

o direttamente in termini di E, Φ , come

$$(16_1) \quad \pi_t = (1/c) E_t$$

($t = 1, 2, 3$), e

$$(16_2) \quad \pi_4 = (i/c) \Phi$$

Le (15) sono invertibili rispetto alle $\partial_t A$, $\partial_t \alpha$, e quindi la condizione di Legendre è soddisfatta in tutto il dominio di interesse. Questo ci permette di introdurre una densità hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi_j \dot{\phi}^j - \mathcal{L}$. Facendo i calcoli, si trova

$$(17) \quad \mathcal{H} = (c^2/2) \pi_j \pi^j + (1/4) \psi_{ik} \psi^{ik} + ic \pi^1 \partial_1 \phi_4 - ic \pi_4 \partial_1 \phi^1 - j_h \phi^h / c$$

dove al solito le coppie di indici greci ripetuti significano somma da 1 a 3, e quelle di indici latini ripetuti significano somma da 1 a 4. In termini di campi EM (E,H) e potenziali EM (A, α), la (17) si scrive anche

$$(18) \quad \mathcal{H} = (E^2 - \Phi^2)/2 + H^2/2 + E \cdot \nabla \alpha + \Phi \nabla \cdot A + \rho(\alpha - A \cdot u/c),$$

dove i cinque addendi eguagliano uno ad uno, nell'ordine, i cinque addendi nella (17).²⁴ Se vale la condizione di Lorenz $\Phi \equiv 0$, la (18) si riduce alla

$$(18\text{bis}) \quad \mathcal{H} = (E^2 + H^2)/2 + E \cdot \nabla \alpha + \rho(\alpha - A \cdot u/c).$$

Poiché la dipendenza di \mathcal{H} dai momenti canonici nella (17) è completa, sulla sua base si possono scrivere immediatamente le (4 + 4) equazioni canoniche dell'elettromagnetismo classico. Si ha così

$$(19_1) \quad \partial \mathcal{H} / \partial \pi^i = c^2 \pi_i + ic \partial_i \phi_4$$

(con $i=1,2,3$), e

$$(19_2) \quad \partial \mathcal{H} / \partial \pi^4 = c^2 \pi_4 - ic \partial_\kappa \phi^\kappa.$$

Queste devono dare le equazioni canoniche $\partial \mathcal{H} / \partial \pi^j = \partial_i \phi_j$, ciò che si può controllare in modo diretto.

²⁵ Quanto alle

$$(20) \quad \partial_i \pi_j = -\partial \mathcal{H} / \partial \phi^j + \partial^*_{\kappa} \partial \mathcal{H} / \partial (\partial_\kappa \phi^j),$$

ci si aspetta che coincidano con le equazioni di Maxwell forzate se $\Phi \equiv 0$, o sse $\partial_i^* \Phi \equiv 0$ per ogni $i = 1 \div 4$ (dove l'asterisco su ∂ in $\partial_i^* \Phi$, che a questo punto può anche essere omissso, ricorda il carattere sostanziale della derivazione). Le (20) specializzano al caso di presente interesse le (7.1.1, 19). In effetti, ad esempio per $j = 3$ si ha $\partial_i \pi_3 = -(1/c) \partial_i E_3 = -\partial \mathcal{H} / \partial \phi^3 + \partial^*_{\kappa} \partial \mathcal{H} / \partial (\partial_\kappa \phi^3) = j_3/c - (\nabla \times H)_3 + \partial_3 \Phi$; e questa coincide con la componente (3) della equazione vettoriale forzata di Maxwell sse $\partial_3 \Phi = 0$. Similmente, per $j = 4$, $\partial_i \pi_4 = (i/c) \partial_i \Phi = -\partial \mathcal{H} / \partial \phi^4 + \partial^*_{\kappa} \partial \mathcal{H} / \partial (\partial_\kappa \phi^4) = i\rho + ic \partial^*_{\kappa} \pi^\kappa = i(\rho - \nabla \cdot E)$, che coincide con l'equazione scalare forzata di Maxwell sse $\partial_i \Phi = 0$. La tesi è così completamente provata sotto la condizione $\Phi \equiv \text{cost}$, (marginalmente) più debole di quella di Lorenz. §²⁶

²⁴ Una forma equivalente e più simmetrica della somma $-\Phi^2/2 + \Phi \nabla \cdot A$ a 2° membro della (18) è $(\mathcal{A}^2 - \mathcal{B}^2)/2$, con $\mathcal{A} = \nabla \cdot A$, $\mathcal{B} = \partial_t \alpha / c$.

²⁵ Si ha $\partial \mathcal{H} / \partial \pi^1 = (-ic)(\partial_t \phi_4 - \partial_4 \phi_t) + ic \partial_t \phi_4 \equiv \partial_t \phi_t (= \partial_t A_t)$ dalle (19₁), e rispettivamente $\partial \mathcal{H} / \partial \pi^4 = ic(\Phi - \nabla \cdot A) = \partial_t \phi_4 (= i \partial_t \alpha)$ dalla (19₂), come atteso.

²⁶ Alla scelta di esempi di applicazioni del CDV multidim fin qui illustrati, se ne potrebbe/dovrebbe aggiungere un altro di grande importanza, quello che conduce alle equazioni gravitazionali di Einstein-Hilbert (quasi-lineari del 2° ordine) richiedendo la stazionarietà di una conveniente "azione relativistica (gravitazionale)". In modo un po' informale, le equazioni gravitazionali saranno dedotte da un tale principio variazionale nella rassegna storica sulla Teoria della Relatività con cui inizia il Cap. 9, vedi Sez. 9.1, e ridiscusse più oltre. Rinviamo pertanto a quel capitolo la presentazione del principio di azione relativistica.

7.2) ELEMENTI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI III

Diversamente da quelli della precedente sezione 7.1, i contenuti delle restanti sezioni 7.2 e 7.3 del capitolo sono di interesse meno immediato per il fisico matematico, e possono essere omessi in prima lettura. Questo non deve tuttavia indurre a sottovalutarne l'importanza concettuale. Se di tali questioni "complementari" esiste una versione multidim ragionevolmente semplice, abbiamo illustrato quella versione. In caso contrario, ed anche per ragioni di gradualità didattica, ci siamo limitati alla versione di base, unidim.

7.2.1) COMPLEMENTI DI CDV I

§1. *Invarianza del funzionale del 1° ordine, lagrangiane 1-omogenee, ortogonalità di Weierstrass, vettore di EL.* Ci limiteremo qui a problemi del 1° ordine ($p = 1$), ed inizieremo con la loro versione unidim. Il funzionale integrale di $u \equiv \langle u^1, \dots, u^n \rangle$, $n \geq 1$, sarà dunque, per il momento, del tipo

$$(1) \quad \mathcal{F}[u|I] = \int_I F(t, u(t), v(t)) dt,$$

dove v sta per u_t , I è un intervallo base (aperto), F è C^2 in $U \times \mathbb{R}^n$, U è un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^{1+n} la cui t -proiezione include I , e $u(t)$ è supposta $C^2(I)$. Studieremo certi aspetti della possibile invarianza di $\mathcal{F}[u|I]$ a fronte di trasformazioni abbastanza regolari e globalmente invertibili della coppia $\langle t, u \rangle$ in una nuova coppia $\langle t', u' \rangle$.

Per cominciare, definiremo una speciale classe di funzioni integrande F aventi le proprietà seguenti: (i) "F non dipende dalla variabile indipendente t " e (ii) "F è omogenea di grado 1 rispetto alle v ".¹ Nel CDV, integrande F siffatte si dicono **1-omogenee** (ma spesso per brevità anche soltanto "omogenee"), e similmente **1-omogenei** si dicono i problemi variazionali (qui del 1° ordine, $p = 1$) ad esse associati. I problemi di CDV omogenei, e soprattutto quelli 1-omogenei, sono importanti; e come sarà più chiaro nel seguito, ad essi va riservato un trattamento particolare.

Sia

$$(2) \quad t' = t'(t) \leftrightarrow t = t(t'),$$

una trasformazione strettamente crescente (quindi invertibile globalmente (IG)) di CdC 1 di t in $I \leftrightarrow I'$, e si ponga $\lambda = \lambda(t) =: dt'/dt > 0$. Sia inoltre $u'(t') =: u(t)$ in $I \leftrightarrow I'$, quindi $v'(t') = v(t(t')) dt/dt'(t')$. Se e solo se F è 1-omogenea,

¹ Alcune informazioni sulle funzioni omogenee di grado arbitrario sono richiamate più avanti in questo capitolo, vedi S.sez. 7.3.1.

$$(3) \quad F(u'(t'), v'(t')) = F(u(t), v(t)/\lambda(t)) = F(u(t), v(t))/\lambda(t)$$

in $I \leftrightarrow I'$; e quindi

$$(4) \quad F(u'(t'), v'(t')) dt' = F(u(t), v(t)) dt,$$

La (3) è ad esempio soddisfatta se $F(u, v) \equiv F(v) = [\sum_{\alpha=1}^n (v^\alpha)^2]^{1/2} \equiv |v|$, essendo il modulo euclideo standard; cioè se l'integrale $\int_1 F dt$ è la lunghezza (euclidea) dell'arco di curva $u = u(t)$ immerso in \mathbb{R}^n , per $t \in I$.

Secondo il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee, $F = F(u, v)$ è 1-omogenea sse

$$(5) \quad F(u, v) = (\partial F / \partial v)(u, v) \cdot v.$$

Indichiamo due conseguenze della (5). La prima è che, se $u = u(t)$ è una estrema non degenera in I (cioè per cui $v(t)$ abbia qualche componente non nulla per ogni $t \in I$),

$$(6) \quad EF \cdot v \equiv [\partial F / \partial u - d_t(\partial F / \partial v)] \cdot v = (\partial F / \partial u \cdot v + \partial F / \partial v \cdot v_t) - d_t(\partial F / \partial v \cdot v) = d_t F - d_t F = 0:$$

vale a dire, v e EF sono ortogonali, una proprietà nota come (teorema di) **ortogonalità di Weierstrass**. Questa ci dice che al più $n - 1$ delle equazioni di EL sono indipendenti se la F è 1-omogenea. La seconda conseguenza è che una F 1-omogenea *non* può soddisfare la condizione di Legendre, necessaria alla invertibilità del sistema delle equazioni che definiscono i momenti coniugati (nel caso presente $p = \partial F / \partial v(u, v)$). Infatti, derivando la (5) rispetto a v abbiamo $\partial F / \partial v = \partial^2 F / \partial v \partial v \cdot v + \partial F / \partial v$, cioè $\partial^2 F / \partial v \partial v \cdot v = 0$. Se $v \neq 0$, deve quindi essere

$$(7) \quad \det\{\partial^2 F / \partial v \partial v\} = 0$$

in $U \times \mathbb{R}^n$, in contraddizione con la invertibilità delle $p = \partial F / \partial v(u, v)$.

Come sappiamo, lo sviluppo di un formalismo canonico "classico" presuppone la IG (in $U \times \mathbb{R}^n$) del sopradetto sistema rispetto alle v , e quindi la condizione di Legendre in quell'aperto: i problemi variazionali 1-omogenei sono esclusi da questa possibilità, almeno secondo la procedura usuale. È comunque chiaro che se l'obiettivo è quello di trasformare il sistema delle n equazioni del 2° ordine di EL in un equivalente sistema di equazioni del 1° ordine, ci sono infiniti modi per realizzarlo, anche se è impossibile sviluppare il formalismo canonico standard. (Una possibilità di questo tipo sarà illustrata nella Sez. 7.3.)

Passando al CDV multidim ($m \geq 2$) del 1° ordine, è ancora possibile avere una $F = F(x \equiv x^{1 \leq i \leq m}, u, u_x)$ il cui integrale su $d(x)$ non vari a fronte di una trasformazione di CdC 1 (non singolare) *congruente* (\equiv a determinante jacobiano positivo) delle variabili indipendenti $x \in \Omega$. Precisamente, basterà che una tale F (i) non dipenda dalle x , e (ii) soddisfi alla seguente generalizzazione della (4):

² Qui e nel seguito evitiamo la notazione indiciale in favore di quella sintetica standard (ad es., $a \cdot b$ in luogo di $a_i b^i$, somma su (i) , ecc.).

$$(8) \quad F(u'(x'), v'(x')) \det\{\partial(x')/\partial(x)\} = F(u(x), v(x))$$

a fronte di un arbitrario 1-diffeomorfismo congruente $x' = x'(x) \leftrightarrow x = x(x')$, e sotto la $(\circ) u'(x') = u(x)$. Infatti, l'essere $d(x') = \det\{\partial(x')/\partial(x)\}d(x)$ prova che l'integrale $\int F(u, v)d(x)$ è allora effettivamente invariante. Anche in questo caso si parlerà di problemi variazionali (multidim) del 1° ordine 1-omogenei. Tuttavia la situazione è più complicata di quella che si ha nel caso unidim: infatti le precedenti condizioni (i,ii) non sono anche necessarie all'invarianza dell'integrale. Ciò è quanto prova il controesempio di $F = \alpha f$, dove $f = f(u, v)$ è invariante rispetto al 1-diffeomorfismo congruente $x \leftrightarrow x'$ (e sotto la (\circ)) e α dipende da x in modo tale che $\alpha(x') = \alpha(x) \det\{\partial(x)/\partial(x')\}$. Evidentemente, la (8) è soddisfatta se la moltiplicazione di v in F per una matrice $b \equiv \{b_h^k\}_{h,k=1 \div m}$ a determinante positivo equivale alla moltiplicazione di F per quel determinante, per modo che

$$(9) \quad F(b \cdot v) / \det(b) = F(v)$$

(qui abbiamo trascurato di evidenziare la dipendenza da u , e il (\cdot) denota il prodotto m -dim). In questo caso la condizione (ii) è soddisfatta, mentre la (i) non lo è.

Sempre riferendoci al CDV multidim, dopo aver selezionato una variabile indipendente come "tempo" t , si può anche considerare la possibilità che F sia 1-omogenea rispetto alle sole u_t . La situazione è allora più semplice, ma nemmeno in questo caso si può sviluppare un formalismo canonico secondo le linee esposte nella S.sez. 7.1.1.

Torniamo ora al CDV unidim standard del 1° ordine e alla solita integranda $F = F(t, u, v(\equiv u_t))$ di CdC 2 in $U(\subset \mathbb{R}^{1+n}) \times \mathbb{R}^n$. Integrande F per cui le $p = \partial F / \partial v(t, u, v)$ sono globalmente invertibili rispetto alle v nel loro dominio di definizione $U \times \mathbb{R}^n$, si dicono spesso, nel contesto, "non singolari" o "regolari". È chiaro che una F regolare soddisfa la condizione di Legendre (7) e che una F 1-omogenea non può essere regolare.

Per una F regolare e $n \geq 1$, consideriamo una trasformazione di CdC 2 e invertibile

$$(10) \quad u' = u'(u) \leftrightarrow u = u(u')$$

mentre $t' = t$ (quindi con $\det\{\partial(u')/\partial(u)\} \neq 0$ in U_u , proiezione di U nello spazio delle u); e richiediamo l'invarianza, sotto la (10), della $F(t, u(t), v(t))$ per t in I . Poiché $F(t, u, v) \equiv F(t, u(u'), v(u', v'))$, dove

$$(11) \quad v(u', v') = \partial u / \partial u'(u') \cdot v',$$

questa richiesta equivale a che

$$(12) \quad F(t, u, v) = F'(t, u', v') =: F(t, u(u'), \partial u / \partial u'(u') \cdot v').$$

Derivando la (12) rispetto a v' , per le (11) abbiamo

$$(13) \quad \partial F' / \partial v' = \partial F / \partial v \cdot \partial v / \partial v' = \partial F / \partial v \cdot \partial u / \partial u';$$

e derivandola rispetto a u' ,

$$(14) \quad \partial F'/\partial u' = \partial F/\partial u \cdot \partial u/\partial u' + \partial F/\partial v \cdot \partial v/\partial u' = \partial F/\partial u \cdot \partial u/\partial u' + \partial F/\partial v \cdot \partial^2 u/\partial u' \partial u' \cdot v',$$

l'ultima uguaglianza essendo ancora dovuta alla (11). Nel linguaggio del calcolo tensoriale, le (11) affermano che le v si trasformano come componenti *controvarianti* di un vettore – e le (13) che le $\partial F/\partial v$ si trasformano come componenti *covarianti* (sempre di un vettore) – a fronte della trasformazione 2-diffeomorfa (10). In base alle (14), invece, le $\partial F/\partial u$ *non* si trasformano come componenti di un vettore (né covarianti né controvarianti), per la presenza del secondo addendo a 3° membro. Se poi t-deriviamo sostanzialmente le (13), similmente troviamo

$$(15) \quad d_t(\partial F'/\partial v') = d_t(\partial F/\partial v) \cdot \partial u/\partial u' + \partial F/\partial v \cdot \partial^2 u/\partial u' \partial u' \cdot v';$$

e quindi nemmeno le $d_t(\partial F/\partial v)$ si trasformano come componenti di un vettore per la presenza del secondo addendo a 2° membro. Tuttavia le (14) e (15) insieme mostrano che $[\partial F/\partial u - d_t(\partial F/\partial v)] \cdot \partial u/\partial u' = \partial F'/\partial u' - d_t(\partial F'/\partial v')$; vale a dire, le *differenze euleriane* $EF = \partial F/\partial u - d_t(\partial F/\partial u_t)$ si trasformano come componenti *covarianti* di un vettore a fronte della trasformazione (10). Esplicitando un indice α in u nelle sopraddette differenze, ritroviamo così per altra via gli operatori E_α di EL. In conclusione, il possibile annullarsi di $EF \equiv \langle E_1, \dots, E_n \rangle F$ permane attraverso alle trasformazioni (10), ed è pertanto corretto dire EF **vettore di EL**. Se infine le trasformazioni (10) sono del tipo quasi-identitario $u' = u + \varepsilon \eta$, dove $\eta \in [C_0^1(I)]^n$ (con $C_0^1(I) \equiv$ classe delle funzioni $C^1(I)$ il cui limite verso gli estremi di I è zero), ε è un fattore di piccolezza, e si richiede l'invarianza al 1° ordine in ε di $\mathcal{F}[u|I]$ per *qualsiasi* η in $[C_0^1(I)]^n$, allora le soluzioni di tale problema, se esistono $D^2(I)$, devono soddisfare al SDO di EL $EF = 0$ in I (e quindi sono anche $C^2(I)$). §

Poiché dal punto di vista formale siamo nell'ambito della meccanica analitica, converrà tornare al suo linguaggio, dicendo “lagrangiana” la F e denotandola L , e scrivendo al contempo q in luogo di u e $q_t \equiv r$ in luogo di v . Prima di proseguire, premettiamo una osservazione sulla EHJ introdotta nella S.sez. 6.4.1. In quella occasione, abbiamo assunto che la nuova hamiltoniana $K \equiv H + \partial W/\partial t$ (ove $H = H(t, q, \partial W/\partial q)$ e $W = W(t, q)$) fosse nulla. Questa condizione era sufficiente ai successivi sviluppi, perché garantiva che le Q e le P fossero costanti ($Q_t = 0$, $P_t = 0$); ma non strettamente necessaria, in quanto una K funzione del solo t avrebbe assicurato gli stessi effetti. Ciò promuove l'idea di una EHJ leggermente più generale, cioè del tipo

$$(16) \quad H(t, q, \partial W^*/\partial q) + \partial W^*/\partial t = \iota(t),$$

con ι funzione del solo t . Tuttavia la (16) non apre prospettive diverse da quelle della sua associata omogenea ($\iota \equiv 0$), perché se W è soluzione di tale associata omogenea, allora evidentemente $W^* = W + \iota$ è soluzione della (16). (Se fosse il caso, potremmo nominare la (16) come EHJ “impropria”.)

Ricordiamo ancora (cfr. S.sez. 6.3.1) che $Ed_tS \equiv 0$ in U per ogni funzione $S = S(t,q)$ di classe $C^2(U)$. Le lagrangiane $L = L(t,q,q_t \equiv r)$ e $L^* = L - d_tS$, come pure i corrispondenti integrali $\mathcal{F}[q] = \int_I L dt$ (per date $q = q(t)$) e $\mathcal{F}^*[q] = \int_I L^* dt$, si dicono **equivalenti**, perché lo sono le equazioni variazionali $\delta\mathcal{F} = 0$ e $\delta\mathcal{F}^* = 0$ che generano gli stessi SDO di EL e le stesse equazioni di Hamilton. Per quanto riguarda il secondo punto, basta notare che $\partial^2 L^* / \partial r \partial r = \partial^2 L / \partial r \partial r$; quindi le L^* e L soddisfano o non soddisfano *insieme* la condizione di Legendre, e gli argomenti che portano alle equazioni canoniche partendo da L^* o da L sono gli stessi. Naturalmente i momenti p associati a L e quelli, diciamoli p^* , associati a L^* sono diversi se $\partial S / \partial q \neq 0$, perché $p^* = \partial L^* / \partial r = \partial L / \partial r - \partial S / \partial q = p - \partial S / \partial q$. Quindi $r = \varphi(t,q,p) = \varphi(t,q,p^* + \partial S / \partial q) \equiv \varphi^*(t,q,p^*)$. Quanto alla nuova hamiltoniana H^* , deve essere $H^* =: p^* \cdot \dot{\varphi}^* - L^*$. Facendo i calcoli, abbiamo $\partial H^* / \partial p^* = \dot{\varphi}^* = r = q_t$ e $\partial H^* / \partial q = -\partial L^* / \partial q = -\partial L / \partial q + \partial d_t S / \partial q =$ (in forza del SDO di EL) $= -d_t(\partial L / \partial q_t) + \partial d_t S / \partial q = -p_t + d_t(\partial S / \partial q) = -p_t^*$, qed. Si noti che φ^* è l'inversa della $p^* = \partial L^* / \partial q_t \equiv \psi^*(t,q,r)$ rispetto a r . Un caso particolare di equivalenza è quello in cui $L^* - L$ è funzione della sola t . In tal caso potremo dire le due lagrangiane in oggetto **equivalenti banalmente**.

§2. *Teoria di Hamilton-Jacobi, figura completa di Caratheodory*. La EHJ è stata introdotta nella S.sez. 6.4.1 con una giustificazione a posteriori, mostrando cioè che la disponibilità di un integrale completo soddisfacente la (6.4.1, 2) permette di costruire le estremali del relativo problema variazionale. Cercheremo ora, invece, di illustrare un percorso logico (in buona parte sovrapponibile a quello storico) che, partendo da richieste ragionevoli, conduca alla EHJ. Sia U un aperto semplicemente connesso $\subset \mathbb{R}^{1+n}$, e in esso, consideriamo una congruenza Σ (famiglia ad un parametro σ) di n -superfici che “riempia semplicemente” U (\equiv per ogni punto di U passa una e una sola superficie di Σ), descritta dalla

$$(17) \quad S = S(t,q) = \sigma,$$

dove S è funzione di $CdC 2$ in U e il parametro σ varia corrispondentemente in un intervallo aperto (σ_1, σ_2) . Beninteso, S è supposta funzione sostanziale dei suoi argomenti, cioè il $(1+n)$ -vettore $(\partial/\partial t, \partial/\partial q)S$ è supposto $\neq 0$.

Consideriamo inoltre una congruenza Λ (famiglia a n parametri $\gamma \equiv (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$) di curve di U descritte dalle

$$(18) \quad q = q(t,\gamma),$$

di $CdC 2$, sotto la condizione

$$(19) \quad \det\{\partial(q)/\partial(\gamma)\} \neq 0$$

(q essendo funzioni sostanziali di t). Una prima ipotesi-richiasta (I) circa Σ e Λ è che le curve di Λ siano trasversali alle superfici di Σ , cioè che (essendo $r \equiv q_t$)

$$(20) \quad \partial S/\partial t + \partial S/\partial q \cdot r \neq 0.$$

In questa, si intende che le (t, γ) in r siano espresse come funzioni invertibili di $(t, q) \in U$, secondo quanto ci garantisce la (19). Sia $L = L(t, q, r)$ la lagrangiana del problema. Sia ora $d\mathcal{F}[q, t] = L dt$ (per le date q, r lungo una curva di Λ alla sua intersezione con la $S = \sigma$). Una seconda richiesta (II) è che $d\mathcal{F}$ non vari passando alla superficie adiacente $S = \sigma + d\sigma$. Poiché le sole r sono libere, questo può ottenersi imponendo che

$$(21) \quad 0 = \partial/\partial r(d\mathcal{F}/d\sigma) = \partial/\partial r[(d\mathcal{F}/dt)/(d\sigma/dt)] = \partial/\partial r(L/d_t S).$$

Si noti che la $d_t S$ a denominatore è $\neq 0$ in forza della (20). La (21) è una condizione necessaria cui le r devono soddisfare. Delle r che soddisfano la (21) si dice che rappresentano un **n-vettore geodetico associato alla congruenza** Σ . La $\partial/\partial r(L/d_t S) = 0$ si trascrive equivalentemente come

$$(22) \quad \partial L/\partial r = (L/d_t S)\partial/\partial r(d_t S) = (L/d_t S)\partial S/\partial q.$$

Questa non è ancora utilizzabile per i nostri scopi. Richiederemo allora (III) che la congruenza Σ sia tale da assicurare la costanza, sulla generica n -superficie $S = \sigma$, di $L/d_t S$, cioè che esista una funzione $g(\sigma)$ definita, $\neq 0$ e C^1 in (σ_1, σ_2) per la quale $L/d_t S = g(S)$. Quindi la (22) diventa

$$(23) \quad \partial L/\partial r = g(S)\partial S/\partial q.$$

Ora, se G è una primitiva di g (cioè se $d_\sigma G = g$), il passare da σ a $\sigma^+ =: G(\sigma)$ comporta che $g\partial S/\partial q = \partial S^+/\partial q$ (con $S^+ =: G(S)$), e dunque

$$(24) \quad \partial L/\partial r = \partial S^+/\partial q.$$

A questo punto non solo la “distanza geodetica” $d\mathcal{F}$ tra $S^+ = \sigma^+$ e $S^+ = \sigma^+ + d\sigma^+$ è indipendente dal punto della superficie, ma anche da σ^+ , e la congruenza Σ è dunque costituita da superfici **geodeticamente equidistanti**. In conclusione, se le due congruenze Σ e Λ soddisfano le richieste (I, II, III), potremo scrivere

$$(25) \quad L = \partial S^+/\partial t + \partial S^+/\partial q \cdot r.$$

Sotto la condizione di Legendre (7), $\det\{\partial^2 L/\partial r \partial r\} \neq 0$ in U , le $\partial L/\partial r = p$ sono invertibili rispetto alle r , fornendo $r = \varphi(t, q, p)$; e la (25) diventa (scrivendo esplicitamente tutte le dipendenze)

$$(25') \quad L(t, q, \varphi(t, q, \partial S^+/\partial q(t, q))) = \partial S^+/\partial t(t, q) + \partial S^+/\partial q(t, q) \cdot \varphi(t, q, \partial S^+/\partial q(t, q));$$

vale a dire, attesa la definizione della hamiltoniana H ,

$$(25'') \quad \partial S^+/\partial t(t, q) + H(t, q, \partial S^+/\partial q) = 0,$$

che è per l'appunto la EHJ nella S^+ . Disponendo di una soluzione S^+ le r sono determinate come funzioni di (t, q) secondo le

$$(26) \quad q_t = r = \varphi(t, q, \partial S^+/\partial q(t, q)) \equiv f(t, q);$$

queste formano un SDO del 1° ordine, in forma normale, di n equazioni nelle n incognite q , per il quale sono immediatamente disponibili (blande) condizioni di esistenza e unicità, che daremo per

soddisfatte. In conclusione, non solo le r devono soddisfare la (21); ma se è così, esse sono anche unicamente determinate, e con esse sono determinate le $q = q(t)$ come soluzioni delle (26).

Inoltre, se da una parte la (26) consegue dalle richieste (I,II,III) imposte alle due congruenze Σ e Λ , vale anche il contrario: cioè la disponibilità di una soluzione di classe $C^2(U)$ della (25'') permette di costruire congruenze con le proprietà specificate. Infatti, sia S^+ una soluzione della (25''), e definiamo le $p =: \partial S^+ / \partial q$ come funzioni di (q,t) . Valendo la condizione di Legendre su L , possiamo scrivere $r = \varphi(t,q, \partial S^+ / \partial q(t,q)) \equiv f(t,q)$. Queste definiscono una congruenza Λ di curve. Sia P_1 un punto della $S^+ = \sigma^+$; lungo la curva C_1 della congruenza Λ passante per P_1 , calcoliamo $\int_{P_1}^P L(t,q,f(t,q))dt = - \int_{P_1}^P [H(t,q, \partial S^+ / \partial q(t,q)) - \partial S^+ / \partial q \cdot f(t,q)]dt = \int_{P_1}^P [\partial S^+ / \partial t + \partial S^+ / \partial q \cdot f(t,q)]dt = \int_{P_1}^P d_t S^+ dt = S^+(P) - S^+(P_1) = \sigma^+ - \sigma^+_1$. Il luogo dei punti P per cui $S^+(P)$ ha un valore σ^+ prefissato (non troppo lontano da σ^+_1) definisce una nuova superficie la cui distanza geodetica dalla prima (quella passante per P_1) è $\sigma^+ - \sigma^+_1$: si è così generata una congruenza Σ di superfici geodeticamente equidistanti, perché ad uguali incrementi del parametro σ^+ corrispondono uguali incrementi della distanza geodetica $\int_{P_1}^P L(t,q,f(t,q))dt$, qed. Una coppia di congruenze (Σ, Λ) come quella che abbiamo descritto (per la data L) è detta da Caratheodory una **figura completa** (vollständige Figur) del problema variazionale $\int L dt = \text{staz!}$ in U . Nel seguito, scriveremo S^+ semplicemente come S . In base a quanto precede, possiamo affermare che

T1. «Le (Σ, Λ) costituiscono una figura completa se e solo se S è soluzione della (25).» §

Per una L regolare in $U \times R^n$, ricordiamo brevemente come si sviluppa il formalismo canonico standard. Le

$$(27_1) \quad p = \partial L / \partial v(t,q,r) \equiv \psi(t,q,r)$$

sono per ipotesi IG rispetto alle r secondo certe

$$(27_2) \quad r = \varphi(t,u,p),$$

in $U \times R^n$ (cioè, ψ e φ sono inverse l'una dell'altra). Si può allora trasformare il SDO di EL nell'equivalente SDO canonico: le q e le p soddisfano alle equazioni canoniche associate all'hamiltoniana L -coniugata di L . Posto

$$(28) \quad H = H(t,q,p) =: p \cdot \varphi(t,q,p) - L(t,q, \varphi(t,q,p))$$

per (t,q,p) in $U \times R^n$, o equivalentemente

$$(29) \quad H(t,q, \psi(t,q,r)) =: \psi(t,q,r) \cdot r - L(t,q,r)$$

per (t,q,r) in $U \times R^n$, le equazioni canoniche

$$(30_1) \quad q_t = \partial H / \partial p,$$

$$(30_2) \quad p_t = - \partial H / \partial q,$$

sono equivalenti alle $EL = 0$, fornendo in particolare le stesse q sotto condizioni iniziali corrispondenti. In realtà ciò ha veramente senso soltanto per le (30₂) (che sono le vere “equazioni” canoniche), perché le (30₁) sono una conseguenza automatica delle definizioni di H e di p (“identità” canoniche). Infatti dalla (28) si ha $\partial H/\partial p = \varphi + (p - \partial L/\partial r) \cdot \partial \varphi/\partial p \equiv \varphi + (p - \psi) \cdot \partial \varphi/\partial p = \varphi = r$ in forza delle (27). Dalla (28) seguono poi le identità:

$$(31_{t,q}) \quad \partial H/\partial(t,q) = p \cdot \partial \varphi/\partial(t,q) - [\partial L/\partial(t,q) + \partial L/\partial r \cdot \partial \varphi/\partial(t,q)] = -\partial L/\partial(t,q);$$

quindi $EL = \partial L/\partial q - p_t = -(p_t + \partial H/\partial q)$ e le $EL = 0$ equivalgono alle (30₂). Infine le (30) e la (31_t) implicano che $d_t H = \partial H/\partial t + \partial H/\partial q \cdot q_t + \partial H/\partial p \cdot p_t = -\partial L/\partial t$: se L è indipendente da t , H è un integrale primo delle (30) o delle equivalenti $EL = 0$ (un fatto, quest’ultimo, provabile indipendentemente e che abbiamo già introdotto come “identità di Beltrami”).

§3. *Integrale indipendente di Hilbert, funzione di eccesso di Weierstrass, campi di Mayer.* Le $2n$ funzioni a n parametri $\gamma \equiv \langle \gamma^1, \dots, \gamma^n \rangle$: $q = q(t, \gamma)$, $p = p(t, \gamma)$, per ipotesi di CdC 2, si dicono costituire un **campo rispetto alla lagrangiana** L se (i) le $q = q(t, \gamma)$ sono globalmente invertibili in $\gamma = \gamma(t, q)$, quindi se $\det\{\partial(q)/\partial(\gamma)\} \neq 0$, e se (ii) le $q_t \equiv \partial q/\partial t = \partial q/\partial t(t, \gamma)$ e le $p(t, \gamma)$ sono legate dalle (27₁) o dalle inverse (27₂). Naturalmente non è detto che un campo rispetto a L sia canonico, cioè che soddisfi alle $\partial p/\partial t = -\partial H/\partial q$ (oltre alle $\partial q/\partial t = \partial H/\partial p$) per l’hamiltoniana H L -coniugata di L ; ovvero, che $p = \partial S/\partial q$ implichi le $\partial p/\partial t = -\partial H/\partial q$ per una soluzione S della (25).

Un campo come sopra definito si dice **appartenere alla congruenza** Σ di superfici $S = S(t, q) = \sigma$, di CdC 2, se

$$(32) \quad p(t, \gamma) = \partial S/\partial q(t, q(t, \gamma))$$

identicamente per (t, γ) in $V \subset \mathbb{R}^{1+n}$, immagine di U sotto le $q = q(t, \gamma) \leftrightarrow \gamma = \gamma(t, q)$. L’esistenza di una S soddisfacente alle (32) presuppone che siano soddisfatte certe condizioni di integrabilità sul campo (q, p) . Precisamente, se poniamo $S^\wedge = S^\wedge(t, \gamma) =: S(t, q(t, \gamma))$, abbiamo $\partial S^\wedge/\partial \gamma = \partial S/\partial q \cdot \partial q/\partial \gamma = p \cdot \partial q/\partial \gamma$. Indicizzando (indici italici) per maggior chiarezza i parametri γ , abbiamo dunque

$$(33) \quad \partial^2 S^\wedge/\partial \gamma_i \partial \gamma_k = p \cdot \partial^2 q/\partial \gamma_i \partial \gamma_k + \partial q/\partial \gamma_k \cdot \partial p/\partial \gamma_i = p \cdot \partial^2 q/\partial \gamma_k \partial \gamma_i + \partial q/\partial \gamma_i \cdot \partial p/\partial \gamma_k.$$

Le differenze $\partial q/\partial \gamma_k \cdot \partial p/\partial \gamma_i - \partial q/\partial \gamma_i \cdot \partial p/\partial \gamma_k$, delle quali le (33) richiedono l’annullarsi, si riconoscono subito come le parentesi di Lagrange $\{\gamma_k, \gamma_i\}$ (v. S.sez. 6.3.4) e la

$$(34) \quad \{\gamma_k, \gamma_i\} = 0$$

$\forall (k, i = 1 \div n)$ è la cercata condizione di integrabilità.

All’inverso, se i campi (q, p) soddisfano le (34), allora essi appartengono ad una congruenza di superfici Σ . Infatti la condizione in ipotesi può scriversi $\partial/\partial \gamma_k (p \cdot \partial q/\partial \gamma_i) = \partial/\partial \gamma_i (p \cdot \partial q/\partial \gamma_k)$. Poiché il dominio U delle (t, q) è semplicemente connesso, lo è il dominio V delle immagini (t, γ) in biiezione con le (t, q) . Questo presuppone l’esistenza di una funzione $\kappa = \kappa(t, \gamma)$ per cui

$p \cdot \partial q / \partial \gamma_i = \partial \kappa / \partial \gamma_i$. Se poniamo $S = S(t, q) =: \kappa(t, \gamma(t, q))$, abbiamo $\partial S / \partial q = \partial \kappa / \partial \gamma \cdot \partial \gamma / \partial q$, e dunque $(p - \partial S / \partial q) \cdot \partial q / \partial \gamma = 0$; ma la matrice $\partial q / \partial \gamma$ è per ipotesi non singolare, e seguono immediatamente le (32). In definitiva le (34) sono condizioni necessarie e sufficienti affinché i campi (q, p) appartengano ad una congruenza di superfici Σ . Se poi i campi (q, p) appartenenti a Σ sono *canonici* rispetto alla hamiltoniana $H = H(t, q, p)$, le superfici $S(t, q) = \sigma$ della congruenza Σ sono soluzioni di una EHJ impropria con hamiltoniana H . Infatti dalle $p = \partial S / \partial q$ e dalle $p_t = -\partial H / \partial q$ segue, con procedura ormai familiare, $-\partial H / \partial q = \partial^2 S / \partial t \partial q + \partial^2 S / \partial q \partial q \cdot \partial H / \partial p$ (dove le $\partial H / \partial p$ si sono sostituite alle q_t), cioè la $\partial / \partial q [H(t, q, \partial S / \partial q) + \partial S / \partial t] = 0$, che è appunto una EHJ impropria. Questa si riduce infine alla EHJ in S se alle $p = \partial S / \partial q$ si aggiunge la $L = d_t S$ con le solite $f(t, q) = \varphi(t, q, \partial S / \partial q)$.

Sia ora C una curva di CdC 1 $q = q(t)$ di estremi $P_1 = (t_1, q_1)$ e $P_2 = (t_2 > t_1, q_2)$ su $S = \sigma_1$ e rispettivamente su $S = \sigma_2 \neq \sigma_1$ (diciamo $\sigma_2 > \sigma_1$) situati su una estrema \underline{C} (rispetto a L) di equazione $\underline{q} = \underline{q}(t)$. Evidentemente l'integrale lungo C di dS non dipende da C (valendo $\sigma_2 - \sigma_1$). Il suo valore può scriversi come $J = \int_C [\partial S / \partial t(t, q(t)) + \partial S / \partial q(t, q(t)) \cdot q_t(t)] dt$, dove q_t è tangente a C ; o con scrittura più compatta, sottintendendo la dipendenza da t ovunque essa occorre, come $J = \int_C [\partial S / \partial t(q) + \partial S / \partial q(q) \cdot q_t] dt$. Se le superfici S sono geodeticamente equidistanti rispetto a L , vale per S la EHJ, e quindi mediante quest'ultima possiamo sostituire $\partial S / \partial t(q)$ come $-H(q, \partial S / \partial q)$, nell'integranda in J , ottenendo

$$(35) \quad J = \int_C [-H(q, \partial S / \partial q(q)) + \partial S / \partial t(q) \cdot q_t] dt.$$

Qui l'integranda può trasformarsi esprimendo $-H(q, \partial S / \partial q(q))$ come $L(q, f(q)) - f(q) \cdot \partial S / \partial q(q)$, dove $f(q) (\equiv f(t, q))$ sta per $\varphi(q, \partial S / \partial q)$. Si vede così che

$$(36) \quad J = \int_C [L(q, f(q)) + \partial S / \partial q(q) \cdot (q_t - f(q))] dt.$$

In questa forma, J si dice **integrale indipendente di Hilbert** (fu infatti Hilbert a rilevarne l'invarianza rispetto alla scelta di C tra P_1 e P_2). Naturalmente lo stesso valore si deve ottenere integrando in particolare lungo \underline{C} tra gli stessi P_1 e P_2 , quando q diventa \underline{q} e quindi q_t diventa $\underline{q}_t = f(\underline{q})$. Si ottiene così l'importante relazione

$$(37) \quad J = \int_C [L(q, f(q)) + \partial S / \partial q(q) \cdot (q_t - f(q))] dt = \int_{\underline{C}} L(\underline{q}, f(\underline{q})) dt.$$

Questa può ulteriormente trasformarsi utilizzando la formula del valor medio di 2° grado, ovvero la $h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x-x_0) + h''(\xi)(x-x_0)^2/2$, dove h è funzione di CdC 2 nell'intervallo (a, b) al quale appartengono x e x_0 , e ξ è un conveniente punto di (a, b) (ne esiste almeno uno). Applicando questa formula al nostro caso, otteniamo

$$(38) \quad L(q, q_t) = L(q, f(q)) + \partial L / \partial q_t(q, f(q)) \cdot (q_t - f(q)) + (1/2) \partial^2 L / \partial q_t \partial q_t(q, \phi) : (q_t - f(q))(q_t - f(q)),$$

dove ϕ è un conveniente valore del terzo argomento di $\partial^2 L / \partial q_t \partial q_t$ interno al segmento di estremi q_t e $f(q)$. La somma dei due primi addendi a 2° membro della (38) è l'integranda nell'integrale di Hilbert (36) in quanto $\partial L / \partial q_t (f(q)) = \partial S / \partial q(q)$, e la (37) può essere quindi scritta, restaurando ormai per completezza le dipendenze da (t, q) , nella forma

$$(39) \quad \int_C L(t, q, q_t) dt - \int_C E(t, q, f(t, q), q_t) dt = \int_{\underline{C}} L(t, \underline{q}, f(t, \underline{q})) dt,$$

ove con $E(t, q, \zeta, \eta)$ si è denotato l'ultimo termine a 2° membro della (38), con un ζ in luogo di $f(t, q)$ ed un η in luogo del generico q_t ; vale a dire, sottintendendo la dipendenza dalle variabili passive (t, q) , e scrivendo ξ per il conveniente vettore del segmento (ζ, η) :

$$(40) \quad E(\zeta, \eta) =: (1/2) \partial^2 L / \partial q_t \partial q_t |_{\xi} \cdot (\eta - \zeta)(\eta - \zeta) = L(\eta) - L(\zeta) - \partial L / \partial q_t |_{\zeta} \cdot (\eta - \zeta).$$

Si rammenti che nella (39) $q = q(t)$, $q_t = q_t(t)$ (lungo C), mentre $\underline{q} = \underline{q}(t)$ è soluzione del SDO $q_t = f(t, q)$. La funzione E dei $1 + 3n$ argomenti (t, q, ζ, η) , si dice **funzione di eccesso (di Weierstrass)**. La denominazione si giustifica in quanto, se $\int_C L(t, q, q_t)$ è minimo per $C = \underline{C}$, il primo integrale a 1° membro della (39) è $>$ dell'integrale a 2° membro; quindi l'integrale $\int_C E(t, q, q_t, f(t, q)) dt$ è > 0 , e dà l'“eccesso” del primo integrale sul secondo. Questo prova il seguente T2. (“teorema di sufficienza” di Weierstrass): «se $E(t, q, \zeta, \eta) > 0$ [< 0] $\forall (t, q) \in U$ e ogni (ζ, η) con $\zeta \neq \eta$ (ma non troppo), allora l'integrale di azione ha un minimo [massimo] all'estremale.»

Vale anche un analogo “teorema di necessità” di Weierstrass che per brevità non dimostriamo:

T3. «se l'integrale di azione ha un minimo [massimo] per $C = \underline{C}$, allora $E(t, q, \zeta, \eta) \geq 0$ [≤ 0] per ogni (t, q, ζ) sull'estremale \underline{C} e ogni η (non troppo discosto da ζ).»

Torniamo infine all'integrale (35), in cui alle $\partial S / \partial q$ si sostituiscono le $p = p(t, \gamma)$ di un generico campo, e alle q le associate $q(t, \gamma)$, quindi alle q_t le $\partial q / \partial t(t, \gamma)$. In questo caso l'integrale non è indipendente dalla curva C , perché il campo non è stato supposto canonico. Conviene scrivere l'integrale (35) nella forma $\int_C [p \cdot dq - H(t, q, p) dt]$, in cui si intende che $(q, p) = (q, p)(t, \gamma)$, e quindi che le dq sono $\partial q / \partial t dt + \partial q / \partial \gamma^i d\gamma^i$, tangenti alla curva C ; o più brevemente, come $(\dagger) \int_C [A dt + B \cdot d\gamma]$, in cui $A =: p \cdot \partial q / \partial t - H(t, q, p)$ ($\equiv A(t, \gamma)$ dopo le sostituzioni di (q, p) con $(q, p)(t, \gamma)$) e $B \equiv B_{1 \leq i \leq n} =: p \cdot \partial q / \partial \gamma^i$ ($\equiv B(t, \gamma)$ dopo le stesse sostituzioni). Richiediamo che l'integrale (\dagger) non dipenda da C . Ci si chiede come si rifletta questa richiesta su A e B . Ricordando che U , e quindi anche la sua immagine V attraverso le $\gamma = \gamma(t, q)$, è semplicemente connesso, l'indipendenza in oggetto equivale alle

$$(41_1) \quad \partial A / \partial \gamma^i = \partial B_i / \partial t$$

$$(41_2) \quad \partial B_i / \partial \gamma^j = \partial B_j / \partial \gamma^i$$

$\forall(i,j = 1, \dots, n)$. A queste condizioni esiste una funzione $\sigma = \sigma(t,\gamma)$ per cui $A = \partial\sigma/\partial t$ e $B_i = \partial\sigma/\partial\gamma_i$. Posto allora $S = S(t,q) =: \sigma(t,\gamma(t,q))$ (si ricordi che le $q = q(t,\gamma)$ sono IG rispetto alle γ), o equivalentemente $S(t,q(t,\gamma)) = \sigma(t,\gamma)$, abbiamo $\partial\sigma/\partial\gamma^i = \partial S/\partial q \cdot \partial q/\partial\gamma^i = B_i = p \cdot \partial q/\partial\gamma^i$, e quindi $p = \partial S/\partial q$ perché la matrice $\partial q/\partial\gamma$ è non singolare. Similmente $\partial\sigma/\partial t = \partial S/\partial t + \partial S/\partial q \cdot \partial q/\partial t = A = -H + p \cdot \partial q/\partial t$, e per il precedente risultato $\partial S/\partial q = p$, $\partial S/\partial t = -H = 0$. In definitiva S soddisfa l'equazione di H.J. standard, e quindi il campo $(q,p) = (q,p)(t,\gamma)$ è canonico. Campi $(q,p) = (q,p)(t,\gamma)$ per i quali l'integrale $\int_C [p \cdot dq - H(t,q,p)dt]$ è indipendente da C (sotto l'usuale condizione che U sia semplicemente connesso) si dicono **campi di Mayer**.³ Evidentemente un campo canonico è un campo di Mayer; ma abbiamo appena dimostrato che vale anche il contrario, e concludiamo che

T4. «Un campo di Mayer è un campo canonico appartenente ad una congruenza di superfici geodeticamente equidistanti (rispetto alla lagrangiana di riferimento), e viceversa.» §

§4. *CDV multidimensionale di Weyl*. Il CDV unidim di cui abbiamo illustrato i punti salienti si può estendere al CDV multidim *in più di un modo*, e questo rende più complicata una sua analisi generale. La ragione è nel fatto che nel caso multidim vi sono più possibilità (e non una sola come nel caso unidim) di costruire (densità di) lagrangiane equivalenti. Qui ci limiteremo ad un rapido esame **della teoria di Weyl**,⁴ che procede assai semplicemente a questa generalizzazione.

Punto di partenza è quello di passare dalla densità lagrangiana del 1° ordine $\mathcal{L}(x,u,v)$ (ove $x \equiv x^{1 \leq i \leq m}$, $m \geq 2$, \mathcal{L} è di CdC 2 in $U \times \mathbb{R}^{mn}$, e U è un aperto di \mathbb{R}^{m+n} la cui x -proiezione include il dominio Ω dell'integrale di base) ad una densità equivalente \mathcal{L}^* togliendole una divergenza ($\partial^* \equiv$ derivata sostanziale) del tipo $\partial^* S^i/\partial x^i$, dove $S^{1 \leq i \leq m}$ sono funzioni di CdC 2 di (x,u) in U . Abbiamo perciò $\partial^* S^i/\partial x^i = \partial S^i/\partial x^i + \partial S^i/\partial u^\alpha v^\alpha_i$, v^α_i essendo al solito la derivata parziale di u^α rispetto a x^i . Per il teorema di GO, l'integrale $\int_\Omega \partial^* S^i/\partial x^i d(x)$ dipende soltanto dai valori-limite (dall'interno) delle S^i sul contorno $\partial\Omega$; quindi, se le u sono fissate su $\partial\Omega$ (valori-limite), l'integrale non dipende dai valori delle u *dentro* Ω . Ricordiamo che x ha un soprascritto latino variabile tra 1 e $m > 1$, u ha un soprascritto greco variabile tra 1 e n , e v ha un soprascritto greco e un sottoscritto latino (per chiarezza, in alcune occasioni converrà ricorrere alla notazione indiciale esplicita).

Il problema consiste nel determinare una funzione (di CdC 2) – diciamola ancora f – di (x,u) a due indici come v , e m funzioni S^i di (x,u) come sopra descritte, per cui

$$(42) \quad \mathcal{L}^*(x,u,f(x,u)) = 0$$

in U ; e

³ A. Mayer, "Über den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie des Maximums und Minimums der einfachen Integrale", Sächsischer Berichte, LVII, 49 (1905).

⁴ H. Weyl, "Geodesics fields in the calculus of variations for multiple integrals", Ann. Math. **36**, 607 (1935).

$$(43) \quad \mathcal{L}^*(x,u,g(x,u)) > 0$$

per ogni funzione di CdC 2 g di (x,u) a due indici come f e da essa distinta (ma non troppo), sempre in U. Esplicitamente, la (42) si scrive

$$(42') \quad \mathcal{L}(x,u,f(x,u)) - [\partial S^i / \partial x^i(x,u) + \partial S^i / \partial u^\alpha(x,u) f^\alpha_i(x,u)] = 0,$$

(dove si deve sommare sugli indici ripetuti); e similmente si scrive la (43) con g in luogo di f e > in luogo di =,

$$(43') \quad \mathcal{L}(x,u,g(x,u)) - [\partial S^i / \partial x^i(x,u) + \partial S^i / \partial u^\alpha(x,u) g^\alpha_i(x,u)] > 0.$$

Unitamente alla (42'), quest'ultima implica che ($\forall i = 1 \div m, \forall \alpha = 1 \div n$)

$$(44) \quad \partial \mathcal{L} / \partial v^\alpha_i(x,u,f(x,u)) - \partial S^i / \partial u^\alpha(x,u) = 0.$$

Eliminando la $\partial S^i / \partial x^i$ mediante la (42') e le $\partial S^i / \partial u^\alpha$ mediante la (44) nella (43'), e risparmiandoci ormai di esplicitare la dipendenza da (x,u), riscriveremo la (43') come

$$(45) \quad \mathcal{L}(g) - [\mathcal{L}(f) + \partial \mathcal{L} / \partial v^\alpha_i(f)(g^\alpha_i - f^\alpha_i)] > 0.$$

Il 1° membro della (45) è la versione multidim della **funzione di eccesso nella teoria di Weyl** (nulla sse $g = f$ e altrimenti > 0 se l'integrale di azione è minimo all'estremale), diciamo $E(g,f) \equiv E(x,u,g(x,u),f(x,u))$, ora dipendente da $m + n + 2mn$ argomenti (che si riducono come devono a $1 + 3n$ se $m = 1$).

Passiamo ora alla generalizzazione della nozione di **integrale indipendente nella teoria di Weyl**. Se $u = u(x)$ è data arbitrariamente in $C^2(\Omega)$, ma con valori-limite *fissati sul contorno* $\partial\Omega$, l'integrale rispetto a (x) di $\partial^* S^i / \partial x^i \equiv \partial S^i / \partial x^i + \partial S^i / \partial u^\alpha \partial u^\alpha / \partial x^i$ su Ω è con ogni evidenza indipendente da come si sceglie u *dentro* Ω . Se allora eliminiamo al solito modo la $\partial S^i / \partial x^i$ mediante la (42') e le $\partial S^i / \partial u^\alpha$ mediante le (44), l'integranda in oggetto si scrive $\mathcal{L}(x,u,\partial u / \partial x) - E(x,u,\partial u / \partial x, f)$, in cui $u = u(x)$ e $f = f(x,u)$. Se in particolare le u sono soluzioni del SDP $\partial u / \partial x = f(x,u)$, che scriveremo $\underline{u}(x)$, la corrispondente funzione di eccesso è nulla, e l'integranda si riduce a $\mathcal{L}(x,\underline{u},\partial \underline{u} / \partial x)$. In definitiva, abbiamo

$$(46) \quad \int_{\Omega} \mathcal{L}(x,u,\partial u / \partial x) d(x) - \int_{\Omega} E(x,u,\partial u / \partial x, f(x,u)) d(x) = \int_{\Omega} \mathcal{L}(x,\underline{u},f(x,\underline{u})) d(x),$$

dove $u = u(x)$ e $\underline{u} = \underline{u}(x)$. Questa generalizza la (39) al caso multidim.

Non sarebbe difficile, a questo punto, derivare dalla (46) un **teorema di sufficienza**, che ci limitiamo ad enunciare:

T5. «Se $\underline{u} = \underline{u}(x)$ è un integrale di $\partial u / \partial x = f(x,u)$ in Ω sotto prefissate condizioni su $\partial\Omega$, e $E(x,u,\partial u / \partial x, f(x,u)) > 0$ per ogni $u = u(x)$ distinto (ma non troppo) da $\underline{u}(x)$ e soddisfacente alle stesse condizioni su $\partial\Omega$, allora il funzionale di azione $\int_{\Omega} \mathcal{L}(x,u,\partial u / \partial x) d(x)$ ha un minimo per $u = \underline{u}$.» La riduzione di questo teorema al caso unidim è immediata.

Resta da illustrare come si generalizza il formalismo canonico nella teoria di Weyl. Innanzitutto deve essere soddisfatta una condizione di Legendre, che è ora $\det\{\partial^2 \mathcal{L}/\partial v^\alpha_i \partial v^\beta_j\} \neq 0$ per la (nm)-matrice tra le $\{ \}$. Introdotti poi i momenti canonici come $\pi^\alpha_i =: \partial \mathcal{L}/\partial v^\alpha_i(x,u,v)$, per ipotesi queste relazioni sono IG rispetto alle v secondo certe $v^\alpha_i \equiv \partial u^\alpha/\partial x^i = \varphi^\alpha_i(x,u,\pi)$. Si definisce allora una densità hamiltoniana \mathcal{H} associata a \mathcal{L} generalizzando la (28), cioè $\mathcal{H}(x,u,p) = \pi \cdot \varphi(x,u,\pi) - \mathcal{L}(x,u,\varphi(x,u,\pi))$, dove $\pi \cdot \varphi$ sta ora per $\pi^\alpha_i \varphi^\alpha_i$. Con le solite procedure (derivazione di $\mathcal{H}(x,u,p)$ rispetto a π^α_i , u^α e x^i) si ottengono versioni generalizzate delle (27₁) e delle (31) (le prime sono le identità canoniche, o equazioni canoniche della prima serie) per le u , $\partial u^\alpha/\partial x^i = \partial \mathcal{H}/\partial \pi^\alpha_i$. Mediante le (44) si hanno i momenti canonici espressi come $\pi^\alpha_i = \partial S^i/\partial u^\alpha$, nei cui primi membri $\partial \mathcal{L}/\partial v^\alpha_i(x,u,v)$ alle v si devono sostituire i gradienti geodetici $f =: f(x,u) = \varphi(x,u, \partial S/\partial x(x,u))$. La (42') fornisce la $\partial S^i/\partial x^i$ come $\mathcal{L}(f) - \partial \mathcal{L}/\partial v^\alpha_i(f) f^\alpha_i$, e si conclude con la **versione multidim** (alla Weyl) **della equazione di H.J.**:

$$(47) \quad \partial S^i/\partial x^i(x,u) + \mathcal{H}(x,u, \partial S/\partial x) = 0.$$

Le equazioni canoniche (per le π) si ottengono derivando sostanzialmente questa (47) rispetto alle u^α , derivando sostanzialmente le $\pi^\alpha_i = \partial S^i/\partial u^\alpha$ rispetto alle x^i e sommando su i , e infine confrontando i risultati alla luce delle identità canoniche. Come era da attendersi, si ottiene così $\partial^* \pi^\alpha_i/\partial x^i = -\partial \mathcal{H}/\partial u^\alpha$. In forza della definizione dei momenti canonici e delle $\partial \mathcal{L}/\partial u^\alpha + \partial \mathcal{H}/\partial u^\alpha = 0$, le equazioni della 2^a serie si scrivono anche come $\partial \mathcal{L}/\partial u^\alpha - \partial^*/\partial x^i(\partial \mathcal{L}/\partial v^\alpha_i) = 0$, ovvero come equazioni di EL multidim.

Come si vede, la teoria multidim di Weyl è una generalizzazione piuttosto semplice della teoria unidim. Ciò non si può ripetere per la teoria generale, che parte dall'uso *del più generale integrale delle equazioni di EL* per costruire densità lagrangiane equivalenti.⁵ §

7.2.2) SUL TEOREMA DI NOETHER

Noether (Amalia detta Emmy⁶, Erlangen Germ. 1882, Bryn Mawr Pa U.S. 1935) dedicò una piccola parte dei suoi interessi matematici – che erano centrati sull'algebra assiomatica, della

⁵ Un resoconto abbastanza dettagliato di questa teoria generale, di cui la teoria di Weyl è il caso più semplice, si trova ad esempio nel trattato di H. Rund, Chpt. 4, §4, vedi Bibl. Gen. A).

⁶ Emmy era il secondo nome della Noether, e non corruzione vezzeggiativa del primo come spesso si crede. L'importanza di questa donna nella storia della matematica invita ad una breve digressione "di genere", di natura psico-sociologica. Figlia d'arte (il padre Max fu un non trascurabile studioso di geometria algebrica, docente a Gottinga), la sua vera statura matematica è in pratica conosciuta soltanto dagli specialisti di algebra astratta, e in particolare dai suoi molti allievi, o ormai dagli allievi dei suoi allievi. Tuttavia il suo nome è discretamente popolare anche tra i fisici teorici, a causa del contributo (in fondo non di primo piano rispetto al complesso della sua opera) di cui

quale fu una caposcuola indiscussa – al calcolo delle variazioni. Il suo lavoro ⁷ in questo settore dell'Analisi, sollecitata da Hilbert (di lei autorevolissimo sostenitore e mentore a Gottinga), consiste in un teorema che col passare del tempo doveva divenire popolare tra i fisici teorici, probabilmente al di là di quanto l'autrice potesse immaginare quando lo formulò. La versione unidim del teorema di Noether è una specializzazione immediata di quella multidim che esporremo ora, e per questa ragione abbiamo preferito non trattarne nel Cap. 6, come sarebbe stato possibile. Per meglio inquadrare il problema, è tuttavia utile muovere proprio da essa, o addirittura dal caso-base in cui oltre che un'unica variabile indipendente ($m = 1$) vi è anche un'unica variabile dipendente ($n = 1$).

Partiremo dunque dal funzionale $\mathcal{F}[u|\Omega]$ della (6.1.1, 1) con $p = 1$, che riproduciamo qui per miglior convenienza del lettore

$$(1) \quad \mathcal{F}[u|\Omega] = \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx.$$

In questa, Ω è un intervallo aperto (reale), e al solito, v è la derivata di u rispetto a x , F è supposta di CdC 2 nei suoi tre argomenti $(x, u) \in U$, $v \in \mathbb{R}$, e U è un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 la cui proiezione sull'asse x include Ω . Seguendo un'idea che era stata da tempo oggetto di attenzione, ⁸ Noether pone anzitutto sullo stesso piano le (piccole) variazioni di $\mathcal{F}[u|\Omega]$ dovute a variazioni della u (alle quali ci siamo finora limitati) e quelle dovute a variazioni della x , che ovviamente trasformano Ω . In altre parole, la coppia (ordinata) $\langle x, u \rangle \in U$ è supposta soggetta ad un 2-diffeomorfismo infinitesimo (per $\varepsilon \rightarrow 0$) del tipo

$$(2) \quad \langle x', u' \rangle = \langle x, u \rangle + \varepsilon \langle \varphi, \psi \rangle(x, u),$$

alla prossima nota, e dell'associato teorema al quale dedichiamo la presente sottosezione. Nell'opinione di chi scrive, il "caso Noether" meriterebbe più attenzione di quanta ne ha finora ricevuta, sia da parte degli psicologi dell'invenzione (la Emmy è uno dei pochissimi esempi di genio matematico di sesso femminile che si registri nella storia del pensiero, o almeno, per quanto ne sappiamo, del pensiero occidentale), sia da parte dei sociologi attenti alle ricadute della cultura dominante sui comportamenti umani (sono ben note e testimoniate le umiliazioni che la giovane studiosa dovette subire nell'ambiente accademico di Gottinga per il solo fatto di non essere un uomo, malgrado l'autorevole appoggio di Hilbert). Molto induce a ritenere che il quasi totale disinteresse femminile – e quindi la quasi totale assenza di capacità inventiva femminile – nei confronti della matematica fondativa poggi su basi genetiche; ma cosa realmente giustifichi questo fatto è materia di congetture. Può essere interessante menzionare il singolare parallelo con la composizione musicale, prerogativa anch'essa di competenza quasi esclusivamente maschile (le ragioni di questa seconda dissimmetria sono certamente meno spiegabili che nel caso della matematica). In breve: *l'invenzione* di matematica fondativa e *l'invenzione* di musica colta sono attività di fatto svolte quasi soltanto da uomini. Perché? L'opinione corrente si limita ad osservare che vi è un non precisato legame tra la matematica e la musica; ma ben di rado, a quanto ci risulta, prende atto del problema che abbiamo segnalato, e tanto meno lo affronta.

⁷ E. Noether: "Invariante Variationsprobleme", Nachr. Gesellschaft Wiss. Göttingen (1918) 237-257 (anche in Gesammelte Abh., Springer 1983, 248-270).

⁸ Vedi in Lagrange (Misc. Taur. 2, 1760/61) e in Eulero (Institutiones Calculi Integralis, 1770).

dove $\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle(x, u) \leftrightarrow \langle x, u \rangle = \langle x, u \rangle(\varphi, \psi)$ è di CdC 2 in $U \leftrightarrow U' =: \langle \varphi, \psi \rangle(U)$, ed ε è un parametro di piccolezza.⁹ In base alla (2), ad una curva $u = u(x) \in C^2(U)$ corrisponde *biunivocamente* una curva $u' = u'(x') \in C^2(U')$.

Noether si propone di calcolare la variazione Δ di $\mathcal{F}[u|\Omega]$ associata alla (2), cioè, denotando con ϕ la coppia $\langle \varphi, \psi \rangle$,

$$(3) \quad \Delta \mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon] =: \int_{\Omega'} F(x', u'(x'), v'(x')) dx' - \int_{\Omega} F(x, u(x), v(x)) dx,$$

(dove $v'(x')$ è la derivata di $u'(x')$), *nell'approssimazione del 1° ordine in ε* . Questo è un calcolo un po' laborioso ma privo di difficoltà concettuali, e che riprodurremo alla fine della sottosezione. Per il momento, ci limitiamo a riportarne il risultato, estendendolo subito al caso generale di $m \geq 1$ variabili indipendenti $x \equiv x^{1 \leq i \leq m}$ e di $n \geq 1$ variabili dipendenti $u \equiv u^{1 \leq \alpha \leq n}$. Con ciò si dovrà generalizzare in modo ovvio la stessa (2) ($\rightarrow (2_{m,n})$), interpretandovi x, x' e φ come m -ple di elementi distinti da soprascritti latini, e u, u' e ψ come n -ple di elementi distinti da soprascritti greci, con $\phi \equiv \langle \varphi, \psi \rangle$ di CdC 2 nell'aperto U di \mathbb{R}^{m+n} la cui proiezione U_x su \mathbb{R}^m include $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Denotando con $\delta \mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon]$ la *parte principale* (proporzionale a ε) di $\Delta \mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon]$, secondo il calcolo cui si accennava più sopra risulta:

$$(4) \quad \delta \mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon] = \varepsilon \int_{\Omega} (\eta^\alpha E_\alpha F + \nabla^* \cdot J) d\Omega.$$

Qui $E_\alpha = \partial/\partial u^\alpha - \partial^*/\partial x^i (\partial/\partial v^\alpha_i)$ è l'operatore di EL relativo a u^α (cfr. 7.7.1, 5), v^α è il gradiente di u^α e v^α_i ne è la componente (i) (quindi $v^\alpha_i = \partial u^\alpha / \partial x^i$), $\partial^*/\partial x^i$ è la derivata parziale *sostanziale* (cioè anche attraverso le u e le v) rispetto a x^i ,

$$(5) \quad \eta^\alpha =: -\varphi^j v^\alpha_j + \psi^\alpha,$$

J è il vettore di componenti (i)

$$(6) \quad J^i =: F\varphi^i + \eta^j \partial F / \partial v^j_i,$$

e $\nabla^* \cdot J$ sta per $\partial^* J^i / \partial x^i$, sotto la solita convenzione di sommare sugli indici ripetuti (da 1 a m se latini, da 1 a n se greci).¹⁰ La (4) è detta **formula fondamentale per la** (parte principale della) **variazione di $\mathcal{F}[u|\Omega]$** associata al 2-diffeomorfismo $(2_{m,n})$. La (6) si può trascrivere eliminando η^j mediante la (5), cioè come

$$(6') \quad J^i = \varphi^k T_k^i + \psi^\alpha \partial F / \partial v^\alpha_i,$$

dove $T_k^i =: F\delta_k^i - v^\alpha_k \partial F / \partial v^\alpha_i$ (cfr. la 7.1.1, 10).¹¹

⁹ Abbiamo qui usato \langle , \rangle per designare la coppia, e $(,)$ per la stessa coppia in ruolo argomentale. Quindi la (2) significa la coppia di relazioni $x' = x + \varepsilon\varphi(x, u)$ e $u' = u + \varepsilon\psi(x, u)$.

¹⁰ La notazione è tale che i due indici ripetuti si trovano sempre uno in basso e uno in alto, convenendo al solito che un indice in alto [in basso] in un denominatore differenziale equivalga ad uno in basso [in alto] in un numeratore.

¹¹ In luogo di T_k^i si usa anche il suo opposto $H_k^i =: -T_k^i$, che si dice **2-tensore di Hamilton**. Ciò in quanto nel caso $m = 1$, pensando all'unica coordinata x^1 come tempo t , identificando le u^α con coordinate lagrangiane q^α e quindi le v^α

Invece che dalla $(2_{m,n})$, si può partire da un 2-diffeomorfismo quasi-identitario (per piccolo ε) più generale, cioè del tipo

$$(7) \quad \langle x', u' \rangle = \langle \Phi, \Psi \rangle(x, u, \varepsilon),$$

dove ε è ancora il parametro di piccolezza, e le $\langle \Phi, \Psi \rangle$ sono m-ple, e rispettivamente n-ple, di funzioni di CdC 2 di (x, u) in U per le quali $\langle \Phi, \Psi \rangle(x, u, 0) \equiv \langle x, u \rangle$. Supposte le Φ, Ψ sviluppabili in serie di potenze di ε intorno a $\varepsilon = 0$, e denotando con Ξ la coppia $\langle \Phi, \Psi \rangle$, basterà allora porre

$$(8) \quad \phi(x, u) =: \partial \Xi / \partial \varepsilon(x, u, 0),$$

e riscrivere la $(2_{m,n})$ con “ \approx ” (uguaglianza a meno di termini di ordine superiore al primo in ε) in luogo di “ $=$ ”. Con questo passaggio dalla $(2_{m,n})$ alla (7), e con la definizione (8) di ϕ , la (4) resta immutata. La funzione ϕ (8) si usa nominare come **generatore infinitesimale** della trasformazione (7).

Imponendo che la $\delta \mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon] = 0$ valga identicamente rispetto ad ε , si ottiene

$$(9) \quad 0 = \delta \mathcal{F}[u|\Omega, \phi] =: \int_{\Omega} [\eta^{\alpha} E_{\alpha} F + \nabla^* \cdot J] d\Omega.$$

Si possono a questo punto adottare due diversi “paradigmi di utilizzo” della (4), che per comodità diremo qui “paradigma lagrangiano” e rispettivamente “paradigma noetheriano”. Il paradigma lagrangiano, che ben conosciamo e che riassumiamo brevemente, *fixa* Ω (quindi pone $\varphi \equiv 0$) e lascia *arbitrarie* le $\psi(x, u)$ (in $C^2(U)$) sotto la condizione che $\psi(x, u(x))|_{\partial\Omega^+} = 0$ (ove $|_{\partial\Omega^+}$ significa al solito “limite dall’interno su $\partial\Omega$, supposto esistere unico). Quindi nella (9) le η, J sono funzioni arbitrarie di $C_0^2(\Omega)$ (\equiv insieme delle funzioni di classe C^2 il cui limite dall’interno su $\partial\Omega$ esiste unico ed è zero); infatti dalle $\varphi = 0$ e $\psi|_{\partial\Omega^+} = 0$ scende subito $\eta|_{\partial\Omega^+} = 0$ e $J|_{\partial\Omega^+} = 0$. Per il teorema di GO, supponendo il contorno di Ω regolare (o regolare a pezzi) quanto basta, le $J|_{\partial\Omega^+} = 0$ implicano che il contributo di $\nabla^* \cdot J$ all’integrale nelle (9) sia nullo. Si resta così con le

$$(10) \quad 0 = \int_{\Omega} \eta^{\alpha} E_{\alpha} F d\Omega.$$

Per l’arbitrarietà delle $\eta^{\alpha} \in C_0^2(\Omega)$, e in forza del lemma fondamentale del CDV, la (10) dà il sistema delle equazioni di EL

$$(11) \quad E_{\alpha} F = 0,$$

dove le $E_{\alpha} F$ sono date dalle (7.1.1, 8).

Con il paradigma noetheriano, (i): si assume $E_{\alpha} F = 0$, cioè si suppone che le $u = u(x)$ siano estremali di F . Con questo, la (9) diventa

$$(9') \quad 0 = \int_{\Omega} \nabla^* \cdot J d\Omega;$$

con le t-derivate q_t^{α} di q^{α} , e infine la F con la lagrangiana L , risulta $H_1^1 = q_t^{\alpha} \partial L / \partial q_t^{\alpha} - L = H$, hamiltoniana del sistema espressa come funzione delle (t, q, \dot{q}) . Secondo la (7.1.1, 10), è allora $-dH/dt = \partial L / \partial t$. Infatti, basta sottrarre dalla $\partial L / \partial t + q_t^{\alpha} \partial L / \partial q_t^{\alpha} + q_{tt}^{\alpha} \partial L / \partial q_t^{\alpha} - dL/dt = 0$ la $q_t^{\alpha} E_{\alpha} F = 0$ e porre $H = q_t^{\alpha} \partial L / \partial q_t^{\alpha} - L$ nel risultato.

inoltre (ii): si fissa ϕ , e (iii): si richiede che la (9') valga per ogni dominio ω incluso in Ω ; ovvero, equivalentemente, che sia

$$(12) \quad \nabla^* \cdot J = 0$$

in Ω . Naturalmente la richiesta (iii) si contrappone alla logica del paradigma lagrangiano, e ci si aspetta che insieme con le (i,ii) supercondizioni il problema, in quanto ci si aspetta che, per la data F e la data (7), in generale *non* esistano estremali di F che (oltre alle (11)) soddisfino anche la (12). In effetti, abbiamo n incognite (le u) e $n + 1$ equazioni, le (11) e la (12). Una possibilità è quella di interpretare la (12) come una condizione sussidiaria cui F deve a priori soddisfare lungo le sue estremali. F non sarebbe più, così, una funzione da scegliere (per via induttiva) nell'insieme delle funzioni arbitrarie di $m + n + mn$ argomenti (entro l'ipotesi stipulata di essere $C^2(U \times \mathbb{R}^{mn})$), ma dovrebbe appartenere ad una classe meno ampia.

Possiamo ormai enunciare il **teorema di Noether** nei termini che seguono: «Se, per la data F di classe $C^2(U \times \mathbb{R}^{mn})$, U aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^{m+n} , $U_x \supset \Omega$, e la data ϕ di classe $C^2(U)$, la variazione di $\int_{\omega} F(x, u(x), v(x)) d\omega$ è nulla al 1° ordine in ε a fronte della data trasformazione (7), e per ogni $\omega \subset \Omega$, allora la EDP (12) vale in Ω lungo ogni estremale, con le J^i date dalle (6).»

È chiaro che il sopracondizionamento non può essere “assorbito” che da una particolare proprietà della F . In effetti le ipotesi nel teorema di Noether modificano sostanzialmente la logica EL del problema fisico-matematico ispirato al CDV. Nel paradigma lagrangiano, F e Ω sono dati fissi, scelti induttivamente, e le corrispondenti equazioni di EL forniscono l'evoluzione naturale del sistema fisico considerato. Nel paradigma noetheriano, F è ancora un dato scelto induttivamente, ma all'interno della condizione a priori (12) per la data (7): vale a dire, la F può accettarsi come rappresentativa del sistema fisico (e della sua evoluzione naturale attraverso le corrispondenti equazioni di EL) *sse soddisfa la (12) per la data (7)*.

I fisici traducono l'insieme delle ipotesi del teorema di Noether dicendo che la F (densità lagrangiana per $m \geq 2$, o lagrangiana per $m = 1$), è **simmetrica rispetto alla trasformazione (7)**. L'ipotesi di simmetria è dunque espressa dalla

$$(13) \quad \delta \mathcal{F}(u|\omega, \phi, \varepsilon) = 0 \quad \forall u \text{ soluzione } C^2(\Omega) \text{ delle } E_{\alpha} F, \quad \forall \alpha = 1, \dots, n, \quad \forall \omega \subset \Omega \text{ e } \forall \varepsilon \text{ (piccolo } \varepsilon) > 0.$$

La (12) che segue dall'ipotesi (13) è detta **legge di conservazione**. Il m -vettore J (6) è detto **corrente** (noetheriana). Nel caso in cui la coordinata m -ma sia il tempo t , la componente $J^m \equiv J^t$ è detta **carica** (noetheriana), e la (12) ha la forma della equazione di continuità

$$(12bis) \quad \partial^* J^t / \partial t + \sum_{i=1}^{m-1} \partial^* J^i / \partial x^i = 0$$

(non facendo caso agli asterischi). Approfondiamo ora il significato della (12bis). Integrando questa equazione sul cilindro $\omega = (0,t) \times \omega'$, dove ω' è un aperto *arbitrario* dello spazio \mathbb{R}^{m-1} , e anche t è *arbitrario*, abbiamo

$$(14) \quad \left[\int_{\omega'} \mu d\omega' \right]_{t=0}^t + \int_0^t dt \int_{\partial\omega'} \sum' J^i v_i d\partial\omega' = 0,$$

in cui v è la normale a $\partial\omega'$ orientata verso l'esterno di ω' (teorema di GO), \sum' significa somma da 1 a $m-1$, e per brevità si è scritto μ invece di J^t . (Si ricordi che l'arbitrarietà dell'aperto $\omega \subset \Omega$ è una delle ipotesi del teorema di Noether.) Il primo dei due addendi a 1° membro della (14) è la variazione, tra $t = 0$ e t , della carica contenuta in ω' . Il secondo addendo è invece la carica che esce da ω' nello stesso tempo tra $t = 0$ e t , e secondo la (14) queste due quantità sono uguali e opposte. Se si ammette di poter far tendere ω' a *tutto* lo spazio \mathbb{R}^{m-1} , evidenti ragioni fisiche richiedono che in questo limite sia $\int_{\partial\omega'} \sum' J^i v_i d\partial\omega' = 0$. Questo equivale a dire che, per ogni t , le componenti spaziali di J tendono a zero più rapidamente di r^{2-m} , se r è la distanza del generico punto z di \mathbb{R}^{m-1} dall'origine, quando $r \rightarrow \infty$. In conclusione, la carica presente in tutto lo spazio \mathbb{R}^{m-1} al tempo t è uguale a quella presente al tempo $t = 0$, ovvero essa si “*conserva*” nel tempo secondo la $\left[\int_{\omega'} \mu d\omega' \right]_{t=0}^t = 0$.

L'argomentazione precedente si può generalizzare in una direzione a prima vista innocua, ma i cui sviluppi portano lontano. Si parte cioè da una trasformazione quasi-identitaria più generale della (7) sostituendo all'unico parametro ε che vi figura una N -pla di parametri indipendenti $\varepsilon_{1 \leq s \leq N}$. Nomineremo questa più generale trasformazione come $(7_{1 \leq s \leq N})$, e la corrispondente ipotesi di “simmetria” come $(13_{1 \leq s \leq N})$. Le conseguenze di questa generalizzazione si vedono senza difficoltà: la (4) deve essere modificata ponendo un sottoscritto (s) in ϕ , η e J , e premettendo all'integrale una $\sum_{s=1}^N \varepsilon_{(s)}$ in luogo del semplice ε , secondo la:

$$(4bis) \quad \delta \mathcal{F}[u|\Omega, \langle \phi \rangle, \langle \varepsilon \rangle] = \sum_{s=1}^N \varepsilon_s \int_{\Omega} [\eta_{(s)}^\alpha E_\alpha F + \nabla^* \cdot J_{(s)}] d\Omega,$$

dove con $\langle \phi \rangle$ abbiamo denotato l' N -pla $\langle \phi_{(1)}, \dots, \phi_{(N)} \rangle$, e similmente per $\langle \varepsilon \rangle$. Tutte le equazioni si modificano in conformità, con la sostituzione di $\phi_{(s)}$, $\eta_{(s)}$ e $J_{(s)}$ a ϕ , η e J . In particolare la (12) diventa l'insieme delle N

$$(12_s) \quad \nabla^* \cdot J_{(s)} = 0,$$

e i vincoli addizionali (le **leggi di conservazione**) diventano N . L'idea di F come “dato” del problema variazionale viene con ciò ulteriormente allontanata.

Tutto questo riflette un approccio alla teoria fisica in cui la ricognizione di possibili leggi di conservazione è vista come altrettanto importante di quella delle leggi di evoluzione di EL o hamiltoniane. Di fatto, le più moderne applicazioni del teorema di Noether hanno fatto fare molta strada alla implicazione “simmetria di F nel senso della $(7_{1 \leq s \leq N})$ ” \Rightarrow “esistono N cariche che si

conservano secondo le (12_s)”, anche e soprattutto sul piano *euristico*. Ma questa “è un’altra storia”, e per raccontarla seriamente occorrerebbe allargare il discorso oltre i limiti che ci siamo imposti.

L’esempio appresso descritto può aiutare a meglio comprendere la situazione. Supponiamo che le (13_{1≤s≤N}) siano soddisfatte da traslazioni infinitesimali delle x , cioè per $x^i = x^i + \varepsilon^s \delta_s^i$ (con $1 \leq i, s \leq m$, quindi $m = N$) a u^α invariate, $u'^\alpha = u^\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, n$). Allora $\varphi_{(s)}^i = \delta_s^i$ e $\psi_{(s)}^\alpha = 0$; e con ciò, $\eta_{(s)}^\alpha = -\delta_s^i v_i^\alpha = -v_{(s)}^\alpha$ e $J_{(s)}^i = F\delta_s^i + \eta_{(s)}^\alpha \partial F / \partial v_i^\alpha = F\delta_s^i - v_s^\alpha \partial F / \partial v_i^\alpha = T_s^i$, opposto del tensore di Hamilton. Se u è estrema, secondo il teorema di Noether deve essere $\partial^* J_{(s)}^i / \partial x^i = 0$, quindi $\partial^* T_s^i / \partial x^i = 0$. Ma attesa la (7.1.1, 10bis), se u è estrema deve anche essere $\partial^* T_s^i / \partial x^i = \partial F / \partial x^s$, e quindi è necessario limitarsi a considerare il caso $\partial F / \partial x^s = 0$ per ogni $s = 1, \dots, m$ se si vuole evitare il sopracondizionamento: questa è la ricaduta del teorema di Noether sulla libertà di descrivere il sistema con una densità lagrangiana a priori arbitraria. Riassumendo, se la simmetria sotto traslazione è assunta *senza* la restrizione (intuitivamente ovvia) $\partial F / \partial x^s = 0$, si avrà un sopracondizionamento potenzialmente contraddittorio; mentre se è assunta *sotto* quella restrizione il sopracondizionamento sparisce, ma il teorema non ci dice nulla che non sia già noto come conseguenza del carattere estrema di u . Si osserverà anche che in questo caso della simmetria sotto traslazione le cariche noetheriane $\mu_{(s)}$ sono le componenti T_s^t (dove t è indice di componente temporale) e quindi le quantità conservate sono le $\int T_s^t d\Omega$. Riferendoci al caso standard in cui $m = 4$, per $s = 1, 2, 3$ queste si riconoscono come le componenti della quantità di moto del sistema, e per $s = 4$ come la sua energia. Per questa ragione, i fisici dicono T_i^k ($i, k = 1, \dots, m \geq 2$) 2-tensore di **impulso-energia**, o semplicemente 2-tensore **energetico**.^{12, 13}

¹² Questo 2-tensore è di solito pensato come simmetrico, ma nella sua presente versione (“canonica”) non è detto che lo sia. Tuttavia è sempre possibile simmetrizzarlo senza alterare la sua divergenza mediante una procedura che risale a J. Belinfante, vedi *Physica* **6**, 887 (1939), *Physica* **7**, 449 (1940). Vedi anche L.D. Landau, E.M. Lifshitz, “The classical Theory of Fields”, Pergamon Press 4th ed. 1975, § 32.

¹³ È illuminante esaminare il caso $m = 1, n = 1$ dal punto di vista del sopracondizionamento. L’equazione di EL (ordinaria quasi lineare del 2° ordine) assume la nota forma $\partial F / \partial u - d_t(\partial F / \partial u_t) = 0$ scrivendo x^1 come t . Se u è estrema, le $d_t J_{(s)} = 0$ per $s = 1, \dots, N$ significano che le $J_{(s)} = F\varphi_{(s)} + \eta_{(s)}^\alpha \partial F / \partial u_t$ sono altrettanti *integrali primi* della equazione di EL. Ma questa non può avere più di due integrali primi funzionalmente indipendenti, e dunque in questo caso $N > 2$ conduce ad una apparente contraddizione. [Cogliamo qui l’occasione, riferendoci ad una generica EDO di ordine $p \geq 1$ (*) $F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0$, per ricordare che una funzione $\Phi = \Phi(x, y, \dots, y^{(k)})|C_1, \dots, C_{p-k}$, con $0 \leq k < p$ e dove C_1, \dots, C_{p-k} sono $p - k$ costanti, identicamente nulla sse y è una soluzione della (*), si dice un suo *integrale di ordine* $p - k$. Ovviamente ad ogni soluzione corrisponde una scelta di valori delle costanti e viceversa. La definizione non è univoca, potendosi sempre sostituire a Φ una sua funzione arbitraria, nulla per $\Phi = 0$. Se in particolare $p - k = 1$, Φ dipende da un’unica costante C , $\Phi = \Phi(x, y|C)$, ed è un integrale primo della (*). Esistono esattamente p integrali primi *funzionalmente indipendenti* della (*), e la loro conoscenza permette di costruirne la soluzione generale. Se $p = 1$ e la (*) è normale, cioè se è del tipo (***) $y' = f(x, y)$, la Φ può sempre porsi nella forma $\Phi(x, y|C) \equiv g(x, y) - C$ per una conveniente funzione g . Per lo più è proprio questa funzione g ad essere detta “integrale primo” della (***) se $g(x, y) = C$. Dalla (***) si passa senza difficoltà ad un SDO di simili equazioni normali, e per questa via la definizione di integrale primo può estendersi ad una EDO normale di ordine arbitrario p , che come è noto è sempre equivalente ad un SDO normale del 1° ordine di p equazioni.]

Si potrebbero fare altri esempi in cui una certa ipotesi di simmetria del tipo $(13_{1 \leq s \leq N})$, e le $\nabla^* \cdot J_{1 \leq s \leq N} = 0$ che ne conseguono attraverso il teorema di Noether, se sono compatibili con il carattere estemale di u ne riproducono conseguenze note. Ad esempio la simmetria rispetto a trasformazioni di Lorentz ortocrone (trasformazioni che lasciano invariata la metrica iperbolica, o rotazioni immaginarie, preservando l'orientamento del tempo) dà la conservazione del “momento angolare relativistico”.

In realtà il problema del sopracondizionamento può aggirarsi. Infatti la funzione di partenza $F = F(x, u, v)$ non è univocamente definita ai fini delle equazioni di moto di EL, $E_\alpha F = 0$, $\alpha = 1, \dots, n$: ad essa si può sempre aggiungere (se esiste) una funzione $F' = F'(x, u, v)$ per la quale le $E_\alpha F' = 0$ sono soddisfatte automaticamente (cioè per *qualsiasi* $u = u(x)$). La più ampia classe delle funzioni con questa proprietà è stata individuata, ma la sua descrizione è al di là dei nostri scopi presenti. Possiamo tuttavia accontentarci di una classe più ristretta, quella delle funzioni $\kappa = \kappa(x, u) = \partial^* \Lambda^i / \partial x^i(x, u) \equiv \nabla^* \cdot \Lambda(x, u)$, ove $\Lambda^i = \Lambda^i(x, u)$ sono m funzioni (di CdC 2) arbitrarie dei loro argomenti (vedi la 7.1.1, 11). Quindi

$$(15) \quad F^*(x, u, v) = F(x, u, v) + \nabla^* \cdot \Lambda(x, u) \equiv F(x, u, v) + \kappa(x, u)$$

e $F(x, u, v)$ sono equivalenti ai fini della descrizione del moto.¹⁴ Segue che nemmeno le correnti noetheriane $J_{(s)}$ sono univocamente definite, perché in base alla (6) esse contengono un corrispondente addendo $\varphi_{(s)} \kappa$. Inoltre anche il m -vettore Λ , e quindi lo scalare κ , può evidentemente essere affetto dal sottoscritto $_{(s)}$. In questo modo le equazioni di conservazione $\nabla^* \cdot J_s = 0$ diventano

$$(16_s) \quad \nabla^* \cdot (J_{(s)} + \varphi_{(s)} \kappa_{(s)}) = 0.$$

Le (16_s) possono dirsi equazioni di conservazione **generalizzate**. Esse sono vincoli più deboli delle originali $\nabla^* \cdot J_{(s)} = 0$, perché nella s -ma di esse compare lo scalare arbitrario (deve solo essere una divergenza) $\kappa_{(s)}$. Se si determina $\kappa_{(s)}$ in modo da soddisfare la (16_s), e quindi da evitare il sopracondizionamento, si resta con le “correnti generalizzate” $J_{(s)}^+ =: J_{(s)} + \varphi_{(s)} \kappa_{(s)}$; sono allora le cariche $_{(s)} J_{(s)}^{+t}$ di queste correnti generalizzate che si conservano. Insomma, il sopracondizionamento dovuto alle $(13_{1 \leq s \leq N})$ è assorbito dalle $\kappa_{(s)}$.

Diamo finalmente, per concludere questa sottosezione, la dimostrazione della formula fondamentale (4) cominciando dal caso $n = 1$.

¹⁴ In ultima analisi, nella equivalenza (15) si annida la radice della nozione di “invarianza di gauge”, che tanto ruolo gioca ormai da tempo nella teoria fisica. Si noti che $\Lambda_{(s)}$ compare nella (16_s) con le sue derivate fino al 2° ordine compreso, comportandosi da m -potenziale. Una “teoria di gauge” è quella le cui equazioni sono invarianti rispetto al gruppo delle “trasformazioni di gauge”, compiutamente definite da H. Weyl nel 2° decennio dello scorso secolo. Parlare non futilmente delle teorie di gauge porterebbe ben oltre i limiti degli scopi dichiarati di questo libro; qui ci limitiamo a ricordare che la teoria elettromagnetica di Maxwell è il prototipo storico di teoria di gauge, con il suo 4-potenziale (A, α) nel ruolo di 4-vettore Λ .

Dim: Oltre alle differenze (del 1° ordine) $x' - x = \varphi(x)$, ci servono le analoghe differenze $u'(x') - u(x)$ e $v'(x') - v(x)$ (v è un m -vettore come x). Poniamo $u'(x') - u(x) \equiv [u'(x) - u(x)] + [u'(x') - u'(x)]$. Scriveremo $\eta(x)$ per la prima delle differenze tra []. Quanto alla seconda, essa è evidentemente $\approx (\equiv$ uguale a meno di termini di ordine superiore al primo in ε) $\varphi^i \partial u' / \partial x^i(x)$, e questa è a sua volta $\approx \varphi^i \partial u / \partial x^i(x)$. Abbiamo dunque $\psi(x) = u'(x') - u(x) \approx \eta(x) + \varphi^i \partial u / \partial x^i(x)$. Passando alla differenza $v'(x') - v(x)$, questa può scriversi come somma di tre parti, e cioè di $\partial'[u'(x') - u(x')]$, di $\partial[u(x') - u(x)]$, e di $(\partial' - \partial)u(x')$ (dove con ∂' intendiamo il gradiente rispetto alle x'). La prima parte è $\partial'\eta(x') \approx \partial\eta(x)$. La seconda parte è $\approx \partial[\varphi^i \partial u / \partial x^i](x)$. Infine $\partial' - \partial \approx -\partial\varphi^i \partial'_i \approx -\partial\varphi^i \partial_i$, per cui la terza parte è $\approx -(\partial\varphi^i v_i)(x)$. Sommando i tre contributi, troviamo $v'(x') - v(x) \approx \partial\eta(x) + (\varphi^i \partial_i v)(x)$. Siamo così pronti per calcolare $\Delta\mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon]$ nella approssimazione del 1° ordine in ε . La differenza tra i due integrali a 2° membro della (3) si riduce ad un unico integrale su Ω osservando che $d\Omega' = \det\{\partial(x')/\partial(x)\}d\Omega$, e che lo jacobiano $\det\{\partial(x')/\partial(x)\}$ è, nella stessa approssimazione, $\approx 1 + \partial_i \varphi^i$. Il calcolo dell'integranda di questo unico integrale segue allora facilmente. Posto per brevità F' per $F(x', u'(x'), v'(x'))$, risulta $F' - F \approx \varphi^i \partial_i F + (\partial F / \partial u)(\eta + \varphi^i v_i) + (\partial F / \partial v_i)(\partial_i \eta + \varphi^j \partial_j v_i)$, ove si sottintende l'usuale somma sugli indici ripetuti. In definitiva l'integranda in oggetto vale $\approx \partial_i(\varphi^i F) + (\partial F / \partial u)\eta + (\partial F / \partial v_i)\partial_i \eta + (\partial F / \partial u)\varphi^i v_i + (\partial F / \partial v_i)(\varphi^j \partial_j v_i) = [\partial F / \partial u - \partial^*_{;i}(\partial F / \partial v_i)]\eta + \partial^*_{;i}[\varphi^i F + (\partial F / \partial v_i)\eta]$, dove $\partial^*_{;i}$ sta per $\partial^* / \partial x^i$. La parte $\partial^*_{;i}[\varphi^i F + (\partial F / \partial v_i)\eta]$ di questa somma è la “divergenza sostanziale” dell' m -vettore tra le []. In conclusione, ponendo $J^i =: \varphi^i F + \partial F / \partial v_i \eta$, la parte principale di $\Delta\mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon]$ è dunque:

$$(16) \quad \delta\mathcal{F}[u|\Omega, \phi, \varepsilon] = \varepsilon \int_{\Omega} \{ \eta [\partial F / \partial u - \partial^*_{;i}(\partial F / \partial v_i)] + \partial^*_{;i} J^i \} d\Omega \equiv \varepsilon \int_{\Omega} (\eta E F + \nabla^* \cdot J) d\Omega,$$

dove nell'ultimo integrale abbiamo usato l'operatore di EL E e $\nabla^* \cdot J$ sta al solito per $\partial^*_{;i} J^i$. La tesi è così dimostrata per $N = n = 1$. Il passaggio a $n > 1$ si ha subito pensando u, v, η come n -ple, e quindi aggiungendo indici (soprascritti) greci su questi oggetti (con il che E diventa E_α) e sommando su di essi da 1 a n se si presentano ripetuti sopra e sotto. Con questo l'espressione di J^i coincide con la (6), la (16) diventa la (4), e la dimostrazione è praticamente conclusa, perché la sua estensione al caso $N > 1$ (cioè a una trasformazione di tipo $(7_{1 \leq s \leq N})$ con $N > 1$) è banale. #

Come la Noether stessa ha indicato, e come si può intuire, è possibile estendere il suo teorema a funzionali di u di ordine $p > 1$, come pure a trasformazioni infinitesime più generali delle $(7_{1 \leq s \leq N})$; ad esempio, cioè contenenti una *infinità numerabile* di parametri o addirittura vere e proprie *funzioni* arbitrarie (gruppi di trasformazioni di Lie, o simmetrie di gauge nel linguaggio dei fisici). Non riferiremo qui di questi importanti sviluppi.

Chiudiamo ricordando che, a ragione, i fisici teorici enfatizzano il fatto che l'insieme delle trasformazioni ($T_{1 \leq s \leq N}$) costituisce un gruppo al variare del N-parametro $\langle \varepsilon \rangle$ (specificamente, un gruppo continuo a N parametri, abeliano). Questo è corretto (ovviamente) ed anche importante, ma non ha rapporto significativo, *nei limiti del presente punto di vista*, con il problema di cui ci siamo occupati.

7.3) PROBLEMI VARIAZIONALI OMOGENEI DEL 1° ORDINE

7.3.1) PROBLEMI OMOGENEI DEL 1° ORDINE UNIDIMENSIONALI

I problemi variazionali del 1° ordine unidim associati ad una lagrangiana $F = F(q, \dot{q}_t)$ indipendente da t ed omogenea di grado 1 nelle variabili \dot{q}_t presentano certe proprietà specifiche che, come vedremo, quasi sempre ne richiedono un trattamento particolare.¹ In questa sezione ci proponiamo di esporre i punti essenziali del CDV del 1° ordine unidim sotto le precedenti ipotesi sulla lagrangiana. La situazione è alquanto più complicata nell'analogo caso multidim, per cui ci limiteremo a pochi cenni (vedi la prossima sottosezione) a quel proposito.

§1. *Sulle funzioni positivamente omogenee di grado α .* Cominceremo con una breve sintesi della teoria delle funzioni omogenee. Una funzione reale $f = f(x = x^{1 \leq i \leq m})$ definita su un insieme aperto $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ si dice **positivamente omogenea di grado α** (un reale qualsiasi), o brevemente **positivamente α -omogenea**, se per ogni reale $k > 0$, vale l'implicazione $(x \in \Gamma) \Rightarrow [(kx \in \Gamma) \wedge (f(kx) = k^\alpha f(x))]$. Nel seguito sottintenderemo l'avverbio "positivamente" nella definizione, che si riferisce alla condizione $k > 0$. La definizione *non* impedisce che l'origine O di \mathbb{R}^n appartenga a Γ (anche se in tal caso dovrebbe essere $f(O) = 0$ per $\alpha \neq 0$); ma è preferibile escludere questa possibilità. Il dominio Γ di una funzione omogenea sarà dunque un **semicono** aperto col vertice in O (non appartenente a Γ) di \mathbb{R}^m . (Ricordiamo che la definizione di semicono Γ in \mathbb{R}^m è " $x \in \Gamma$ " \Leftrightarrow \Leftrightarrow " $kx \in \Gamma \ \forall k > 0$ ".) Se $f \in C^1(\Gamma)$ ed è α -omogenea, le sue derivate parziali prime, che sono definite in Γ , sono $(\alpha-1)$ -omogenee. Condizione necessaria e sufficiente affinché f , supposta $C^1(\Gamma)$, sia α -omogenea è che $x \cdot \partial f / \partial x = \alpha f$ in Γ (teorema di Eulero). I due ultimi asserti sono provati in qualunque trattato istituzionale di Analisi. Convenendo che una combinazione lineare di funzioni f, g con comune dominio sia definita nel modo standard (cioè "per valori"), l'insieme delle funzioni α -omogenee in Γ è uno spazio lineare. La funzione costante, banalmente definita in tutto \mathbb{R}^n , è 0-omogenea in Γ ; viceversa una funzione 0-omogenea in Γ è costante lungo ogni raggio (aperto nell'origine) di Γ . Se le funzioni f e g hanno comune dominio di definizione Γ e sono l'una

¹ Sembra a chi scrive che tale fondamentale diversità tra problemi variazionali standard (\equiv non omogenei) e omogenei non sia percepita come meriterebbe tra i fisici teorici, e talvolta addirittura tra i fisici matematici. Questo è poco comprensibile, perché i modelli fisici che generano problemi omogenei sono numerosi ed importanti. Qui ci riferiremo esclusivamente a problemi del 1° ordine, ma la questione della possibile omogeneità nasce anche nei problemi di ordine superiore al primo. Ad esempio nel caso di una funzione integranda del 2° ordine $F(u, u_t, u_{tt})$ della conveniente CdC, le condizioni (necessarie e sufficienti) di invarianza rispetto a t del relativo integrale sono, oltre alla indipendenza di F da t , $u_t \cdot \partial F / \partial u_{tt} = 0$ e $u_t \cdot \partial F / \partial u_t + 2u_{tt} \cdot \partial F / \partial u_{tt} = F$, e sono state studiate da Zermelo (E. Zermelo, "Untersuchen zur Variationrechnung", Dissertation, Berlin 1894).

α -omogenea e l'altra β -omogenea, il loro prodotto fg (nel senso dell'anello su \mathbb{R}), definito in Γ nel modo standard, è $(\alpha+\beta)$ -omogeneo. Quindi se f α -omogenea è $\neq 0$ nel suo dominio Γ , il suo reciproco $1/f$, definito in Γ nel modo standard, è ivi $(-\alpha)$ -omogeneo. I valori di una funzione omogenea definita in Γ sono unicamente determinati in Γ sse lo sono in $\Gamma_1 =: \Gamma \cap S_1$, dove S_1 è la sfera unitaria centrata in O . Essendo $(\alpha-1)$ -omogeneo, anche il gradiente della funzione f , supposta α -omogenea, è unicamente determinato in Γ sse lo è il suo gradiente superficiale in Γ_1 . In particolare se $\alpha = 1$, la derivata radiale $f(x)/|x|$ di f è 0-omogenea; quindi è costante lungo il raggio passante per x (pari al suo valore per $|x| = 1$). Segue che in tal caso $\lim_{x \rightarrow O} f(x) = \text{cost} \cdot \lim_{x \rightarrow O} |x| = 0$; ovvero una funzione 1-omogenea ha 0 come limite per $x \rightarrow O$, e può sempre essere prolungata per continuità in O . Questo significa che per le funzioni 1-omogenee è superfluo distinguere tra semicono di definizione comprensivo o no del vertice O . È talvolta utile passare da Γ (aperto) alla sua chiusura "laterale" Γ^- ; questa è il semicono chiuso (ma senza vertice) avente per contorno il mantello conico generato dal contorno di Γ_1 (nella topologia indotta su S_1). Così si può dare alla " $f \in C^1(\Gamma^-)$ " il significato usuale di questa notazione quando la si riferisce ad un dominio non aperto (vedi 6.1, nota ⁽¹²⁾). Talvolta $\Gamma \equiv \mathbb{R}^m \setminus \{O\}$; allora i valori di f sono banalmente determinati in tale Γ sse lo sono in S_1 . Di norma Γ_1 (e quindi Γ) è assunto *semplicemente* connesso su S_1 . §

§2. *Il formalismo "similcanonico" nel CDV unidim omogeneo del 1° ordine.* Come sappiamo (S.sez. 7.2.1), il SDO di EL $E_\alpha L = 0$ ($\alpha = 1, \dots, n$), con $L = L(t, q, q_t)$, associato ad un problema unidim omogeneo con n variabili dipendenti soddisfa alla identità di Weierstrass (7.2.1, 6) $q_t \cdot EL = 0$ se L è 1-omogenea rispetto alle q_t , e questo ne diminuisce ad al più $n-1$ le equazioni indipendenti. Considerando più da vicino questo sistema di EL $(^\circ) \partial L / \partial q - d_t(\partial L / \partial q_t) = 0$, nel caso 1-omogeneo, ci si aspetta che esso sia indipendente dalla scelta del parametro t sotto precise condizioni. Sia t' un altro parametro in relazione biunivoca con t in quanto $dt'/dt > 0$ in I . Poiché $q_t = q_t dt'/dt \equiv q_t(q_{t'})$, posto $L'(q_{t'}) =: L(q_t(q_{t'}))$ moltiplichiamo le $(^\circ)$ per dt'/dt tenendo conto della assunta 1-omogeneità di L . Da una parte, abbiamo $dt'/dt \partial L / \partial q = \partial L' / \partial q$ (le q sono variabili passive, e quindi le $\partial L / \partial q$ sono 1-omogenee come L); e dall'altra, $dt'/dt d_t(\partial L / \partial q_t) = d_{t'}(\partial L / \partial q_{t'}) = d_{t'}(\partial L' / \partial q_{t'})$ (le $\partial L / \partial q_t$ sono 0-omogenee). Concludiamo che $\partial L' / \partial q - d_{t'}(\partial L' / \partial q_{t'}) = 0$ in $I' =: t'(I)$. Quindi in questo caso, e in nessun altro, il SDO di EL è indipendente dalla scelta del parametro per L 1-omogenea.

Il fatto di avere soltanto $n-1$ equazioni di EL indipendenti può essere aggirato formulando fin da principio il problema variazionale con $n-1$ incognite. Ad esempio nel caso in cui $L = (x_t^2 + y_t^2)^{1/2}$ ($n = 2$), manifestamente 1-omogenea, il SDO di EL si riduce all'unica equazione $y_t x_{tt} = x_t y_{tt}$ (contata due volte). Abbiamo visto come superare la difficoltà usando come parametro una delle due incognite, ad es. la x . Un'altra possibilità è quella di usare come parametro la

lunghezza s della curva incognita. In questo caso $L = x_s^2 + y_s^2 = 1$, da cui derivando rispetto a s , $x_s x_{ss} + y_s y_{ss} = 0$. Combinando questa con la precedente $y_s x_{ss} - x_s y_{ss} = 0$, essendo $x_s^2 + y_s^2 \neq 0$ si ottiene $x_{ss} = y_{ss} = 0$. Il risultato è comunque che x e y devono essere funzioni lineari affini di s .

Anche se la trasformazione del SDO di EL in un equivalente SDO di equazioni del 1° ordine può sempre realizzarsi, la questione di ottenere un formalismo per così dire “simil-canonico” presenta notevole interesse. Come si è visto, la procedura standard è impedita, nel caso 1-omogeneo, dall’essere $\det\{\partial^2 L/\partial q_t^\alpha \partial q_t^\beta\} = 0$ nel dominio di definizione $D = U \times \Gamma_q$ di L , dove per ipotesi U è un aperto semplicemente connesso di \mathbb{R}^n (si ricordi che L è supposta indipendente da t) e Γ_q è un semicono aperto di \mathbb{R}^n generalmente dipendente da q .² Questo consegue dal fatto che le equazioni che definiscono i momenti coniugati non sono invertibili rispetto alle q_t . La procedura che esporremo è la più semplice che aggira questa difficoltà, ed è caratterizzata da una completa simmetria tra la lagrangiana originale e la “funzione di Hamilton” che sarà definita. Sarà opportuno denotare il vettore $q_t (\neq 0)$ con un simbolo semplice, diciamo con z (cioè $q_t^\alpha = z^\alpha$, $\alpha = 1 \div n$), come abbiamo già fatto con le q_t del caso non omogeneo ($q_t \equiv v$). Supponendo $L \in C^2(\Gamma) \forall q$ in U (ciò che diremo brevemente “ L è $C^2(\Gamma_q)$ in D ”), poniamo

$$(1) \quad a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(q,z) =: (1/2)\partial^2 L^2/\partial z^\alpha \partial z^\beta(q,z) (\equiv a_{\beta\alpha}(q,z))$$

per $(q,z) \in D$ (si noti che le derivate seconde a 2° membro sono di L^2 e non di L !). Si prova subito, allora, che

$$(2) \quad a_{\alpha\beta}(z)z^\alpha z^\beta = L^2$$

per z in Γ_q . Infatti risulta $(1/2)z^\alpha z^\beta \partial^2 L^2/\partial z^\alpha \partial z^\beta = (1/2)z^\alpha [\partial/\partial z^\alpha (\partial L^2/\partial z^\beta z^\beta) - \partial L^2/\partial z^\beta \delta^\beta_\alpha] = (1/2)z^\alpha [2\partial L^2/\partial z^\alpha - \partial L^2/\partial z^\alpha] = (1/2)z^\alpha \partial L^2/\partial z^\alpha = L^2$ (perché L^2 è 2-omogeneo nelle z); qed. La (2) conferma che $L(z)$ tende a zero come $|z|$ per z tendente a O in Γ (perché le $a_{\alpha\beta}$ sono 0-omogenee nelle z). D’ora in avanti, L sarà supposta $\neq 0$ nel suo dominio D ; quindi $a_{\alpha\beta}(z)z^\alpha z^\beta$ è per ipotesi > 0 in tale dominio. Se poi supponiamo $L \in C^3(\Gamma)$ in D , la 0-omogeneità rispetto a z delle $a_{\alpha\beta}$ implica che

$$(3_1) \quad z^\gamma \partial a_{\alpha\beta}/\partial z^\gamma = 0$$

in D e per ogni $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ (teorema di Eulero). Per la simmetria delle $\partial a_{\alpha\beta}/\partial z^\gamma$ rispetto agli indici (α, β, γ) , dalla (3₁) segue che similmente

$$(3_2) \quad z^\gamma \partial a_{\alpha\gamma}/\partial z^\beta = 0,$$

ancora in D e per ogni $\alpha, \beta = 1, \dots, n$. Poniamo ora

$$(4) \quad y_\alpha =: a_{\alpha\beta}(z)z^\beta \equiv \psi_\alpha(z)$$

² Si deve osservare che anche nella teoria standard non omogenea si potrebbe limitare il dominio di variabilità delle q_t ad un aperto di \mathbb{R}^n diverso da \mathbb{R}^n (e generalmente dipendente da q). Questo darebbe tuttavia luogo a notevoli complicazioni e non avrebbe molto senso dal punto di vista fisico, perché ogni atto di moto q_t è a priori ammissibile in dinamica classica. Nella teoria omogenea, invece, è agevole e naturale limitare l’atto di moto ad un semicono aperto, come abbiamo fatto.

per ogni z in Γ_q . (In realtà le $a_{\alpha\beta}$, e quindi le ψ_α contengono anche le q ; ma converrà sottintenderlo per snellire le notazioni.) Supporremo che queste y siano globalmente invertibili (GI) rispetto alle z , cioè che esista un 1-diffeomorfismo “ $y = \psi(z)$ per z in $\Gamma_q \leftrightarrow$ “ $z = \varphi(y)$ per y in $\Gamma'_q =: \psi(\Gamma_q)$ ”. Ciò implica che

$$(4') \quad \det\{\partial y_\alpha/\partial z^\beta\} \neq 0$$

in Γ_q ; ma

$$(5) \quad \partial y_\alpha/\partial z^\beta = z^\gamma \partial a_{\alpha\gamma}/\partial z^\beta + a_{\alpha\gamma} \delta^\gamma_\beta = a_{\alpha\beta}$$

in forza della (3₁), e quindi anche la matrice $\{a_{\alpha\beta}\}$ è non singolare, ovvero

$$(5') \quad a =: \det\{a_{\alpha\beta}\} \neq 0$$

in Γ_q . Vale a anche il viceversa: se la (5') è soddisfatta in Γ_q , allora le (4) sono GI rispetto alle z . Vale a dire, la (4') e la (5') sono equivalenti.³

Sotto la (5'), siano $A^{\gamma\delta} = A^{\gamma\delta}(z)$ gli elementi della matrice inversa della $\{a_{\alpha\beta}(z)\}$, e poniamo $a^{\gamma\delta}(y) =: A^{\gamma\delta}(\varphi(y))$, per cui

$$(6) \quad a_{\alpha\beta}(z) a^{\beta\gamma}(y) \equiv \delta^\gamma_\alpha$$

per $z = \varphi(y)$ oppure $y = \psi(z)$. Dalla (4) segue

$$(7) \quad y_\alpha a^{\alpha\gamma}(y) = a_{\alpha\beta}(z) z^\beta a^{\alpha\gamma}(y) = \delta_\beta^\gamma z^\beta = z^\gamma.$$

Questa inverte la (4), e dunque la

$$(8) \quad \partial z^\gamma/\partial y_\delta = y_\alpha \partial a^{\alpha\gamma}/\partial y_\delta + a^{\alpha\gamma} \delta^\delta_\alpha = y_\alpha \partial a^{\alpha\gamma}/\partial y_\delta + a^{\delta\gamma}$$

è la “partner simmetrica” o “duale” della (5). Ma $\{\partial z^\gamma/\partial y_\delta\}$ è la matrice inversa della $\{\partial y_\alpha/\partial z^\beta\}$, e quindi è anche

$$(8bis) \quad \partial z^\gamma/\partial y_\delta = a^{\delta\gamma}.$$

Dal confronto fra le (8) e (8bis) segue la

$$(3_2bis) \quad y_\alpha \partial a^{\alpha\gamma}/\partial y_\delta = 0,$$

duale della (3₂). Per ricavare una simile duale della (3₁), basta derivare la (6) rispetto a z^δ e poi contrarla con z^δ , oppure derivarla rispetto a y_δ e poi contrarla con y_δ . Ad esempio con la prima opzione, si trova $0 = a^{\beta\gamma} z^\delta \partial a_{\alpha\beta}/\partial z^\delta + z^\delta a_{\alpha\beta} \partial a^{\beta\gamma}/\partial y_\varepsilon \partial y_\varepsilon/\partial z^\delta$. Qui il primo addendo a 2° membro è nullo per la (3₁), ed eliminando la $\partial y_\varepsilon/\partial z^\delta$ come $a_{\varepsilon\delta}$ (vedi la (5)), si ottiene $0 = a_{\alpha\beta} z^\delta a_{\varepsilon\delta} \partial a^{\beta\gamma}/\partial y_\varepsilon = a_{\alpha\beta} y_\varepsilon \partial a^{\beta\gamma}/\partial y_\varepsilon$. Ma la matrice $\{a_{\alpha\beta}\}$ è non singolare, e segue la desiderata

$$(3_1bis) \quad y_\gamma \partial a^{\alpha\beta}/\partial y_\gamma = 0,$$

duale della (3₁). (la seconda opzione avrebbe dato lo stesso risultato). Per il teorema di Eulero, la (3₁bis) afferma che le $a^{\alpha\beta}(y)$ sono funzioni di y 0-omogenee (così come le $a_{\alpha\beta}(z)$ lo sono di z).

³ Alcuni trattatisti introducono la (5') come ipotesi, e ne traggono la (4').

In forza delle (4, 7) è poi ovvio che

$$(9) \quad a_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta = y_\beta z^\beta = a^{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta.$$

È facile esprimere le y direttamente in termini di L^2 : da $y_\alpha z^\alpha = L^2$ segue $\partial L^2 / \partial z^\beta = \partial y_\alpha / \partial z^\beta z^\alpha + y_\beta = a_{\alpha\beta} z^\alpha + y_\beta = 2y_\beta$, cioè

$$(10) \quad y_\beta = (1/2) \partial L^2 / \partial z^\beta. \quad 4$$

Dalle (9), si vede che $a_{\alpha\beta}(z) z^\alpha z^\beta$ e $a^{\alpha\beta}(y) y_\alpha y_\beta$ sono funzioni 2-omogenee di z in Γ e rispettivamente di y in Γ' , di comune valore $L^2(z) = L^2(\varphi(y))$. A questo punto è naturale porre

$$(11) \quad H^2 = H^2(y) =: a^{\alpha\beta}(y) y_\alpha y_\beta = L^2(\varphi(y)),$$

oppure, equivalentemente,

$$(11\text{bis}) \quad H^2(\psi(z)) = L^2(z).$$

Poiché le $a^{\alpha\beta}(y)$ sono 0-omogenee, si vede che $H^2(y)$ è 2-omogenea come lo è $L^2(z)$. Calcoliamo ora $\partial^2 H^2 / \partial y_\alpha \partial y_\beta$ (il risultato è ormai ben prevedibile). Risulta: $\partial H^2 / \partial y_\alpha = \partial [a^{\delta\epsilon} y_\delta y_\epsilon] / \partial y_\alpha = y_\delta y_\epsilon \partial a^{\delta\epsilon} / \partial y_\alpha + a^{\delta\epsilon} \delta_\delta^\alpha y_\epsilon + a^{\delta\epsilon} \delta_\epsilon^\alpha y_\delta = 2a^{\alpha\gamma} y_\gamma$, perché il primo addendo è nullo (vedi (3₂bis)). Quindi derivando ulteriormente rispetto a y_β , e tenendo ancora conto della (3₂bis), abbiamo:

$$(1\text{bis}) \quad (1/2) \partial^2 H^2 / \partial y_\alpha \partial y_\beta = a^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}(y),$$

duale della (1). Questa è in accordo con il già verificato carattere 0-omogeneo delle $a^{\alpha\beta}$ e di quello 2-omogeneo di H^2 . La (1bis) prova anche la simmetria rispetto agli indici superiori delle $\partial a^{\alpha\beta} / \partial y_\gamma$, simmetria duale di quella rispetto agli indici inferiori delle $\partial a_{\alpha\beta} / \partial z^\gamma$. Resterebbe da definire il segno di H , che per il momento non ha importanza perché nelle formule scritte H compare soltanto al quadrato.

Concludendo, sotto le ipotesi: (i) “ L^2 è 2-omogenea in z , $C^3(\Gamma_q) \forall q \in U$, e $\neq 0$ in D ”, e (ii) “ $y = \psi(z)$ è IG in $\Gamma_q \forall q \in U$ ”, viene in luce una completa simmetria, o dualità, tra gli asserti di un “primo paradigma” (espressi in termini di L^2 , z , $a_{\alpha\beta}$, ψ) e quelli di un secondo paradigma (espressi in termini di H^2 , y , $a^{\alpha\beta}$, φ). Ad esempio alla (10), che dà y in termini di L^2 e z , deve corrispondere una relazione duale con lo scambio di L con H e di z con y , e cioè:

$$(10\text{bis}) \quad z^\alpha = (1/2) \partial H^2 / \partial y_\alpha.$$

In effetti, una volta provato il carattere 2-omogeneo di H^2 (vedi la (1bis)), la (10bis) si dimostra come si dimostra la (10) alla luce della definizione (1).

Come si poteva tuttavia prevedere, questa simmetria decade quando si ritorna al problema variazionale dal quale siamo partiti, e si tenta di formulare una versione “canonica” delle relative equazioni di EL, che sono sempre le

⁴ Alternativamente, partendo dalla definizione di $a_{\alpha\beta}$ si ha $a_{\alpha\beta} = \partial / \partial z^\alpha (L \partial L / \partial z^\beta) = \partial L / \partial z^\alpha \partial L / \partial z^\beta + L \partial^2 L / \partial z^\alpha \partial z^\beta$; contraendo questa con z^β , il secondo addendo sparisce, e si resta con la (10).

$$(12) \quad \partial L / \partial q^\alpha - d_t(\partial L / \partial q^\alpha_t) = 0,$$

in termini di una opportuna **hamiltoniana**. Se si identificano i **momenti canonici** con le y e l'hamiltoniana con $(1/2)H^2$, le equazioni della 1^a serie $d_t q^\alpha = (1/2)\partial H^2 / \partial y_\alpha$ coincidono con le (10bis), e sono quindi verificate. Le equazioni di evoluzione per le y sono quelle che si ottengono dalle (10), cioè

$$(13) \quad d_t(y_\alpha/L) = d_t(\partial L / \partial z^\alpha) \equiv d_t(\partial L / \partial q^\alpha_t) = \partial L / \partial q^\alpha,$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto alle (12).

Va qui ricordato che la notazione che abbiamo usato è ellittica, perché per brevità abbiamo ignorato che le $a_{\alpha\beta}$ dipendono in generale anche dalle q , e quindi anche dalle q dipendono le ψ della (4) e le φ della $z = \varphi(y)$. Calcoliamo allora $\partial H^2 / \partial q^\beta$ (quindi con le y fisse) tenendo conto di questo e partendo dalla $H^2(q,y) = L^2(q,z)$. Abbiamo: $\partial H^2 / \partial q^\beta = \partial L^2 / \partial q^\beta + \partial L^2 / \partial z^\alpha \partial z^\alpha / \partial q^\beta = \partial L^2 / \partial q^\beta + 2y_\alpha \partial / \partial q^\beta [(1/2)\partial H^2 / \partial y_\alpha]$. Qui la sostituzione di $\partial L^2 / \partial z^\alpha$ con $2y_\alpha$ è dovuta alle (10), e quella di $z^\alpha = \varphi^\alpha$ con $(1/2)\partial H^2 / \partial y_\alpha$ è dovuta alle (10bis). Ma y_α è fissa nella q -derivazione, e quindi può scavalcare $\partial / \partial q^\beta$ nel 2° termine a 3° membro dell'ultima equazione, per cui tale 2° termine è in realtà $2\partial H^2 / \partial q^\beta$ (essendo H^2 2-omogeneo in y). In conclusione, troviamo (*) $\partial / \partial q^\beta (H^2 + L^2) = 0$. A questo punto non possiamo più accettare l'ambiguità di segno in H . Converremo dunque che H e L *abbiano lo stesso segno*, con il che la precedente (*) diventa

$$(14) \quad \partial / \partial q^\beta (H + L) = 0.$$

Allora la (13) diventa $d_t(y_\alpha/H) = -\partial H / \partial q^\alpha$, che *non ha* la forma di equazione canonica (della 2^a serie) per via del fattore $(1/H)$ che moltiplica y_α nel 1° membro.

Questo apparente insuccesso si aggira come segue. Supponendo $L(q,q_t) > 0$ in D , sia s una primitiva di L rispetto a t , ovvero $ds/dt = L > 0$; allora $s = s(t)$ è IG nell'intervallo-base I . Inoltre, poiché L è 1-omogenea nelle q_t , e $dt/ds > 0$, $L(q,q_s) = L(q,q_t dt/ds) = dt/ds L(q,q_t) \equiv 1$. Basta dunque sostituire al parametro t il **parametro naturale** s , legato uno-a-uno a t , per avere una lagrangiana L costante e addirittura unitaria. Costante e unitaria sarà in tal caso anche la funzione H espressa come funzione delle q e delle (*) $y = \partial L / \partial q_s$. Le equazioni canoniche della 1^a serie si scrivono allora come

$$(15_1) \quad d_s q^\alpha = \partial H / \partial y_\alpha,$$

e quelle della 2^a serie come

$$(15_2) \quad d_s y_\alpha = -\partial H / \partial q^\alpha,$$

assumendo con ciò la loro forma standard.

Soltanto $2n - 1$ delle $2n$ (15) sono indipendenti, dovendo esse soddisfare la $y \cdot d_s q = H^2 = L^2 = 1$. Si noti anche che una volta risolte le (15) nella forma $(q,y) = (q,y)(s)$, se lo si desidera le stesse (q,y) si potranno ricavare come funzioni di t , $(q,y)(s(t))$. Il prezzo per ottenere questo risultato

è stato quello di richiedere, (al di là delle ipotesi (i), (ii) di qualche capoverso più sopra e della (iii) $HL > 0$) anche la (iv): $L > 0$ in D .⁵ Infine la valenza di covarianza o controvarianza di tutte le formule scritte, rispetto ad un generico 1-diffeomorfismo $z = z(z') \leftrightarrow z' = z'(z)$, è quella che risulta dalla posizione degli indici. Così ad esempio le $a_{\alpha\beta}$ [le $a^{\alpha\beta}$] si trasformano come componenti covarianti [controvarianti] di un 2-tensore, L^2 e H^2 sono invarianti, ecc. Quanto alle z , esse sono automaticamente controvarianti in base al loro significato (se in luogo di \mathbb{R}^n avessimo una generica varietà n -dim congruentemente regolare, le z apparterebbero al suo spazio *tangente*), così come le y sono automaticamente covarianti (appartenendo allo spazio *cotangente* della varietà). §

§3. *Indicatrice e figuratrice di una lagrangiana nel CDV omogeneo unidim del 1° ordine. Spazi di Finsler.* È suggestiva la seguente interpretazione geometrica della situazione che abbiamo appena illustrato. Supponendo $L(z) > 0$ in Γ_q , un vincolo del tipo $L(\underline{z}) = 1$ in Γ può essere soddisfatto in un unico modo, bastando ed essendo necessario allo scopo che $\underline{z} = \lambda z$ con $\lambda = (1/L(z))$. Quindi l'equazione $L(\underline{z}) = 1$ individua una $(n-1)$ -superficie inclusa in Γ_q , intersecata o toccata una e una sola volta da ogni raggio di Γ . Questa superficie⁶ si dice l'**indicatrice di L**. Per \underline{z} sulla indicatrice, il piano tangente ad essa in \underline{z} , diciamolo $\tau(\underline{z})$, ha equazione $(\forall v \in \mathbb{R}^n) (v - \underline{z}) \cdot \partial L / \partial z|_{\underline{z}} = 0$, o equivalentemente $v \cdot \partial L / \partial z|_{\underline{z}} = \underline{z} \cdot \partial L / \partial z|_{\underline{z}} = 1$. Poiché $L|_{\underline{z}} = 1$, $\partial L / \partial z|_{\underline{z}}$ è il valore di y in \underline{z} (cfr. la (10)), che denoteremo \underline{y} , e dunque l'equazione di $\tau(\underline{z})$ si scrive equivalentemente $v \cdot \underline{y} = 1$; ovvero $\tau(\underline{z})$ è il piano di coseni direttori $\underline{y}/|\underline{y}|$ e a distanza $1/|\underline{y}|$ dal vertice O di Γ_q . Nel linguaggio della geometria analitica, questo si esprime dicendo che \underline{y} è il "polo" di $\tau(\underline{z})$ rispetto alla sfera unitaria centrata in O . Il piano per O parallelo a $\tau(\underline{z})$ si dice **coniugato a \underline{z}** , e i suoi vettori non nulli si dicono **trasversi a \underline{z}** .⁷ Per simmetria, la \underline{y} corrispondente a \underline{z} soddisfa la $H(\underline{y}) = 1$; mentre \underline{z} percorre l'indicatrice, la \underline{y} percorre una analoga $(n-1)$ -superficie del semicono duale di Γ , che si dice la **figuratrice di L**. Il piano tangente $\sigma(\underline{y})$ alla figuratrice di L in \underline{y} ha equazione $(\forall u \in \mathbb{R}^n) (u - \underline{y}) \cdot \partial H / \partial y|_{\underline{y}} = 0$, o $u \cdot \underline{z} = 1$, duale dell'analoga equazione di $\tau(\underline{z})$.

In quanto precede, $\Gamma_q \subset \mathbb{R}^n$ è stato supposto aperto per potervi effettuare operazioni di derivazione senza complicazioni. Tuttavia se Γ è un semicono aperto, richieste come ad es. la $L > 0$ in Γ ($\forall q \in U$) possono risultare inadeguate perché non escludono la possibilità che L tenda a 0 su punti $\neq O$ del contorno di Γ_q . Conviene allora *chiudere* Γ_q con il suo mantello di raggi (aperti in O)

⁵ Non è un gran prezzo, visto che L era già stata assunta $\neq 0$ nel suo dominio; se il dominio è connesso, basta dunque che vi sia un suo punto ove $L > 0$ per garantire questa condizione ovunque. Nulla vieta infine di denotare le y come p e quindi di scrivere le (15) come equazioni canoniche anche agli effetti notazionali.

⁶ Nel seguito, ci risparmieremo di ricordare che questa "superficie", come pure i "piani" e le "sfere" appresso menzionati, sono in realtà $(n-1)$ -dimensionali.

⁷ In particolare i vettori trasversi a \underline{z} sono ortogonali a \underline{z} per ogni \underline{z} sull'indicatrice sse questa è una $(n-1)$ -sfera centrata in O .

come si è detto nel 2° paragrafo di questa sottosezione, cioè passare a Γ_q^- ed estendere a Γ_q^- le richieste fatte, supponendo di poter congruentemente prolungare per continuità fino al contorno le varie funzioni di interesse. Per brevità, nel seguito di questa sottosezione sottintenderemo il pedice q in Γ_q .

Ci proponiamo ora di approfondire lo studio di una funzione reale $f = f(z \in \Gamma^-)$, con Γ^- come più sopra descritto, sotto le ipotesi: (i) f è strettamente positiva e 1-omogenea in Γ^- ; (ii) $f \in C^2(\Gamma^-)$ (nel senso usuale della notazione, per domini non aperti); (iii) $a =: \det\{a_{\alpha\beta}\} \neq 0$ in Γ^- , con $a_{\alpha\beta} =: (1/2)\partial^2 f^2 / \partial z^\alpha \partial z^\beta$, quindi $f^2(z) = a_{\alpha\beta}(z)z^\alpha z^\beta$. Sia ancora $\Gamma_1 =: \Gamma \cap S_1$ (con $S_1 \equiv (n-1)$ -sfera unitaria di \mathbb{R}^n , centrata nell'origine O). Posto $\Gamma_1^- =: \Gamma^- \cap S_1$, poiché Γ_1^- è compatto e f è ivi > 0 , f deve avere in Γ_1^- un minimo (assoluto) $m > 0$. Potremo allora considerare m come minimo libero della funzione associata $f' =: f - \lambda N^2$, dove λ è un moltiplicatore di Lagrange e $N^2 = N^2(z) =: \sum_{i=1}^n (z^i)^2$ ($= 1$ su Γ_1^-). Sia \underline{z} un punto di Γ_1^- in cui $f(\underline{z}) = m$. Un teorema dell'analisi delle funzioni con estremi vincolati (vedi ad es. Caratheodory, loc. cit. II, §213, Theor. 3) afferma che deve essere:

$$(16_1) \quad \partial f / \partial z^\alpha |_{\underline{z}} = 0$$

$$\forall \alpha = 1, \dots, n, \text{ e}$$

$$(16_2) \quad \partial^2 f / \partial z \partial z |_{\underline{z}} : v v \geq 0$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$ non nullo e soddisfacente la condizione lineare

$$(16_3) \quad \partial N^2 / \partial z |_{\underline{z}} \cdot v = 2 \underline{z} \cdot v = 0.$$

Calcolandone il 1° membro, la (16₁) è

$$(16_{1\text{bis}}) \quad \partial f / \partial z^\alpha |_{\underline{z}} = \lambda \partial N^2 / \partial z^\alpha |_{\underline{z}} = 2 \lambda \delta_{\alpha\beta} \underline{z}^\beta;$$

e quindi contraendo questa con \underline{z}^α e tenendo conto della 1-omogeneità di f ,

$$(17) \quad \partial f / \partial z |_{\underline{z}} \cdot \underline{z} = f |_{\underline{z}} = 2 \lambda,$$

cioè $m = 2 \lambda$. Inoltre $\partial^2 N^2 / \partial z^\alpha \partial z^\beta = 2 \delta_{\alpha\beta}$, per cui $\partial^2 f' / \partial z^\alpha \partial z^\beta |_{\underline{z}} = \partial^2 f / \partial z^\alpha \partial z^\beta |_{\underline{z}} - m \delta_{\alpha\beta}$. Quindi la forma quadratica $\partial^2 f' / \partial z \partial z |_{\underline{z}} : v v$ deve essere positiva per ogni v soddisfacente la (16₃), ovvero anche, per la (16_{1bis}), soddisfacente la

$$(16_{3\text{bis}}) \quad \partial f / \partial z |_{\underline{z}} \cdot v = 0.$$

Qui $\partial f / \partial z |_{\underline{z}}$ è normale all'unica $(n-1)$ -superficie di livello di f passante per \underline{z} , che ha equazione $f(z) = m$, e la (16_{3bis}) richiede che v sia nel piano per O parallelo al piano tangente in \underline{z} a questa superficie, cioè nel piano coniugato a \underline{z} . Si conclude che, in un punto \underline{z} di Γ_1^- dove $f(\underline{z})$ è uguale al suo minimo m , v è *ortogonale* (e non soltanto trasverso) a \underline{z} .

Un arbitrario vettore $w \neq 0$ di \mathbb{R}^n può essere decomposto in una somma del tipo $w = v + v \underline{z}$, dove v è la proiezione ortogonale di w sul piano coniugato a \underline{z} , e v è un reale unicamente

determinato. Sostituendo questa decomposizione in $a_{\alpha\beta|z}w^\alpha w^\beta$ si trova, tenuto conto della 1-omogeneità di f , $m\partial^2 f/\partial z\partial z|z:vv + v^2m^2$; ma come abbiamo appena visto, il primo addendo è > 0 se $v \neq 0$, ed è nullo sse $v = 0$ (ma allora deve essere $v \neq 0$ perché w è per ipotesi $\neq 0$). In conclusione, *la forma quadratica $a_{\alpha\beta|z}w^\alpha w^\beta$ è definita positiva*. Ciò implica in particolare che $\det\{a_{\alpha\beta|z}\} \equiv a(z) > 0$; ma per ipotesi $a(z) \neq 0$ in Γ^- (o equivalentemente in Γ^{-1} , essendo a 0-omogeneo), e quindi

$$(18) \quad a(z) > 0$$

in Γ^{-1} , perché Γ^{-1} è per ipotesi connesso e a è continuo in Γ^{-1} .

Siano ora η e ζ vettori non nulli arbitrari di \mathbb{R}^n . Sarà conveniente usare la notazione $\eta \div \zeta$ per significare che η e ζ sono uguali a meno di un fattore strettamente positivo, cioè che sono paralleli ed equiversi.⁸ Poiché la forma $a_{\alpha\beta|z}w^\alpha w^\beta$ è definita positiva, per arbitrari η, ζ vale la disuguaglianza di Schwarz

$$(19) \quad (a_{\alpha\beta|z}\eta^\alpha\zeta^\beta)^2 \leq a_{\alpha\beta|z}\eta^\alpha\eta^\beta a_{\gamma\delta|z}\zeta^\gamma\zeta^\delta,$$

dove l'uguaglianza si ha sse $\eta \div \zeta$. In particolare ponendo nella (19) $\eta = z$, poiché $a_{\alpha\beta|z}z^\alpha z^\beta = m^2$, abbiamo

$$(19bis) \quad m^{-2}(a_{\alpha\beta|z}z^\alpha\zeta^\beta)^2 \leq a_{\gamma\delta|z}\zeta^\gamma\zeta^\delta,$$

dove ancora l'uguaglianza vale sse $z \div \zeta$. Con $y = \psi(z)$ (vedi la (4)), usiamo l'identità, valida per ogni $z \in \Gamma^-$:

$$(20) \quad f\partial^2 f/\partial z^\alpha\partial z^\beta = a_{\alpha\beta} - (1/f^2)y_\alpha y_\beta.$$

Contraendo questa (20) con $\zeta^\alpha\zeta^\beta$ e ponendo z in luogo del generico z , abbiamo:

$$(21) \quad m\partial^2 f/\partial z^\alpha\partial z^\beta|z\zeta^\alpha\zeta^\beta = a_{\alpha\beta|z}\zeta^\alpha\zeta^\beta - [a_{\alpha\beta|z}z^\alpha\zeta^\beta]^2 m^{-2} \geq 0,$$

dove la \geq consegue dalla (19bis). Secondo la (21), la forma quadratica a 1° membro è semidefinita positiva (essendo uguale a 0 sse $\zeta \div z$.⁹).

Enunciamo adesso il teorema:

T1. «Denotando con w un arbitrario vettore non nullo di \mathbb{R}^n , la forma quadratica $f\partial^2 f/\partial z\partial z:ww$ è semidefinita positiva $\forall z \in \Gamma^{-1}$ (o equivalentemente, $\forall z \in \Gamma^-$, perché $f\partial^2 f/\partial z\partial z$ è ivi 0-omogenea), essendo nulla sse $w \div z$.»

Dim: sempre con $y = \psi(z)$, vale in Γ^- la (20). Contraiamo questa (20) con $w^\alpha w^\beta$, e decomponiamo w in una somma del tipo $v + vz$, dove v è la proiezione *secondo la direzione di z* (o *z-proiezione*) di

⁸ L'equiversità è richiesta perché η e ζ saranno supposti appartenere ad uno stesso semicono, e il parallelismo in un semicono implica l'equiversità.

⁹ Infatti se $\zeta \div z$, cioè se $\zeta = kz$ con $k > 0$, il 1° termine a 2° membro della (21) vale k^2m^2 , e il 2° termine a 2° membro vale $k^2m^4m^{-2} = k^2m^2$, qed. Si noti che per giungere alla stessa conclusione sarebbe stato sufficiente che $k \neq 0$.

w sul $(n-1)$ -piano coniugato a z (questo è possibile in un solo modo in virtù della trasversalità).

Tenendo conto delle $y \cdot z = f^2$ e $y \cdot v = 0$, otteniamo

$$(22) \quad f \partial^2 f / \partial z^\alpha \partial z^\beta w^\alpha w^\beta = v^2 f^2 + a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta - (1/f)^2 v^2 f^4 \equiv a_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta;$$

ovvero, come era da attendersi, soltanto la z -proiezione di w sul piano coniugato a z contribuisce al valore della forma quadratica in oggetto. Ora $a_{\alpha\beta}|_z v^\alpha v^\beta$ non può annullarsi per alcun $v \neq 0$ ed alcun z in Γ^- (ciò implicherebbe che $a(z) = 0$ per qualche z di Γ^- , il che è escluso dalla (17)). D'altra parte sappiamo che $a_{\alpha\beta}|_z v^\alpha v^\beta > 0$ per ogni $v \neq 0$; quindi $a_{\alpha\beta}|_z v^\alpha v^\beta > 0$ per ogni $z \in \Gamma^-$ e ogni $v \neq 0$, perché Γ^- è connesso e le $a_{\alpha\beta}$ sono ivi continue. Questa è precisamente la tesi del teorema: si è dimostrato che il 1° membro della (20) è ≥ 0 , e che l'uguaglianza a zero è valida sse $v = 0$, cioè sse $w \div z$. (In particolare, facendo $z = \underline{z}$ in (T1) si ritrova la (21).) #

Il seguente è un ovvio corollario di (T1): «sotto le stesse condizioni, la semidefinitezza positiva in Γ^- vale anche per la forma $\partial^2 f / \partial z^\alpha \partial z^\beta w^\alpha w^\beta$ perché $f > 0$ in Γ^- .»

L'interesse verso le funzioni 1-omogenee definite e positive in un semicono aperto $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ (piuttosto che nell'intero \mathbb{R}^n) non è accademico: ad esempio, per $n = 2$, la lagrangiana $L = (x^2 - y^2)^{1/2}$ (con $x =: z^1, y =: z^2$), di trasparente pertinenza alla relatività speciale, è definita e positiva nel cono (doppio semicono) $x^2 > y^2$ limitato dal mantello conico $x^2 = y^2$. In questo caso l'indicatrice $L^2 = 1$ è l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$, simmetrica rispetto agli assi x e y ed asintotica al mantello conico.¹⁰

Se L è 1-omogenea, positiva e C^2 in $D \equiv U \times \Gamma^-$ (dove Γ^- sta al solito per Γ^-_q), diventa naturale definire come distanza tra due punti q_1 e q_2 di U (aperto di \mathbb{R}^n) il minimo delle lunghezze delle curve di CdC $1 \leq q = q(t)$ tra $q_1 = q(t_1)$ e $q_2 = q(t_2)$, dove la lunghezza della generica curva è a sua volta definita come il numero (> 0 se $q_1 \neq q_2$ e nullo altrimenti, e parametro-invariante) $\int_{t_1}^{t_2} L(q, q_t) dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} [a_{\alpha\beta}(q, q_t) q_t^\alpha q_t^\beta]^{1/2} dt$, con $a_{\alpha\beta}(q, q_t)$ dato dalla (1), e per $\forall (q, q_t) \in D$. (Non è difficile verificare che la distanza così introdotta soddisfa gli assiomi metrici.) Munito di questa metrica, U si dice uno **spazio di Finsler**¹¹ (rispetto a L); e il tensore simmetrico e 0-omogeneo $a_{\alpha\beta}(q, q_t)$, per il quale la forma $a_{\alpha\beta}(q, q_t) w^\alpha w^\beta$ è positiva $\forall w \neq 0$ e $\forall (q, q_t) \in D$, si dice suo **tensore metrico**. È chiaro che se questo tensore non dipende da q_t (ma al più da q) lo spazio di Finsler in oggetto si riduce ad uno spazio di Riemann. §

¹⁰ Naturalmente in questo caso L tende a zero sul mantello conico, ma si può sempre considerare il semicono chiuso $x^2(1-\varepsilon) \geq y^2$ con $0 < \varepsilon < 1$ e lavorare su di esso, passando alla fine al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, caso per caso con le dovute precauzioni, nei risultati.

¹¹ Un testo di riferimento sugli spazi di Finsler è quello di H. Rund: "The Differential Geometry of Finsler Spaces", Springer 1959.

§4. *Funzione di eccesso, integrale indipendente, equazione di Hamilton-Jacobi nel CDV omogeneo unidim del 1° ordine.* Siano η, ζ vettori (non nulli e) distinti di Γ^- tali che l'intero segmento che li ha per estremi sia incluso in Γ^- , e per il resto arbitrari. Sotto le condizioni su f che rendono valido (T1), rappresentiamo $f(\eta)$ mediante la formula dell'incremento finito di 2° grado. Posto $\xi =: \theta\eta + (1-\theta)\zeta$ con θ in $(0,1)$ (quindi $\xi \in \Gamma^-$ per l'ipotesi), per almeno un tale θ si ha allora

$$(23) \quad f(\eta) = f(\zeta) + \partial f / \partial z|_{\zeta} \cdot (\eta - \zeta) + (1/2) \partial^2 f / \partial z \partial z|_{\xi} : (\eta - \zeta)(\eta - \zeta) = \\ = \partial f / \partial z|_{\zeta} \cdot \eta + (1/2) \partial^2 f / \partial z \partial z|_{\xi} : (\eta - \zeta)(\eta - \zeta);$$

e in forza di (T1),

$$(23bis) \quad \partial f / \partial z|_{\zeta} \cdot \eta \leq f(\eta),$$

dove l'uguaglianza si ha sse $\eta \div \zeta$.

Per λ arbitrario in $(0,1)$, poniamo $\eta' =: \lambda\eta$ in luogo di η e $\zeta' =: \lambda\eta + (1-\lambda)\zeta$ in luogo di ζ nella (23bis) (questo è lecito perché sia η' che ζ' appartengono a Γ^-). Il risultato è

$$(24_1) \quad \partial f / \partial z|_{\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta} \cdot \lambda\eta \leq f(\lambda\eta) = \lambda f(\eta).$$

Sempre nella (23bis), poniamo poi $\eta'' =: (1-\lambda)\zeta$ in luogo di η e $\zeta'' = \zeta'$ in luogo di ζ (anche questo è lecito, perché sia η'' che ζ'' appartengono a Γ^-). Il risultato è

$$(24_2) \quad \partial f / \partial z|_{\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta} \cdot (1-\lambda)\zeta \leq f((1-\lambda)\zeta) = (1-\lambda)f(\zeta).$$

Sommando le (24₁, 24₂) abbiamo

$$(25) \quad \partial f / \partial z|_{\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta} \cdot (\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta) = f(\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta) \leq \lambda f(\eta) + (1-\lambda)f(\zeta);$$

vale a dire, il valore di f in $\lambda\eta + (1-\lambda)\zeta$ è \leq di quello che ha il suo interpolante lineare tra η e ζ con gli stessi pesi. L'uguaglianza, nella (25), si ha sse $\eta \div \zeta$ (con $\eta \neq \zeta$, secondo l'ipotesi); o anche, banalmente, se $\eta = \zeta$ (in deroga all'ipotesi). In conclusione, la (25) afferma che se Γ^- è convesso,¹² f è convessa in Γ^- . Facendo $\lambda = 1/2$ nella (25), si ottiene subito:

$$(25bis) \quad f(\eta + \zeta) \leq f(\eta) + f(\zeta),$$

una disuguaglianza di tipo "triangolare" sui valori di f .

Infine se η e ζ sono sulla stessa superficie di livello di f , $f(z) = K > 0$ (cioè se $f(\eta) = f(\zeta) = K$), sempre con $\xi = \lambda\eta + (1-\lambda)\zeta$, $f(\xi) \leq \lambda f(\eta) + (1-\lambda)f(\zeta) = K$. Quindi l'intersezione del raggio passante per ξ con la superficie di livello, dove f vale K , si trova strettamente *oltre* ξ (se η e ζ non sono paralleli); che è come dire che *quella superficie è convessa*.

Tornando al problema variazionale omogeneo da cui siamo partiti, con $L(q,z)$ in luogo di $f(z)$, il termine non-negativo $(1/2) \partial^2 f / \partial z \partial z|_{\xi} : (\eta - \zeta)(\eta - \zeta)$ nella (23) è la **funzione di eccesso** (alla

¹² La possibile convessità del semicono $\Gamma^- \cup \{O\}$ si visualizza agevolmente sulla sua sezione con la sfera unitaria di centro O ; il semicono è convesso se l'arco di cerchio massimo tra due punti arbitrari della sezione è incluso nella sezione.

Weierstrass) nel CDV omogeneo, diciamo $E_{om}(q, \zeta, \eta) \equiv E_{om}(\zeta, \eta)$ sottintendendo la dipendenza da q . Infatti $E_{om}(\zeta, \eta) = L(\eta) - \partial L / \partial z|_{\zeta} \cdot \eta (\geq 0)$; confrontando questa con l'analogo (7.2.1, 40) del caso non omogeneo, cioè $E(\zeta, \eta) = L(\eta) - L(\zeta) - \partial L / \partial z|_{\zeta} \cdot (\eta - \zeta)$ (non evidenziando la dipendenza da t) si vede che $E(\zeta, \eta)$ diventa $E_{om}(\zeta, \eta)$ se L è 1-omogenea e indipendente da t .

Il significato di E_{om} si lumeggia ulteriormente come segue. Siano η e ζ su una $(n-1)$ -superficie di livello di L , $L(z) = K > 0$, e sia χ un vettore corrente di R^n . Allora l'equazione del piano tangente alla superficie in ζ è $(\circ) \partial L / \partial z|_{\zeta} \cdot \chi = K$. Sia in particolare χ^* la ζ -proiezione di η sul detto piano tangente; allora $\chi^* = \eta + \mu \zeta$ per un unico reale μ . Sostituendo l'espressione di χ^* nella (\circ) , si ha $K = \partial L / \partial z|_{\zeta} \cdot (\eta + \mu \zeta) = L(\eta) - E_{om}(\zeta, \eta) + \mu L(\zeta) = K - E_{om}(\zeta, \eta) + \mu K$, ossia $\mu K = E_{om}(\zeta, \eta)$. Si conclude così che “ $E_{om}(\zeta, \eta) \geq 0$ ” \Leftrightarrow “ $\mu \geq 0$ ”.¹³

La nozione di “lagrangiana equivalente” (vedi 7.2.1) si trasferisce immediatamente nel CDV omogeneo. Se poniamo $L^*(q, q_t) =: L(q, q_t) - \partial S / \partial q \cdot q_t$ in D per una arbitraria $S = S(q)$ in $C^1(U)$, allora L^* è 1-omogenea nelle q_t come L , gli integrali fondamentali $\int L dt$ e $\int L^* dt$ (parametro-invarianti) sono ovviamente uguali a meno di una costante additiva, i due problemi variazionali omogenei $\int L dt = \min!$ e $\int L^* dt = \min!$ sono equivalenti, e ancora le due lagrangiane L e L^* si dicono **equivalenti**, esattamente come nel caso non omogeneo. Questo è quasi banale. Ciò che non lo è altrettanto, invece, è il fatto che le funzioni di eccesso E di L e (diciamo) E^* di L^* sono uguali. Infatti $E_{om}^*(\zeta, \eta) =: L^*(\eta) - \partial L^* / \partial z|_{\zeta} \cdot \eta = L(\eta) - \partial S / \partial q^\alpha \eta^\alpha - [\partial L / \partial z|_{\zeta} \cdot \eta - \partial S / \partial q^\alpha \delta^\alpha_\beta \eta^\beta] \equiv E_{om}(\zeta, \eta)$, identicamente rispetto a q in U e a ζ, η in $\Gamma^- (\equiv \Gamma^-_q)$.

Il passaggio da L ad una *conveniente* lagrangiana equivalente L^* rende superflua, sotto una condizione più debole, la richiesta (fondamentale ai fini dei precedenti risultati) che sia $L > 0$ in $D = U \times \Gamma^-$. Ciò è dovuto al seguente teorema¹⁴

T2. Tralasciando al solito di evidenziare la dipendenza da q ove occorra, e quindi sottintendendo ovunque in quanto segue “ $\forall q \in U$ ”, «se in Γ^- esiste un $\zeta (\neq 0)$ tale che per ogni η in $\Gamma^-_1 (\equiv \Gamma^- \cap S_1)$ sia $E_{om}(\zeta, \eta) > 0$, allora si può sempre costruire una lagrangiana L^* equivalente a L per la quale $L^* > 0$ in Γ^- .»

Dim. La dimostrazione procede per disgiunzione di casi. Per il dato ζ , sia σ_1 la $(n-1)$ -semisfera unitaria di centro O e di asse $-\zeta$, completa del suo bordo equatoriale. In $\Gamma^- \cap \sigma_1$, è $E_{om}(\zeta, \eta) > 0$ per ipotesi; ed essendo $\Gamma^- \cap \sigma_1$ compatto, $E_{om}(\zeta, \eta)$ ha ivi un minimo $m > 0$. Poniamo $h =: (m/2)\zeta/|\zeta| - \partial L / \partial z|_{\zeta}$. Questo vettore h non dipende da η , e $h \cdot \eta = (m/2)(\zeta \cdot \eta)/|\zeta| + E_{om}(\zeta, \eta) - L(\eta)$. Poniamo $\partial S / \partial q =: -h$ (come è lecito perché $\partial h_\alpha / \partial q^\beta = \partial h_\beta / \partial q^\alpha$), ovvero $L^*(\eta) =: L(\eta) + h \cdot \eta = (m/2)(\zeta \cdot \eta)/|\zeta| +$

¹³ C. Caratheodory, “Über die diskontinuilichen Lösungen in der Variationsrechnung“, Dissertation, Göttingen 1904.

¹⁴ C. Caratheodory, “Über die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen”, Math. Ann. **62**, 449, 1906.

+ $E_{om}(\zeta, \eta)$. Se $\eta \div \zeta$ (caso (0)) $E_{om}(\zeta, \eta) = 0$, e $L^*(\eta) = m/2 > 0$. Se $\zeta \cdot \eta > 0$ (caso (1), cioè se η è sulla semisfera complementare $\mathbf{C}\sigma_1$ a σ_1 , senza bordo, e non è $\eta \div \zeta$), $E_{om}(\zeta, \eta) > 0$, e $L^*(\eta) > 0$. Se infine $\zeta \cdot \eta \leq 0$ (caso (2), cioè se η è su σ_1), $E_{om}(\zeta, \eta) \geq m$, e $L^*(\eta) \geq m - (m/2)|\zeta \cdot \eta|/|\zeta| \geq m - m/2 = m/2 > 0$. (La seconda \geq si deve alla $\zeta \cdot \eta/|\zeta| \geq -1$.) In conclusione, è $L^*(\eta) > 0$ in tutto Γ^{-1} , ed essendo 1-omogenea, anche in tutto Γ^{-} , qed. # Notiamo che il teorema (T2) è importante in geometria finsleriana, perché arricchisce significativamente l'insieme delle lagrangiane atte a fornire metriche finsleriane attraverso la (1).

Anche la procedura che porta all'equazione di H.J. nel caso standard non-omogeneo (vedi S.sez. 7.2.1) va ripensata se la lagrangiana è 1-omogenea (oltre che soddisfacente a tutte le altre presenti ipotesi). Consideriamo una congruenza Σ di $(n-1)$ -superfici di CdC $2 S = S(q \equiv q^{1 \leq \alpha \leq n}) = \sigma$ che riempie semplicemente il dominio U delle q sotto la condizione di non-degenerazione $\partial S/\partial q \neq 0$. Avendo definito come prima la funzione hamiltoniana $H = H(q, y)$, supporremo che $H(q, \partial S/\partial q) > 0$ in U . Questa condizione può “normalizzarsi” ponendo $n(q) =: [H(q, \partial S/\partial q(q))]^{-1}$, per cui

$$(26) \quad H(q, y'(q)) = 1,$$

con

$$(27) \quad y' = y'(q) =: n(q) \partial S/\partial q(q),$$

in U .

Sotto la biiezione canonica $y \leftrightarrow z$, la $H = 1$ definisce un campo “tangente” $z'^\alpha = z'^\alpha(q) =: a^{\alpha\beta}(q, y'(q)) y'_\beta(q)$ che è trasverso alle superfici $S = \sigma$. Infatti (al solito non evidenziando per brevità la dipendenza da q) $z'^\alpha \partial S/\partial q^\alpha = n a^{\alpha\beta}(y') y'_\alpha y'_\beta = H^2(y') = 1 > 0$. Inoltre la (26) implica che $L(q, z) = 1$, e quindi seleziona il parametro “naturale” s per il quale $d_s q \equiv q_s = z'$; vale a dire, le curve di equazione $q_s = z'(q)$ formano una congruenza Λ che riempie semplicemente U ed è trasversa alla congruenza Σ . Si noti che $d_s S = \partial S/\partial q \cdot q_s = n^{-1} y' \cdot z' = 1$. Se t è un parametro generico monotono in s lungo le stesse curve di Λ , risulta invece $d_t S = n^{-1} y' \cdot q_t$. Per costruzione, è $y' = L(z') \partial L/\partial z|_{z'} = \partial L/\partial z|_{z'}$ (sempre non evidenziando la dipendenza da q), e dunque

$$(28) \quad n d_t S = \partial L/\partial z|_{z'} \cdot q_t = L(q_t) - E_{om}(z', q_t),$$

nella quale ultima si è fatta intervenire la funzione di eccesso del caso omogeneo E_{om} . Fino a qui la congruenza Σ è sostanzialmente arbitraria. Analogamente a quanto accadeva nel caso non omogeneo, l'ipotesi che la specializza è che il fattore n sia costante sulle superfici di Σ , cioè che $n = n(S)$. Possiamo allora liberarci di n definendo $S^* = S^*(q)$ come primitiva (rispetto a S) di n secondo la $dS^* = n(S) dS$. Evidentemente la congruenza Σ^* delle $S^*(q) = \sigma^*$ coincide con la Σ (cambia soltanto la sua rappresentazione), ma la (28) si semplifica ora nella

$$(29) \quad d_t S^* = L(q_t) - E_{om}(z', q_t).$$

Integrata lungo un generico arco C $q = q(t)$ di tangente $q_t = q_t(t)$ tra punti su S^*_1 e S^*_2 , questa dà (rimettendo in evidenza anche la dipendenza da q)

$$(30) \quad S^*_2 - S^*_1 = \int_C [L(q, q_t) - E_{om}(q, z'(q), q_t)] dt.$$

D'altra parte la stessa (29), integrata lungo un arco \underline{C} con q_t parallela-equiversa a z' ($q_t \div z'$), dove $E_{om} \equiv 0$, dà

$$(30bis) \quad S^*_2 - S^*_1 = \int_{\underline{C}} L(q, q_t) dt,$$

e quindi la (30) si può riscrivere come

$$(31) \quad \int_C L(q, q_t) dt = \int_{\underline{C}} L(q, q_t) dt + \int_C E_{om}(q, z'(q), q_t) dt \geq \int_{\underline{C}} L(q, q_t) dt.$$

Qui la disuguaglianza riflette la $E_{om}(\zeta, \eta) \geq 0$ (con l'uguaglianza valida sse $\zeta \div \eta$). Si conclude che l'integrale è minimo lungo la curva che ha q_t parallelo-equiverso a z' ; o se si usa il parametro naturale s , che ha $q_s = z'$.

Si verifica che tale curva è una estemale, cioè che le $y' = y'(s)$ soddisfano le equazioni canoniche (15₂). Questo è quasi immediato. Poiché $y' = \partial S^*/\partial q$, $d_s y' \equiv y'_s = \partial^2 S^*/\partial q \partial q \cdot q_s$. Ma $d_s q \equiv q_s = \partial H/\partial y|_{y'}$ (identità canoniche (15₁)), e quindi $y'_s = \partial^2 S^*/\partial q \partial q \cdot \partial H/\partial y|_{y'}$. Inoltre la (26) si può ormai scrivere come $H(q, \partial S^*/\partial q) = 1$ (**equazione di H.J.** del caso omogeneo). Differenziando quest'ultima rispetto a q , risulta $0 = \partial H/\partial q + \partial H/\partial y|_{y'} \cdot \partial^2 S^*/\partial q \partial q = \partial H/\partial q + y'_s$, qed.

Altrettanto immediata è l'identificazione di un **integrale indipendente** (alla Hilbert) per il presente caso omogeneo: poiché $\int_C \partial S^*/\partial q \cdot q_t dt = S^*_2 - S^*_1$, l'integrale non dipende da C . Essendo $y' = \partial S^*/\partial q$, l'integrale indipendente è quindi $J_{om} =: \int_C y' \cdot q_t dt = \int_C \partial L/\partial z|_{z'} \cdot q_t dt$. L'integrale indipendente del caso non omogeneo (7.2.1, 36) si riscrive come $J = \int_C [L(f) + \partial L/\partial q_t|_f (q_t - f)] dt$ se vi si sostituiscono le $\partial S/\partial q$ con le $\partial L/\partial q_t|_f$. Se qui si suppone L 1-omogenea, il primo e l'ultimo addendo dell'integranda si elidono, e J si riduce a $\int_C \partial L/\partial q_t|_f \cdot q_t dt$. È significativo che questa coincida con il precedente risultato per J_{om} ; basta osservare che $f(t, q)$ si riduce a $z'(q)$ nel caso omogeneo. La parametro-invarianza di J_{om} è ovvia. Ancora una osservazione riguarda la precedente ipotesi che L (e quindi H) sia positiva nel suo dominio, e che può rendersi un po' più flessibile: ciò che è veramente importante è infatti che $H(q, \partial S/\partial q)$ non sia mai nulla, e quindi di segno costante, in U . Se poi, contrariamente al caso più sopra esaminato, $H(q, \partial S/\partial q)$ venisse supposta < 0 in U , si otterrebbero sviluppi completamente analoghi ai precedenti al prezzo di alcuni cambiamenti di segno; ad esempio, l'equazione di H.J. diventerebbe $H(q, \partial S^*/\partial q) = -1$, ecc. §

7.3.2) PROBLEMI OMOGENEI MULTIDIM (CENNI)

Come prevedibile, le complicazioni e le vere e proprie difficoltà aumentano sensibilmente passando dal CDV omogeneo (del 1° ordine) unidim al corrispondente CDV multidim. Si tratta di un oggetto matematico importante, che tuttavia riteniamo troppo specialistico per essere illustrato in sufficiente dettaglio in un libro come questo. Innanzitutto parleremo di problema variazionale “omogeneo” se l’integrale di base $\int_{\Omega} F(x, u, v) d(x)$ è invariante a fronte di un 1-diffeomorfismo congruente $x = x(x') \leftrightarrow x' = x'(x)$. Qui x sta per $x^{1 \leq i \leq m}$, $m > 1$, u per $u^{1 \leq \alpha \leq n}$, $n \geq 1$, v per $v^{1 \leq \alpha \leq n}_{1 \leq j \leq m} \equiv \partial u^{\alpha} / \partial x^j$, e $d(x)$ ha il solito significato.

Ci limiteremo ad esaminare condizioni *sufficienti* ad assicurare tale invarianza, e cioè: (i) F (supposta regolare quanto basta ai prossimi sviluppi) non dipende esplicitamente da x ; e (ii) vale la (7.2.9), cioè la moltiplicazione di v , in F , per una $(m \times m)$ matrice (con elementi ad indici latini) b , a determinante $B > 0$ e per il resto arbitraria equivale alla moltiplicazione di F per B :

$$(1) \quad F(u, b \circ v) = BF(u, v),$$

dove \circ denota prodotto matriciale standard. Questa è una estensione naturale della analoga richiesta del caso unidim ($m = 1$), cioè del carattere positivamente omogeneo di grado 1 di F rispetto a alla v , alla quale si riduce banalmente facendo $m = 1$ nella (1). Nel seguito sottintenderemo di norma la dipendenza di F dalla variabile “passiva” u , per cui ad esempio la (1) stessa si semplificherà in $F(b \circ v) = BF(v)$. Porremo $w =: b \circ v$, cioè in notazione indiciale

$$(3) \quad w_h^{\alpha} = b_{hk} v_k^{\alpha},$$

dove si deve sommare da 1 a m sugli indici latini ripetuti. Similmente, nelle formule in cui compaiono indici greci ripetuti si sommerà da 1 a n su di essi. Converremo infine di scrivere sempre in alto gli indici greci e sempre in basso quelli latini.

Affermiamo che se $F > 0$ nel suo dominio, il sistema di equazioni

$$(4) \quad v_k^{\alpha} \partial F / \partial v_i^{\alpha} = F \delta_{ik}$$

equivale alla (1). Cominciamo col dimostrare l’implicazione (1) \Rightarrow (4). Deriviamo la (1) rispetto al generico elemento b_{ij} di b , ricordando che $\partial B / \partial b_{ij} = B_{ij}$, complemento algebrico di b_{ij} , e che $b_{kt} B_{it} = B \delta_{ik}$. Abbiamo $\partial F / \partial b_{ij} = \partial F / \partial w_h^{\alpha} \partial w_h^{\alpha} / \partial b_{ij} = B_{ij} F$. Ora $\partial w_h^{\alpha} / \partial b_{ij} = v_k^{\alpha} \partial b_{hk} / \partial b_{ij} = v_k^{\alpha} \delta_{ih} \delta_{jk} = v_j^{\alpha} \delta_{ih}$, e quindi è $\partial F / \partial b_{ij} = \partial F / \partial w_h^{\alpha} v_j^{\alpha} \delta_{ih} = \partial F / \partial w_i^{\alpha} v_j^{\alpha} = B_{ij} F$. Moltiplicando quest’ultima per b_{kj} abbiamo a sinistra $\partial F / \partial w_i^{\alpha} w_k^{\alpha}$ e a destra $\delta_{ik} B F$, cioè $\partial F / \partial w_i^{\alpha} w_k^{\alpha} = \delta_{ik} B F$. Quest’ultima deve valere per ogni b ; se in particolare vi facciamo $b = \Delta$ ($(m \times m)$ -matrice unitaria) allora $w = v$ e $B = 1$, per cui concludiamo che $\partial F / \partial v_i^{\alpha} v_k^{\alpha} = \delta_{ik} F$. Questa è precisamente la (4), e l’implicazione (1) \Rightarrow (4) è così provata. (Si noti che nella dimostrazione non si è utilizzata la condizione $F > 0$.)

A prima vista, l'implicazione (4) \Rightarrow (1) sorprende un po' perché la sua opposta è stata ottenuta con la specializzazione $b = \Delta$. Si intuisce anche che la relativa dimostrazione debba essere più laboriosa della precedente, dovendo comportare una integrazione. Torniamo dunque alla (4); tenendo presente che essa deve valere per v arbitraria sostituiamo in essa v con w . Otteniamo così

$$(5) \quad \partial F / \partial w_i^\alpha (w) w_k^\alpha = F(w) \delta_{ik}.$$

Il 1° membro di questa può scriversi $\partial F / \partial b_{hi}(w) b_{hk}$, per cui la (5) diventa

$$(6) \quad \partial F / \partial b_{hi}(w) b_{hk} = F(w) \delta_{ik}.$$

Contraendo la (6) con B_{pk} , otteniamo a sinistra $\partial F / \partial b_{hi}(w) \delta_{hp} B = \partial F / \partial b_{pi}(w) B$ e $F(w) \partial B / \partial b_{pi}$ a destra, quindi

$$(7) \quad \partial(\ln F) / \partial b_{pi} = \partial(\ln B) / \partial b_{pi}$$

(si ricordi che tanto F quanto B sono positive per ipotesi). La (7) si integra immediatamente tra $b = \Delta$ (limite inferiore) e b , ottenendo

$$(8) \quad [\ln F]_{b=\Delta}^b = [\ln B]_{b=\Delta}^b,$$

che è come dire $F(w)/F(v) = B(b)/B(\Delta) \equiv B$. Questa è la (1), e la tesi è completamente dimostrata.

Si noti che se $m = 1$ la (4) si riduce alla

$$(4bis) \quad v^\alpha \partial F / \partial v^\alpha = F(v),$$

relazione di Eulero per F ; quindi F è 1-omogenea. ovvero $(^+) F(b'v) = b'F(v)$, dove con b' abbiamo denotato l'unico elemento (> 0) della matrice b . L'uguaglianza in $(^+)$ segue dalla (1), perché $\det b = b'$.

Sulla base della equivalenza (1) \Leftrightarrow (4) la (4) è talvolta nominata come **condizione canonica di 1-omogeneità multidim** (su F). Questa nozione è importante, ed appunto da essa, piuttosto che dalla (1), partono molti degli sviluppi del CDV multidim omogeneo. Ad esempio, derivando la (4) rispetto a v_h^β abbiamo

$$(9) \quad v_j^\alpha \partial^2 F / \partial v_h^\beta \partial v_i^\alpha + \delta_j^h \partial F / \partial v_i^\beta - \delta_j^i \partial F / \partial v_h^\beta = 0.$$

Qui le due δ di Kronecker possono essere eliminate mediante la stessa (4) se F è supposto $\neq 0$. Facendo le sostituzioni e moltiplicando tutto per F si trova

$$(10) \quad [F \partial^2 F / \partial v_h^\beta \partial v_i^\alpha + \partial F / \partial v_i^\beta \partial F / \partial v_h^\alpha - \partial F / \partial v_h^\beta \partial F / \partial v_i^\alpha] v_j^\alpha = 0.$$

Per $m = 1$, il secondo e il terzo addendo entro le [] si elidono, e restiamo con

$$(10bis) \quad v^\alpha F \partial^2 F / \partial v^\beta \partial v^\alpha = 0.$$

Poiché al solito $v \neq 0$, la (10bis) comporta la $\det\{\partial^2 F / \partial v^\beta \partial v^\alpha\} = 0$, relazione che ben conosciamo (vedi (7.2.1, 7)). Osserviamo infine che la condizione canonica di 1-omogeneità è fonte di alcuni suggerimenti per passare al CDV multidim di ordine superiore al primo.

È interessante esaminare come interagiscono le (4) con il sistema delle equazioni di EL $E_\alpha F \equiv \partial F / \partial u^\alpha - \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial v^\alpha_i) = 0$, $\alpha = 1 \div n$. Moltiplichiamo $E_\alpha F$ per v^α_j , osservando che $v^\alpha_j \partial^* / \partial x^i (\partial F / \partial v^\alpha_i) = \partial^* / \partial x^i (v^\alpha_j \partial F / \partial v^\alpha_i) - \partial^2 u^\alpha / \partial x^i \partial x^j \partial F / \partial v^\alpha_i = \partial^* F / \partial x^j - \partial^2 u^\alpha / \partial x^j \partial x^i \partial F / \partial v^\alpha_i$ in forza delle (4), ed avendo assunto le u di CdC 2. Ma $\partial^* F / \partial x^j = v^\alpha_j \partial F / \partial u^\alpha + \partial^2 u^\alpha / \partial x^j \partial x^i \partial F / \partial v^\alpha_i$, e pertanto

$$(11) \quad v^\alpha_j E_\alpha F \equiv 0$$

per ogni $j = 1, \dots, m$. Si conclude così che, in conseguenza del supposto carattere 1-omogeneo di F , m combinazioni lineari, con coefficienti v^α_j , delle n differenze euleriane $E_\alpha F$ sono automaticamente nulle. Quindi al più $n - m$ di queste differenze sono indipendenti se (come dovremo supporre) $n > m$. Questo risultato generalizza in modo del tutto ragionevole quanto già conosciamo relativamente al caso unidim omogeneo (ortogonalità di Weierstrass).

L'operatore di d'Alembert con numero arbitrario di coordinate spaziali x , diciamo $\nabla_x^2 - |V|^{-2}\partial^2/\partial t^2$, con $\nabla_x^2 \equiv$ laplaciano nelle x (nel seguito, ∇_x sarà scritto ∇), ha in evidenza una celerità tipica, per ipotesi costante e uniforme $|V| > 0$. Il significato di questa celerità è immediatamente chiaro nel caso di una sola dimensione spaziale: come è ben noto, la soluzione generale $u = u(x,t)$ della associata equazione omogenea, $\partial^2 u/\partial x^2 - |V|^{-2}\partial^2 u/\partial t^2 = 0$, è infatti

$$(1) \quad u(x,t) = f_-(t+x/|V|) + f_+(t-x/|V|),$$

dove f_- e f_+ sono funzioni arbitrarie di CdC 2 del loro argomento su tutta la retta reale. Il primo [il secondo] addendo di cui si compone u può vedersi come curva del piano (ξ, η) di equazione $\eta = f_-(\xi)$ [$\eta = f_+(\xi)$] rigidamente traslante lungo (e nel verso del) l'asse $(-\xi)$ [l'asse (ξ)] con velocità $|V|$. Questo fatto si può porre in migliore evidenza immaginando che f_- [f_+] sia C^2 ovunque salvo che in un punto, ove presenta una discontinuità nella derivata seconda. Tale punto di discontinuità del 2° ordine appare allora traslare con velocità $|V|$ lungo l'asse $(-\xi)$ [l'asse (ξ)], mentre l'equazione resta separatamente soddisfatta dalle due parti del punto di discontinuità mobile.

§1. *Discontinuità del 1° ordine.* Celerità tipiche sono spesso collegate a EDP o SDP quasi-lineari in $m \geq 2$ variabili indipendenti, delle quali le prime $n = m - 1$ si interpretano come coordinate spaziali, e la rimanente m -ma come tempo. Consideriamo una famiglia ad un parametro $t \in \mathbb{R}$ di $(n-1)$ -superfici embedded¹ in \mathbb{R}^n di equazione

$$(2) \quad \tau(x,t) = 0,$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, e τ è di CdC 1 in un intorno aperto $A \subset \mathbb{R}^m$ di un punto-base (\underline{x}, t) (quindi $\tau(\underline{x}, t) = 0$, ove è $\nabla\tau \neq 0$). L'analisi che segue ha dunque carattere locale, e va riferita ad un intorno aperto del punto-base. Se interpretiamo t come tempo, la (2) descrive una $(n-1)$ -superficie mobile in \mathbb{R}^n .² Il rapporto $-(\partial\tau/\partial t)/|\nabla\tau|$ (che ha dimensione di una velocità), definito in A , si dice **velocità di avanzamento normale (VAN) nel verso di $\nabla\tau$** , di questa $(n-1)$ -superficie mobile, e sarà denotata con $V = V(x,t)$.³

¹ In forza dell'omeomorfismo, la condizione di embedding garantisce che la superficie non presenti autointersezioni.

² L'argomento degenera se $n = m - 1$, nel senso che la superficie mobile degenera in un punto.

³ La definizione si spiega immediatamente. Posto per brevità $(\underline{x}, t) = (0,0)$, diciamo S_0 la superficie mobile al tempo $t = 0$ (quindi di equazione $\tau(x,0)$ in A), e S_t la stessa superficie al tempo t abbastanza prossimo a $t = 0$, di equazione $\tau(x,t) = 0$. L'equazione di S_t può anche scriversi come (*) $\tau(x+v(x,0)\delta(x,t), t) = 0$, dove $v(x,t) =: (\nabla\tau/|\nabla\tau|)(x,t)$ è la normale a S_0 orientata come $\nabla\tau$, nel punto x di S_0 (abbastanza vicino a $x = 0$) e $\delta(x,t)$ è la distanza tra S_t e S_0 misurata

Sia adesso $f = f(x)$ una funzione reale di $x \in \mathbb{R}^m$ definita e di CdC 1 in un intorno di un punto-base $x = \underline{x} = 0$ salvo che attraverso una $(m-1)$ -superficie Σ di equazione $\tau(x) = 0$ definita e di CdC 1 intorno al punto-base (quindi $\tau(0) = 0$), perché le sue derivate prime $\partial f / \partial x^k$ ($k = 1, \dots, m$) fanno in generale dei salti $\Delta(\partial f / \partial x^k)$ attraverso Σ . Diremo Σ una **superficie di discontinuità del 1° ordine per f** . Ovviamente il tipo di discontinuità considerato non può riguardare le derivate di f tangenti a Σ , e quindi dovrà essere

$$(3) \quad \Delta(\partial f / \partial x^k) = \lambda \partial \tau / \partial x^k$$

su Σ intorno al punto-base, per un fattore $\lambda = \lambda(x)$ definito e continuo su Σ (intorno al punto-base). In particolare λ può essere nullo nel suo dominio di definizione: allora f è banalmente C^1 intorno al punto-base, e Σ cessa di essere superficie di discontinuità. (L'ipotesi $\nabla \tau \neq 0$ nel punto-base implica che le $\partial \tau / \partial x^k$ non siano tutte nulle in esso, e quindi nel suo intorno di interesse). Le m uguaglianze (3) si dicono **condizioni di congruenza per le discontinuità (del 1° ordine) di f** .

Supponiamo adesso che, nel solito intorno del punto-base, f soddisfi la EDP quasi-lineare del 1° ordine (somma su k da 1 a m)

$$(4) \quad a^k \partial f / \partial x^k + F = 0,$$

dove il vettore a e lo scalare F sono funzioni continue dei loro argomenti (x, f) . Ci proponiamo di studiare le possibili superfici di discontinuità del 1° ordine di f . Scrivendo la (4) da una parte e dall'altra di una tale superficie, che supporremo descritta dalla $\tau(x, t) = 0$, e facendo la differenza, ricaviamo $0 = a^k \Delta(\partial f / \partial x^k)$. Quindi $a^k \lambda \partial \tau / \partial x^k = 0$ in forza delle condizioni di congruenza (3). Se escludiamo il caso banale $\lambda = 0$, abbiamo

$$(5) \quad a^k \partial \tau / \partial x^k \equiv a \cdot \nabla \tau = 0,$$

dove \cdot è il solito prodotto scalare in \mathbb{R}^m . Il campo vettoriale a è quindi ovunque tangente alla superficie di discontinuità (essendo per ipotesi $\nabla \tau \neq 0$). Si noti che questa condizione definisce la superficie stessa in senso "assoluto" (\equiv indipendente dalla soluzione f) sse la (4) è *semilineare*, cioè se le a sono indipendenti da f .

I precedenti risultati si specializzano immediatamente al caso in cui le prime $m-1$ variabili indipendenti siano pensate come coordinate spaziali cartesiane e la m -ma come tempo t . Allora la (4) si riscrive come

$$(4bis) \quad a^k \partial f / \partial x^k + \alpha \partial f / \partial t + F = 0,$$

lungo la retta orientata di versore $v(x, 0)$ e passante per x . È chiaro che $\partial \delta / \partial t$ è la velocità con cui S_t avanza normalmente a se stessa, positiva se equivale a $\nabla \tau$, al tempo $t = 0$: derivando rispetto a t la (*), si ha infatti $\partial \tau / \partial t + |\nabla \tau| \partial \delta / \partial t = 0$, cioè $\partial \delta / \partial t = -(\partial \tau / \partial t) / |\nabla \tau| = V$.

(somma su k da 1 a $n = m-1$), dove α e F sono scalari, e a è un vettore n -dim, per ipotesi funzioni continue date di (x,t,f) . Sempre supponendo $\nabla\tau \neq 0$ nel punto-base, la (5) diventa

$$(5bis) \quad a \cdot \nabla\tau + \alpha \partial\tau/\partial t = 0,$$

dove adesso \cdot è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^{n=m-1}$; ovvero, posto ancora $v =: \nabla\tau/|\nabla\tau|$,

$$(6) \quad a \cdot v = -\alpha \partial\tau/\partial t / |\nabla\tau| = \alpha V.$$

Vale a dire: la componente di a su v uguaglia il prodotto di α per la VAN della superficie di discontinuità (del 1° ordine) di f . La superficie di discontinuità $\tau = 0$ si dice anche, comunemente, **fronte di discontinuità** (FDD). Si ha ancora una definizione assoluta del FDD sse la EDP (5bis) è semilineare.

Supponiamo adesso che in luogo della EDP (5bis) nell'unica incognita f si abbia un SDP di $n \geq 2$ equazioni analoghe in altrettante incognite $f_{1 \leq r \leq n}$ (cioè in un vettore incognito n -dim), quindi del tipo

$$(7) \quad a^{ikr} \partial f_r / \partial x^k + \alpha^{ir} \partial f_r / \partial t + F^i = 0,$$

con $i, k, r = 1, \dots, n$ (somma su r e su k). In luogo delle (3) si dovranno scrivere le $n(n+1)$ condizioni di congruenza

$$(8_1) \quad \Delta(\partial f_r / \partial x^k) = \lambda_r \partial\tau / \partial x^k$$

$$(8_2) \quad \Delta(\partial f_r / \partial t) = \lambda_r \partial\tau / \partial t,$$

dove λ_r è un vettore n -dim, continuo sul FDD. Ancora scrivendo il SDP (7) dalle due parti del FDD e facendo la differenza, si ottiene il sistema lineare omogeneo nelle λ_r : $(a^{ikr} \partial\tau / \partial x^k + \alpha^{ir} \partial\tau / \partial t) \lambda_r = 0$.

La condizione che λ non sia nullo impone allora l'equazione determinante:

$$(5ster) \quad \det\{a^{ikr} v_k |\nabla\tau| + \alpha^{ir} \partial\tau / \partial t\}_{i,r=1 \div n} = 0.$$

Sempre per $\nabla\tau \neq 0$, se $\det\{\alpha^{ir}\} \neq 0$ (per la f considerata, e nel punto-base), la (5ster) è una equazione algebrica di grado n in $V =: -\partial\tau / \partial t / |\nabla\tau|$, e quindi dà per questo rapporto n valori generalmente complessi, dei quali soltanto quelli reali, come è ovvio, possono essere accettati come VAN dei relativi FDD del 1° ordine. §

§2. *Applicazione al campo elettromagnetico.* Un'applicazione di grande interesse fisico di questa teoria del 1° ordine è quella al sistema di equazioni di Maxwell in mezzi a polarizzazione lineare e generalmente anisotropa che trascriviamo qui per maggiore comodità:

$$(9a) \quad \nabla \times E + \partial_t B = 0,$$

$$(9b) \quad \nabla \times H - \partial_t D = j.$$

A queste, si devono aggiungere i vincoli lineari

$$(10) \quad D = \varepsilon \cdot E, \quad B = \mu \cdot H,$$

dove ε e μ sono 2-tensori non singolari, funzioni regolari assegnate del posto e del tempo, e \cdot è il prodotto interno 3-dim. Poiché le discontinuità (attraverso il FDD $\tau(x,t) = 0$) che si devono considerare sono quelle delle derivate prime dei vettori E e H , le relative condizioni di congruenza sono date, in notazione indiciale, dalle

$$(11a) \quad \Delta E_{j/k} = e_j \tau_{/k}, \quad \Delta \partial_t E_j = e_j \partial_t \tau,$$

$$(11b) \quad \Delta H_{j/k} = h_j \tau_{/k}, \quad \Delta \partial_t H_j = h_j \partial_t \tau,$$

dove ($j, k = 1, 2, 3$) e e_j, h_j sono moltiplicatori arbitrari.

Differenziando le (9) attraverso il FDD, e scrivendo η in luogo di ε per evitare bisticci notazionali con il 3-tensore di Ricci, abbiamo le sei equazioni lineari nei sei moltiplicatori e_j, h_j :

$$(12a) \quad \varepsilon_i^{kj} v_k e_j - V \mu_r^j h_j = 0,$$

$$(12b) \quad \varepsilon_i^{kj} v_k h_j + V \eta_r^j e_j = 0,$$

dove abbiamo introdotto la VAN $V = -\partial_t \tau / |\nabla \tau|$ e la normale al FDD $v = \nabla \tau / |\nabla \tau|$ (sotto $\nabla \tau \neq 0$). Le (12) mostrano che le discontinuità delle derivate dei campi D e B (cioè le trasformate lineari di quelle delle derivate di E e H) sono perpendicolari a v ; e quindi, sono tangenziali al FDD o “trasversali”. Per ottenere l’equazione di criticità su V , conviene eliminare le h_j mediante le (12a) (oppure le e_j mediante le (12b)). Ad esempio nel primo caso, introducendo i 2-tensori reciproci $\underline{\mu}$ di μ e $\underline{\eta}$ di η (cioè, $\underline{\mu}_j^r \mu_r^q = \underline{\eta}_j^r \eta_r^q = \delta_j^q$), siamo ridotti alle tre equazioni

$$(13) \quad [\underline{\eta}_r^i \varepsilon_i^{kj} \underline{\mu}_j^p \varepsilon_p^{sh} v_k v_s + V^2 \delta_r^h] e_h = 0$$

nelle e_h . La condizione che la (13) abbia soluzioni non banali implica l’annullarsi del relativo determinante. Si ottiene così un’equazione di 3° grado in V^2 , della quale ovviamente le sole radici $V^2 \geq 0$ sono accettabili.

Se il mezzo è isotropo, $\underline{\eta}_j^r = \eta^{-1} \delta_j^r$ e $\underline{\mu}_j^r = \mu^{-1} \delta_j^r$ (dove η e μ sono i coefficienti di permeabilità elettrica e magnetica), e le (13) diventano

$$(13bis) \quad [(\eta\mu)^{-1} \varepsilon_r^{kj} \varepsilon_j^{sh} v_k v_s + V^2 \delta_r^h] e_h = 0.$$

In forza delle proprietà del tensore di Ricci, l’equazione per V^2 è allora

$$(14) \quad \det\{(\eta\mu)^{-1}(v_r v^h - \delta_r^h) + V^2 \delta_r^h\} = 0.$$

Questa ha due radici positive coincidenti e una radice nulla; le prime sono date dalla $V^2 = (\eta\mu)^{-1}$ contata due volte, perché $\det\{v_r v^h\} \equiv 0$ per qualunque vettore v . Quanto alla radice nulla, essa viene dall’essere $\det\{v_r v^h - \delta_r^h\} \equiv 0$ per qualunque *versore* v .⁴

⁴ In questo caso lineare isotropo, la doppia radice $V^2 = (\eta\mu)^{-1}$ si mette in evidenza anche con la seguente semplice procedura diretta. Supponendo costanti (sia rispetto a x che a t) le due permeabilità, si prenda il rotore della (9a) eliminando poi $\partial_t \nabla \times H$ mediante la (9b) e tenendo conto della prima (10) e della $\nabla \cdot D = \rho$ (\equiv densità di carica): si ottiene la d’Alembertiana (vettoriale) forzata $\nabla^2 E - \eta\mu \partial_t^2 E = \mu \partial_t j + \nabla \rho / \eta$. Similmente si prenda il rotore della (9b) eliminando $\partial_t \nabla \times E$ mediante la (9a) e tenendo conto della seconda (10) e della $\nabla \cdot B = 0$: si ottiene la d’Alembertiana forzata $\nabla^2 H - \eta\mu \partial_t^2 H = -\nabla \times j$. Entrambe queste equazioni esibiscono una VAN² pari a $(\eta\mu)^{-1}$, qed. Inoltre, e come ci si aspetta,

Tornando alle (13), va detto che in realtà una anisotropia della polarizzazione magnetica lineare si incontra di rado negli usuali modelli fenomenologici. Supponendo dunque $\underline{\mu}_j^r = \mu^{-1}\delta_j^r$, l'equazione determinante per V^2 si semplifica, e si ottiene:

$$(14\text{bis}) \det\{\mu^{-1}(v_t v^h - \delta_t^h) + V^2 \eta_t^h\} = 0,$$

che a sua volta si riduce immediatamente alla (14) se $\eta_j^r = \eta^{-1}\delta_j^r$. In forza della $\det\{v_t v^h - \delta_t^h\} \equiv 0$, anche questa ha una radice $V^2 = 0$; e inoltre, si può dimostrare che le altre due radici, ormai diverse in generale, sono ancora positive. L'anisotropia della polarizzazione elettrica lineare è abbastanza comune nei solidi cristallini. §

§3. *Discontinuità di ordine* $p > 1$. La teoria del 1° ordine si può estendere senza difficoltà allo studio dei FDD della soluzione di una EDP o di un SDP quasi lineare del 2° ordine in m variabili indipendenti, con la solita interpretazione di queste ultime. Riferendoci per cominciare al caso di una sola incognita f di CdC 2 salvo che attraverso il FDD, è facile giustificare le seguenti condizioni di congruenza del 2° ordine:

$$(15_1) \Delta(\partial^2 f / \partial x^h \partial x^k) = \lambda_h \partial \tau / \partial x^k \equiv \lambda_k \partial \tau / \partial x^h,$$

$$(15_2) \Delta(\partial^2 f / \partial t \partial x^k) = \lambda \partial \tau / \partial x^k \equiv \lambda_k \partial \tau / \partial t,$$

$$(15_3) \Delta(\partial^2 f / \partial t^2) = \lambda \partial \tau / \partial t,$$

(per $k, h = 1, \dots, n$), dove λ e λ_k sono uno scalare e un vettore n -dim arbitrari entro i vincoli derivanti dalle identità nelle (15_{1,2}). A questi vincoli si soddisfa ponendo $\lambda_k = \mu \partial \tau / \partial x^k$ e $\lambda = \mu \partial \tau / \partial t$,⁵ dove μ è ora un fattore veramente arbitrario, continuo lungo il FDD. Abbiamo così

$$(15_{1\text{bis}}) \Delta(\partial^2 f / \partial x^h \partial x^k) = \mu \partial \tau / \partial x^h \partial \tau / \partial x^k,$$

$$(15_{2\text{bis}}) \Delta(\partial^2 f / \partial t \partial x^k) = \mu \partial \tau / \partial t \partial \tau / \partial x^k,$$

$$(15_{3\text{bis}}) \Delta(\partial^2 f / \partial t^2) = \mu (\partial \tau / \partial t)^2.$$

Scriviamo la EDP quasi-lineare del 2° ordine in f come

$$(16) \gamma^{hk} \partial^2 f / \partial x^h \partial x^k + 2\beta^k \partial^2 f / \partial t \partial x^k + \alpha \partial^2 f / \partial t^2 + \dots = 0,$$

dove γ^{hk} , β^k , α sono funzioni continue di $(x, t, f, \partial f / \partial x^{1 \leq h \leq n}, \partial f / \partial t)$ attraverso il FDD $\tau(x, t) = 0$, e i puntini rappresentano termini che non contengono derivate seconde di f . Differenziando la (16) attraverso il FDD e richiedendo $\mu \neq 0$, otteniamo l'equazione di 2° grado in $V =: -\partial \tau / \partial t / |\nabla \tau|$:

prendendo le loro divergenze si ottengono delle identità: ciò è immediato per la seconda, e si verifica subito anche per la prima tenendo conto della equazione di continuità $\nabla \cdot j + \partial_t \rho = 0$. Incidentalmente, possiamo calcolare la dimensione delle grandezze di interesse in unità Giorgi. Al solito scegliendo L (lunghezza), T (tempo), M (massa), Q (carica) come grandezze fondamentali, risulta $E =_{\text{dim}} LT^{-2}MQ^{-1}$, $D =_{\text{dim}} L^{-2}Q$, $H =_{\text{dim}} L^{-1}T^{-1}Q$, $B =_{\text{dim}} T^{-1}MQ^{-1}$; queste derivano dal significato fisico delle (9), secondo il quale E è una forza/carica (e naturalmente, ρ è una densità di carica ($=_{\text{dim}} L^{-3}Q$) o equivalentemente j è un flusso di carica ($=_{\text{dim}} L^{-2}T^{-1}Q$), e quindi ρE e jB sono delle densità di forza ($=_{\text{dim}} L^{-2}T^{-2}M$). Segue che $\eta =_{\text{dim}} L^{-3}T^2M^{-1}Q^2$ e $\mu =_{\text{dim}} LMQ^{-2}$; cioè, che $\eta\mu =_{\text{dim}} L^{-2}T^2$, come deve essere. In pratica, si misura μ e si calcola η mediante la $(\eta\mu)^{-1/2} =$ celerità della luce, perché quest'ultima si misura molto più agevolmente di η .

⁵ Infatti $\lambda \partial \tau / \partial x^k = \mu \partial \tau / \partial t \partial \tau / \partial x^k \equiv \lambda_k \partial \tau / \partial t$ e $\lambda_h \partial \tau / \partial x^k = \mu \partial \tau / \partial x^h \partial \tau / \partial x^k \equiv \lambda_k \partial \tau / \partial x^h$.

$$(17) \quad \alpha V^2 - 2\beta_{(v)}V + \gamma_{(v)} = 0,$$

dove $\beta_{(v)} =: v \cdot \beta$, e $\gamma_{(v)} =: vv : \gamma (\equiv v_h v_k \gamma^{hk})$ e dove v è al solito la normale al FDD. Le due radici sono reali se $(\beta_{(v)})^2 - \alpha\gamma_{(v)} \geq 0$; se questa condizione è soddisfatta, le due radici, che scriveremo V_+ e V_- , sono date da

$$(18) \quad \alpha V_{\pm} = \beta_{(v)} \pm (\beta_{(v)}^2 - \alpha\gamma_{(v)})^{1/2}$$

Applicata ad una equazione $(n+1)$ -dim generalmente non omogenea del tipo $(^+) V_*^2 \nabla^2 f - \partial^2 f / \partial t^2 = g$ (intendendosi che $V_*^2 > 0$ e g siano continue attraverso il FDD $\tau(x,t) = 0$), quindi con $\gamma^{hk} = V_*^2 \delta^{hk}$, $\beta^k = 0$, $\alpha = -1$, questa dà $V_{\pm} = \pm |V_*|$: il coefficiente V_*^2 in fronte al laplaciano nella $(^+)$ (che ha dimensione velocità²) fornisce quindi con $\pm |V_*|$ i due valori uguali e opposti della VAN dei FDD. Per $n = 1$, si ricade nel caso elementare esplicitamente ricordato all'inizio della sottosezione, vedi la (1). È anche immediato verificare che se l'equazione $(^+)$ avesse avuto un $-V_*^2$ in luogo del V_*^2 , avremmo trovato $V_{\pm} = \pm i|V_*|$, ovvero delle VAN *immaginarie*. Questo è ben naturale, in quanto l'equazione di partenza sarebbe stata ellittica.

Passando al caso di un SDP del 2° ordine del tipo (16), ma con una incognita *vettoriale* n -dim f_r ($r = 1, \dots, n$), occorrerà aggiungere indici $(^{ir})$ in γ^{hk} , β^k , e α , e un indice $(_r)$ in λ , λ_k e μ . Invece del prodotto di μ per il 1° membro della (17), avremo ora il prodotto contratto (somma rispetto a r da 1 a n) di μ_r per $\gamma^{irhk} v_h v_k - 2\beta^{irk} V v_k + \alpha^{ir} V^2$, e quindi la condizione che non sia $\mu_r = 0 \forall r$ è:

$$(19) \quad \det\{\alpha^{ir} V^2 - 2\beta^{ir}_{(v)} V + \gamma^{ir}_{(v)}\} = 0,$$

dove $\beta^{ir}_{(v)} =: \beta^{irk} v_k$ e $\gamma^{ir}_{(v)} =: \gamma^{irhk} v_h v_k$. Se $\det\{\alpha^{ir}\} \neq 0$, questa è una equazione algebrica di grado $2n$ in V , e al solito delle sue $2n$ radici (a priori dipendenti da v) soltanto quelle reali sono accettabili come VAN.

Applichiamo questo risultato alle equazioni delle (piccole) vibrazioni di un solido elastico isotropo, cfr. (7.1.2, 11bis). La (19) diventa in tal caso

$$(20) \quad \det\{\delta_{ir}(V^2 - (\mu/k)) - v_i v_r (\lambda + \mu)/k\} = 0,$$

dove $i, r = 1, 2, 3$, λ e μ sono le costanti elastiche di Lamé (≥ 0), e $k > 0$ è la densità. La (20) è una equazione algebrica di 3° grado in V^2 . Sviluppando il determinante, si trova che in realtà il suo valore non dipende da v , valendo 6 volte $[V^2 - (\mu/k)]^2 [V^2 - (\lambda + 2\mu)/k]$. Si hanno così le radici positive $V_1^2 = (\lambda + 2\mu)/k$ e $V_2^2 = \mu/k$, le seconde contate due volte; valori che avevamo già ricavato con metodi diversi a partire dalla stessa (7.1.2, 11bis). Questo fatto fornisce l'interpretazione naturale per le celerità $|V_1|$ e $|V_2|$: esse sono i moduli delle VAN dei FDD (del 2° ordine) del campo di spostamento. In accordo con l'assunta isotropia del mezzo, queste due celerità tipiche non dipendono dall'orientamento del FDD nello spazio R^3 in cui esso è immerso.

Come si è visto per $p = 1$ e $p = 2$, e come il lettore potrà verificare per suo conto per qualsiasi $p > 2$, la nozione di VAN di un FDD di ordine p è del tutto generale, e può applicarsi a SDP quasi-lineari di qualsiasi ordine p , con $n + 1 \geq 2$ variabili indipendenti (delle quali n sono le x e una è la t), purché la relativa equazione determinante, come ad esempio la (14), fornisca valori reali per V (banalmente, questo è sempre vero per una singola EDP con $p = 1$). Al solito, questi valori di V sono indipendenti dalla soluzione, quindi “assoluti”, sse il SDP è semilineare. Si intuisce che esistono stretti legami tra l’analisi delle VAN associate ad un dato SDP e la sua analisi caratteristica (cfr. Sez. 5.3). Ad esempio per $p = 2$ ed un SDP di n equazioni in n incognite, l’eventualità che le $2n$ radici della equazione determinante siano tutte reali può assumersi come condizione di “iperbolicità completa” del SDP di partenza, come nel caso della (20) per $n = 3$. §