

Indice

1	Le Onde Gravitazionali	6
1.1	La Relatività Generale	6
1.1.1	Equazioni di Einstein	10
1.1.2	Conferme sperimentali	15
1.2	Caratteristiche delle onde gravitazionali	20
1.2.1	Soluzione delle equazioni di campo	20
1.2.2	Sorgenti di onde gravitazionali	25
2	Antenne gravitazionali	33
2.1	Interazione delle onde gravitazionali con un rivelatore	33
2.2	Antenne risonanti	42
2.2.1	Antenne cilindriche	42
2.2.2	Antenne sferiche	49

2.3	Antenne interferometriche	53
3	Riduzione del rumore elettronico	57
3.1	Rumore	57
3.1.1	Il moto browniano	58
3.1.2	Rumore elettronico	64
3.2	Sensibilità di un'antenna gravitazionale agli impulsi	71
4	Il trasformatore superconduttore	86
4.1	Cenni di superconduttività	86
4.1.1	Cenni di Teoria BCS	89
4.1.2	Cenni di Teoria GL	91
4.2	Il trasformatore	93
4.2.1	Progettazione	93
4.2.2	Scelta dei materiali	96
4.2.3	Realizzazione	97
4.2.4	Misure di induttanza	100
4.2.5	Misure di fattore di merito	104
4.2.6	Misure sul trasformatore con supporto in Teflon	108
5	Il d.c. SQUID	113

5.1	Quantizzazione del flusso	115
5.2	Effetto Josephson	118
5.3	Modello RSJ	126
5.4	Funzionamento del d.c. SQUID	131
5.5	Il d.c. SQUID come amplificatore	138
5.6	Misure di rumore di un doppio SQUID	142
6	Conclusioni	148
A	Programmi con Matlab	150

Introduzione

La presente tesi di laurea è stata svolta presso i Laboratori Nazionali di Frascati all'interno del gruppo ROG, nell'ambito dell'attività di NAUTILUS. NAUTILUS utilizza un trasduttore capacitivo risonante per la trasduzione del segnale meccanico ed un d.c. SQUID come primo stadio di amplificazione. Nasce quindi il problema dell'adattamento tra l'impedenza di uscita del trasduttore e quella di ingresso dello SQUID. Il problema viene risolto con l'uso di un trasformatore superconduttore, oggetto di studio di questa tesi.

Le caratteristiche elettriche del trasformatore influenzano in modo cruciale la sensibilità globale dell'antenna. Particolare cura è quindi necessaria nella scelta dei diversi materiali e nel loro assemblaggio. Per la scelta delle dimensioni dell'avvolgimento, della densità lineare delle spire e del numero di strati è stato utilizzato il lavoro di programmazione con Matlab 5.1 per Macintosh[©] svolto come prima parte della tesi.

Le misure effettuate alla temperatura dell'Elio liquido su diversi trasformatori, realizzati secondo queste scelte, hanno evidenziato

l'accordo con le previsioni teoriche, oltre a fornire delle indicazioni su sviluppi futuri.

L'ultima parte della tesi riguarda delle misure effettuate, in collaborazione con il gruppo ROG presso i laboratori dell'Università di Tor Vergata, sul sistema trasduttore-trasformatore-SQUID, che hanno ancora una volta evidenziato, per il buon funzionamento dell'apparato, l'importanza del trasformatore di sensibilità molto migliore rispetto a quelli attualmente utilizzati.

Capitolo 1

Le Onde Gravitazionali

1.1 La Relatività Generale

La gravitazione, essendo la forza che più influisce nella nostra vita quotidiana, è stata la prima interazione fondamentale ad essere scoperta e studiata. Già dal 1687 esisteva una teoria generale dei fenomeni gravitazionali, ci stiamo riferendo ai "Naturalis Philosophiae Principia Mathematica" di Isaac Newton. La teoria newtoniana confermava tutte le osservazioni fatte all'epoca sia dei moti sulla Terra, che dei moti dei corpi celesti. Inoltre, la teoria della gravitazione universale introduceva un concetto assolutamente

rivoluzionario per l'epoca: il concetto di interazione a distanza, cioè il concetto di campo. La teoria newtoniana è stata considerata la teoria corretta dei fenomeni gravitazionali fino a quando le scoperte nel campo dell'elettromagnetismo indussero Einstein a formulare la Relatività Ristretta. Alcuni postulati della teoria einsteiniana si ponevano in una posizione di contrasto con i principi della meccanica newtoniana. A causa di tali differenze si rese necessaria una modifica della teoria dei fenomeni gravitazionali. Così, nel tentativo di formulare una teoria della gravitazione che tenesse conto della Relatività Ristretta, Einstein rivide radicalmente il concetto di sistema di riferimento inerziale e, conseguentemente, riformulò le nozioni di spazio e tempo. Il risultato di tali sforzi è la Teoria della Relatività Generale che descrive meglio di ogni altra teoria della Gravitazione il moto dei corpi misurato con gli strumenti più sofisticati e che, ancora oggi, è un esempio di eleganza e rigore formale.

Una delle basi della Relatività Generale è il Principio di Equivalenza che viene tradizionalmente suddiviso in Debole e Forte.

Il Principio di Equivalenza Debole postula l'uguaglianza, a meno di una costante di proporzionalità (che dipende dalle unità di misura

e che quindi possiamo scegliere uguale ad uno senza perdere di generalità), tra la massa inerziale m_i e quella gravitazionale m_g di uno stesso corpo elettricamente scarico. Quindi, scrivendo la seconda legge della dinamica che definisce la massa inerziale

$$F = m_i a \quad (1.1)$$

e la legge della gravitazione universale

$$F = G \frac{M m_g}{r^2} \quad (1.2)$$

le due quantità indicate con "m" hanno, a meno di una costante di proporzionalità, lo stesso valore. La validità del Principio di Equivalenza Debole è stata sperimentalmente verificata con un'accuratezza che oggi [1] è dell'ordine di 10^{-12} .

Questa uguaglianza comporta, come osservava già Galilei nel secolo XVII, che tutti i corpi in caduta libera in prossimità della Terra, trascurando l'attrito dell'aria, obbediscono alla stessa legge oraria.

Einstein utilizzò il Principio di Equivalenza Debole come base

della Relatività Generale e lo generalizzò enunciando il Principio di Equivalenza Forte. Il passaggio da Debole a Forte fu formalizzato con l'esperimento concettuale dell'ascensore in caduta libera. Infatti un osservatore nell'ascensore non ha modo, compiendo esperimenti all'interno dell'ascensore stesso, di capire se sia in moto traslatorio uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale esterno oppure in caduta libera in un campo gravitazionale uniforme e costante; oppure, in una diversa situazione, se si stia muovendo di moto accelerato uniforme con accelerazione a grazie ad un sistema di propulsione autonomo oppure se sia fermo a causa dell'influenza di un campo tale che $g = a$.

I risultati dell'esperimento dell'ascensore sono rigorosamente validi solo nel caso di velocità non relativistiche e per dimensioni infinitesime dell'ascensore stesso, per il fatto che i campi gravitazionali reali non sono uniformi e si annullano a grandi distanze dalla sorgente. Ad ogni modo, Einstein generalizzò il risultato dell'esperimento postulando che, per ogni campo gravitazionale, esiste un sistema di riferimento locale non inerziale in cui le leggi della Fisica hanno lo stesso formalismo matematico valido in un sistema di riferimento inerziale in assenza di gravità, ovvero lo

stesso formalismo della Relatività Ristretta anche in presenza di campi elettrici e gravitazionali. Questo è l'enunciato del Principio di Equivalenza Forte.

1.1.1 Equazioni di Einstein

Consideriamo ora uno spazio quadridimensionale. Le coordinate spaziali siano x , y , z e quella temporale sia t . In un sistema di riferimento inerziale, l'intervallo ds è dato [2] da:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.3)$$

Un qualunque cambiamento di coordinate che porti ad un altro sistema inerziale, effettuato tramite le trasformazioni di Lorentz, conserva lo stesso valore ds . Ciò non è più valido passando ad un sistema non inerziale. Ad esempio, nel caso di un sistema di coordinate rotanti x' , y' , z' , con velocità angolare costante Ω diretta lungo l'asse z , avremo:

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt \quad (1.4)$$

Notiamo che non esiste nessuna legge di trasformazione delle coordinate che riduca questa espressione alla semplice forma della somma dei quadrati dei differenziali.

Quindi, in un sistema di riferimento non inerziale, il generico intervallo ds assume la seguente forma:

$$ds^2 = g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k \quad (1.5)$$

dove le componenti del tensore g_{ik} , detto tensore metrico, sono funzioni sia delle coordinate spaziali x^1, x^2, x^3 , che di quella temporale x^0 . Tale sistema di coordinate è evidentemente curvilineo e le grandezze g_{ik} definiscono la metrica dello spazio-tempo. Esse hanno anche la proprietà di essere simmetriche rispetto allo scambio dei due indici, $g_{ik} = g_{ki}$, cosicchè il numero di componenti indipendenti del tensore metrico scende a 10. Abbiamo visto dall'equazione (1.3) che nel caso particolare di un sistema galileiano il tensore metrico

assume la forma:

$$g_{ik}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Nel precedente paragrafo, abbiamo affermato che un sistema di riferimento non inerziale è equivalente ad un campo gravitazionale. Quindi ogni campo gravitazionale rappresenta una modificazione della metrica dello spazio-tempo ed è quindi generato dalle g_{ik} , che prendono anche il nome di potenziali gravitazionali. Tale fatto fondamentale indica che la metrica dello spazio-tempo è determinata da fenomeni fisici, in particolare, vedremo, dalla distribuzione di materia nello spazio, e non è, quindi, una proprietà immutabile dello spazio-tempo.

Bisogna, infine, notare che, in presenza di campi gravitazionali, non esiste nessuna trasformazione delle coordinate che riduca il tensore metrico alla forma galileiana in tutto lo spazio. E' possibile "appiattare" lo spazio solo localmente, ad esempio in un punto dato.

Dimostrata, quindi, la curvatura dello spazio-tempo, il principio di inerzia viene modificato nel modo seguente: i corpi, lasciati liberi, non si muovono più lungo delle rette, bensì lungo geodetiche.

Applicando il principio di minima azione ad una particella posta in uno spazio non euclideo, si dimostra [2] che l'equazione del moto sarà data da:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \cdot \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (1.7)$$

dove le quantità Γ_{kl}^i , detti simboli di Christoffel, sono legati alle componenti del tensore metrico dalla relazione:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} \cdot g^{ri} \cdot [-g_{kl,r} + g_{rk,l} + g_{lr,k}] \quad (1.8)$$

Un altro dei tensori importanti per la formulazione delle equazioni di campo di Einstein è il tensore di Riemann R_{klm}^i , di rango 4 e componenti tutte indipendenti. Tale tensore, infatti, fornisce un'esatta misura della curvatura dello spazio-tempo in ogni punto. Esso è

esprimibile in termini dei simboli di Christoffel,

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{km,l} - \Gamma^i_{kl,m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl} \quad (1.9)$$

i quali, come abbiamo visto dalla precedente equazione (1.8), sono strettamente correlati al tensore metrico.

Ora abbiamo tutti gli elementi per poter derivare correttamente le equazioni di campo Einstein. Sappiamo, infatti che i campi gravitazionali sono generati dal tensore metrico e che quest'ultimo è determinato dalla distribuzione della materia nello spazio-tempo, cioè dal tensore energia-impulso T_{ik} . Applichiamo il principio di minima azione alla somma dei campi gravitazionali e al tensore energia-impulso, $\delta(S_g + S_m) = 0$, le cui azioni sono rispettivamente date dalle relazioni:

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (1.10)$$

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (1.11)$$

che sommate membro a membro danno:

$$-\frac{c^3}{16\pi G} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = 0 \quad (1.12)$$

Poichè δg^{ik} sono del tutto arbitrarie, si ricava

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad (1.13)$$

dove R_{ik} è il tensore di Ricci, ottenuto dal tensore di Riemann per contrazione degli indici, e $R = g^{ik}R_{ik}$. Le (1.13) sono dieci equazioni nelle dieci componenti incognite del tensore metrico.

1.1.2 Conferme sperimentali

Quando, nel 1915, Einstein espose la teoria della relatività generale, non vi erano delle evidenze sperimentali che richiedessero una nuova teoria dei fenomeni gravitazionali per essere interpretate. Ciò che spinse Einstein era il desiderio di generalizzare, ai sistemi non inerziali, la relatività dei fenomeni fisici. La teoria einsteiniana, ovviamente, confermava tutte le osservazioni fatte all'epoca, comprese alcune piccole correzioni che, appena la tecnologia lo permise,

furono ampiamente confermate. In queste sede ci soffermiamo sui seguenti fatti:

- precessione del perielio delle orbite planetarie;
- deflessione della traiettoria dei raggi luminosi.

Per poter studiare tali fenomeni, abbiamo bisogno di una metrica per un campo gravitazionale a simmetria sferica, come è quello generato, ad esempio, dal Sole. Introduciamo, quindi, la metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.14)$$

dove abbiamo introdotto la quantità $R_s = \frac{2GM}{c^2}$, detta Raggio di Schwarzschild, con M massa del corpo che genera il campo. Il Raggio di Schwarzschild è una quantità fisica fondamentale per sistemi a simmetria sferica. Infatti, affinché un sistema fisico sia reale, dovremo avere $g_{00} > 0$, cioè $r > R_s$.

Precessione del perielio

Se risolviamo [3] le equazioni del moto per un pianeta rotante intorno ad una stella ed utilizziamo la (1.14), si arriva alla seguente equazione per la variabile $u \equiv \frac{1}{r}$:

$$u'' + u = \frac{GM}{c^2 h^2} + 3 \frac{GM}{c^2} u^2 \quad (1.15)$$

dove h ha il significato di momento angolare. La (1.15) differisce dall'equazione classica per la presenza del termine correttivo $3 \frac{GM}{c^2} u^2$, che nel caso $v_{\perp} \ll c$ è dell'ordine di 10^{-8} . Data la piccolezza della correzione, possiamo risolvere l'equazione con il metodo perturbativo. Se definiamo le quantità $A = \frac{GM}{c^2 h^2}$ ed $\varepsilon = 3 \frac{GM}{c^2} A$ e sviluppiamo la soluzione in serie di ε , fermandoci al primo ordine:

$$u = u_0 + \varepsilon v \quad (1.16)$$

perveniamo ad una soluzione della forma:

$$u = k_1 + P(\varphi) + B \cos \varphi + \varepsilon B \varphi \sin \varphi \quad (1.17)$$

con k_1 costante, $P(\varphi)$ funzione periodica e B costante di integrazione. Gli ultimi due termini della (1.17) possono essere scritti come $B \cos [(1 - \varepsilon) \varphi]$, il termine in coseno presenta massimi per

$$\varphi = 2\pi n(1 + \varepsilon) \quad (1.18)$$

che dimostra la precessione del perielio e che le orbite dei pianeti non sono chiuse ma presentano la forma a "rosetta". Il valore previsto dalla teoria, per il caso di Mercurio, è $\frac{\Delta\varphi}{\Delta T} = \frac{43.03''}{\text{secolo}}$ e le osservazioni, eseguite per un lungo periodo di tempo prima della formulazione della Relatività Generale, concordano perfettamente con la teoria, fornendo $\frac{\Delta\varphi}{\Delta T} = \frac{(43.15 \pm 0.45)''}{\text{secolo}}$.

Deflessione dei raggi luminosi

Consideriamo un sistema di riferimento in caduta libera sulla Terra ed immaginiamo un segnale luminoso che viaggi tra due punti A e B. Per un osservatore solidale con il sistema, che è localmente inerziale, i raggi si propagano in linea retta. Invece, per un osservatore solidale con la Terra, i raggi si muoveranno lungo una traiettoria curva. Utilizzando la metrica di Schwarzschild e ricor-

dando che $ds^2 = 0$ per i segnali luminosi, si dimostra che $\frac{GM}{c^2 h^2} = 0$ e quindi l'equazione del moto sarà data da

$$u'' + u = \frac{3GM}{c^2} u^2 \quad (1.19)$$

che riscriviamo come

$$u'' + u = r_0 \varepsilon u^2 \quad (1.20)$$

dove r_0 è la distanza del raggio dalla sorgente del campo gravitazionale e $\varepsilon \equiv \frac{GM}{c^2 r_0}$. Utilizzando, come nel caso precedente, il metodo delle perturbazioni e scrivendo la soluzione come in (1.16) otteniamo

$$u = \frac{1}{r_0} \cos \varphi + \varepsilon \frac{2}{3r_0} - \frac{\varepsilon}{3r_0} \cos^2 \varphi \quad (1.21)$$

e nel limite per $r \rightarrow \infty$, quindi $u \rightarrow 0$, otteniamo

$$\cos \varphi = \frac{1 - \sqrt{1 + 8 \left(\frac{GM}{c^2 r_0} \right)^2}}{\frac{2GM}{c^2 r_0}} \simeq -\frac{2GM}{c^2 r_0} \quad (1.22)$$

quindi $\varphi = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, ma, essendo il coseno una funzione pari, $\varphi = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, da cui ricaviamo che la deflessione totale subita da un raggio luminoso che passi in prossimità di una sorgente di campo gravitazionale è

$$\Delta\varphi = 4\frac{GM}{c^2 r_0} \quad (1.23)$$

Nel caso del Sole, la deflessione prevista dalla teoria è pari a $\Delta\varphi = 1.77''$, valore misurato già nel 1919 da Eddington con una precisione del 30%.

1.2 Caratteristiche delle onde gravitazionali

1.2.1 Soluzione delle equazioni di campo

L'equazione di campo di Einstein (1.13) nel vuoto, con $T_{ik} \equiv 0$, diventa:

$$R_{ik} = 0 \quad (1.24)$$

Purtroppo queste equazioni non sono lineari e quindi non è possibile trovare una soluzione algebrica. L'unico modo per risolvere il problema è quello di fare delle approssimazioni. Consideriamo la metrica come somma di due termini: la metrica galileiana e una perturbazione:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik} \quad (1.25)$$

Ciò equivale a porsi nella cosiddetta "approssimazione di campo debole", in cui h_{ik} è un tensore le cui componenti hanno la proprietà che $|h_{ik}| \ll 1$. Sappiamo che il tensore di Ricci è dato dalla formula:

$$R_{ik} = \Gamma_{ik,l}^l - \Gamma_{il,k}^l + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{im}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l \quad (1.26)$$

ed i simboli di Christoffel sono dati dalla (1.8). Considerando solo termini al primo ordine in h_{ik} , si ottiene [4]:

$$\Gamma_{ik,l}^l = \frac{1}{2} g^{(0)lm} (h_{km,il} + h_{im,kl} - h_{ik,ml}) \quad (1.27)$$

$$\Gamma_{il,k}^l = \frac{1}{2} g^{(0)lm} (h_{lm,ik} + h_{im,kl} - h_{il,mk}) \quad (1.28)$$

e questi saranno gli unici termini diversi da zero, in quanto il prodotto di due Γ conterrà solo termini del secondo ordine. Stiamo, inoltre, supponendo che le derivate di h_{ik} siano dello stesso ordine di h_{ik} . Dal momento che $g^{(0)lm}$ è la metrica galileiana, che ha componenti costanti, può essere portata sotto il segno di derivata, $g^{(0)lm}h_{im,k} = h_{i,k}^l$. Se poi consideriamo tutte le simmetrie del tensore h_{ik} , della sua traccia e delle sue derivate, otteniamo, per il tensore di Ricci, la seguente espressione:

$$2R_{ik} = h_{k,il}^l + h_{i,kl}^l - h_{ik,l}^l - h_{,ik} \quad (1.29)$$

Operando il seguente cambiamento di variabile, $\bar{h}_{ik} = h_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}h$, e sostituendo nella (1.29) otteniamo:

$$\bar{h}_{k,il}^l + \bar{h}_{i,kl}^l - h_{ik,l}^l = 0 \quad (1.30)$$

Ora si impone la scelta di una *gauge*. Analogamente al caso delle onde elettromagnetiche, possiamo scegliere la *gauge* di Lorentz, $\bar{h}_{k,l}^l = 0$, che semplifica molto l'espressione. Tale possibilità discende dal fatto che si introducono delle quantità con cui è più facile

fare i conti.

In conclusione, la soluzione delle equazioni di Einstein, nel caso di campo gravitazionale debole, soddisfa l'equazione delle onde

$$h_{ik,l}^{\cdot l} = \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x_l} = 0 \quad (1.31)$$

e, ricordando che $x^0 = ct$, notiamo che la velocità di propagazione è uguale a quella della luce.

Per l'equazione (1.31) cerchiamo una soluzione del tipo $h_{mn} = A_{mn} e^{ik^l x_l}$. Sostituendo otteniamo

$$k^h k_h = 0 \quad (1.32)$$

e ponendo $k^i = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ si ottiene

$$\frac{\omega}{c} = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (1.33)$$

come precedentemente affermato, l'onda si propaga con velocità della luce, fatto che induce a supporre che il gravitone sia una particella a massa nulla.

E' possibile dimostrare che per trasformazioni $x^i \longrightarrow x^{i'} = x^i +$

ξ^i , con ξ^i infinitesimo, si ottiene $h_{i'k'} = h_{ik} - \xi_{i;k} - \xi_{k;i}$ e che è possibile ottenere $h_{i'k'} = h_{ik}$ solo imponendo le equazioni di Killing: $\xi_{i;k} + \xi_{k;i} = 0$. Quindi, con opportuni cambiamenti di coordinate, è possibile rendere nulle alcune componenti di h_{ik} ; in particolare scegliamo $h = 0$ e $h_{0\alpha} = 0$. In questo modo la *gauge* di Lorentz diviene $h_{k,i}^i = 0$ e le componenti indipendenti del tensore h_{ik} sono scese da dieci a due. Esplicitando la condizione $h_{k,i}^i = 0$ si ottiene la condizione di trasversalità

$$h_k^i k_i = 0 \quad (1.34)$$

Fissando $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$, cioè considerando un'onda che si propaghi lungo l'asse x ed applicando la *gauge* di Lorentz e le condizioni sulla scelta del sistema di riferimento ricaviamo:

$$h_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{22} & h_{23} \\ 0 & 0 & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Sapendo che il tensore h_{ik} è simmetrico e che $h = h_{22} + h_{33} = 0$ ab-

biamo solo due componenti indipendenti che indichiamo con $h_+ = h_{22} = -h_{33}$ e $h_\times = h_{23} = h_{32}$. Vedremo nel prossimo capitolo che h_+ e h_\times descrivono i due stati di polarizzazione di un'onda gravitazionale. Infine, possiamo scrivere le soluzioni in forma di onde piane:

$$\begin{aligned} h_+ &= A_+ e^{i(\omega t - kx)} \\ h_\times &= A_\times e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned} \tag{1.36}$$

1.2.2 Sorgenti di onde gravitazionali

Le sorgenti di onde gravitazionali [20], [21] possono essere divise in due grandi famiglie: quelle periodiche e quelle impulsive, dovute ad eventi catastrofici. Nella prima categoria rientrano i sistemi binari e le stelle rotanti. Gli eventi catastrofici sono rappresentati da collassi gravitazionali di sistemi a non perfetta simmetria sferica.

In generale, gli eventi catastrofici emettono onde gravitazionali con una potenza maggiore rispetto alle sorgenti periodiche, che, invece, hanno il vantaggio di avere un'emissione continua per lunghi periodi di tempo, permettendo l'uso di rivelatori sintonizzati sulla

frequenza della sorgente.

Potenza irradiata

Nel precedente paragrafo abbiamo notato come vi sia una stretta analogia tra le onde gravitazionali e quelle elettromagnetiche. Nel nostro caso, a differenza di quello elettromagnetico, le sorgenti delle onde sono i corpi che hanno massa gravitazionale.

Possiamo scrivere le equazioni di campo linearizzate in presenza di materia nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^j \partial x_j} = \frac{16G}{c^4} \tau_i^k \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial h_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (1.38)$$

con τ_i^k tensore collegato al tensore energia-impulso. Un'altra differenza sostanziale tra il campo elettromagnetico e quello gravitazionale consiste nel fatto che mentre il primo è descritto dal potenziale vettore, cioè un tensore di rango uno, il secondo è descritto da h_{ik} che è un tensore di rango due. Tale fatto indica che mentre il fotone ha spin uguale ad uno, il gravitone ha spin due. Ma un'altra

fondamentale differenza si nota analizzando le equazioni appena scritte. Infatti combinando la (1.37) con la (1.38) otteniamo

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (1.39)$$

equazione che esprime le leggi di conservazione della meccanica ed in particolare la conservazione della quantità di moto. La soluzione delle (1.37-1.38) è del tipo dei potenziali ritardati:

$$h_{ik} = -\frac{4G}{c^4} \int \left(\frac{\tau_i^k}{r} \right)_{t-\frac{r}{c}} dV \quad (1.40)$$

ma, considerando la sua espansione in termini di multipoli a distanze grandi dalla sorgente, troviamo che, a causa delle condizioni (1.39), il termine di dipolo è nullo ed il primo a non esserlo è il termine di quadrupolo, che mediato su tutte le direzioni, dà, per la potenza irraggiata

$$W = \frac{G}{45c^5} \overset{\dots 2}{D}_{\alpha\beta} \quad [W] \quad (1.41)$$

dove

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma^2) dV \quad (1.42)$$

è il tensore di quadrupolo di massa della sorgente. Dalla (1.41) si nota che la potenza emessa è inversamente proporzionale alla quinta potenza della velocità della luce, che, unitamente alla piccolezza della costante G , ovvero alla debolezza delle interazioni gravitazionali, rende la rivelazione delle onde gravitazionali estremamente difficile e obbliga a considerare delle sorgenti con masse elevate. Per questo motivo è praticamente impossibile generare delle onde gravitazionali in laboratorio.

Infatti, considerando una sbarra cilindrica, rotante intorno ad un asse verticale al proprio con velocità angolare ω , si trova che la potenza irradiata di onde gravitazionali è data da

$$W = \frac{32G}{5c^5} I^2 \omega^6 \quad (1.43)$$

con I momento di inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione. Nel caso di un cilindro di acciaio con raggio 1 m e lunghezza 20

m e rotante ad una velocità di 4.5 giri/s, che è il limite imposto dall'elasticità del materiale, avremmo

$$W = 2.2 \cdot 10^{-29} \quad \text{Watt} \quad (1.44)$$

una potenza troppo piccola per essere attualmente, e per i prossimi anni, rivelata.

Stelle rotanti

Se una stella non presenta una perfetta simmetria assiale può diventare una sorgente di onde gravitazionali. La potenza irradiata è data dalla relazione

$$W = \frac{288GI^2e^2\omega^6}{45c^5} \quad (1.45)$$

dove con $e = \frac{|a-b|}{\sqrt{ab}}$, a e b assi principali del piano equatoriale, abbiamo indicato la deviazione dalla simmetria assiale e I è il momento di inerzia. Un esempio di tale sorgente è la pulsar PSR 0532, nella Nebulosa del Granchio, con $\nu = 30Hz$ a 2 kpc dalla Terra, che emetterebbe onde con un'intensità relativa sulla Terra pari a

$h_0 \sim 10^{-26}$. Attualmente, però, non é in funzione alcun rivelatore di onde gravitazionali risonante ad una frequenza cosí bassa.

Sistemi binari

Si stima che circa il 50% delle stelle faccia parte di sistemi multipli e, tra questi, alcuni sono formati da una stella normale ed un corpo collassato e sono posti sotto stretta osservazione. Un tale sistema, nel caso di orbite circolari di raggio r e frequenza ω , irraggia con una potenza data da

$$W = \frac{32G}{5c^5} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) r^4 \omega^6 \quad (1.46)$$

Se consideriamo il caso particolare del sistema β Per, a 30 kpc dalla Terra e con un periodo di rivoluzione di 2.9 anni, avremo una potenza irraggiata pari a $W = 1.4 \cdot 10^{21} \text{ W}$ e, quindi $h_0 \sim 10^{-22}$ sulla Terra. Recentemente, è stato dimostrato da Taylor che il periodo del sistema binario PSR 1913 + 16 diminuisce nel modo previsto dalla relatività generale nel caso di emissione di onde gravitazionali, con una deviazione dalla previsione teorica inferiore a circa l'1%.

Collassi gravitazionali

Qualora il collasso avvenisse senza la rottura della simmetria sferica, non si avrebbe emissione di onde gravitazionali. Tuttavia, tali fenomeni avvengono mentre la stella ruota e gli impulsi di onde gravitazionali sono strettamente dipendenti dalla modalità con cui avviene il collasso. Teoricamente ci si aspetta che lo spettro della radiazione emessa sia continuo da zero fino ad una frequenza critica $\nu_g \sim \frac{1}{\tau_g}$, dove il tempo caratteristico è dato da

$$\tau_g \sim \sqrt{\pi G \rho}$$

con ρ densità dello stato finale. L'energia totale emessa in questo tipo di eventi è pari a

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{30\pi} \frac{D_{max}^2}{\tau_g^5} \quad (1.47)$$

e D_{max}^2 è la componente del tensore di quadrupolo lungo l'asse di rotazione. Per questi eventi è conveniente parlare di densità spettrale di energia espressa in $[\frac{J}{m^2 Hz}]$ sulla Terra. Ad esempio, se consideriamo il collasso di una stella di massa $M = 6M_\odot$, posta nel

Centro Galattico, avremmo $\Delta\mathcal{E} \sim 5 \cdot 10^{46} \text{ J}$ e quindi la densità spettrale sarebbe

$$f(\omega) = 30 \frac{J}{m^2 \text{ Hz}}$$

che per $\nu = 850 \text{ Hz}$ e $\tau = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, darebbe $h_0 \sim 3 \cdot 10^{-17}$, che è alla portata delle attuali sensibilità sperimentali. Purtroppo, la probabilità di questi eventi è di qualche unità ogni secolo. Se considerassimo un volume che arriva fino al Superammasso della Vergine, la probabilità salirebbe ad un evento alla settimana, con una densità spettrale pari a $f(\omega) = 6 \cdot 10^{-6} \frac{J}{m^2 \text{ Hz}}$, equivalente a $h_0 \sim 1.4 \cdot 10^{-20}$. Lo sforzo delle attuali attività di ricerca tende a raggiungere la rivelabilità di tali eventi.

Capitolo 2

Antenne gravitazionali

2.1 Interazione delle onde gravitazionali con un rivelatore

L'effetto di un'onda gravitazionale che si propaga nello spazio consiste nel far variare la distanza tra i punti dello spazio stesso. Studiamo questo fenomeno più in dettaglio.

Consideriamo una famiglia di geodetiche, lungo ciascuna delle quali si muove una particella di prova. Indichiamo con $x^i(s, p)$, con p variabile continua, l'equazione del moto della p -esima parti-

cella. La quantità che ci interessa calcolare è la distanza tra due geodetiche adiacenti, che nel nostro caso sarà data da [4]

$$\eta^i = \frac{\partial x^i}{\partial p} \delta p \quad (2.1)$$

Tale grandezza viene indicata col nome di *deviazione geodetica*. Sotto l'azione di un'onda gravitazionale, due geodetiche adiacenti saranno in moto accelerato l'una rispetto all'altra. Allora la quantità fondamentale nella rivelazione delle onde gravitazionali sarà l'accelerazione mutua tra le particelle di prova $\frac{D^2 \eta^i}{ds^2}$. Ricaviamo l'equazione del moto della deviazione geodetica. Consideriamo la quadrivelocità $u^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}$, che sarà funzione anche di p . Cerchiamo l'espressione della quadriaccelerazione:

$$\begin{aligned} \frac{Du^i}{ds} &= u^i_{;k} \frac{\partial x^k}{ds} \\ \frac{D}{dp} \frac{Du^i}{ds} &= u^i_{;kl} \frac{\partial x^k}{ds} \frac{\partial x^l}{dp} + u^i_{;k} \frac{D}{dp} \frac{\partial x^k}{ds} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\frac{D}{ds} \frac{Du^i}{dp} = u^i_{;kl} \frac{\partial x^k}{dp} \frac{\partial x^l}{ds} + u^i_{;k} \frac{D}{ds} \frac{\partial x^k}{dp} \quad (2.3)$$

Sottraendo membro a membro le (2.2-2.3) e tenendo conto del fatto che u^i è la quadrivelocità della particella p -esima che si muove lungo

un geodetica, otteniamo

$$\frac{D}{ds} \frac{Du^i}{dp} = \frac{\partial x^k}{dp} \frac{\partial x^l}{ds} (u^i_{;kl} - u^i_{;lk}) \quad (2.4)$$

La quantità tra parentesi della precedente equazione (2.4) è diversa da zero, in quanto ci troviamo in uno spazio curvo. Infatti tale differenza risulta dipendere dal tensore di Riemann nel modo seguente:

$$(u^i_{;kl} - u^i_{;lk}) = -R^i_{mkl} u^m \quad (2.5)$$

Sostituendo nella (2.4) la definizione di deviazione geodetica, si arriva all'equazione del moto desiderata:

$$\frac{\partial^2 \eta^i}{\partial s^2} + \eta^k R^i_{mkl} u^m u^l = 0 \quad (2.6)$$

Nell'ipotesi di campo debole, con $v \ll c$, la quadrivelocità sarà $u^i \simeq (1, 0, 0, 0)$, da cui segue che l'equazione della deviazione geodetica

(2.6) diventerà:

$$\frac{\partial^2 \eta^i}{\partial s^2} + \eta^k R_{0k0}^i = 0 \quad (2.7)$$

Sappiamo che il tensore di Riemann è legato ai simboli di Christoffel dalla (1.9), quindi, trascurando i termini in h_{ik}^2 e considerando un'onda che si propaghi lungo l'asse delle x , avremo:

$$R_{0k0}^i = -\frac{\partial}{\partial x^0} \left(\frac{1}{2} g^{(0)im} h_{mk,0} \right) \quad (2.8)$$

da cui, per sostituzione nella (2.7) e ricordando che, in prima approssimazione, $ds = cd\tau \simeq cdt$, si ricava:

$$\frac{\partial^2 \eta^i}{\partial t^2} = \eta^k \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_k^i}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

Vediamo cosa succede in due casi particolari, che danno delle chiare indicazioni su come costruire un rivelatore di onde gravitazionali.

Consideriamo una terna di assi ortogonali (x, y, z) e supponiamo che l'onda gravitazionale viaggi lungo l'asse delle x . Abbiamo già visto come, in questo caso, le h_k^i siano date dalla (1.35). Disponiamo due particelle di prova lungo l'asse delle y , e la distanza tra di esse

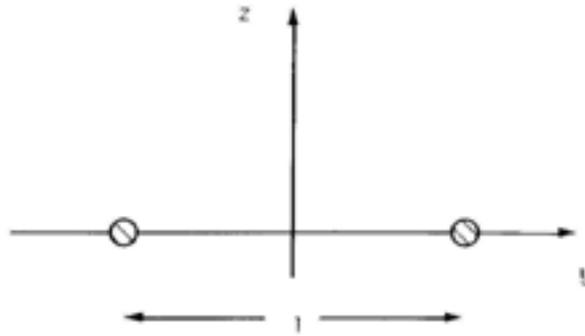


Figura 2.1: L'onda si propaga nella direzione perpendicolare al piano del foglio.

sia l , come mostrato in figura (2.1). Dato che le equazioni della deviazione geodetica sono state ricavate in un sistema di riferimento geodetico [4], affinché la nostra analisi sia ragionevole dobbiamo scegliere anche noi un sistema di riferimento localmente geodetico. Possiamo procedere in due modi: eseguiamo l'esperimento in un satellite in orbita intorno la Terra, così da annullare la forza di gravità al centro del satellite; oppure possiamo vincolare le due particelle a muoversi solo lungo l'asse delle y , cosicché è possibile compiere l'esperienza sulla Terra. Nell'esempio particolare avremo $\eta^k = (\xi^0, \xi^1, \xi^2 + l, \xi^3)$, l'equazione del moto delle due particelle di

prova sarà:

$$\frac{d^2\eta^i}{dt^2} = \frac{d^2\xi^i}{dt^2} \cong \frac{l}{2} \frac{d^2h_2^i}{dt^2} \quad (2.10)$$

equivalente alle quattro equazioni:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 &= 0; & \ddot{\xi}^1 &= 0; \\ \ddot{\xi}^2 &= \frac{l}{2}\ddot{h}_+; & \ddot{\xi}^3 &= \frac{l}{2}\ddot{h}_\times \end{aligned} \quad (2.11)$$

che, opportunamente integrate, forniscono la seguente soluzione:

$$\begin{aligned} \xi_y(t) &= \frac{l}{2}h_+(t) \\ \xi_z(t) &= \frac{l}{2}h_\times(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da cui risulta evidente che un'onda con polarizzazione h_+ farà muovere le particelle di prova lungo l'asse delle y , mentre un'onda con polarizzazione h_\times le muoverà lungo l'asse z .

Consideriamo ora un insieme di particelle di prova disposte su di una circonferenza di raggio r , che, al limite di masse infinitesime ed in numero infinito, può approssimare un anello di materia con-

tinuo. La parte I della figura (2.2) indica le posizioni a riposo delle particelle di prova. Mentre le parti (II-III) e (IV-V) mostrano i movimenti delle particelle sotto l'azione di onde polarizzate rispettivamente h_+ e h_\times . In entrambi i casi, l'onda incidente si propaga lungo l'asse 1, che, anche in questo caso, è perpendicolare al piano del foglio.

Studiamo in dettaglio il problema. In questa situazione avremo:

$$\eta^i = (\xi^0, \xi^1, \xi^2 + 2r \cos \theta, \xi^3 + 2r \sin \theta) \quad (2.13)$$

cosicchè le equazioni del moto saranno date da:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^0 &= 0 \\ \ddot{\xi}^1 &= 0 \\ \ddot{\xi}^2 &= r (\ddot{h}_+ \cos \theta + \ddot{h}_\times \sin \theta) \\ \ddot{\xi}^3 &= r (\ddot{h}_\times \cos \theta - \ddot{h}_+ \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

che, opportunamente integrate e considerando la definizione di η^i ,

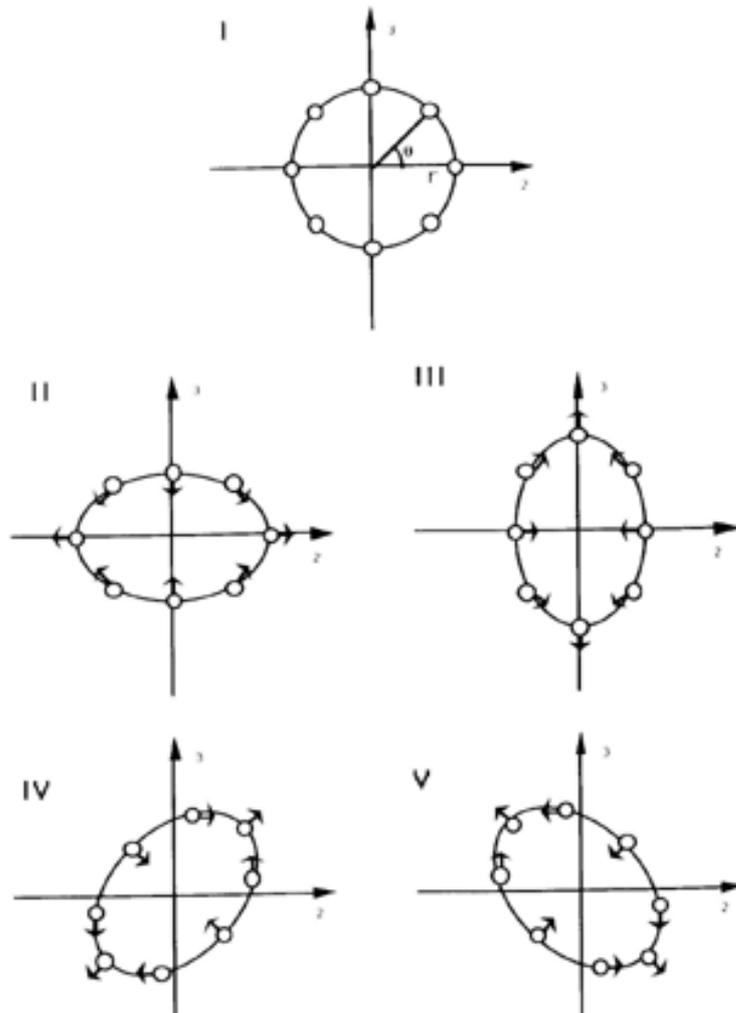


Figura 2.2: Deformazione di un anello di particelle di prova per effetto delle polarizzazioni h_+ (II-III) e h_\times (IV-V).

hanno soluzione:

$$\begin{aligned}\eta^2 &= r \cos \theta + \frac{r}{2} (h_+ \cos \theta + h_\times \sin \theta) \\ \eta^3 &= r \sin \theta + \frac{r}{2} (h_\times \cos \theta - h_+ \sin \theta)\end{aligned}\tag{2.15}$$

La disposizione delle particelle di prova nella figura (2.2) è diretta conseguenza dell'aver considerato alcune condizioni particolari. Infatti nei casi II e III abbiamo posto $h_+ = h_0 \cos \omega t$ e $h_\times = 0$ e, rispettivamente, $t = \frac{2k\pi}{\omega}$ e $t = \frac{2(k+1)\pi}{\omega}$. Al contrario, per i casi IV e V, l'onda incidente conteneva la sola polarizzazione h_\times , mentre t assumeva gli stessi valori utilizzati nei casi II e III.

Come è possibile notare dalla figura (2.2), le due polarizzazioni presentano un angolo di sfasamento pari a $\frac{\pi}{4}$, che indica, come avevamo precedentemente notato, che il gravitone ha spin 2.

Nei prossimi paragrafi ci dedicheremo allo studio dettagliato delle antenne risonanti e descriveremo brevemente il principio di funzionamento degli interferometri laser.

2.2 Antenne risonanti

2.2.1 Antenne cilindriche

Le prime e più semplici antenne gravitazionali costruite furono delle sbarre cilindriche. Le motivazioni di questa scelta sono varie, tra le quali sottolineiamo la semplicità del modello. Infatti un cilindro continuo può essere assimilato ad un oscillatore armonico semplice, come vedremo in seguito. Negli anni '60, le antenne costruite da Joe Weber erano dei cilindri metallici sospesi lungo la sezione baricentrale. Da allora praticamente nulla è cambiato nell'antenna in sé stessa. Ciò che ha subito un profondo cambiamento è la condizione operativa dell'antenna. Infatti, dato che i segnali gravitazionali sono estremamente piccoli, lo sforzo di questi trent'anni di ricerca è stato profuso nell'obiettivo di ridurre i rumori. In particolare, i sistemi di sospensioni, divisi in più stadi, ognuno dei quali è schematizzabile con un filtro passa-basso, sono stati notevolmente migliorati. Si è dimostrata, inoltre, la necessità di raffreddare le sbarre a temperature criogeniche con il duplice scopo di diminuire il rumore Browniano e di aumentare il fattore di merito meccanico dell'antenna. Sono stati effettuati anche numerosi studi sulle carat-

teristiche meccaniche dei materiali utilizzabili per la costruzione delle sbarre cilindriche.

Attualmente, nel mondo, sono in funzione solo antenne risonanti cilindriche e qualche prototipo di interferometro, mentre sono in studio la prossima generazione di rivelatori risonanti di forma sferica e sono in costruzione i primi interferometri laser.

Dedichiamoci, quindi, allo studio dettagliato dell'interazione tra un'onda gravitazionale ed una sbarra cilindrica di massa M e lunghezza L , con l'asse longitudinale parallelo all'asse z del nostro sistema di riferimento. Dividiamo il cilindro in cilindri infinitesimi di spessore dz . Indichiamo con $\xi(z, t)$ e $\xi(z + dz, t)$ gli spostamenti al tempo t delle due basi dei cilindri. Richiamiamo alcune nozioni di teoria dell'elasticità dei solidi:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad (2.16)$$

è la *deformazione* o *strain*, mentre

$$\sigma = Yu + D \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.17)$$

è lo *sforzo* o *stress*, dove Y è il modulo di Young e D è il coefficiente di dissipazione. Notiamo che lo stress è la misura della forza elastica per unità di superficie che agisce sul nostro cilindro infinitesimo. Quindi se al tempo t su una base agisce una forza $\sigma(z, t)$, sull'altra base avremo $\sigma(z+dz, t)$ e la forza per unità di volume che agisce sul cilindro sarà data da $\frac{\partial\sigma}{\partial z}$. Allora l'equazione del moto di un cilindro infinitesimo in presenza di un'onda gravitazionale sarà:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} + F_g \quad (2.18)$$

dove con F_g abbiamo indicato la forza per unità di volume generata dall'onda gravitazionale. Per ottenere la corretta espressione di F_g immaginiamo due elementi cilindrici infinitesimi posti simmetricamente rispetto all'origine di un sistema di riferimento in caduta libera, allora la forza gravitazionale agente sulle due masse è pari a

$$\rho \ddot{\xi} = \rho z \ddot{h} \quad (2.19)$$

e quindi è come se tra i due cilindri infinitesimi esistesse una pseudo-forza per unità di volume pari a $\rho z \ddot{h}$. Ma l'origine del sistema

di riferimento non è soggetta ad alcuna forza e ciò permette di affermare che su ciascun elemento agisce una forza pari a

$$F_g = \frac{\rho z}{2} \ddot{h} \quad (2.20)$$

che sostituita nella (2.18) fornisce:

$$\rho \ddot{\xi} - Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - D \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{\rho z}{2} \ddot{h} \quad (2.21)$$

Definiamo la trasformata di Fourier

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.22)$$

che ci consente di scrivere la (2.21) nel modo seguente:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} (Y + i\omega D) + \omega^2 \rho \chi = \frac{\rho z}{2} \omega^2 H \quad (2.23)$$

dove con H abbiamo indicato la trasformata di Fourier di h . La (2.23) è un'equazione differenziale non omogenea di II grado, che

imponendo le corrette condizioni al contorno, ha soluzione

$$\chi(\omega, z) = \frac{z}{2} H(\omega) - \frac{H(\omega)}{2} \frac{\sin \alpha z}{\alpha \cos \frac{\alpha L}{2}} \quad (2.24)$$

dove $\alpha = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{Y}} \sqrt{\left(1 - \frac{i}{Q}\right)}$ e $Q = \frac{Y}{\omega D}$ è il fattore di merito meccanico. Allora la funzione di trasferimento della sbarra sarà [4]

$$T_b = \frac{1}{2} \left(z - \frac{\sin \alpha z}{\alpha \cos \frac{\alpha L}{2}} \right) \quad (2.25)$$

che presenta delle risonanze per $\omega_k = (2k + 1)\omega_0$ con $k \in N$ e $\omega_0 = \frac{\pi v}{L}$ e $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$. Notiamo che la presenza delle sole armoniche dispari è una caratteristica della radiazione gravitazionale legata alla sua natura quadrupolare, che permette di discriminare tra segnali di origine gravitazionale e rumore. La distanza tra due armoniche successive è, in genere, molto grande e quindi possiamo considerare valori della funzione di trasferimento intorno alla frequenza di risonanza. Calcoliamo dunque la (2.25) nel limite $\omega \rightarrow \omega_0$ e $Q \gg 1$

e trascurando il termine in z otteniamo

$$T_b \cong \frac{L\omega_0 \sin \alpha z}{\pi^2 \left(\omega - \omega_0 - \frac{i\omega_0}{2Q} \right)} \quad (2.26)$$

Calcolando, nelle stesse approssimazioni, la funzione di trasferimento di un oscillatore armonico semplice di equazione $\ddot{\xi} + 2\beta_1 \dot{\xi} + \omega_0^2 \xi = \frac{l}{2} \ddot{h}$ avremo

$$T_0 \cong \frac{l}{4} \left(\frac{\omega_0}{\omega - \omega_0 - \frac{i\omega_0}{2Q}} \right) \quad (2.27)$$

Dal confronto delle (4.1) e (2.27) risulta evidente [11] l'analogia tra una sbarra cilindrica ed un oscillatore armonico semplice, in particolare le due funzioni di trasferimento saranno uguali quando $\frac{l}{4} = \frac{L}{\pi^2} \sin \alpha z$. Quindi possiamo sfruttare questa analogia e scrivere la soluzione dell'equazione del moto di una sbarra cilindrica intorno alla prima frequenza di risonanza come

$$\xi(z, t) = -\frac{2L}{\pi^2} H(\omega_1) \omega_0 e^{-\beta_1 t} \sin(\omega_0 t) \sin\left(\frac{\omega_0 z}{v}\right) \quad (2.28)$$

Tale oscillazione è massima agli estremi della sbarra e nulla al centro,

come è possibile notare dalla figura (2.3). Nel caso delle armoniche successive si avranno dei massimi e minimi relativi lungo tutta la lunghezza della sbarra. Un altro parametro fondamentale di una

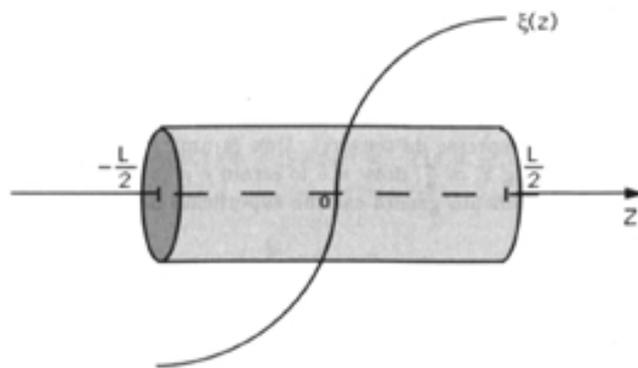


Figura 2.3: Ampiezza di oscillazione della sbarra cilindrica in funzione di z .

sbarra cilindrica è la sezione d'urto, data dalla relazione

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(\omega) d\omega \quad (2.29)$$

con $\sigma(\omega)$ sezione d'urto differenziale. Nel caso in cui l'onda incidente é polarizzata h_+ e proviene da una direzione qualunque, la

sezione d'urto totale, scritta in forma bilatera, sarà:

$$\Sigma_{\theta\varphi} = \frac{16Gv^2}{\pi c^3} M \cos^4 \theta \sin^2 2\varphi \quad (2.30)$$

Mediando su tutte le possibili direzioni di incidenza, otteniamo

$$\Sigma = \frac{32}{15\pi} \frac{GM}{cn^2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad (2.31)$$

Dalla precedente equazione si evince che la sezione d'urto cresce con la massa dell'antenna ed è inversamente proporzionale al numero n del modo longitudinale considerato.

Nel prossimo capitolo si tratterà del sistema costituito dal trasduttore risonante capacitivo e dall'antenna cilindrica e del calcolo del circuito equivalente e delle corrispondenti impedenze.

2.2.2 Antenne sferiche

Attualmente sono in fase di studio i rivelatori risonanti di forma sferica, che presentano notevoli vantaggi rispetto alle antenne cilindriche. Innanzitutto le antenne sferiche hanno la proprietà di poter rilevare onde provenienti da qualunque direzione e con qualunque

polarizzazione. Una singola antenna sferica è in grado di localizzare la sorgente dell'onda [5] ed avrà una sezione d'urto, a parità di materiale utilizzato e frequenza di risonanza, maggiore di un'antenna cilindrica tipica. Infine utilizzando un'antenna sferica è possibile discriminare tra diverse metriche gravitazionali [6].

Studiando le caratteristiche di una sfera mediante la teoria dell'elasticità classica, si trova [7] che le autofunzioni possono essere espresse in termini di armoniche sferiche

$$\Psi_{lm} = [\alpha_l(r)\hat{\mathbf{r}} + \beta_l(r)R\nabla]Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.32)$$

con l dispari e $\alpha_l(r)$ e $\beta_l(r)$ sono due autofunzioni dipendenti dal materiale e dalle dimensioni della sfera. Possiamo descrivere l'interazione di un'onda gravitazionale con un corpo esteso come una densità di forza di *marea*

$$f_i^{GW}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\rho \sum_j \frac{\partial^2 h_{ij}(t)}{\partial t^2} x_j \quad (2.33)$$

nel punto di coordinata x_i con densità di massa ρ . La forza effettiva F_m^s che un'onda gravitazionale eserciterà sul modo m -esimo della

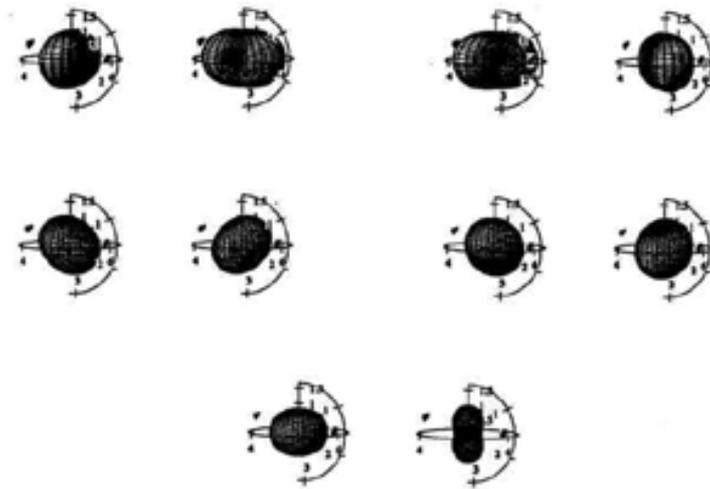


Figura 2.4: Le deformazioni dei 5 modi quadrupolari di una sfera. Per ogni modo sono mostrate due deformazioni differenti di mezzo periodo.

sfera è dato da un integrale di sovrapposizione tra le autofunzioni della sfera e la forza gravitazionale di *marea*

$$F_m^s \equiv \int_{V_0} \Psi_m \cdot \mathbf{f}^{GW} \mathbf{d}^3\mathbf{x} \quad (2.34)$$

Utilizzando le equazioni (2.32) e (2.33) si trova

$$F_m^s(t) = \frac{1}{2} \ddot{h}_m(t) m_s \chi R \quad (2.35)$$

e possiamo interpretare la forza effettiva F_m^s come il prodotto tra la massa della sfera m_s , una distanza effettiva χR e l'accelerazione gravitazionale $\frac{1}{2} \ddot{h}_m$, avendo indicato con h_m le 5 ampiezze dell'onda gravitazionale. Come si nota chiaramente dall'equazione (2.35) c'è una corrispondenza biunivoca tra i 5 modi quadrupolari di una sfera e le 5 ampiezze dell'onda gravitazionale. Quindi utilizzando un'antenna sferica è possibile ottenere tutte le componenti del tensore h_{ij} . E questo permetterebbe di discriminare tra differenti metriche gravitazionali.

La sezione d'urto totale di un sfera per ogni modo quadrupolare

è data [9] da

$$\sigma_n = F_n \frac{G}{c^3} M_s v_s^2 \quad (2.36)$$

con n ordine del modo quadrupolare, M_s è la massa della sfera, v_s è la velocità del suono e F_n è un parametro adimensionale che è caratteristico di ciascun modo quadrupolare. Si è calcolato che per una componente del tensore h_{ij} la sezione d'urto di una sfera è circa 18 volte maggiore di quella di una sbarra cilindrica dello stesso materiale e con la stessa frequenza di risonanza.

2.3 Antenne interferometriche

Il principio di funzionamento su cui si basa questo tipo di rivelatore di onde gravitazionali è l'interferometro di Michelson. Un raggio laser viene scisso in due diversi raggi per mezzo di uno specchio semiriflettente. Questi due raggi percorrendo due diversi cammini ottici vengono fatti interferire producendo frange di interferenza. Se, ad esempio a causa del passaggio di un'onda gravitazionale che si propaga in direzione perpendicolare ad uno dei due cammini,

varia la lunghezza l di uno dei due bracci, si ottiene sullo schermo una variazione delle frange di interferenza.

Uno dei problemi che si incontrano nella costruzione di tali rivelatori è la fluttuazione statistica del numero di fotoni emessi dalla sorgente laser. Si può dimostrare [4] che tale grande fluttuazione è equivalente ad una variazione della lunghezza del cammino ottico pari a

$$\Delta l = \sqrt{\frac{\hbar c \lambda \Delta \nu}{\pi P}} \quad (2.37)$$

dove abbiamo indicato con λ la lunghezza d'onda della luce usata, P è la potenza del fascio e $\Delta \nu$ è la larghezza della banda considerata. Affinchè un'onda gravitazionale possa essere rivelata dovrà essere

$$h \geq \frac{2\Delta l}{l} \quad (2.38)$$

Sostituendo nella (2.38), utilizzando la (2.37) per Δl , i valori ideali di $P = 1000 \text{ watt}$, $\lambda = 0.6 \text{ }\mu\text{m}$ e $\Delta \nu = 1000 \text{ Hz}$, si calcola che affinchè sia $h \geq 4 \times 10^{-21}$ dovrà essere $l = 30 \text{ Km}$.

La difficoltà di costruire dei bracci così lunghi viene supera-

ta dagli interferometri *multi-pass*, in cui la lunghezza dei bracci viene aumentata per mezzo di riflessioni multiple, fino a raggiungere la lunghezza desiderata. Inoltre, per diminuire la dispersione all'indietro della luce del fascio, si effettua un *riciclaggio* per mezzo di specchi che nella figura (2.5) sono indicati con M_0 ed M_3 . In

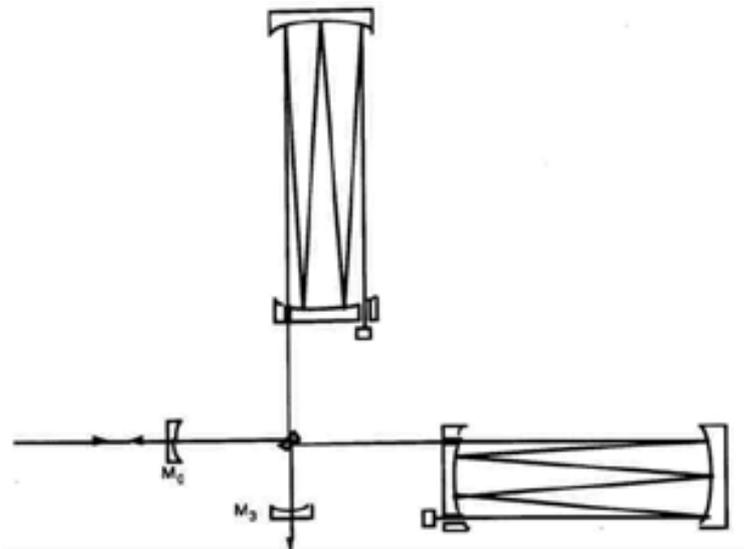


Figura 2.5: Diagramma schematico di un interferometro di Michelson *multi-pass* con i due specchi per il riciclaggio della luce.

questo modo il valore minimo di h misurabile diventa

$$h \geq 10^{-22} \left(\frac{\nu}{1 \text{ kHz}} \right) \left(\frac{\mathcal{E} I_0}{50 \text{ watt}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-R}{5 \times 10^{-5}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{l}{3 \text{ Km}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

nel caso di un'onda impulsiva, avendo indicato con R il potere riflettente degli specchi.

Qualora si vogliano rivelare onde gravitazionali continue si limita la banda di frequenze e riciclando a lungo la luce si ottiene

$$h \geq 10^{-28} \left(\frac{\mathcal{E}I_0}{15 \text{ watt}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1-R}{5 \times 10^{-5}} \right) \left(\frac{l}{3 \text{ Km}} \right)^{-1} \left(\frac{\tau_{int}}{10^7 \text{ s}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

dove con τ_{int} si indica il tempo di immagazzinamento, cioè il tempo impiegato dal raggio per percorrere il cammino ottico tra i due specchi. Come si può notare nel caso di onde continue h ha un valore minimo molto più piccolo.

Attualmente sono in fase di costruzione quattro antenne interferometriche, tra le quali una in Italia, (progetto VIRGO, collaborazione italo-francese) presso Pisa, ed una negli Stati Uniti (progetto LIGO [8]), che saranno operative nei prossimi anni.

Capitolo 3

Riduzione del rumore elettronico

3.1 Rumore

Negli esperimenti di fisica é sempre presente il rumore, che viene da varie origini. Nel caso della ricerca delle onde gravitazionali, in cui i segnali sono cosí deboli, la riduzione delle varie forme di rumore, é essenziale per la riuscita dell'esperimento stesso. Nell'analisi della sensibilità di un'antenna gravitazionale dobbiamo considerare due classi di sorgenti di rumore:

- le sorgenti di rumore intrinseche, quali il rumore termico ed elettronico, che seguono una statistica gaussiana e che possono essere accuratamente caratterizzati;
- le sorgenti di rumore esterne, come il rumore sismico e quello dovuto agli apparati criogenici, che sono più difficili da caratterizzare in quanto spesso non sono gaussiani e anche non stazionari.

Questi rumori possono essere ridotti esaminando le coincidenze tra diverse antenne tra cui ci sia una grande distanza.

In questa sede ci occuperemo solamente dei cosiddetti *rumori interni*, intendendo quei rumori generati dalle caratteristiche intrinseche dell'antenna e dall'elettronica di amplificazione: rumore browniano e rumore elettronico.

3.1.1 Il moto browniano

Consideriamo un insieme di particelle, non importa se allo stato liquido o gassoso. Se la temperatura è maggiore di 0K, le particelle possiederanno dell'energia cinetica sufficiente a farle urtare tra loro in modo caotico. Il loro moto sarà tridimensionale, ma

possiamo limitarci a fare i calcoli in una dimensione senza perdere di generalit .

Prendiamo in considerazione una singola particella e, indicando con u la sua velocit , con β il coefficiente di smorzamento e con $A(t)$ la forza causata dagli urti, scriviamo l'equazione del moto:

$$\frac{du}{dt} = -\beta u + A(t) \quad (3.1)$$

$A(t)$   una forza stocastica, quindi possiamo imporre solo delle condizioni di tipo stocastico:

- $\bar{A}(t) = 0$.
- $\overline{A(t)A(t+\tau)} = A_0\delta(\tau)$.

La prima delle due affermazioni   una diretta conseguenza dell'aver ipotizzato che $A(t)$ sia una variabile casuale, mentre la seconda indica che solo se τ   molto piccolo le forze a due istanti diversi sono fra loro correlate. In effetti solo nel limite per $\tau \rightarrow 0$ il contributo di due forze   diverso da zero.

La soluzione formale dell'equazione (3.1) é [4]:

$$u(t) = u_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta t'} A(t') dt' \quad (3.2)$$

Supponendo che per $t = 0$ sia $x = x_0$ e $u = u_0$ per ciascuna particella, avremo che la media di insieme di u sar a:

$$\bar{u}(t) = u_0 e^{-\beta t} \quad (3.3)$$

Definiamo la grandezza $U(t) = u(t) - \bar{u}(t)$, che si pu o dimostrare [4] che segue una distribuzione gaussiana a media nulla, e calcoliamo $\overline{U^2}$:

$$\begin{aligned} \overline{U^2}(t) &= \overline{(e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta t'} A(t') dt')^2} = \\ &= e^{-2\beta t} \overline{\int_0^t \int_0^t e^{\beta(t'+t'')} A(t') A(t'') dt' dt''} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Operando il seguente cambiamento di variabile $t' + t'' = v$ e $t' - t'' = w$, con $J = \frac{1}{2}$, si ottiene:

$$\overline{U^2}(t) = e^{-2\beta t} \int \int e^{\beta v} A(t') A(t' - w) \frac{1}{2} dv dw$$

Quindi possiamo scambiare l'operazione di media con l'integrale e scrivere:

$$\begin{aligned}\overline{U^2}(t) &= e^{-2\beta t} \int_0^{2t} e^{\beta v} dv \int_{-\infty}^{+\infty} A_0 \delta(w) \frac{1}{2} dw = \\ &= \frac{A_0}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})\end{aligned}\quad (3.5)$$

Dalla conoscenza di $\overline{U^2}(t)$ possiamo ricavare il valore di A_0 , infatti:

$$\overline{U^2}(t) = \overline{(u(t) - \bar{u}(t))^2} = \overline{u^2} + \bar{u}^2 - 2\bar{u}\bar{u} = \overline{u^2} - u_0^2 e^{-2\beta t}$$

Sappiamo che all'equilibrio vale il principio dell'equipartizione dell'energia, per cui:

$$\frac{1}{2} m \overline{u^2} = \frac{1}{2} kT$$

Inoltre per $t \rightarrow \infty$ si ha $\overline{U^2} \rightarrow \overline{u^2}$, da cui è facile ricavare che:

$$A_0 = \frac{2\beta kT}{m}\quad (3.6)$$

e

$$\overline{U^2}(t) = \frac{kT}{m}(1 - e^{-2\beta t}) \quad (3.7)$$

Da questa relazione è chiaro che il rumore browniano è direttamente proporzionale alla temperatura della miscela considerata.

Studiamo l'effetto del rumore su un'antenna gravitazionale cilindrica. Abbiamo precedentemente ipotizzato che:

$$\overline{A(t)A(t+\tau)} = A_0\delta(\tau) \quad (3.8)$$

Da cui si ricava lo spettro di potenza del rumore browniano [4]:

$$S_{AA}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0\delta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = A_0 = \frac{4\beta_1 kT}{m} \quad (3.9)$$

Abbiamo mostrato nel par. (2.2.1) che una sbarra cilindrica è equivalente ad un oscillatore armonico con le seguenti dimensioni: $l = \frac{4L}{\pi^2}$ e $m = \frac{M}{2}$. Quindi basterà studiare l'effetto del rumore browniano sull'oscillatore opportuno. Siamo interessati a calcolare lo spettro di potenza dello spostamento, che, per quanto testè affermato, è

pari a:

$$S_{\xi\xi}(\omega) = S_{AA}(\omega)|T_0(\omega)|^2 = \frac{4\beta_1 kT}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta_1^2 \omega^2} \quad (3.10)$$

Avendo indicato con $T_0(\omega)$ la funzione di trasferimento dell'oscillatore armonico equivalente. Sappiamo che $\overline{\xi^2} = R_{\xi\xi}(0)$, dove:

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi\xi}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.11)$$

è l'autocorrelazione. Calcolando la (3.11) utilizzando il teorema dei residui e ricordando che $\beta_1 \ll \omega_0$, si trova che:

$$R_{\xi\xi}(\tau) \simeq \frac{kT}{m\omega_0^2} e^{-\beta_1|\tau|} \cos \omega_0\tau \quad (3.12)$$

E quindi:

$$\overline{\xi^2} \simeq \frac{kT}{m\omega_0^2} \quad (3.13)$$

Questo risultato può essere rozzamente ottenuto considerando che un insieme di infiniti oscillatori unidimensionali possiede un'energia media $kT = m\omega_0^2 \overline{\xi_0^2}$.

3.1.2 Rumore elettronico

Una parte consistente del rumore di un'antenna gravitazionale viene generato dall'elettronica di amplificazione del segnale. Infatti il trasduttore elettromeccanico, che ha il compito di trasformare un segnale meccanico in uno elettrico, è anche in grado di fare l'inverso. Il trasduttore può essere schematizzato [22] dalle componenti della matrice Z_{ij} , che mette in relazione le variabili in ingresso (la forza $f(t)$ agente sul trasduttore e la velocità $\dot{x}(t)$ delle parti meccaniche del trasduttore) con le variabili in uscita (il voltaggio $v(t)$ e la corrente $i(t)$):

$$f(t) = Z_{11}\dot{x}(t) + Z_{12}i(t) \quad (3.14)$$

$$v(t) = Z_{21}\dot{x}(t) + Z_{22}i(t) \quad (3.15)$$

In molti casi importanti, le componenti Z_{ij} soddisfano le relazioni $Z_{11}Z_{22} = Z_{12}Z_{21}$ e $Z_{12} = Z_{21}$. Un parametro importante è il rapporto β tra l'energia elettrica nel trasduttore e l'energia totale nel

corpo risonante:

$$\beta = \frac{1}{m\omega} \frac{|Z_{12}|^2}{Z_{22}} \quad (3.16)$$

ove m è la massa equivalente dell'antenna. Il principio di funzionamento di tutti i trasduttori è l'immagazzinamento di energia elettromagnetica in un piccolissimo volume. Nel caso dei trasduttori capacitivi questo volume è quello compreso tra due pareti metalliche che costituiscono un condensatore. Una delle pareti è parte dell'antenna. Il moto delle pareti, causato dalle vibrazioni dell'antenna, induce una modulazione dell'energia che viene rilevata ed amplificata come segnale elettrico.

Nei trasduttori risonanti una delle pareti è libera di vibrare ad una sua frequenza di risonanza f_t . Essa quindi costituisce un oscillatore con piccola massa m_t . Si fa in modo che la frequenza f_t sia uguale alla frequenza di risonanza dell'antenna. Da ciò segue che la massima ampiezza delle oscillazioni del piccolo oscillatore aumenta di un fattore $\sqrt{m/m_t}$ rispetto all'ampiezza delle oscillazioni dell'antenna. Nell'espressione (3.16) di β la massa dell'antenna è quindi sostituita da quella del trasduttore.

Il trasduttore è connesso ad un amplificatore elettronico, schematizzabile nel modo seguente: un amplificatore ideale unito a dei generatori ideali di rumore, uno in tensione, con densità spettrale di rumore $V_n^2 \left[\frac{V^2}{Hz} \right]$ ed uno in corrente, con densità spettrale di rumore $I_n^2 \left[\frac{A^2}{Hz} \right]$. Applicando l'analogia di Maxwell tra sistemi meccanici ed elettrici è possibile schematizzare l'antenna con un opportuno circuito RLC [15] e pensare che all'ingresso del nostro amplificatore ideale arrivi un segnale dato da $V_u = V_n + I_n Z_{eq}$, avendo indicato con Z_{eq} l'impedenza del sistema sbarra-trasduttore.

Introduciamo alcuni nuovi parametri:

$$T_n = \frac{V_n I_n}{k} \quad (3.17)$$

$$R_n = \frac{V_n}{I_n} \quad (3.18)$$

T_n è la temperatura di rumore dell'amplificatore, R_n è la resistenza di rumore. Si usa anche il parametro di "matching" tra il

trasduttore e l'amplificatore

$$\lambda = \frac{R_n}{|Z_{22}|} \quad (3.19)$$

Il rumore elettronico ha due contributi: uno a banda stretta ed uno a banda larga. Nel primo caso, si può dimostrare [4] che il rumore in corrente dell'amplificatore genera uno spostamento quadratico medio del trasduttore dato da:

$$\overline{\xi_{ba}^2} = \frac{\alpha^2 I_n^2}{4\beta_1 m^2 \omega_0^4} = \frac{\alpha^2 I_n^2 Q}{2m^2 \omega_0^5} \quad (3.20)$$

Questo è il rumore di “backaction” (retroazione). Nel caso di un trasduttore risonante capacitivo, β diventa

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{\frac{1}{2}m\omega_0^2\xi_0^2} = \frac{C\alpha^2}{m\omega_0^2} \quad (3.21)$$

e λ

$$\lambda = \frac{R_n}{|Z_{trasduttore}|} = \frac{V_n \omega C}{I_n} \quad (3.22)$$

Considerando anche il contributo del rumore termico (equazione

(3.13)), si ottiene l'espressione per lo spostamento quadratico medio dovuto al rumore complessivo:

$$\overline{\xi_{nb}^2} = \frac{kT}{m\omega_0^2} \left(1 + \frac{\beta QT_n}{2\lambda T} \right) \quad (3.23)$$

Il pedice “*nb*” (narrow band) indica che si tratta di una distribuzione a banda stretta. Possiamo quindi affermare che l'effetto del rumore elettronico è quello di far aumentare la temperatura di ciascuno degli infiniti modi di risonanza della sbarra:

$$T_e = T \left(1 + \frac{\beta QT_n}{2\lambda T} \right) \quad (3.24)$$

Il termine a banda larga del rumore elettronico, dovuto all'amplificatore, è additivo. Il suo spettro di potenza è dato da [22]

$$S_0 = V_n^2 + I_n^2 |Z_{22}|^2 = kT_n |Z_{22}| (\lambda + 1/\lambda) \quad (3.25)$$

Se il termine Z_{22} varia lentamente con la frequenza, S_0 può essere considerato bianco nella banda di risonanza dell'antenna.

Nel seguito verrà usata la quantità adimensionale Γ , molto importante. Questa è data dal rapporto del rumore a banda larga ed

il rumore a banda stretta. Si definisce

$$\Gamma = \frac{S_0 \beta_1}{\alpha^2 \xi_{nb}^2} \quad (3.26)$$

Si può dimostrare che è anche

$$\Gamma = \frac{T_n(\lambda + 1/\lambda)}{2\beta Q T_e} \quad (3.27)$$

Nei casi che ci interessano si ha $\Gamma \ll 1$.

La somma all'uscita dei contributi del termine a banda stretta e a banda larga ci danno il rumore complessivo dell'antenna. Possiamo riportare tale rumore all'ingresso dell'antenna. Così facendo si ottiene una funzione che ha la seguente espressione analitica [22]:

$$S_h(f) = \frac{4T_e(2\pi f_0)}{\frac{1}{2}ml^2Q(2\pi f)^4} 1 + \Gamma \left[Q^2 \left(1 - \frac{f^2}{f_0^2} \right)^2 + \frac{f^2}{f_0^2} \right] \quad (3.28)$$

$S_h(f)$ rappresenta quindi lo spettro di un'onda gravitazionale che, incidendo sull'antenna, produrrebbe in uscita un segnale uguale allo spettro osservato. La larghezza a metà altezza di $S_h(f)$ ci dà

la larghezza di banda di un'antenna risonante:

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q} \Gamma^{-1/2} \quad (3.29)$$

E' interessante notare che nel limite di $\Gamma \rightarrow 0$, la larghezza di banda diventa infinita.

La bassa intensità dei segnali gravitazionali rende importante il problema di estrarre un segnale di data forma $h(t)$ dal rumore di densità spettrale $S_h(f)$. Tale problema è stato trattato in dettaglio dalla teoria dell'informazione. Si ottiene la miglior prestazione da un rivelatore filtrando il segnale d'uscita con filtri adattivi ottimali. Il rapporto segnale rumore in energia SNR del filtro ottimale è dato dalla formula

$$SNR = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H(f)|^2}{S_h(f)} df \quad (3.30)$$

dove $H(f)$ è la trasformata di Fourier di $h(t)$. Sebbene i limiti di integrazione siano in teoria infiniti, in pratica si possono ridurre alla banda di Nyquist per un qualunque set di dati.

3.2 Sensibilità di un'antenna gravitazionale agli impulsi

Consideriamo il caso particolare di un burst di onde gravitazionali, il cui segnale aumenta rapidamente fino all'ampiezza massima h_0 e dura un tempo τ_g molto più breve del tempo di integrazione dell'antenna $\Delta t = \Delta f^{-1}$. La trasformata di Fourier di h_0 può essere considerata costante entro la banda dell'antenna: $H(f) \simeq H(f_0) = H_0 \simeq \frac{1}{2}h_0\tau_g$. Introducendo H_0 nella (3.30) si ottiene [22]

$$SNR = \frac{\frac{1}{2}(2\pi f_0)^4 l^2 H_0^2}{4kT_e\sqrt{\Gamma}} \quad (3.31)$$

Il numeratore rappresenta l'energia depositata dal burst sul modo dell'antenna se questo fosse stato inizialmente in quiete. Il denominatore caratterizza il rumore globale dell'antenna ed è di solito espresso [12] da

$$T_{eff} \approx 4T_e\sqrt{\Gamma} \quad (3.32)$$

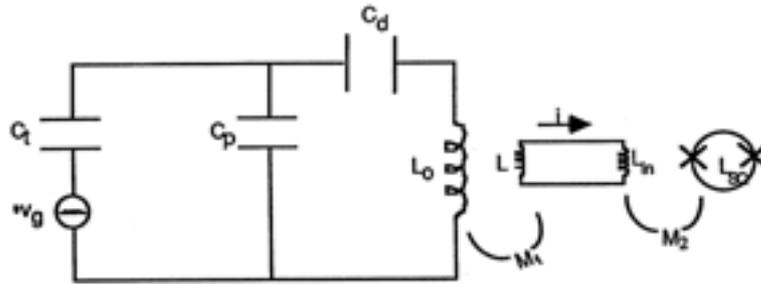


Figura 3.1: Schema circuitale dell'elettronica di amplificazione

Vediamo ora il ruolo dei parametri del trasformatore. Il trasformatore capacitivo è accoppiato al d.c. SQUID¹ tramite un circuito di adattamento superconduttore ad alto Q , mostrato in figura (3.1). L'effetto della trasduzione può essere rappresentato da un generatore di tensione equivalente:

$$v_g = E(y - x) \quad (3.33)$$

con E campo elettrico tra le armature del trasduttore, $y - x$ è lo spostamento relativo tra il trasduttore e la faccia dell'antenna. Possiamo considerare nulle le perdite del circuito di adattamento [16], in quanto superconduttore e ad alto Q e fintanto che la frequenza

¹Una trattazione più dettagliata del dc SQUID sarà fatta nel Cap. 5

di risonanza elettrica è lontana dai modi meccanici. Utilizzando il teorema di Thevenin, la precedente equazione può essere scritta come:

$$v'_g = v_g \frac{C_t}{C_t + C_p} \quad (3.34)$$

dove abbiamo indicato con C_t la capacità e con C_p la capacità parassita del trasduttore. Definiamo i seguenti parametri:

- $M_1 = k_1 \sqrt{L_0 L}$ è la mutua induttanza del trasformatore;
- $M_2 = k_2 \sqrt{L_{in} L_{SQ}}$ è la mutua induttanza tra lo SQUID e la bobina di ingresso;
- C_d è la capacità di disaccoppiamento;
- L_0 e L sono le induttanze del primario e del secondario rispettivamente del trasformatore;
- L_{in} e L_{SQ} sono l'induttanza della bobina di ingresso e l'induttanza dello SQUID;
- $\gamma_s = \frac{L}{L+L_{in}}$.

Risolviendo il circuito mostrato in figura (3.1), non considerando l'effetto dello SQUID, si trova che la corrente nell'avvolgimento

secondario è data da:

$$i = v_g \frac{C_t}{C_t + C_p} \frac{\sqrt{\frac{L_0}{L}}}{j\omega L_0 k_1 - \frac{1}{\gamma_s k_1} \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L_0 \right)} \quad (3.35)$$

con

$$C = \frac{C_d(C_p + C_t)}{C_p + C_t + C_d} \approx C_p + C_t \quad (3.36)$$

è la capacità equivalente vista dai capi di L_0 mentre la seconda uguaglianza è valida se $C_d \gg C_p + C_t$. Inoltre definendo il fattore di trasformazione effettivo $N_e = \sqrt{\frac{L_0}{L}} k_1 \gamma_s$ si ottiene:

$$i = v_g \frac{C_t}{C_t + C_p} \frac{N_e}{Z_0(\omega)} \quad (3.37)$$

dove l'impedenza totale è data da:

$$Z_0(\omega) = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L_0(1 - \gamma_s k_1^2) = \frac{1}{j\omega C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{el}^2} \right) \quad (3.38)$$

e la frequenza di risonanza del modo elettrico è data da:

$$\omega_{el}^2 = \frac{1}{CL_0(1 - \gamma_s k_1^2)} \quad (3.39)$$

Ora possiamo mettere in relazione il flusso magnetico nello SQUID, $\Phi = M_2 i$, con il segnale meccanico:

$$\Phi = M_2 i = \alpha_\phi (y - x) \quad (3.40)$$

con

$$\alpha_\phi = \frac{C_t}{C_t + C_p} \frac{N_e M_2}{Z_0(\omega)} = j\omega C_t \frac{N_e M_2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{el}^2}\right)} \quad (3.41)$$

Da cui ricaviamo il risultato già atteso che, fintanto che $\omega_{el} > \omega_\pm$, avendo indicato con ω_\pm le frequenze dei modi normali meccanici, α_ϕ non è influenzato dalla capacità parassita C_p .

Inoltre, appare chiaro che per massimizzare il segnale che arriva allo SQUID è necessario un trasformatore con una costante di accoppiamento ed un rapporto di trasformazione molto alti.

Nel caso in questione l'espressione (3.27) diventa:

$$\Gamma = \frac{\phi_n^2}{2\tau\Phi_{Br}^2} \quad (3.42)$$

Si trova che il segnale che arriva allo SQUID a causa del rumore browniano è dato da [16]:

$$\Phi_{Br} = \alpha_\phi \sqrt{\frac{k_b T_e}{2m_y \omega_\pm^2}} \quad (3.43)$$

Sostituendo le (3.42), (3.43) e la (3.41) nella (3.32) si ottiene:

$$k_b T_{eff} = \frac{4\phi_n}{M_2 C_t E} \left[\frac{1}{N_e} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{el}^2} \right) \right] \sqrt{\frac{k_b T_e m_y}{\tau}} \quad (3.44)$$

In cui il termine tra parentesi quadre racchiude la dipendenza dai parametri del trasformatore.

L'influenza del trasformatore sulla sensibilità dell'antenna è messa in evidenza dalle seguenti figure, ricavate utilizzando il programma per Matlab[©] "Duemodi e SQUID" scritto dal Prof. M. Bassan. Al momento attuale, l'antenna ultracriogenica NAUTILUS, in funzione continua dal 1998 presso i Laboratori Nazionali di Fras-

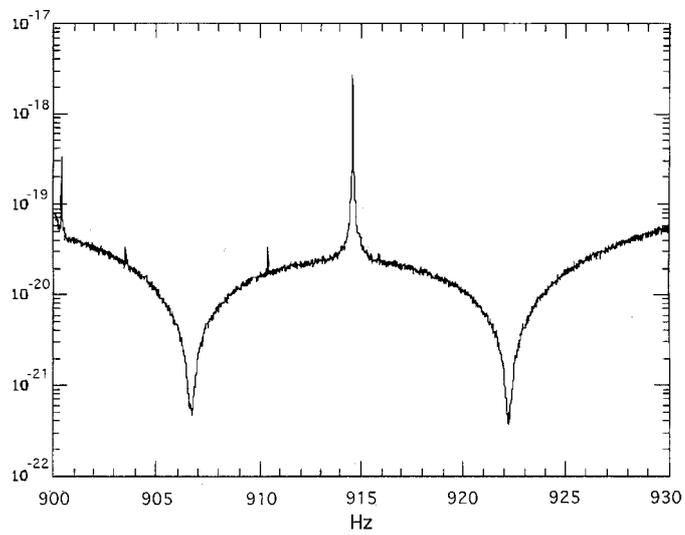


Figura 3.2: Sensibilità attuale di NAUTILUS. Il picco a 914.6 Hz è un segnale di calibrazione, inviato per monitorare il guadagno dello SQUID. Tale segnale può essere rimosso al momento dell'analisi dei dati.

cati dell'I.N.F.N., è equipaggiata con un trasduttore capacitivo risonante ed uno SQUID che permettono di raggiungere una sensibilità $\tilde{h} = \sqrt{S_h} \simeq 4 \cdot 10^{-22} / \sqrt{Hz}$ (vedi fig. (3.2)) ed una $T_{eff} \simeq 2mK$.

Si prevede, nel prossimo futuro, di utilizzare un trasduttore ed uno SQUID della Quantum Design[©] aventi caratteristiche migliori di quelli attualmente utilizzati. Abbiamo usato i parametri di questi nuovi componenti, riportati in tabella (3.1), per calcolare i parametri elettrici del trasformatore. I risultati della simulazione in funzione dei parametri del trasformatore sono riportati in figg. (3.3-3.7).

Antenna		
Massa = 1153Kg	$Q = 3 \cdot 10^6$	$\nu_0 = 914.25Hz$
Trasduttore		
Massa = 630.7g	$Q = 1 \cdot 10^6$	$\nu_0 = 928.20Hz$
gap = 10.5 μm	$C_t = 11.2nF$	$\gamma_t = 1$
d.c. SQUID		
$L_0 = 2.5H$	$L = 1.6\mu H$	$L_{in} = 1.9\mu H$
$L_s = 78.4pH$	$k = 0.77$	$k_s = 0.9$
$\varphi_n = 4 \cdot 10^{-6} \frac{\varphi_0}{\sqrt{Hz}}$	$Q_{el} = 4 \cdot 10^4$	

Tabella 3.1: I parametri dell'antenna equipaggiata con il nuovo trasduttore ed il nuovo SQUID.

Come si nota dalla figura (3.3) c'è un minimo per $L_0 = 4H$, ma

ciò corrisponderebbe ad una situazione di modo elettrico sintonizzato con quelli meccanici (figura (3.4)). Si preferisce, allora, lavorare in regime di non sintonia, perchè gli effetti della sintonizzazione del modo elettrico con quelli meccanici non sono ancora ben noti. Dalle figure (3.3) e (3.4) risulta che un valore di $2H$ per l'induttanza del primario è tale da evitare la sintonizzazione del modo elettrico senza peggiorare significativamente la sensibilità del rivelatore. Dalla figura (3.5) si nota che il Q elettrico del trasformatore deve essere almeno $3 \cdot 10^5$ ed analogamente notiamo che dalla figura (3.7) si ricava un valore minimo per il coefficiente di accoppiamento k pari a 0.7. Infine la figura (3.6) presenta un minimo per un'induttanza del secondario pari ad $1\mu H$. Dalle figure presentate, si ricava che i migliori parametri costruttivi per il trasformatore sono i seguenti:

- $L_0 = 2H$
- $Q \geq 3 \cdot 10^5$
- $k \geq 0.7$
- $L = 1\mu H$

Calcolando la sensibilità con questi parametri del trasformatore e quelli della tabella (3.1) per il trasduttore e lo SQUID, otteniamo

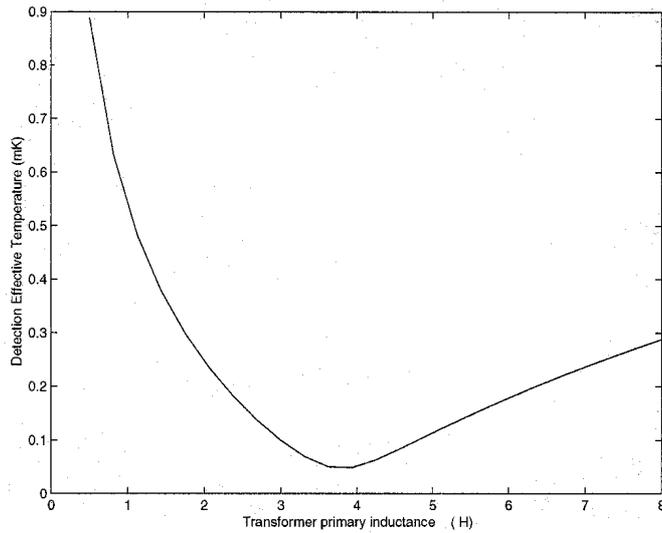


Figura 3.3: Variazione della temperatura di rumore in funzione di L_0 . Gli altri parametri hanno i seguenti valori: $Q = 5 \cdot 10^5$, $L = 2 \mu H$ e $k = 0.7$.

il grafico riportato in figura (3.8). Osserviamo che la larghezza di banda al livello pari a $10^{-20}/\sqrt{Hz}$, risulta circa $\simeq 45 Hz$, contro i 6 Hz attuali. La temperatura efficace corrispondente è $T_{eff} \simeq 0.228 mK$.

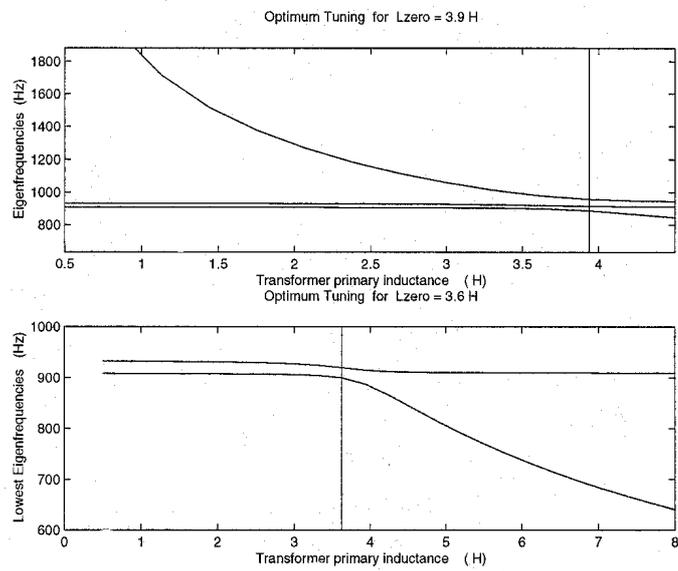


Figura 3.4: Andamento della sintonizzazione dei modi in funzione di L_0 .

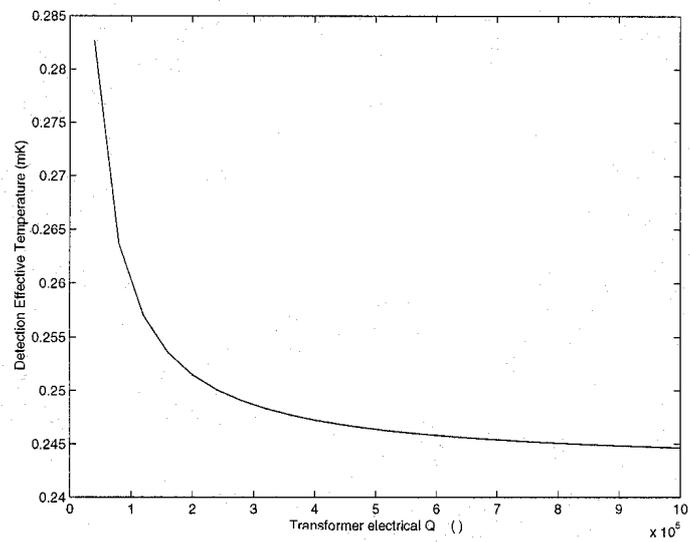


Figura 3.5: Variazione della temperatura di rumore in funzione del Q elettrico. Si noti che al di sopra del valore $Q = 3 \cdot 10^5$, l'andamento di T_{eff} è quasi piatto. Gli altri parametri hanno i seguenti valori: $L_0 = 2H$, $L = 2\mu H$ e $k = 0.7$.

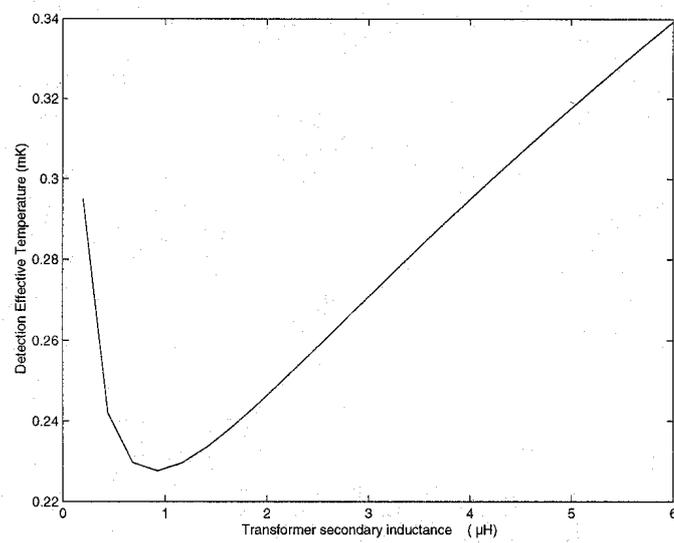


Figura 3.6: Variazione della temperatura di rumore in funzione di L . Gli altri parametri hanno i seguenti valori: $Q = 5 \cdot 10^5$, $L_0 = 2H$ e $k = 0.7$.

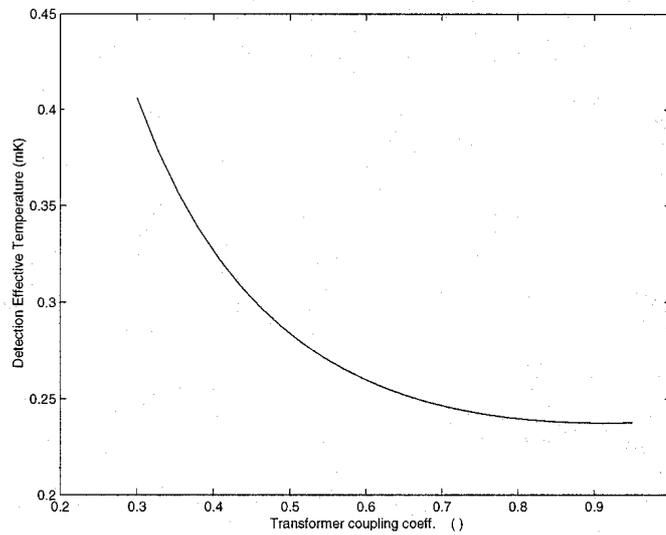


Figura 3.7: Variazione della temperatura di rumore in funzione del coefficiente di accoppiamento k . Anche in questo caso oltre un certo valore ($\simeq 0.7$) T_{eff} non cambia. Gli altri parametri hanno i seguenti valori: $Q = 5 \cdot 10^5$, $L_0 = 2H$ e $L = 2\mu H$.

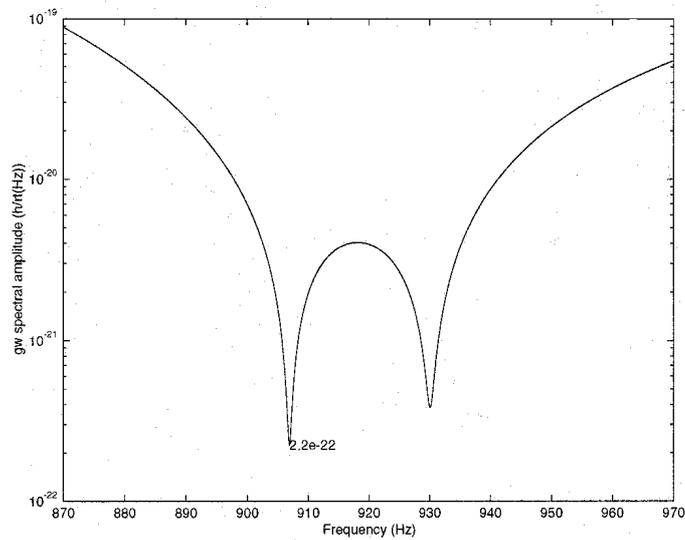


Figura 3.8: La sensibilità dell'antenna NAUTILUS se il trasformatore avesse le caratteristiche previste in questo Capitolo. I picchi corrispondono a sensibilità pari a $2.2 \cdot 10^{-22}/Hz^{1/2}$ e $3.8 \cdot 10^{-22}/Hz^{1/2}$, rispettivamente alle frequenze di 907.94Hz, con larghezza pari a 0.6Hz, e 930.06Hz, con larghezza pari a 1.3Hz.

Capitolo 4

Il trasformatore superconduttore

4.1 Cenni di superconduttività

Il fenomeno della superconduttività fu scoperto nel 1911 da Kamerlingh Onnes, pochi anni dopo aver liquefatto l'elio. Egli osservò che raffreddando dei campioni di mercurio in elio liquido, questi mostravano una brusca diminuzione della resistività elettrica, fino a circa $10^{-6}\Omega cm$, in corrispondenza di una temperatura critica pari a $T_c = 4K$. Questo tipo di comportamento non è esclusivo del

mercurio, ma anche molti elementi metallici ed alcune leghe hanno proprietà superconduttrici al di sotto di differenti temperature critiche che vanno da pochi centesimi di Kelvin fino a circa 125 K per la lega $Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_y$.

Data la totale assenza di resistività, è possibile instaurare in un superconduttore delle correnti elettriche che si mantengono anche in assenza di forze elettromotrici per tempi indefiniti. Esiste però un limite, che dipende dalla natura del materiale, dalla sua geometria e dalla temperatura, sopra il quale l'elemento cessa di essere superconduttore. Tale fenomeno, noto con il nome di effetto Silsbee, dipende dalle proprietà magnetiche della fase superconduttrice.

Infatti è possibile osservare che un superconduttore si comporta come un diamagnete perfetto, espellendo le linee di forza di un campo magnetico in cui è immerso, effetto Meissner-Ochsenfeld. Durante la transizione di un campione immerso in un campo esterno, si nota la comparsa di correnti superficiali necessarie ad annullare il campo all'interno del campione.

Il diamagnetismo perfetto risulta essere una proprietà caratterizzante lo stato superconduttore [18]. Infatti, definendo tale stato semplicemente attraverso la richiesta di una resistività nulla si ot-

tiene che, utilizzando legge di Ohm $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$, mandando a zero ρ con \mathbf{j} costante, deve essere $\mathbf{E} = 0$, ma dall'equazione di Maxwell $d\mathbf{B}/dt = -\nabla \times \mathbf{E}$ si ricava che anche $d\mathbf{B}/dt = 0$. Quindi durante la transizione alla fase superconduttrice il flusso attraverso il campione non può variare, in contraddizione con l'effetto Meissner.

Lo stato superconduttore risulta dipendere anche dal campo magnetico esterno. Infatti qualora questo superasse un certo valore critico H_c si avrebbe una transizione alla fase normale. La modalità con cui ciò avviene permette di distinguere tra superconduttori di prima specie e quelli di seconda [18]:

- per i conduttori di prima specie esiste un solo valore del campo oltre il quale il campione torna alla fase normale;
- nei conduttori di seconda specie, invece, vi sono due valori di campo che caratterizzano la fase. Al di sotto del valore inferiore H_{c1} il campione è superconduttore. Per campi compresi tra H_{c1} e H_{c2} , con $H_{c1} < H_{c2}$, c'è una penetrazione parziale di flusso attraverso dei tubi di flusso, secondo il modello proposto da Abrikosov, all'interno dei quali il materiale non è comple-

tamente superconduttore. Infine, quando il campo diventa maggiore di H_{c2} , tutto il campione torna alla fase normale.

4.1.1 Cenni di Teoria BCS

La Teoria BCS, sviluppata da Bardeen, Cooper e Schrieffer nel 1957, è una teoria microscopica della superconduttività che permette di prevedere l'andamento di alcune proprietà macroscopiche dello stato superconduttore, quali la temperatura critica oppure il campo critico e il calore specifico al variare della temperatura. Essa è basata sull'idea di Cooper che gli elettroni vicini alla superficie di Fermi, interagendo con il reticolo, condensino in uno stato energetico più basso accoppiandosi in modo che ciascuna coppia sia formata da elettroni di spin e momento angolare opposti.

Bardeen, Cooper e Schrieffer dimostrarono, inoltre, che esiste un *gap* di energia tra lo stato con il maggior numero possibile di coppie e quello con una coppia in meno. La scoperta dell'effetto isotopico, cioè la dipendenza della temperatura critica dalla massa isotopica secondo la relazione $T_c = M^{-\alpha}$ con $\alpha \sim 1/2$, suggerì l'evidenza di un'interazione attrattiva tra il reticolo e gli elettroni

che consente la formazione delle coppie. Il primo elettrone interagisce con il reticolo deformandolo; il secondo elettrone “sente” la deformazione e la sfrutta per passare ad uno stato energetico più basso. Infine il secondo elettrone interagisce con il primo per mezzo della deformazione reticolare o del campo fononico e si forma la coppia. Lo stato fondamentale superconduttore è quello in cui tutti gli elettroni sono legati a coppie.

Consideriamo N elettroni di conduzione che, nello stato fondamentale, saranno legati a formare $N/2$ coppie. Allora la funzione globale per tale stato sarà data da:

$$\begin{aligned}\Psi_{BCS} &= \mathcal{A}\Psi(\mathbf{r}_1, s_1, \dots, \mathbf{r}_N, s_N) \\ &= \mathcal{A}[\varphi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2) \cdots \varphi(\mathbf{r}_{N-1}, s_{N-1}; \mathbf{r}_N, s_N)]\end{aligned}\quad (4.1)$$

dove abbiamo indicato con \mathcal{A} l'operatore di antisimmetrizzazione e con $\varphi(\mathbf{r}, s; \mathbf{r}', s')$ lo stato legato di ciascuna coppia, \mathbf{r} è la posizione e s è lo spin. L'antisimmetrizzazione è necessaria in quanto gli elettroni sono fermioni e obbediscono al principio di Pauli. Ciò non impedisce ad una coppia di elettroni con spin opposti di comportarsi statisticamente come un bosone. Se l'energia di legame

della coppia fosse così grande da rendere la dimensione della coppia piccola rispetto alla distanza r_s tra i due elettroni, allora lo stato fondamentale consisterebbe effettivamente di $N/2$ bosoni. Ma si può dimostrare che ciò non è vero e quindi non è corretto trattare le coppie di Cooper come bosoni indipendenti.

Le funzioni d'onda φ rappresentano stati di singoletto, perchè se fossero triplette ne deriverebbero delle proprietà magnetiche non osservate. Infatti i due elettroni hanno spin opposti e la parte spaziale della funzione d'onda $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è simmetrica ed i vettori d'onda dei due elettroni sono uguali ed opposti.

4.1.2 Cenni di Teoria GL

Questa teoria, sviluppata nel 1950 da Ginzburg e Landau, è una trattazione macroscopica della superconduttività, intesa come transizione di fase, alla temperatura critica T_c . Lo studio del fenomeno avviene per mezzo di un parametro complesso $\psi(\mathbf{r})$, nullo per $T > T_c$, la cui ampiezza misura il grado di ordine superconduttore rispetto alla posizione \mathbf{r} per $T < T_c$. Il parametro ψ è normalizzato in modo che $|\psi(\mathbf{r})|^2$ rappresenti la densità locale di elettroni

superconduttori.

La Teoria GL parte dal postulato che, se ψ varia lentamente con \mathbf{r} , la densità di energia libera tra la fase superconduttrice e quella normale può essere sviluppata in serie nel modo seguente [17]:

$$f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right) \right|^2 \quad (4.2)$$

con α e β parametri dipendenti dalla temperatura, mentre m^* ed e^* sono due costanti con le dimensioni rispettivamente di una massa e di una carica elettrica, la cui determinazione in termini di m ed e verrà eseguita nel prossimo paragrafo.

Scriviamo il parametro $\psi(\mathbf{r})$ come $|\psi(\mathbf{r})| \exp(i\theta(\mathbf{r}))$, ipotizzando che il contributo maggiore alla variazione spaziale del parametro d'ordine venga dalla fase θ . Minimizzando l'energia libera calcolata dall'equazione (4.2) come integrale di volume di f_s , si arriva, con metodi variazionali standard, alle due equazioni di Ginzburg e Landau [17]:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - e^* \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{J} = \frac{e^*}{m^*} |\psi|^2 (\hbar \nabla \theta - e^* \mathbf{A}) \quad (4.4)$$

Si può notare che l'equazione (4.3), a parte il termine non lineare, è formalmente identica all'equazione di Schroedinger per una particella di massa m^* , carica e^* e funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$. Analogamente l'equazione (4.4) ha la forma della densità di corrente quantistica di una particella con gli stessi valori di massa e carica.

La Teoria GL descrive bene il comportamento macroscopico dei superconduttori.

4.2 Il trasformatore

4.2.1 Progettazione

Come è stato evidenziato nel Capitolo 3, il trasformatore in oggetto deve avere delle precise caratteristiche elettriche, che, unite alla necessità della compattezza, limitano notevolmente la libertà progettuale. In particolare, quest'ultima richiesta, dovuta al fatto che le dimensioni della scatola in cui il trasformatore dovrebbe alloggiare con il d.c. SQUID sono fisse, pone dei forti vincoli alle dimensioni

dell'avvolgimento.

Per poter conciliare le caratteristiche elettriche con quelle fisiche sono stati fatti dei calcoli descritti nel seguito. Utilizzando Matlab[©] e le formule e le tabelle di [19], ho realizzato un programma, di cui in appendice riportiamo una parte, che consente il calcolo dell'induttanza del primario e del secondario e la loro mutua induttanza al variare di tutti i parametri fondamentali: lunghezza ed altezza della bobina, numero di strati del primario, numero di spire del secondario e spessore del filo, tenendo conto anche della separazione tra le spire in ogni strato e dello spessore del singolo strato. La figura (4.1) mostra il progetto definitivo del rocchetto su cui è stato avvolto il trasformatore. La lunghezza della bobina è vincolata dalla disponibilità di nastro di Teflon PTFE dello spessore di $90\mu m$ e largo, appunto, $19mm$. Per quanto riguarda la disponibilità di filo di Nb, dobbiamo notare che, sebbene avessimo rocchetti con fili di diversi spessori, tutti erano lunghi un chilometro circa. Risulta quindi, lasciando uno spazio di circa $20\mu m$ tra spira e spira, per il circuito primario a temperatura ambiente, utilizzando del filo di spessore $80\mu m$ ed avvolgendo 51 strati, un'induttanza pari $L = 2.07H$. Dobbiamo però considerare il fatto che la temperatura

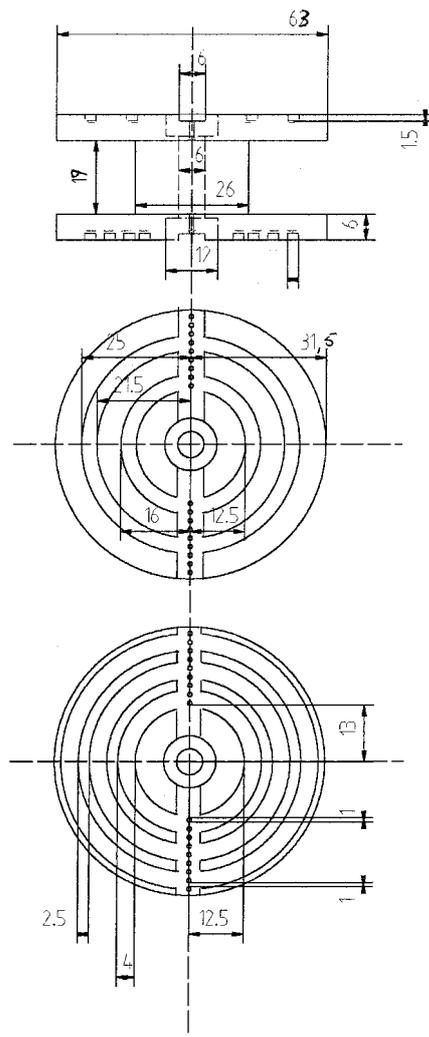


Figura 4.1: Progetto del trasformatore, tutte le misure sono in mm

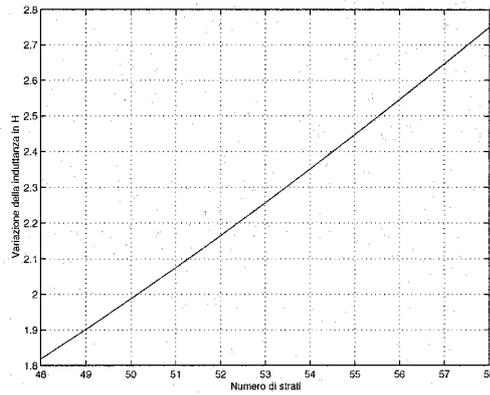


Figura 4.2: Variazione dell'induttanza secondo il numero di strati operativa del trasformatore è di circa $100mK$ e quindi tener conto dell'effetto dello schermo superconduttore. Per questo motivo si è scelto di far avvolgere più strati, precisamente 53, ed ottenere un'induttanza pari a $L = 2.27H$.

4.2.2 Scelta dei materiali

Dobbiamo ora scegliere dei materiali che abbiano delle caratteristiche fisiche tali che ci consentano di ottenere dei fattori di merito molto elevati e che possano essere combinati insieme senza correre

il rischio di rotture durante la lavorazione o durante le fasi di raffreddamento e riscaldamento. Per quanto riguarda il rocchetto su cui viene avvolto il trasformatore, una possibile scelta è il MACOR, una ceramica vetrosa che offre un'alta resistenza durante la lavorazione al tornio, una resistività $\rho > 10^{16} \Omega \cdot cm$, che ci assicura bassissime perdite elettriche, ed un coefficiente di dilatazione termica $\frac{\Delta l}{l} \simeq -0.16\%$, da confrontare con il coefficiente di dilatazione termica del Nb $\frac{\Delta l}{l} \simeq -0.147\%$. Questo materiale non è mai stato utilizzato per questo tipo di trasformatore superconduttore. Il materiale isolante del filo di Nb è il FORMVAR[©], un derivato del silicone che ha un'altissima resistività necessaria a ridurre al minimo le perdite elettriche tra spira e spira.

Purtroppo la sola scelta di materiali che singolarmente hanno ottime caratteristiche elettriche non garantisce che il trasformatore completo raggiunga i valori di Q ricercati.

4.2.3 Realizzazione

La realizzazione del trasformatore è un'operazione molto delicata che può inficiare gli sforzi di progettazione. Abbiamo quindi deciso

di far avvolgere il circuito primario da una ditta esterna, specializzata nella costruzione di trasformatori, considerando il fatto che il Nb è un materiale che si rompe facilmente sotto trazione e che non è possibile saldarlo con i metodi normali tradizionali, ma solo con una saldatrice a scarica. Inoltre abbiamo cercato di far sì che le spire non si toccassero l'una con l'altra, sempre per ridurre la possibilità di perdite elettriche e per verificare la bontà del MACOR come materiale per il supporto. Un'altro accorgimento utilizzato è stato quello di inserire una striscia di Teflon PTFE tra uno strato e l'altro. L'inserimento del Teflon fa aumentare lo spessore dell'avvolgimento diminuendo in modo significativo sia le perdite tra strato e strato sia la capacità parassita. In questo modo è stato possibile avvolgere circa 4100 spire, contro le 9000 previste, senza che si verificassero rotture del filo. Dal momento che l'induttanza varia con il quadrato del numero di spire, l'induttanza prevista è $L \simeq 0.55H$ a temperatura ambiente.

Il circuito secondario è stato invece avvolto utilizzando del filo di Piombo, di diametro $1mm$ circa, che transisce a $7.2K$, inserito in un tubicino di Teflon per ridurre le perdite elettriche. Il circuito secondario è stato avvolto in laboratorio a mano, poichè le

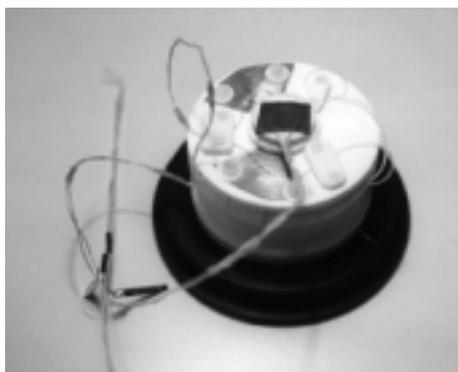


Figura 4.3: La foto mostra i particolari costruttivi del trasformatore. In evidenza sono le orpelle di Nb che collegano il filo sottile del primario a quello più spesso e la bobinetta di eccitazione.

dimensioni del filo di Pb ed il basso numero di spire hanno reso questo compito più facile. Tra il primario ed il secondario è stata inserita una striscia di Teflon PTFE. Abbiamo avvolto 6 spire, in modo che tutta la superficie laterale del primario fosse ricoperta dal secondario per cercare di massimizzare il coefficiente di accoppiamento. Infine abbiamo stretto il secondario con un'ultima striscia di Teflon PTFE. Il trasformatore così completo è stato infine chiuso in una scatola di PVC ricoperta interamente da un foglio di Pb. Lo scopo di quest'ultimo rivestimento è quello di minimizzare eventuali disturbi dovuti a campi magnetici esterni, che potrebbero creare



Figura 4.4: Il trasformatore pronto per la misura di Q .

problemi al corretto funzionamento dello SQUID (vedi par. (5.5)).

4.2.4 Misure di induttanza

Prima di avvolgere il secondario è stata fatta una misura preliminare a temperatura ambiente dell'induttanza del primario. I collegamenti tra il trasformatore e lo strumento di misura, un ponte HP-4192A a quattro fili, è stato effettuato spellando il filo di Nb con carta smerigliata, controllando la spellatura al microscopio e fissando il filo alla basetta sperimentale con una saldatura a stagno.

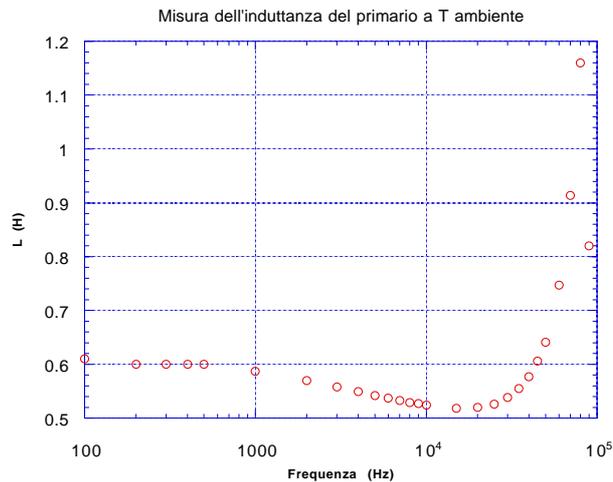


Figura 4.5: Variazione dell'induttanza del primario in frequenza a T ambiente

Questo tipo di contatto, per quanto poco solido e riproducibile, è perfettamente compatibile con il tipo di prova effettuato. La misura ad $1kHz$, che è la frequenza operativa dell'antenna, ha dato un valore di $0.58H$, compatibile con i calcoli effettuati con Matlab[©]. La figura (4.5) mostra l'andamento dell'induttanza al variare della frequenza.

Per le misure a 4K mi sono occupato dell'allestimento di un criostato, presso i Laboratori Nazionali di Frascati dell'I.N.F.N., con un discendente munito di schermi di rame e Mylar per ridurre

gli ingressi termici. Inoltre ho realizzato il cablaggio del discendente e tutte le scatole di derivazione dei fili. Per queste misure a bassa temperatura abbiamo deciso di cambiare il tipo di contatto, rendendolo più resistente. Ribattezzato “*blob*”, abbiamo proceduto nel modo seguente:

- ho stagnato il piedino di una resistenza;
- ho spellato il filo di Nb con carta smerigliata, controllando la spellatura al microscopio;
- è stato spellato del filo di rame rivestito in FORMVAR[©] con acido formico e controllata la spellatura al microscopio;
- ho avvolto la parte spellata del filo di Nb al piedino;
- ho avvolto il filo di rame intorno al filo di Nb;
- ho inglobato il tutto con un blob di stagno.

A questo punto, dopo aver verificato la bontà dei contatti, abbiamo immerso il trasformatore in azoto liquido con il secondario chiuso su di un corto superconduttore. Tolto l’azoto, abbiamo trasferito l’elio liquido, osservando la transizione del trasformatore alla fase superconduttrice. Abbiamo allora eseguito le misure utilizzando ancora una volta il ponte a quattro fili HP-4192A. Successiva-

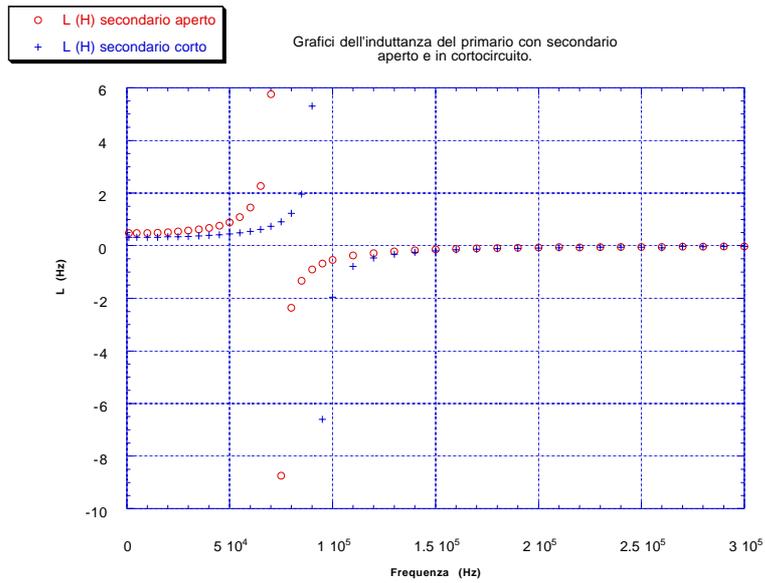


Figura 4.6: Confronto delle misure con secondario aperto ed in corto circuito a $T = 4.2K$

mente, lasciando il trasformatore immerso in elio liquido, abbiamo strappato il contatto superconduttore del secondario per mezzo di un filo di rame portato all'esterno. La figura (4.6) rappresenta un confronto tra le misure effettuate con i due diversi setup. Come è possibile notare, gli andamenti dell'induttanza nei due casi sono pressochè identici salvo lo spostamento della frequenza di risonanza. Tali misure servono a calcolare il coefficiente di accoppiamento k . Infatti, considerando il trasformatore come ideale alla temperatura

dell'elio liquido, si ricava che

$$k = \sqrt{1 - \frac{L_1}{L_0}} \quad (4.5)$$

avendo indicato rispettivamente con L_1 e L_0 le induttanze misurate con il secondario in corto ed aperto. Le misure sono rispettivamente $L_1 = 0.32H$ e $L_0 = 0.47H$, che forniscono un valore per il coefficiente di accoppiamento pari a $k = 0.57$. Contemporaneamente abbiamo misurato il valore della capacità parassita, ottenendo un valore di $C \simeq 54nF$. Abbiamo cercato di aumentare il valore di k avvolgendo, come circuito secondario, 6 strati di piattina di Pb dello spessore di 0.5mm. In questo caso abbiamo misurato $L_1 = 0.29H$ e $L_0 = 0.45H$, ottenendo $k = 0.59$. Queste misure dimostrano come il valore di k vari, anche se poco, con il modo di avvolgere il secondario.

4.2.5 Misure di fattore di merito

Abbiamo effettuato diverse misure di Q con diversi setup sperimentali per cercare quello che forniva i valori più alti. La figura (4.7) riporta lo schema circuitale valido per tutte le misure, nonostante

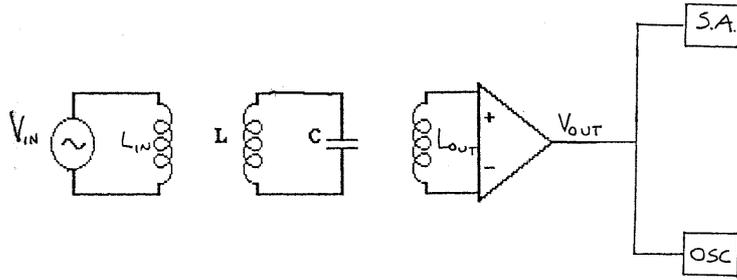


Figura 4.7: Schema del circuito di misura. SA indica l'analizzatore di spettro e OSC l'oscilloscopio.

alcuni dettagli differissero nei vari setup. In alcuni casi, quelli per cui $Q < 10^4$, il Q è stato calcolato utilizzando la seguente relazione

$$Q = \frac{\nu_0}{\nu_1 - \nu_2} \quad (4.6)$$

dove ν_1 e ν_2 sono tali che

$$|H(\nu_{1,2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(\nu_0)| \quad (4.7)$$

e ν_0 è la frequenza di risonanza del circuito ed H la funzione di trasferimento.

La prima misura è stata effettuata utilizzando del filo di rame per le bobine ausiliarie di eccitazione e rivelazione (L_{in} e L_{out}) ed il circuito primario è stato chiuso su un condensatore¹ ad alto Q da $9nF$ a temperatura ambiente e da $10.3nF$ a $T = 4.2K$ per avere un circuito risonante, tramite i contatti a “blob” descritti nel paragrafo precedente. Abbiamo così avuto conferma, misurando un Q di appena 290, della scarsa qualità di questo tipo di contatto.

Il sospetto che il contatto tra il primario e la capacità fosse determinante ai fini della misura di un buon Q è diventato certezza durante il secondo set di misure. Abbiamo infatti abbandonato i contatti a “blob” per delle saldature a scarica, pur mantenendo le stesse bobine di ingresso e di uscita. Il contatto con la capacità è stato garantito saldando a scarica il filo di Nb su orpella di Nb, controllando al microscopio la bontà delle saldature. Sempre sulla stessa orpella con la saldatrice a scarica abbiamo saldato un filetto di rame di lunghezza $< 1cm$ che infine abbiamo saldato a stagno

¹I condensatori commerciali in Teflon sono stati forniti dalla Eurofarad, 75540 Parigi Cedex 11, Francia

al condensatore. Abbiamo cercato di minimizzare la lunghezza del filo di rame perchè questo non è un materiale superconduttore e la sua resistenza avrebbe potuto degradare il Q del circuito risonante. In questo modo sono stati compiuti dei passi avanti, misurando $Q \simeq 2.1 \cdot 10^4$, ancora lontano, però, dai risultati sperati.

Il terzo ed ultimo set di misure è stato effettuato mantenendo lo stesso setup della misura precedente, ma sostituendo le precedenti bobine di eccitazione e rivelazione con altre fatte di filo di Nb. Abbiamo deciso di cambiarle perchè riteniamo che la resistenza del rame, riportata sul primario secondo il rapporto di trasformazione, degradi il fattore di merito del risonatore. Per rendere le nostre misure ancora meno intrusive, è stata tolta una delle due bobine. Infine, la scatola di PVC è stata racchiusa in 2 schermi di Pb anzichè uno. Ancora una volta i cambiamenti apportati hanno spostato i risultati nella direzione sperata. In quest'ultimo caso è stato misurato il tempo di decadimento dell'oscillazione con un cronometro, cioè il tempo necessario perchè l'ampiezza si riduca di un fattore $1/e$. Il miglior risultato ottenuto è stato $\tau \simeq 34sec$ e, quindi utilizzando la

relazione

$$Q = \pi \cdot \nu_0 \cdot \tau \quad (4.8)$$

abbiamo ottenuto $Q \simeq 2.5 \cdot 10^5$. Con questo stesso setup sperimentale abbiamo misurato il Q con differenti capacità. La tabella seguente riporta i risultati.

Capacità (nF)	Dimensioni	Q
10.3	$l = 22mm$ e $\Phi = 11mm$	$2.5 \cdot 10^5$
10.2	$l = 18mm$ e $\Phi = 8mm$	$8.0 \cdot 10^4$
92.6	$l = 34mm$ e $\Phi = 17mm$	$8.0 \cdot 10^4$

Tabella 4.1: La capacità ha le dimensioni di un cilindro di lunghezza l e diametro Φ . L'errore di misura sul Q è dell'ordine dell' 1%

4.2.6 Misure sul trasformatore con supporto in Teflon

In seguito ai risultati ottenuti con il trasformatore appena descritto si è deciso di far avvolgere il nuovo trasformatore. Il cui progetto è identico al precedente (vedi fig. (4.1)), ma il materiale del supporto non è più il MACOR ma il Teflon PTFE. Dalle misure riportate

nel paragrafo precedente, risulta che il fattore di merito ottenibile in un trasformatore con supporto in MACOR è al più dell'ordine di $2.5 \cdot 10^5$. Tenendo anche in considerazione le difficoltà di lavorazione di questo materiale, abbiamo deciso di sostituirlo. La scelta è ricaduta sul Teflon PTFE, sia per la facilità di lavorazione e reperibilità, sia per le precedenti esperienze fatte da altri gruppi di ricerca con antenne gravitazionali risonanti, che hanno realizzato dei trasformatori superconduttori con alti fattori di merito ma con bassi coefficienti di accoppiamento. Anche in questo caso abbiamo usato il filo di Nb da $80\mu m$ isolato con FORMVAR[©]. Bisogna però precisare che questa volta abbiamo deciso di far avvolgere tutte le 9317 spire previste, per un totale di 55 strati e 170 spire per strato, senza rotture del filo. Come per il precedente trasformatore, abbiamo fissato il sottile filo da $80\mu m$ ad un'orpella di Nb, con delle saldature a scarica, per poter poi lavorare all'esterno degli schermi di Pb con filo di Nb da $125\mu m$, più resistente e meno soggetto a rotture. In questo caso, il secondario è stato avvolto utilizzando ancora una volta il filo di Nb da $125\mu m$, per un totale di 8 spire. Il numero di spire è il minimo necessario per ricoprire interamente la superficie laterale del primario, mentre la scelta del filo di Nb deri-

va dalla necessità di saldare il secondario direttamente alla bobina d'ingresso dello SQUID.

La prima misura a temperatura ambiente effettuata sul primario ha fornito un valore pari a $L_0 = 2.36H$, contro un valore aspettato di $2.35H$.

La prima misura effettuata a bassa temperatura è stata quella del Q elettrico. Per poter confrontare i risultati di questa misura con quelli ottenuti precedentemente, abbiamo utilizzato lo stesso setup sperimentale: stessa bobina di eccitazione, doppio schermo di Pb e stesso condensatore. Il risultato è stato ottimo. Abbiamo ottenuto un $\tau \simeq 127sec$ che corrisponde ad un $Q \simeq 4.4 \cdot 10^5$, migliore del precedente nonostante il numero di spire sia più del doppio e quindi presumibilmente con maggiori perdite elettriche dovute all'isolamento del filo.

Abbiamo quindi misurato l'induttanza del primario, ottenendo, alla temperatura dell'elio liquido, il valore di $L = 2.2H$, con un errore strumentale del 2%, contro un valore aspettato di $2.26H$. Nello stesso tempo abbiamo misurato anche il coefficiente di accoppiamento, ottenendo $k \simeq 0.67$. La misura dell'induttanza del secondario, a $T = 4.2K$, ha fornito $L \simeq 4\mu H$ e dai calcoli avevamo

previsto un'induttanza di circa $3.8\mu H$.

Come abbiamo visto nel Cap. 3, questo valore non è quello ottimale. Utilizzando il programma calcolo della sensibilità con questi parametri ($L_0 = 2.2H$, $L = 4\mu H$, $k = 0.67$ e $Q = 4.4 \cdot 10^5$) otteniamo una $T_{eff} \simeq 0.258mK$ ed una sensibilità, graficata in figura (4.8), $\tilde{h} \simeq 2.2 \cdot 10^{-22}/\sqrt{Hz}$. Questi valori sono poco distanti da quelli ottenuti nel caso ottimale, tanto che le figure (3.8) e (4.8) sono quasi perfettamente sovrapponibili.

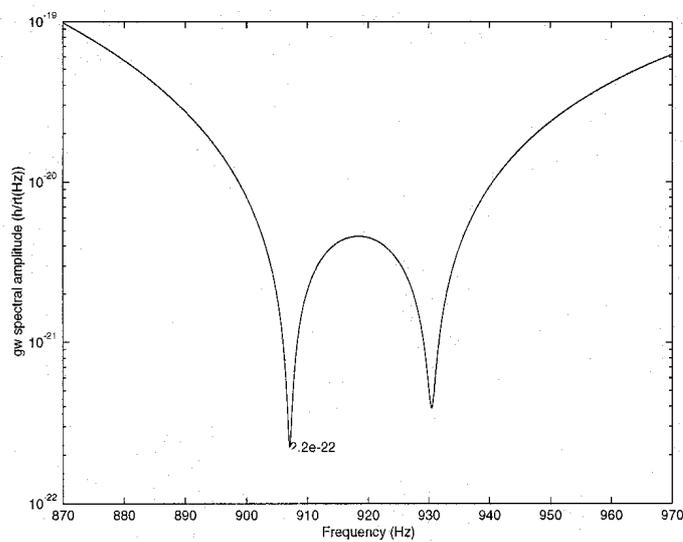


Figura 4.8: La sensibilità di NAUTILUS se fosse equipaggiato con questo trasformatore. I picchi corrispondono a sensibilità pari a $2.2 \cdot 10^{-22} / Hz^{1/2}$ e $3.9 \cdot 10^{-22} / Hz^{1/2}$, rispettivamente alle frequenze di 907.04Hz, con larghezza pari a 0.6Hz, e 930.46Hz, con larghezza pari a 1.2Hz. La larghezza di banda al livello pari a $10^{-20} / Hz^{1/2}$ è circa 40Hz.

Capitolo 5

Il d.c. SQUID

In questo capitolo riportiamo un'analisi della teoria del funzionamento del d.c. SQUID ed esamineremo i risultati preliminari di misure eseguite presso l'Università di Tor Vergata su un nuovo sistema di read-out dell'esperimento gravitazionale.

Recentemente un nuovo d.c. SQUID è stato messo a punto presso l'Istituto di Elettronica dello Stato Solido [23]. Questo dispositivo mostra delle caratteristiche di rumore migliori di tutti i d.c. SQUID mai costruiti, fornendo una risoluzione in energia pari a $5.5\hbar$ alla temperatura di 0.9K ($28\hbar$ a 4.2K), da confrontare con valori dell'ordine di $10^3\hbar$ degli SQUID attualmente utilizzati negli

esperimenti di rivelazione delle onde gravitazionali. Per trarre vantaggio da tale sensibilità è necessario far operare il dispositivo in una configurazione a doppio SQUID, in cui un secondo SQUID legge il rumore del primo. Tale schema di lettura è stato ampiamente studiato: le misure di rumore sopra riportate sono state appunto effettuate in questo modo. Un amplificatore a doppio SQUID è stato montato lo scorso anno sull'antenna gravitazionale criogenica del gruppo di Roma EXPLORER, operante al CERN. La catena di read-out utilizzata comprendeva, oltre al doppio SQUID sopra descritto, un trasduttore capacitivo risonante di nuova concezione, sviluppato presso l'Università di Tor Vergata, caratterizzato da una gap di circa $10\mu m$.

Mentre il trasduttore ha mostrato di funzionare come previsto, il doppio SQUID ha presentato un comportamento imprevisto, con un peggioramento di un fattore 100 in sensibilità, probabilmente a causa della presenza in ingresso allo SQUID di un oscillatore ad alto Q. Questo risultato ha reso necessario rimuovere il nuovo read-out dall'antenna EXPLORER per procedere ad uno studio più approfondito su banco.

Nel seguito riportiamo le prime misure da me eseguite su questo

sistema in collaborazione con alcuni membri del gruppo ROG delle sezioni di Tor Vergata, del CNR-IESS e dei Laboratori Nazionali di Frascati.

5.1 Quantizzazione del flusso

Torniamo indietro alla trattazione teorica della superconduttività, agganciandoci al paragrafo sulla Teoria Ginzburg-Landau. Riscriviamo l'equazione (4.4) in modo da mettere in evidenza la dipendenza di θ dalla densità di corrente \mathbf{J} e dal potenziale vettore \mathbf{A} :

$$\nabla\theta = \frac{m^*}{\hbar e^* |\psi|^2} \mathbf{J} + \frac{e^*}{\hbar} \mathbf{A} \quad (5.1)$$

Dal momento che $\psi(\mathbf{r})$ deve essere una funzione univoca, la fase θ dovrà cambiare di multipli interi di 2π quando si percorrono cammini chiusi:

$$\oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n \quad (5.2)$$

Sostituendo a $\nabla\theta$ l'espressione (5.1), applicando il teorema di Stokes e sapendo che $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, si ottiene [18]:

$$\frac{m^*}{(e^*)^2|\psi|^2} \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} + \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{h}{e^*}n \quad (5.3)$$

La quantità a primo membro della (5.3) è chiamata flussoide. Nel caso in cui il campione è nella fase superconduttrice, n è costante ed indipendente dal tempo.

Se calcoliamo la (5.3) lungo un cammino che racchiude una regione superconduttrice, l'unica scelta possibile per n sarà $n = 0$. Ciò equivale a dire che il flusso nel campione è zero tranne che nella regione superficiale in cui scorrono le supercorrenti di schermaggio. Tale zona è nota come profondità di penetrazione di London Λ , data dalla relazione [18]:

$$\Lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

Al contrario, lungo un cammino che racchiuda uno spazio vuoto o una regione del campione non superconduttrice, tutti i valori di n sono possibili. Se il cammino di integrazione viene scelto in una

zona lontana dal campione possiamo trascurare la supercorrente e la (5.3) diventa:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi = n\Phi_0 \quad (5.5)$$

in cui viene definito il quanto di flusso $\Phi_0 \equiv \frac{h}{e^*}$. La quantizzazione del flusso, predetta da London nel 1950, fu verificata sperimentalmente nel 1961 da Doll & Näbauer e da Deaver & Fairbank. Questi esperimenti mostrarono che:

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \simeq 2.068 \times 10^{-15} \text{Wb} \quad (5.6)$$

Da cui si ricava che $e^* = 2e$, cioè gli elettroni sono raggruppati in coppie. Questo risultato è in accordo con la Teoria BCS e ci consente di identificare il parametro d'ordine ψ con la funzione d'onda φ della coppia di Cooper. Dato che tutte le coppie occupano lo stesso stato, è sufficiente una sola funzione.

Per analogia si assume $m^* = 2m$ e risulta che ψ è normalizzata in modo tale che $|\psi|^2$ sia la densità delle coppie di Cooper.

Qualora il campione si trovi immerso in un campo magnetico

esterno \mathbf{B}_{ext} , non possiamo affermare a priori che il flusso che attraversa l'anello, Φ_{ext} , sia un multiplo intero di Φ_0 . Quando ciò non accade, sulla superficie del campione scorrono delle supercorrenti che riportano il flusso totale al multiplo intero di Φ_0 più vicino. Possiamo immaginare che il flusso totale sia la somma di due contributi, uno dovuto al campo esterno e l'altro all'autoinduttanza del campione:

$$\Phi = \Phi_{ext} + LI_s \quad (5.7)$$

La supercorrente I_s è nulla per $\Phi_{ext} = n\Phi_0$ e massima per $\Phi_{ext} = (n \pm 1/2)\Phi_0$, pari a:

$$I_{s(max)} = \pm \frac{\Phi_0}{2L} \quad (5.8)$$

5.2 Effetto Josephson

Prendiamo in considerazione due campioni superconduttori, S_1 e S_2 , separati da una distanza macroscopica. In questo caso le fasi delle funzioni d'onda che descrivono i due superconduttori sono to-

talmente indipendenti. Quando S_1 e S_2 distano pochi ångstrom, è possibile che avvengano dei passaggi di singoli elettroni (normali o coppie di Cooper eccitate) per effetto tunnel. Avvicinando ulteriormente i due superconduttori possono passare anche coppie di Cooper (effetto Josephson). Cosicchè, una volta assegnata una fase in S_1 , non è possibile che la fase in S_2 vari arbitrariamente, perchè si è stabilita una correlazione di fase tra i due superconduttori.

Procediamo in uno studio più dettagliato dell'effetto Josephson e consideriamo due superconduttori a contatto debole. Si può realizzare un contatto debole per mezzo di uno strato di ossido oppure un materiale non superconduttore, un contatto a punta o una restrizione geometrica del conduttore etc.. Supponiamo che i due superconduttori S_1 e S_2 siano uguali, in modo che la giunzione sia simmetrica. Indichiamo con ψ_1 la funzione d'onda in S_1 e ψ_2 la funzione in S_2 . In figura (5.1) è mostrato uno schema della giunzione. Le due funzioni d'onda decresceranno esponenzialmente all'interno della giunzione, ma se questa è abbastanza piccola, esse penetreranno abbastanza da sovrapporsi e l'energia totale del sistema diminuirà a causa di questa sovrapposizione. Quando l'energia di accoppiamento diviene maggiore delle fluttuazioni ter-

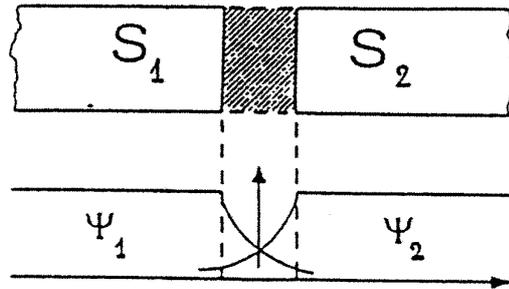


Figura 5.1: Schema di una giunzione Josephson

niche, le due fasi si agganciano e le coppie di Cooper attraversano la giunzione senza perdere energia. Vedremo che il tunneling delle coppie avviene anche nel caso in cui vi sia una tensione applicata: in questo caso le due fasi non sono agganciate ma variano in modo direttamente proporzionale alla tensione applicata.

Scriviamo le equazioni di Schroedinger per le due funzioni nei due superconduttori [18]:

$$\begin{aligned}
 i\hbar\dot{\psi}_1 &= U_1\psi_1 + K\psi_2 \\
 i\hbar\dot{\psi}_2 &= U_2\psi_2 + K\psi_1
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

dove abbiamo indicato con $U_{1,2}$ le energie dello stato fondamentale nei due superconduttori e con K l'ampiezza dell'accoppiamento, che

fornisce una misura dell'energia di interazione tra i due superconduttori e dipende dalla natura e dalla dimensione della giunzione.

Se applichiamo una differenza di potenziale V ai capi della giunzione, lo stato fondamentale sarà traslato di una quantità eV e sarà $|U_2 - U_1| = 2eV$. Ponendo lo zero dell'energia a metà della giunzione le (5.9) diventano [18]:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\psi}_1 &= eV\psi_1 + K\psi_2 \\ i\hbar\dot{\psi}_2 &= -eV\psi_2 + K\psi_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Si può dimostrare [18] che sostituendo a $\psi_{1,2}$ le espressioni in termini della fase e della densità di coppie, si trova

$$\psi_{1,2} = \sqrt{\rho_{1,2}} e^{i\theta_{1,2}} \quad (5.11)$$

Separando la parte immaginaria da quella reale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta \end{aligned} \quad (5.12)$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \delta + \frac{eV}{\hbar} \\ \dot{\theta}_2 &= \frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \delta - \frac{eV}{\hbar}\end{aligned}\tag{5.13}$$

dove $\delta = \theta_1 - \theta_2$ è la fase tra i due superconduttori. La densità di corrente è $J = \dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$. Questa, utilizzando l'equazione (5.12), diventa:

$$J = \frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \delta\tag{5.14}$$

Se assumiamo che $\rho_1 = \rho_2 = \rho_c$, con ρ_c costante, possiamo scrivere la precedente equazione come:

$$J = J_c \sin \delta\tag{5.15}$$

avendo definito $J_c = 2K\rho_c/\hbar$. Nel caso in cui K è costante su tutta la superficie della giunzione, moltiplicare J_c per tale superficie definisce la corrente critica I_c , che è la massima corrente di coppie sostenibile dalla giunzione. Il valore di I_c dipende da molti fattori tra cui la temperatura, il tipo di barriera ed il suo spessore etc..

Una caratteristica fondamentale per definire una buona giunzione è che I_c dipenda debolmente dalla temperatura per $T < T_c$.

Bisogna notare che sebbene la densità di coppie sia costante la sua derivata rispetto al tempo, J , è diversa da zero. In questa affermazione non c'è nessuna contraddizione, infatti dobbiamo tener conto della sorgente di corrente che mantiene costante il flusso di coppie attraverso la giunzione. La trattazione fin qui seguita non ha tenuto conto di tale sorgente ma si dimostra [18] che se se ne tenesse conto l'espressione di J non cambierebbe.

Dalle equazioni (5.13) si ricava che:

$$\dot{\delta} = \frac{2eV}{\hbar} = 2\pi \frac{V}{\Phi_0} \equiv \omega_J \quad (5.16)$$

da cui segue che

$$\delta(t) = \delta_0 + \frac{2e}{\hbar} \int V(t) dt \quad (5.17)$$

in cui abbiamo indicato con δ_0 il valore della fase per $t = 0$.

Le equazioni (5.15) e (5.16) descrivono completamente l'effetto Josephson.

Se $V = 0$ si ottiene δ costante, da cui segue che attraverso la giunzione scorre una corrente non nulla senza che ci sia una differenza di potenziale applicata. Questo è l'effetto Josephson *in continua*.

Nel caso in cui $V \neq 0$ vediamo dalla (5.17) e dalla (5.15) che siamo in presenza di correnti alternate

$$J = J_c \sin \left(\delta_0 + \frac{2eV}{\hbar} t \right) \quad (5.18)$$

La quantità $\nu_J = \frac{2eV}{\hbar} = \frac{V}{\Phi_0}$ è chiamata *frequenza Josephson* ed il rapporto tra ν_J e V è pari a

$$\frac{\nu_J}{V} = 483.6 \text{ MHz}/\mu\text{V} \quad (5.19)$$

Questo fenomeno è chiamato effetto Josephson *in alternata*.

In figura (5.2) sono graficate le caratteristiche $I - V$ di una giunzione Josephson polarizzata in corrente. Dal grafico è chiara la presenza di un fenomeno di isteresi: per valori della corrente di polarizzazione tali che $|I| < I_c$, si ha una supercorrente con tensione nulla; quando $|I| > I_c$ compare improvvisamente una tensione V ai

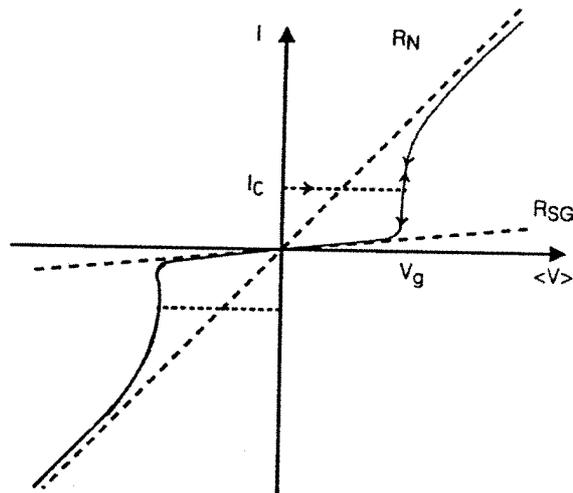


Figura 5.2: Caratteristica $I - V$ di una giunzione Josephson

capi della giunzione; aumentando ulteriormente la corrente anche la tensione aumenta e la curva tende alla retta $I = V/R_n$. Diminuendo la corrente fino ad avere nuovamente $|I| < I_c$, si osserva che la tensione non si azzera istantaneamente, ma diminuisce seguendo la curva caratteristica, annullandosi solo per $|I| \ll I_c$. Il tratto di curva in cui $|V| < 2\Delta/e$, avendo indicato con Δ il gap di energia della Teoria BCS, può essere approssimato con una retta di pendenza $1/R_{SG}$ e rappresenta la corrente dovuta agli elettroni normali e, nel caso di temperatura maggiore di zero, alle quasi-particelle.

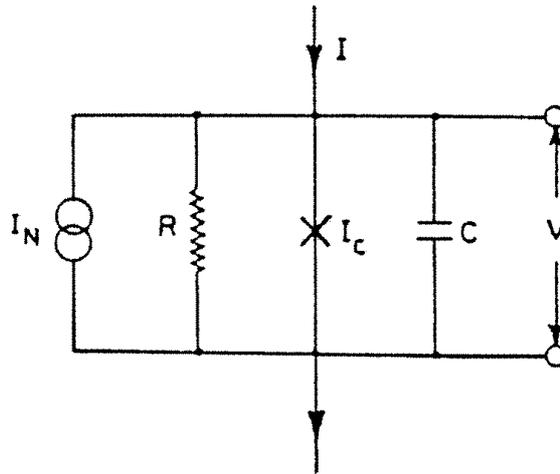


Figura 5.3: Modello di giunzione *shuntata* resistivamente

5.3 Modello RSJ

Il fenomeno di isteresi, presente in una giunzione Josephson e descritto nel paragrafo precedente, è, in genere, una caratteristica indesiderata in un d.c. SQUID. Per poter eliminare questo problema, si inserisce in parallelo alla giunzione una appropriata resistenza detta di *shunt*. In figura (5.3) è mostrato un modello di giunzione *shuntata*. Oltre alla resistenza di *shunt*, sono presenti un generatore di rumore in corrente $I_N(t)$ associato alla resistenza, la capacità della giunzione e un elemento di tunneling con corrente critica I_c .

Le equazioni del circuito, indicando con I la corrente applicata e trascurando il contributo del rumore, sono [18]:

$$\frac{V}{R} + I_c \sin \delta + C\dot{V} = I \quad (5.20)$$

e

$$V = \frac{\hbar \dot{\delta}}{2e} \quad (5.21)$$

Sostituendo la seconda nella prima avremo:

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\delta} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\delta} = I - I_c \sin \delta \quad (5.22)$$

che possiamo riscrivere in una forma adimensionale

$$\beta_c \frac{d^2 \delta}{d\tau^2} + \frac{d\delta}{d\tau} = i - \sin \delta \quad (5.23)$$

avendo definito le quantità

$$\begin{aligned}\beta_c &= \frac{2\pi I_c R^2 C}{\Phi_0} = \omega_J RC \\ \tau &= \frac{t}{\Phi_0/2\pi I_c R} = \omega_J t \\ i &= \frac{I}{I_c}\end{aligned}\tag{5.24}$$

La grandezza

$$\frac{\omega_J}{2\pi} = \frac{2eV}{2\pi\hbar} = \frac{2eI_c R}{h}\tag{5.25}$$

è la *frequenza Josephson* ed i è chiamata corrente ridotta.

L'equazione (5.23) è risolvibile solo numericamente, ma nel caso in cui I è costante e $\beta_c \ll 1$, si ha anche una soluzione analitica data da [18]:

$$\delta(t) = 2 \tan^{-1} \left[\sqrt{\frac{i^2 - 1}{i^2}} \tan \frac{\pi t}{T} - i \right]\tag{5.26}$$

in cui

$$T \propto \frac{2\pi}{\omega_J} \left[\frac{I}{I_c} \right]^{-\frac{1}{2}}\tag{5.27}$$

è il periodo di oscillazione. Dalla relazione (5.26) è possibile studiare l'andamento della tensione, dato che

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \dot{\delta} \quad (5.28)$$

Si vede quindi che, essendo $T \simeq 1ns$, per correnti di polarizzazione maggiori della corrente critica, la giunzione si comporta come un oscillatore in tensione, con frequenza pari alla frequenza di Josephson e con ampiezza proporzionale alla tensione media, che risulta essere pari a:

$$\langle V \rangle = \frac{\hbar}{2eT} \int_0^T \dot{\delta}(\tilde{t}) d\tilde{t} = I_c R \sqrt{\left(\frac{I}{I_c}\right)^2 - 1} \quad (5.29)$$

Le figure (5.4)-(5.5) riportano l'andamento delle equazioni (5.28) e (5.29) per diversi valori di I/I_c e per $\beta_c = 0$. Dall'analisi delle due figure è possibile stabilire quanto segue:

- se $I < I_c$, nella giunzione scorre una supercorrente costante e $\langle V \rangle = 0$;
- per $I \geq I_c$, compare, ai capi della giunzione, una tensione data da impulsi periodici con frequenza ν_J ;

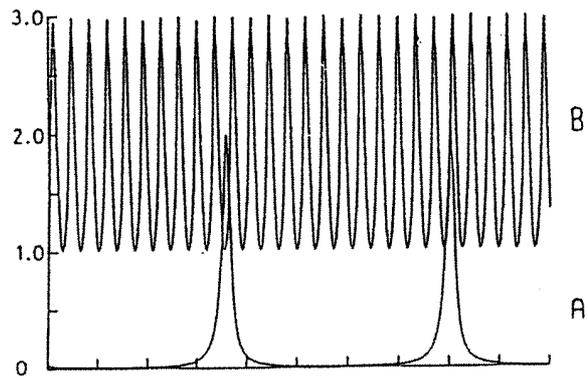


Figura 5.4: Andamento della tensione in uscita (in unità $I_c R$) in funzione del tempo per due valori di I/I_c con $\beta_c = 0$

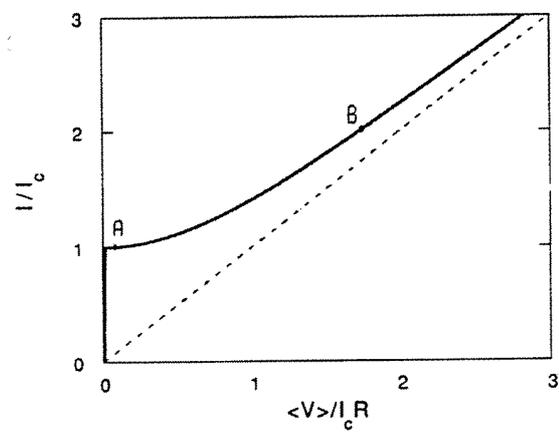


Figura 5.5: Caratteristica $I - V$ per uno SQUID con $\beta_c = 0$

- se $I > I_c$, la tensione di capi della giunzione è data da un termine oscillante a media nulla, sovrapposto ad un segnale continuo che rappresenta il contributo delle correnti normali.

In generale per $\beta_c > 1$ c'è isteresi nella caratteristica della giunzione, cioè per $I < I_c$ sono possibili due stati, uno con $V = 0$ ed un altro con $V \neq 0$. Per questo motivo nei d.c. SQUID si usano solo giunzioni con $\beta_c < 1$.

5.4 Funzionamento del d.c. SQUID

Un d.c. SQUID è realizzato interrompendo un anello superconduttore con due giunzioni Josephson identiche e disposte simmetricamente, entrambe *shuntate* resistivamente per eliminare il fenomeno dell'isteresi. In figura (5.6) è mostrato uno schema di un d.c. SQUID: L è l'autoinduttanza, I_c è la corrente critica e R e C sono rispettivamente la resistenza e la capacità di *shunt*. Un d.c. SQUID viene polarizzato per mezzo di una corrente costante I_b , in modo che le correnti che scorrono nei due rami dell'anello sono date da

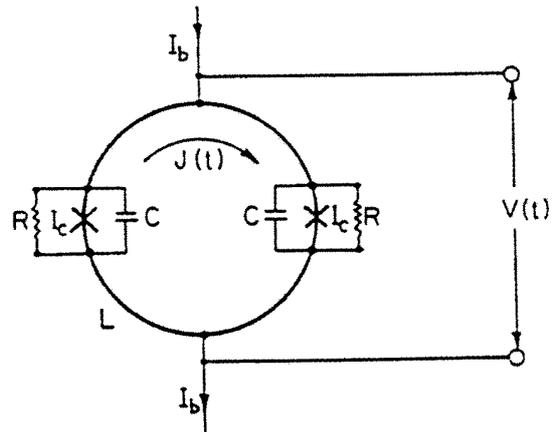


Figura 5.6: Schema circuitale di un d.c. SQUID

$I_b = I_1 + I_2$. Definiamo la corrente circolante nel modo seguente:

$$J = \frac{I_1 - I_2}{2} \quad (5.30)$$

Le correnti $I_{1,2}$ sono legate alle tensioni $V_{1,2}$ e alle differenze di fase attraverso le due giunzioni dalle equazioni:

$$I_{1,2} = I_c \sin \delta_{1,2} + \frac{V_{1,2}}{R} + C\dot{V}_{1,2} \quad (5.31)$$

Le fasi e le tensioni sono legate dalla seconda equazione di Josephson:

$$\dot{\delta}_{1,2} = \frac{2e}{\hbar} V_{1,2} \quad (5.32)$$

In questo modo, la tensione ai capi dello SQUID risulta essere:

$$\begin{aligned} V &= V_1 L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 \\ &= V_2 L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

dove abbiamo indicato con $L_{1,2}$ le autoinduttanze dei due rami dello SQUID e con M la loro mutua induttanza. La differenza tra le due fasi è legata alla condizione di quantizzazione del flusso:

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \quad (5.34)$$

Φ è il flusso totale concatenato con lo SQUID, cioè dato dal flusso esterno e da quello prodotto dalla corrente J , $\Phi = \Phi_{ext} + LJ$.

Studiamo un caso semplificato in cui trascuriamo la presenza della resistenza di *shunt*, l'autoinduttanza della spira e la capacità delle giunzioni. Avremo quindi $R = 0$, $L = 0 \implies \beta_L = 0$ e

$C = 0 \implies \beta_c = 0$, con β_c definito dalla (5.24) e [18]

$$\beta_L = \frac{2LI_c}{\Phi_0} \quad (5.35)$$

Con queste approssimazioni le equazioni delle correnti nei due rami dell'anello diventano

$$I_{1,2} = I_c \sin \delta_{1,2} \quad (5.36)$$

da cui ricaviamo

$$I_b = I_c(\sin \delta_1 + \sin \delta_2) \quad (5.37)$$

Dato che $L = 0$, segue che $\Phi = \Phi_{ext}$ e quindi $\delta_1 - \delta_2 = 2\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0}$.

Possiamo riscrivere la (5.37) come

$$I_b(\Phi_{ext}, \delta_1) = I_c \sin \delta_1 + I_c \sin \left(\delta_1 - 2\pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0} \right) \quad (5.38)$$

Massimizzando rispetto a δ_1 si trova che la corrente critica dipende

dal flusso esterno nel modo seguente

$$I_{cS}(\Phi_{ext}) = 2I_c \left| \cos \pi \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0} \right| \quad (5.39)$$

da cui risulta evidente la modulazione della corrente critica a causa del flusso esterno. In particolare si nota che la corrente critica varia con continuità da 0 a $2I_c$ per $(2N - 1)\frac{\Phi_0}{2} \leq \Phi_{ext} \leq N\Phi_0$. Se consideriamo un termine di dissipativo, con $\beta_c = \beta_L = 0$, $R \neq 0$ e $I_b = \text{costante}$, sommando le (5.31) si ottengono due equazioni da cui è possibile ricavare la tensione in uscita da un d.c. SQUID

$$I_b = I_{cS} \sin \varphi + \frac{\hbar}{eR} \dot{\varphi} \quad (5.40)$$

e

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \dot{\varphi} \quad (5.41)$$

dove $\varphi = \delta_1 - \delta_2$. L'equazione (5.40) è formalmente simile alla (5.22), da cui abbiamo ricavato il comportamento di una singola giunzione Josephson con $\beta_c = 0$. Quindi possiamo estendere le osservazioni fatte sulla $\delta(t)$ alla $\varphi(t)$. Infatti la (5.40) ha una soluzione

oscillante con periodo

$$T \propto \frac{2\pi}{\omega_J} \left[\left(\frac{I_b}{I_{cS}} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.42)$$

con una tensione media data da

$$\langle V \rangle = \begin{cases} \frac{R}{2} \sqrt{I^2 - I_{cS}^2(\Phi_{ext})} & \text{se } |I_b| > I_{cS}(\Phi_{ext}) \\ 0 & \text{se } 0 \leq |I_b| \leq I_{cS}(\Phi_{ext}) \end{cases} \quad (5.43)$$

Quando il flusso esterno è zero, la differenza di fase è nulla e lo SQUID si comporta come se fosse una singola giunzione con una corrente critica pari al doppio della corrente critica di ciascuna giunzione.

Nel caso in cui il flusso esterno non è nullo le due correnti sono sfasate. Se $\Phi_{ext} = N\Phi_0$ allora lo sfasamento è un multiplo intero di 2π e le giunzioni oscillano in fase, altrimenti lo sfasamento è massimo. In questa situazione le supercorrenti interferiscono distruttivamente, non è più presente una corrente critica e lo SQUID si comporta come se fosse una resistenza. Nell'equazione (5.31) si

annullano i termini in $\sin \delta$ e l'equazione si riduce a

$$I = \frac{2V}{R} \quad (5.44)$$

in cui abbiamo indicato con $R/2$ il parallelo delle due resistenze di *shunt*.

Possiamo quindi riassumere il comportamento di un d.c. SQUID nel modo seguente: una variazione del flusso concatenato provoca una variazione della corrente critica, che, a sua volta, fa cambiare sia il periodo di oscillazione della tensione ai capi dello SQUID che il valor medio di tale tensione. Bisogna tener presente che a tale tensione contribuiscono due termini: una supercorrente, che compare per effetto Josephson in ac quando si polarizza lo SQUID con una corrente maggiore di I_{CS} , e una corrente normale che si genera perchè la corrente totale sia costante. Entrambi i due contributi oscillano alla stessa frequenza con valori medi diversi da zero e causano una tensione con valor medio non nullo.

Nel caso in cui $R, L, C \neq 0$ i conti si complicano notevolmente, ma si dimostra che il comportamento del d.c. SQUID reale non è molto diverso da quello ideale. Infatti, l'unica differenza è nel fatto

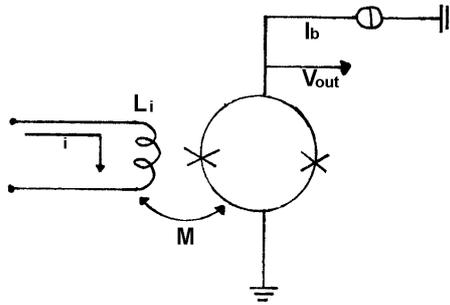


Figura 5.7: Sistema bobina d'ingresso-SQUID.

che il valore minimo della corrente critica non è più zero ma, al variare di Φ_{ext} , dipende da β_L .

5.5 Il d.c. SQUID come amplificatore

L'uso che si fa nella ricerca di onde gravitazionali del d.c. SQUID è quello di un amplificatore di corrente. Per fare ciò è necessaria una bobina che, accoppiata allo SQUID, converta la corrente che l'attraversa in flusso di campo magnetico. Si può schematizzare il comportamento dello SQUID come amplificatore nel modo

seguinte:

$$\delta i \Rightarrow \delta \varphi_s = M \delta i = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi_s = \frac{\partial V}{\partial \varphi} M \delta i \quad (5.45)$$

La corrente variabile, che passa nella bobina accoppiata induttivamente allo SQUID, genera delle variazioni del flusso φ_s nell'anello superconduttore. Queste variazioni di φ_s generano, in uscita, una tensione variabile proporzionalmente alla corrente in ingresso. A causa della grandissima sensibilità dello SQUID, un qualunque flusso magnetico esterno, che si accoppiasse con la bobina d'ingresso o con la bobina dello SQUID stesso, riuscirebbe a spostarne il punto di lavoro variandone, inoltre, la responsività. La soluzione è quella di utilizzare un circuito controreazionato in modo da stabilizzare il punto di lavoro dello SQUID e linearizzarne le caratteristiche. La figura (5.8) mostra che la tensione in uscita dallo SQUID è proporzionale ad un campo esterno, alla frequenza di un segnale di modulazione, che viene mandato indietro allo SQUID per mantenere il punto di lavoro costantemente a $\varphi_{ext} = n\varphi_0$, dove la caratteristica tensione-flusso è lineare e la $\partial V/\partial \varphi$ è massima. E' quindi evidente che per rivelare le variazioni di flusso è necessario

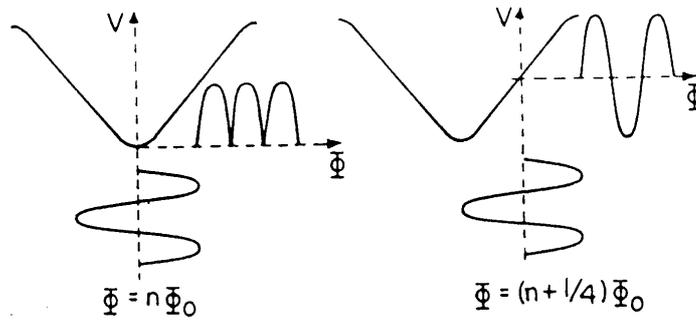


Figura 5.8: Andamento di V_{out} prodotto da un flusso modulante in diverse condizioni di polarizzazione.

mandare in ingresso, con un'opportuna bobina, un flusso modulante alla frequenza ν_{mod} , con $50kHz < \nu_{mod} < 500kHz$ e ampiezza picco-picco $\approx \varphi_0/2$. Dalla figura (5.8) si nota che se il flusso totale è un multiplo intero di φ_0 , V_{out} ha una grande componente alla frequenza $2\nu_{mod}$, mentre se il flusso aumenta, aumenta l'ampiezza del segnale in uscita dallo SQUID alla frequenza ν_{mod} . Aumentando ancora il flusso, il segnale ritorna a frequenza $2\nu_{mod}$, ma con fase opposta. A questo punto il segnale proveniente dallo SQUID arriva ad un circuito LC integratore, risonante alla frequenza di modulazione e funzionante da adattatore di impedenza tra l'uscita dello SQUID e l'ingresso dell'amplificatore a temperatura ambiente.

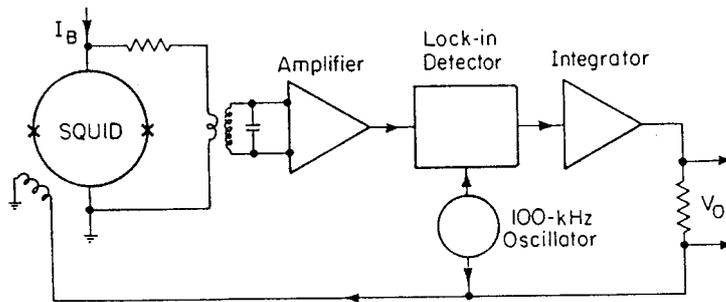


Figura 5.9: Circuito di modulazione e feedback per un d.c. SQUID.

L'uscita dell'amplificatore è inviata ad un lock-in che la demodula alla frequenza ν_{mod} . Se il flusso statico accoppiato con lo SQUID è un multiplo intero di φ_0 , il segnale in uscita sarà a frequenza $2\nu_{mod}$ ed il lock-in avrà un'uscita nulla. Altrimenti, se il flusso è pari a $(n + \frac{1}{4})\varphi_0$, la frequenza del segnale in uscita dallo SQUID sarà ν_{mod} ed il lock-in darà un'uscita massima. Dal momento che lo SQUID è un flussimetro estremamente sensibile, capace di rivelare campi magnetici dell'ordine dei $10^{-14} Tesla$, per evitare che campi esterni lentamente variabili possano indurlo a lavorare in regime di saturazione o non linearità, si è soliti chiuderlo in un contenitore di materiale superconduttore, in genere Piombo, che espella

ogni campo esterno e mantenga costante il flusso al suo interno. Sono inoltre necessari dei filtri che limitino gli ingressi di segnali a radiofrequenza.

5.6 Misure di rumore di un doppio SQUID

Dato che l'oggetto in esame è lo SQUID, sia il trasduttore che il trasformatore, da utilizzare in questi test, sono stati scelti in modo da avere caratteristiche simili a quelli precedentemente montati sull'antenna. In particolare il trasduttore ha la stessa geometria di quello utilizzato per l'antenna EXPLORER, con la differenza che presenta due gap di $22\mu m$ ciascuna, capacità $C \simeq 6nF$, frequenza di risonanza $\nu_0 = 931.29Hz$ e $Q = 2.75 \cdot 10^6$. Il trasformatore¹ ha un'induttanza del primario pari a $L_1 = 2.15H$, induttanza del secondario $L_2 = 0.85\mu H$, coefficiente di accoppiamento $k = 0.65$ e $Q_{el} \simeq 4 \cdot 10^4$. In questo modo la frequenza di risonanza del modo elettrico, misurata a $\nu_{el} \simeq 1760Hz$, cade sufficientemente lontano dalla zona del kHz che è quella che interessa. La figura (5.10) mostra lo schema circuitale dell'apparato sperimentale. Il

¹che ho caratterizzato personalmente presso i LNF

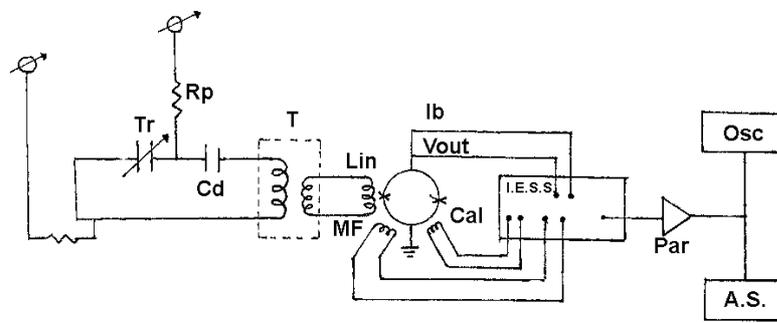


Figura 5.10: Schema circuitale in cui: T_r è il trasduttore; R_p la resistenza di polarizzazione; C_d la capacità di disaccoppiamento; T il trasformatore; MF la modulazione e feedback; Cal la calibrazione; I_b la corrente di bias; V_{out} la tensione in uscita dallo SQUID; Par un amplificatore a basso rumore; Osc e $A.S.$ rispettivamente l'oscilloscopio e l'analizzatore di spettro.

modulo contrassegnato “I.E.S.S.” contiene la modulazione, il feedback, la corrente di bias e la tensione in uscita ai capi dello SQUID. Le misure sono state effettuate raffreddando l'intero apparato alla temperatura dell'Elio liquido. Il trasduttore è attaccato ad un sistema di sospensioni necessarie a minimizzare il rumore meccanico. Mentre, la scatola contenente il trasformatore e lo SQUID è poggiata sul fondo della camera sperimentale. Tutti i cavi che portano i vari segnali da temperatura ambiente a $T = 4.2K$ sono stati preventivamente schermati per minimizzare l'ingresso di rumore a radiofrequenza.

La prima operazione effettuata è stata togliere il gas di scambio dalla camera sperimentale, grazie ad una pompa turbomolecolare. Quando la pressione è scesa a circa $8.0 \cdot 10^{-6} mbar$, abbiamo innanzitutto verificato che il Q meccanico del trasduttore non fosse degradato dalla presenza del circuito elettrico. Quindi abbiamo misurato la frequenza del modo elettrico, che, come già detto, è risultata essere pari a $(1760 \pm 5) Hz$.

A questo punto abbiamo acceso lo SQUID. Variando la corrente di polarizzazione e la modulazione siamo riusciti, con una certa fatica, a visualizzare sull'oscilloscopio le caratteristiche $V - \varphi$. Queste

sono poco stabili e si nota una grossa interferenza sia con il segnale della modulazione che con un segnale in ingresso alla frequenza del modo elettrico. Dall'analizzatore di spettro si vede chiaramente anche un grosso segnale a bassa frequenza ($\simeq 10Hz$) probabilmente di origine meccanica. Ad ogni modo riusciamo a misurare la responsività alla corrente di bias $I_b \simeq 50\mu A$ ed i valori per cui la responsività è massima e minima: $I_{bmax} \simeq 105\mu A$ e $I_{bmin} \simeq 45\mu A$.

Riducendo il guadagno del circuito integratore, aumentandone cioè la capacità, riusciamo a far lockare lo SQUID. Si nota però un comportamento anomalo. Infatti inviando in ingresso un segnale di frequenza ν , in uscita non vi è traccia del segnale a questa frequenza, ma sono ben visibili sull'analizzatore di spettro due picchi alle frequenze $\nu_{el} \pm \nu$, con ampiezze non correlate ad alcun dato a noi noto. Sembra quindi che lo SQUID si comporti da mixer. Presumiamo che il segnale del modo elettrico, che in linea di principio non dovrebbe essere presente, sia in realtà maggiore di φ_0 , impedendo allo SQUID di lavorare in regime di linearità. Riusciamo a portare lo SQUID in condizioni lineari diminuendo al minimo il segnale di modulazione. In questo modo, però, lo SQUID lavora in condizioni marginali. Sull'analizzatore di spettro, la cui immagine

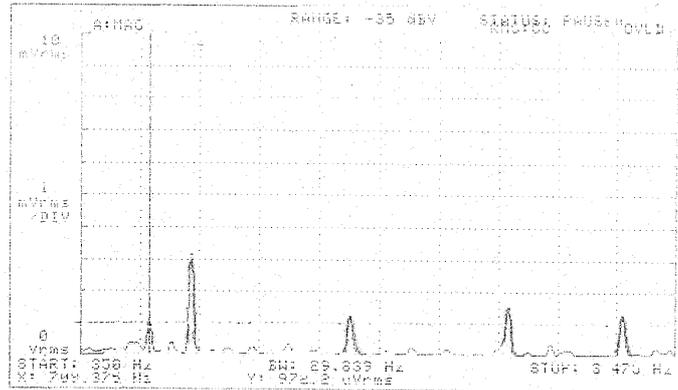


Figura 5.11: Partendo da sinistra il primo piccolo picco è calibrazione, poi il grosso picco del modo meccanico, quindi quello elettrico ed infine le due frequenze sconosciute.

è riportata in figura (5.11), si vedono chiaramente il modo elettrico, quello meccanico ed altre due frequenze sconosciute. Si vede molto bene anche il segnale di calibrazione a $\nu_{cal} = 710\text{Hz}$, lineare per $0.2 < V_{in} < 0.9V_{0-p}$. In queste condizioni il rumore misurato è circa $\varphi_n \simeq 10^{-4}\varphi_0/\sqrt{\text{Hz}}$, proprio perchè lo SQUID viene fatto lavorare in un punto di pessima responsività. Come ulteriore misura, proviamo a misurare il fattore di merito meccanico del trasduttore tramite lo SQUID Non riuscendo ad eccitare il modo meccanico dalla bobina di calibrazione, decidiamo di usare la seconda gap del

trasduttore. Ora però lo SQUID locka con difficoltà, ma lavorando a loop aperto, misuriamo un decadimento molto rumoroso del modo meccanico con $350s < \tau_M < 700s$, compatibile con le misure, effettuate tramite la seconda gap, a SQUID spento. Facciamo un ultimo tentativo, allargando la banda di controreazione. Sembra che ci siano dei tentativi di lockare, ma dei forti segnali impulsivi, probabilmente a bassa frequenza, portano lo SQUID in saturazione.

Il programma di lavoro prevede, per il prossimo futuro, l'introduzione di ulteriori filtri meccanici. La scatola contenente lo SQUID ed il trasformatore sarà poggiata non più sul fondo della camera sperimentale, ma su uno smorzatore a quattro punte e l'intero criostato sarà dotato di filtri meccanici. Le misure sono previste nei giorni a venire.

Capitolo 6

Conclusioni

Lo scopo di questa tesi di laurea è stato la progettazione e realizzazione di un trasformatore superconduttore ad alto Q e la misura delle sue caratteristiche alla temperatura dell'Elio liquido. I risultati delle varie misure del Q hanno evidenziato la delicatezza del setup sperimentale, che può inficiare la misura del fattore dimerito, nonché la correttezza dei criteri di programmazione e della scelta dei materiali, dal momento che il valore di $Q = 4.4 \cdot 10^5$ è di ben un ordine di grandezza superiore a quello ottenuto nei precedenti trasformatori, caratterizzati da un coefficiente di accoppiamento pari a circa 0.7. Gli sviluppi futuri prevedono la sostituzione del filo

di Niobio isolato con FORMVAR[©] con un altro, sempre di Niobio, ma isolato con Teflon FEP.

Per quanto riguarda lo studio dei diversi modi di avvolgere il secondario per aumentare il coefficiente di accoppiamento, riteniamo che sia opportuna un'ulteriore indagine su differenti soluzioni di avvolgimento del circuito secondario.

Infine l'analisi delle misure sul sistema trasduttore-trasformatore-SQUID ha messo in luce le difficoltà di far funzionare correttamente un sistema a doppio SQUID accoppiato ad un circuito risonante ad alto Q. Le misure sono ancora in corso.

Appendice A

Programmi con Matlab

Di seguito riportiamo il listato del sottoprogramma per il calcolo dell'induttanza del circuito primario, gli altri hanno una struttura del tutto simile a questa. Il programma completo, infatti, è composto da vari sottoprogrammi per un totale di circa 1800 righe che, chiamati da un programma principale con una serie di scelte, calcolano o graficano di volta in volta le quantità desiderate.

```
%programma di calcolo dell'induttanza del primario  
%a=raggio medio; b=lunghezza; c=dimensione radiale;  
%N=numero totale di spire;  
%nb=numero di spire per strato;
```

```

%nc= numero di strati; p=spessore del filo.

disp('1)Calcolo dell induttanza del primario');
disp('2)Menu principale');
o=input('Scegliere ');
if o==1
rm=input('Inserisci il raggio minimo (cm) ');          %
b=input('Inserisci la lunghezza della bobina (cm) ');%
nc=input('Inserisci il numero di strati ');           %
p=input('Inserisci lo spessore del filo (um) ');      %
p1=p*1e-4;          %di seguito vengono calcolati
a=rm+p1*nc/2;      %alcuni parametri equivalenti
c=p1*nc;           %
N=b*c/p1^2;       %
n=b/p1;           %
for i=1:nc        %
r(i)=rm+i*p1;    %
s(i)=2*pi*r(i)*n;%
end              %
m=sum(s);        %
load D1;         %caricamento di alcune
load E1;         %tabelle del Grover
load F1;         %
rho=c/b;        %altri parametri equivalenti
alfa=c/(2*a);   %
mu=1/rho;       %
nu=b/(2*a);     %
if rho<=1       %inizia la procedura di
y=D1(:,1);      %ricerca nelle tabelle
x=D1(1,:);     %del Grover
f=y-rho;        %

```

```

d=x-alfa; %
for i=2:22 %
for j=2:22 %
if rho==y(j) & alfa==x(i)%
k=D1(j,i); %
else %
if d(i-1)>-0.05 & d(i)<0.05 %inizia la procedura
if f(j-1)>-0.05 & f(j)<0.05 %di interpolazione
dx1=D1(j-1,i-1)-D1(j-1,i); %lineare di Newton
dy1=D1(j-1,i-1)-D1(j,i-1); %al primo ordine
u=-d(i-1)/0.05; %
v=-f(j-1)/0.05; %
k=D1(j-1,i-1)-u*dx1-v*dy1; %
end %
end %
end %
end %
if mu<=1 %le procedure
y=E1(:,1); %che seguono
x=E1(1,:); %ripetono i calcoli
f=y-mu; %precedenti in altre
d=x-alfa; %tabelle del Grover
for i=2:22 %qualora ce ne
for j=2:22 %sia la necessita'
if mu==y(j) & alfa==x(i) %
k=E1(j,i); %
else %
if d(i-1)>-0.05 & d(i)<0.05 %
if f(j-1)>-0.05 & f(j)<0.05 %

```

```

dx1=E1(j-1,i-1)-E1(j-1,i); %
dy1=E1(j-1,i-1)-E1(j,i-1); %
u=-d(i-1)/0.05; %
v=-f(j-1)/0.05; %
k=E1(j-1,i-1)-u*dx1-v*dy1; %
end %
end %
end %
end %
z=F1(:,1); %
d=nu-z; %
for i=2:101 %
if nu==z(i) %
K=F1(i,2); %
else %
if d(i-1)<0.01 & d(i)>-0.01 %
dx1=F1(i-1,2)-F1(i,2); %
dx12=F1(i,2)-F1(i+1,2); %
dx2=dx1-dx12; %
u=d(i-1)/0.01; %
K=F1(i-1,2)-u*(dx1-(1-u)*dx2/2); %
end %
end %
end %
disp('La induttanza del primario in microH')
L=0.019739*2*a^2*N^2*(K-k)/b %calcolo della
disp('Lunghezza del filo in Km') %induttanza
lung=m*1e-5 %calcolo della
primario %quantita'

```

```
end
if o==2
trasformer
end
```

```
%di filo necessario
```

Bibliografia

- [1] V.B. Braginskij, V.I. Panov, *Sov. Phys. JETP*, **34** (1972) 463.
- [2] Landau-Lifšits, “*Teoria dei campi*”, Editori Riuniti.
- [3] N. Vittorio, “*Appunti del Corso di Cosmologia*”, Anno Accademico 1994-95.
- [4] Guido Pizzella, “*Fisica Sperimentale del Campo Gravitazionale*”, Edizioni NIS.
- [5] R. V. Wagoner e H. J. Paik, “*Proceedings of International Symposium of Experimental Gravitation, Pavia*” (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976), pagg. 257-265.
- [6] M. Bianchi *et al.*, *Class. Quantum Grav.* **13**, 2865 (1996).
- [7] S. M. Merkowitz, Ph.D. thesis, Luisiana State University, 1995.

- [8] R. E. Vogt, *The U.S. LIGO Project*, in “International Report LIGO”, pagg. 91-97, Caltech (USA) 1991.
- [9] E. Coccia, J. A. Lobo e J. A. Ortega, *Physical Review D* **52**, 3735 (1995).
- [10] E. Amaldi, G. Pizzella, “*Search for Gravitational Waves*”, LPS-78-3 1978.
- [11] E. Amaldi, G. Pizzella, “*Teoria della Rivelazione delle Onde Gravitazionali*”, Corso della Scuola di Perfezionamento Dell’Università di Roma, 1976/77.
- [12] G. Pizzella, “*Nuovo Cimento*”, **2C** 209 (1979).
- [13] G. Pizzella, G. V. Pallottino, “*Nuovo Cimento*”, **4C** 237 (1981).
- [14] P. Bonifazi, V. Ferrari, S. Frasca, G. V. Pallottino, G. Pizzella, “*Nuovo Cimento*”, **1C** 465 (1978).
- [15] G. V. Pallottino, G. Pizzella, “*Nuovo Cimento*”, **45B** 275 (1978).

- [16] M. Bassan, G. Pizzella, “*Sensitivity of a Capacitive Transducer for Resonant Gravitational Wave Antennas*”, in preparazione.
- [17] M. Tinkham, “*Introduction to Superconductivity*”, McGraw Hill.
- [18] M. Bassan, “*Appunti del Corso di Fisica delle Basse Temperature*”, Anno Accademico 1995-96.
- [19] F. W. Grover, “*Inductance Calculations, working formulas and tables*”, D. Van Nostrand Company, Inc.
- [20] K. S. Thorne, “*Gravitational Waves*”, *Proceedings of the Snowball 95 Summer Study on Particle and Nuclear Astrophysics and Cosmology*, ed. E. W. Kolb e R. Peccei (World Scientific, Singapore).
- [21] B. F. Schutz, *Class. Quantum Grav.* **16**, A131-A156 (1999).
- [22] E. Coccia, “*Resonant-mass Gravitational Wave Detectors*”, *Proceedings of the 14th International Congress on General Relativity and Gravitation*, Firenze 1995, World Sci. (1997).
- [23] P. Carelli *et al.*, *Appl. Phys. Lett.* **72** (1), (1998).