

Teoria della Relatività

Danilo Babusci

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Laboratori Nazionali di Frascati**

A volte mi chiedo come sia accaduto che sia stato io a formulare la teoria della relatività. La ragione, credo, è che un adulto non si ferma mai a riflettere sui problemi dello spazio e del tempo, perché queste sono cose su cui ha pensato da bambino. Ma il mio sviluppo intellettuale fu tardivo, e di conseguenza io cominciai a interrogarmi sullo spazio e il tempo quando ero già adulto.

A. Einstein

*Dicono che soltanto tre persone abbiano interamente capito la teoria della relatività di Einstein. Ma tutti gli allenatori di football sono convinti che nulla sia difficile come giocare terzino nel campionato americano. ... gli orologi non fanno mischie difensive, i regolatori non affondano attacchi e Einstein aveva l'intera giornata per lanciare. **E = m c²** non alterna le marcature.*

(“Los Angeles Times”, cronaca sportiva)

Relatività Speciale

(1905)

Riferimenti Inerziali

Sistema di Riferimento: sistema di coordinate (3 spaziali, 1 temporale) solidale con osservatore (riferimento di quiete)

Riferimento Inerziale (R.I.): qualunque riferimento in cui una particella libera si muove di moto rettilineo uniforme (con velocità costante)

Quanti R.I. ? **Infiniti !!**

Possibile stabilire in quale R.I. mi trovo ? **NON** con le leggi della **Meccanica !!**

Principio di Newton (1687)



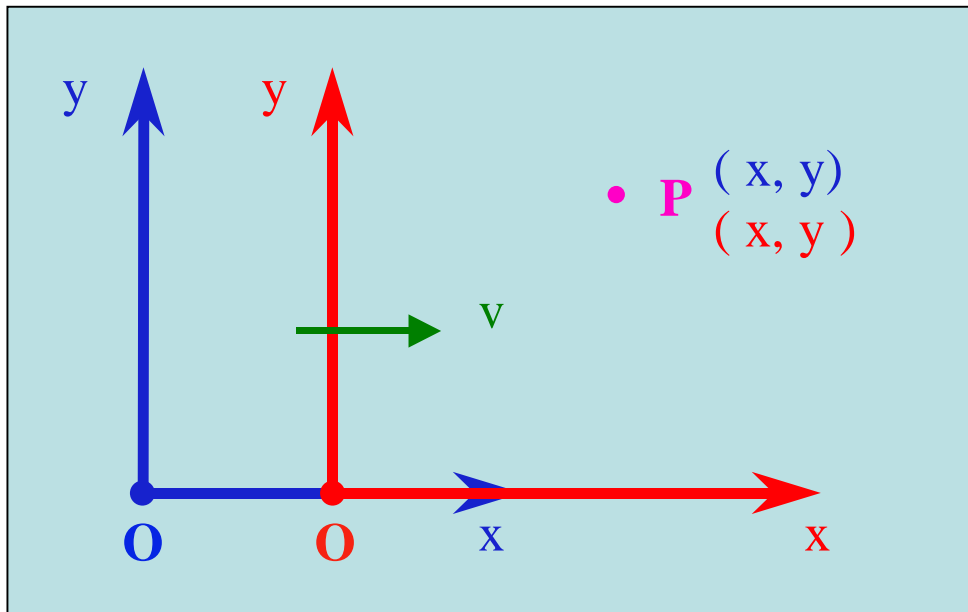
Corpo in moto **rettilineo uniforme**: **NON** esiste effetto meccanico (**all'interno del corpo**) che può essere usato per misurarne la velocità !

velocità assoluta è priva di significato !!



La velocità **NON** può intervenire nelle equazioni della **Meccanica**: eq. **covarianti** (non cambiano forma) per trasformazioni tra R.I. (trasformazioni **Galileiane**)

Trasformazioni Galileiane



$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x} - \mathbf{v} \cdot t \\ \mathbf{y} &= \mathbf{y} \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t} \end{aligned}$$

$$(t = 0 : O \equiv O)$$

invarianza di m



$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Fenomeni Elettromagnetici

Maxwell (1860) - equazioni di campo che dipendono esplicitamente da una velocità: quella della **luce** →

NON covarianti per trasformazioni **Galileiane !!**

Analogia meccanica - esiste mezzo di supporto alla propagazione della luce: **ETERE**

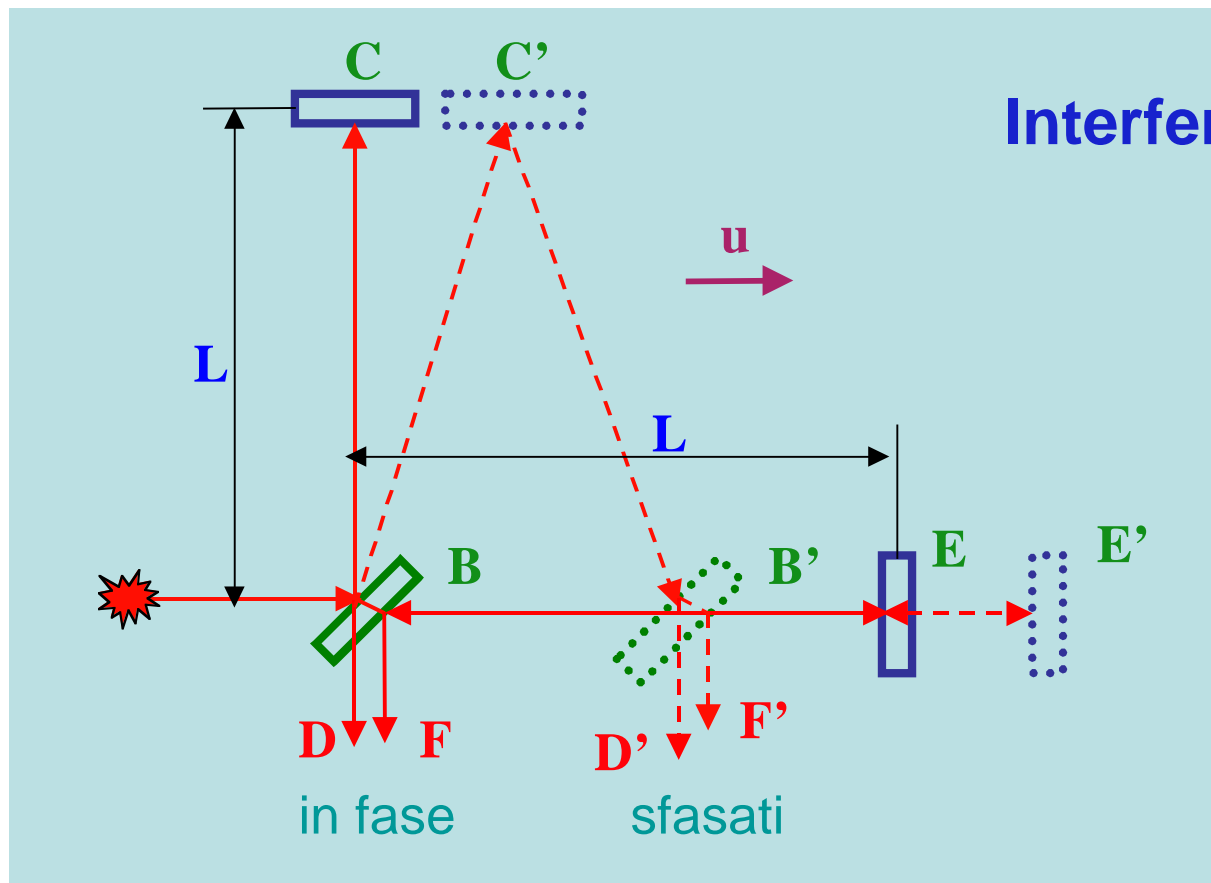
Ipotesi - eq. di **Maxwell** valide soltanto nel R. dell'etere



esiste R. privilegiato che riempie tutto lo spazio !!

Michelson & Morley (1887)

Misura del moto della **Terra** rispetto al R. dell'**etere**



Interferometro (ITF)

$t_1: B - E - B$

$t_2: B - C - B$

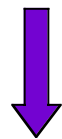
ITF immobile nell'etere ($t_1 = t_2$) : Interferenza D-F **costruttiva**

ITF in moto nell'etere ($t_1 \neq t_2$) : Interferenza D-F **distruttiva**

$$t_1 = t_{BE} + t_{EB}$$

$$t_{BE} = L / (c - u)$$

$$t_{EB} = L / (c + u)$$

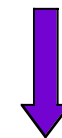


$$t_1 = (2L / c) / (1 - u^2 / c^2)$$

$$t_2 = t_{BC} + t_{CB}$$

$$t_{BC} = (L / c) / \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

$$t_{CB} = t_{BC}$$



$$t_2 = (2L / c) / \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

Confronto espressioni per t_1 e t_2

Numeratori - tempo che impiegherebbe la luce a percorrere ciascun braccio qualora l'interferometro fosse immobile: **identici**

Denominatori - modifiche nei tempi di percorrenza indotte dal moto dell'interferometro: **differenti**

$$u / c < 1 \quad \longrightarrow \quad \Delta t = t_1 - t_2 > 0$$

N.B.

impossibile costruire bracci di uguale lunghezza

→ rotazione di 90° dell'apparato →

slittamento nelle frange d'interferenza

Osservazione sperimentale : NO slittamento nelle frange

$$\Delta t = 0 !!$$



La velocità della luce è la stessa nei due bracci : la velocità della Terra attraverso l'etere **NON** può essere rivelata !!

Due (sgradevoli) alternative :

- Eq. di **Maxwell** sono sbagliate, oppure propagazione della luce **NON** è la stessa nei diversi R.I.
- Trasformazioni **Galileiane NON** applicabili, qualcosa di sbagliato nella meccanica di **Newton**

Lorentz - FitzGerald (1889)

Corpi in movimento si **contraggono** lungo la direzione del moto (e soltanto lungo questa) !!

$$L \rightarrow L' = L \cdot \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

Interferometro: BC inalterata; BE diminuisce

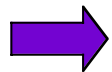
$$t_1 \rightarrow t'_1 = (2L' / c) / (1 - u^2 / c^2) = t_2$$

Ipotesi *ad hoc* : **NO** teoria fondamentale per la contrazione !!

Einstein (1905)



NON-covarianza delle eq. di **Maxwell** è molto più sgradevole dell'assenza di un riferimento assoluto !!



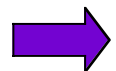
Postulati della Relatività Speciale

P1 - leggi della natura sono le stesse in tutti i R.I.

preservato dalle eq. di **Maxwell** solo se

P2 - velocità della luce è la stessa in tutti i R.I.

che spiega il risultato nullo dell'esperimento **M & M**



eq. di **Maxwell** \equiv in tutti i R.I. : **Etere NON esiste !!**

Conseguenze di P2

Esempio - 2 osservatori: uno sulla Terra e l'altro all'interno di una astronave che si allontana dalla Terra con velocità v .
Astronauta invia impulso di luce lungo la direzione di moto dell'astronave.

Terrestre: la luce si allontana dall'astronave con velocità $< c$.

Astronauta: la luce si allontana con velocità c

Accordo tra i 2 osservatori: la **separazione astronave-impulso** di luce deve apparire all'Astronauta **più piccola** di quanto appaia al **Terrestre**

Fattore di Contrazione: $\delta_d = 1 / \gamma = \sqrt{1 - v^2 / c^2}$

esattamente quella di **Lorentz-FitzGerald !!**

Contrazione della distanza: all'Astronauta il viaggio deve apparire **più breve** di quanto appaia al Terrestre: **scala dei tempi si dilata !!**

Fattore di Dilatazione

$$\delta_t = \gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

N.B.

Astronauta vede il Terrestre in moto con velocità $-v$.

P1 : dal punto di vista dell'Astronauta è l'orologio del Terrestre che **va + lento !!**

Orologio in quiete in un R.I. : **ritmo + elevato** (proprio)

Orologi in moto rispetto a questo **vanno + lenti !!**

Analogamente per le lunghezze: quella misurata nel R. di quiete del corpo (propria) è la **+ grande possibile !!**

Contrazione delle Lunghezze

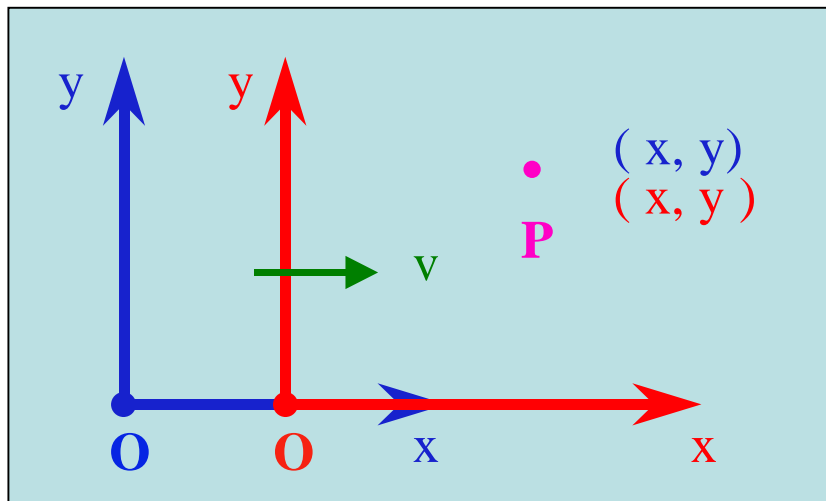
Dilatazione dei Tempi



Spazio e Tempo

sono **elastici** !!

Trasformazioni tra riferimenti inerziali sotto cui leggi della fisica sono **covarianti**: trasformazioni di **Lorentz**



$$x = \gamma (x' - v t')$$

$$y = y'$$

$$t = \gamma (t' - v \cdot x' / c^2)$$

$$(t = 0 : O' \equiv O)$$

Variabili spaziale e temporale mescolate tra loro: spazio e tempo confluiscono in nuova entità: **spazio-tempo**

Spazio-tempo : varietà 4-dimensionale → **4-vettori**



4-vettore posizione $x = (t, x, y, z)$ è l'oggetto che si trasforma correttamente: la sua **lunghezza** NON cambia sotto trasformazioni di **Lorentz** !

Particella a riposo: massa ma NON energia addizionale.
Osservatore in moto rispetto alla particella → **massa a riposo + energia cinetica**



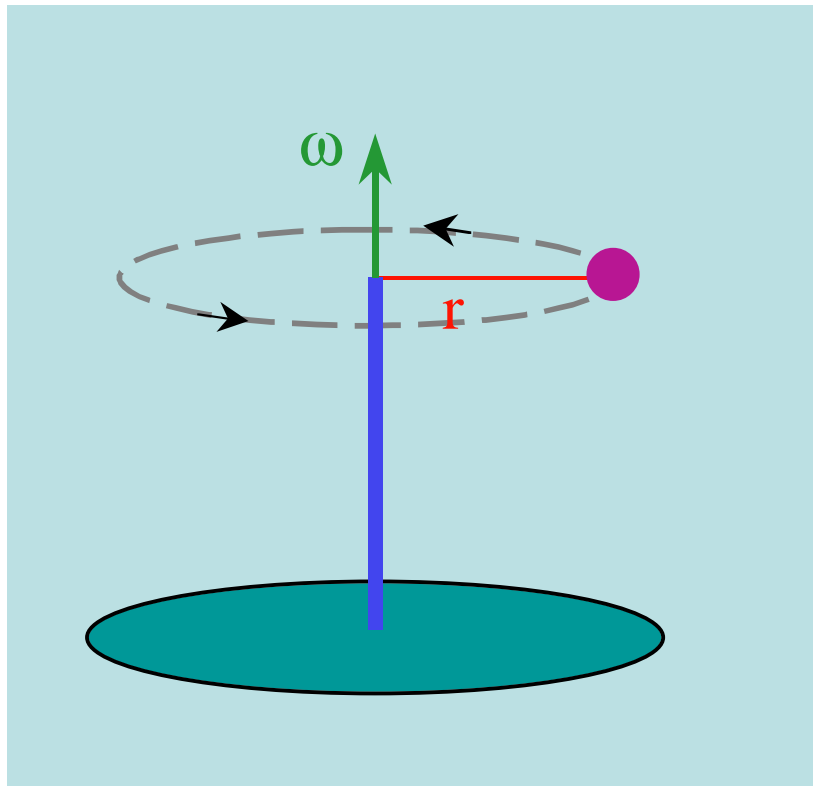
oggetto che si trasforma correttamente sotto trasf. di **Lorentz** : 4-vettore **energia - impulso** $P = (E, p_x, p_y, p_z)$

Relatività Generale

(1916)

Riferimenti NON-Inerziali

Esempio : disco in rotazione con velocità angolare ω



R - R.I. il cui asse verticale coincide con l'asse di rotazione del disco \rightarrow **m** in rotazione

R - R. NI. solidale con la massa \rightarrow **m** in quiete

Quiete in R : risultante delle forze applicate alla massa = 0



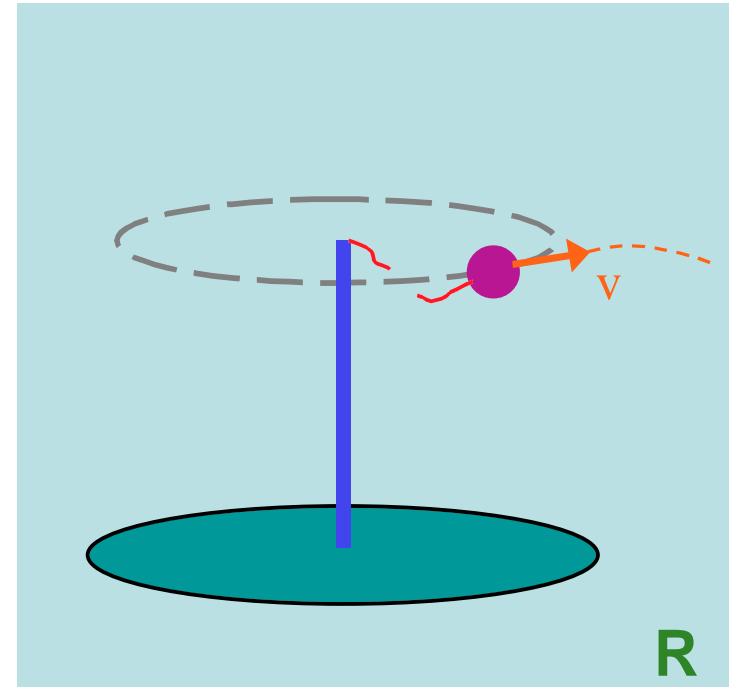
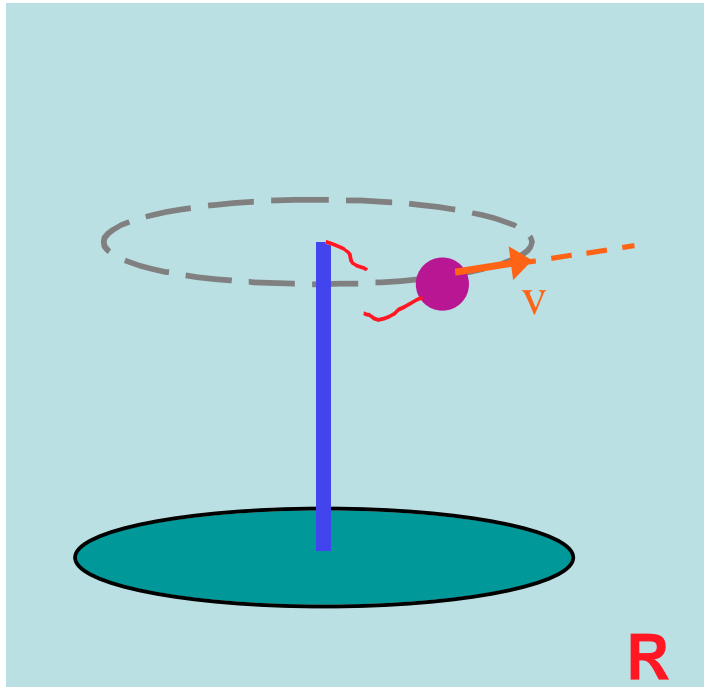
tensione (**centripeta**) della corda equilibrata da forza uguale e contraria (**centrifuga**)

$$F_c = m \omega^2 r$$

In R tale forza è **assente !!** → descrizione fisica diversa nei 2 riferimenti

Difformità fittizia: **forza centrifuga** nasce nel passaggio da R.I. a R.NI.

La corda si rompe !!



R : moto rettilineo uniforme lungo tangente alla circonferenza

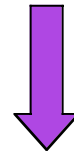
R : moto lungo traiettoria curva \rightarrow nuova forza (Coriolis)

$$\mathbf{F}_v = 2 \mathbf{m} \boldsymbol{\omega} \mathbf{v}$$

Dinamica della palla nei 2 riferimenti :

$$R : \quad \mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

$$R : \quad \mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \mathbf{a} + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_v$$



Meccanica NON covariante per trasformazioni tra R.NI.

Necessario ripristinare **covarianza** per evitare che R.I.
siano privilegiati



Relatività Generale (Einstein - 1916)

Principio d'Equivalenza (debole)

Esperienze in **ascensore**

- accelerazione verso \uparrow : sensazione di **maggior peso**
- accelerazione verso \downarrow : sensazione di **minor peso**
- caduta libera : **assenza di peso**

Gravità indistinguibile da (o equivalente a) una qualunque accelerazione

Riferimento in **caduta libera** \rightarrow **NO** forze \rightarrow R.I. !!

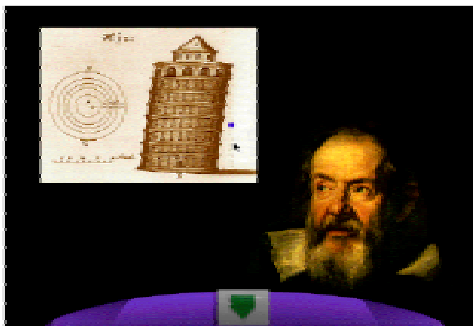
Per ogni corpo sono definibili 2 tipi di massa :

- **inerziale (m_I)** = resistenza alla variazione dello stato dinamico
- **gravitazionale (m_G)** = sorgente campo gravitazionale (carica gravitazionale)

P. d' Equivalenza



$$m_I = m_G$$



... tutti i corpi, indipendentemente dalla loro composizione, cadono sotto l'influenza della gravità con la stessa accelerazione (1632)

N.B.

Massa della Terra

$$F = m_I g = G (M_T m_G / r^2)$$

Costante di Newton



$$g = G (M_T / r^2) (m_G / m_I)$$

g indipendente dal corpo

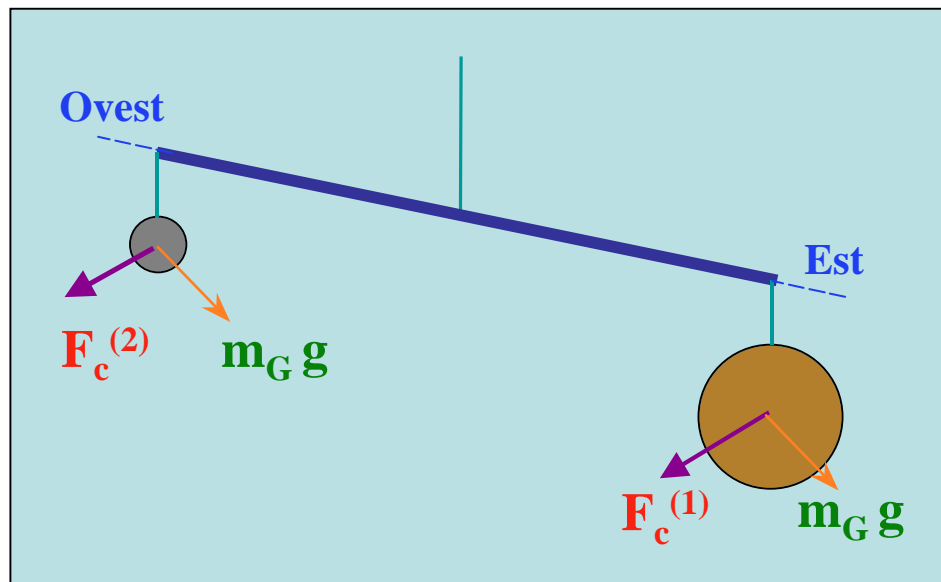


$$m_G / m_I = 1$$

$$m_I = m_G ?$$

Newton - esperimenti con pendoli : $\Omega = m_I - m_G < 10^{-3}$

von Eötvös (1891 ÷ 1922) - bilancia di torsione $\Omega < 10^{-9}$



Sfere di diverso materiale
ma di uguale m_G

$$m_I^{(1)} \neq m_I^{(2)}$$



torsione del filo

Dicke, Roll, Krotov (1964) - $\Omega < 10^{-11}$

Braginskij, Panov (1971) - $\Omega < 10^{-12}$

Principio d'Equivalenza (forte)

Lampada all'interno dell'ascensore : nello spazio profondo (R.I.) o in caduta libera, la luce segue traiettoria rettilinea !!



la luce “cade” in un campo gravitazionale, *i.e.* è costretta lungo traiettoria curva rispetto a stelle fisse lontane

tutti i R.I. e quelli in caduta libera sono **equivalenti** : **NON** esiste esperimento di **alcun tipo** in grado di distinguerli

→ Relatività Speciale applicabile in R. in caduta libera

Conseguenze del Principio d' Equivalenza

Esempio del disco in rotazione intorno al proprio asse

- R.NI. **R** solidale con il disco : misura della circonferenza

$$C = 2 \pi r$$

- R.I. **R** : contrazione dei regoli solidali al disco

$$C = \gamma C = C / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

misura raggio \perp al moto periferico del disco : **r = r**

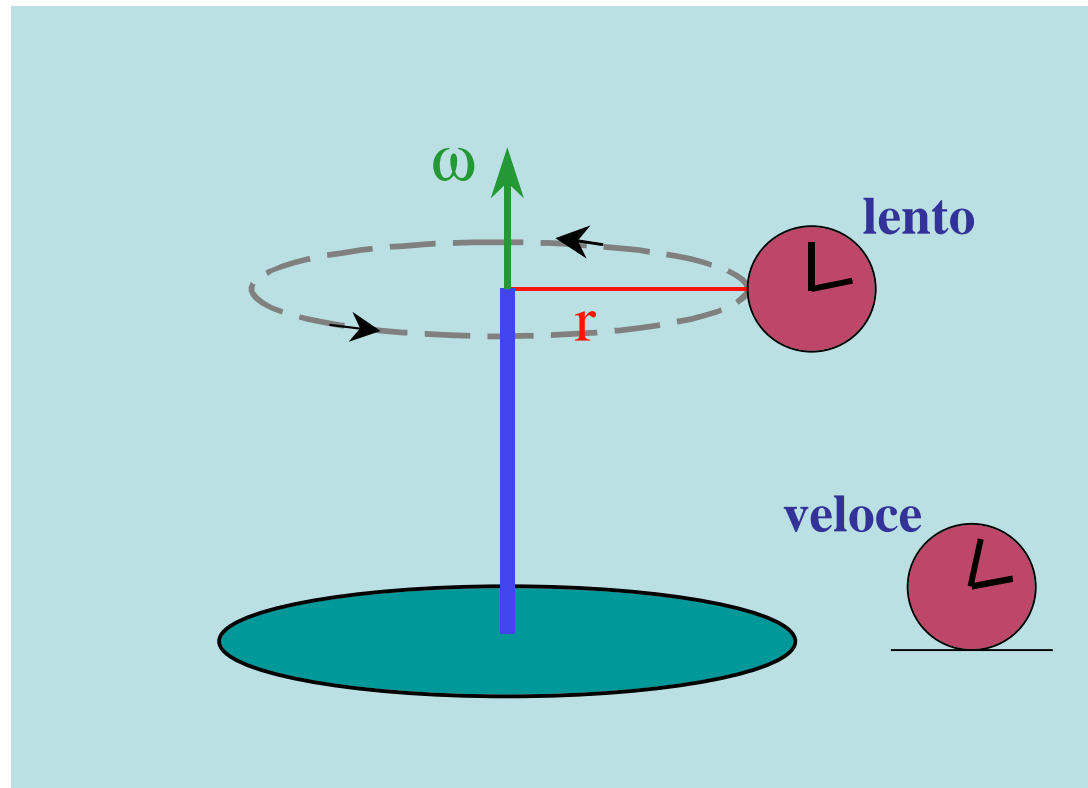
$$C / r = \gamma C / r = \gamma 2 \pi$$



violazione della geometria **Euclidea !!**

Orologio fissato sulla massa m : intervallo di tempo (proprio)
tra due eventi = t

R : dilatazione temporale $\rightarrow t = \gamma t$



P. d'Equivalenza



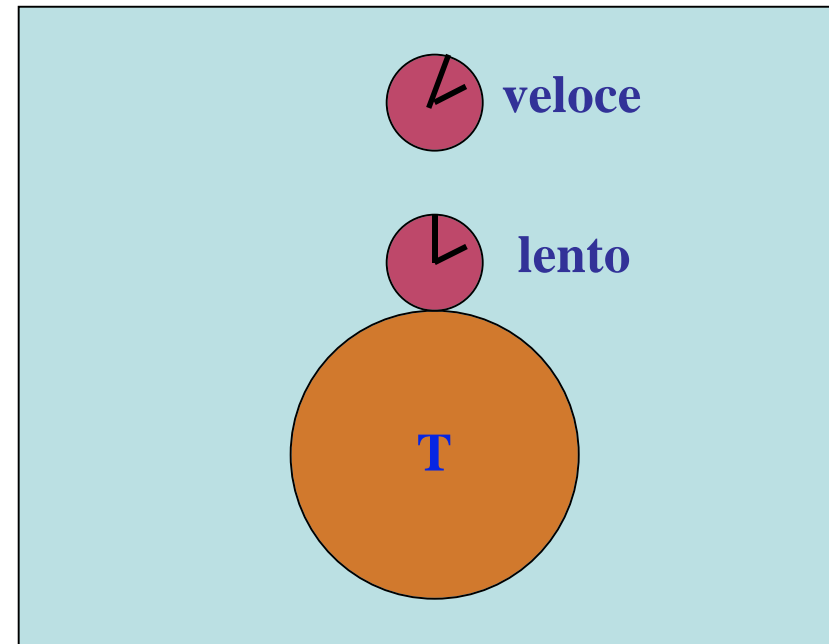
stesso fenomeno deve accadere in un **campo gravitazionale !!**

N.B.

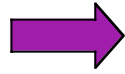
γ : dipende da $v = \omega r$.
 $\omega = \text{costante} \rightarrow$
variazioni dipendono da
 $r \rightarrow$ dalla **posizione nel campo gravitazionale**



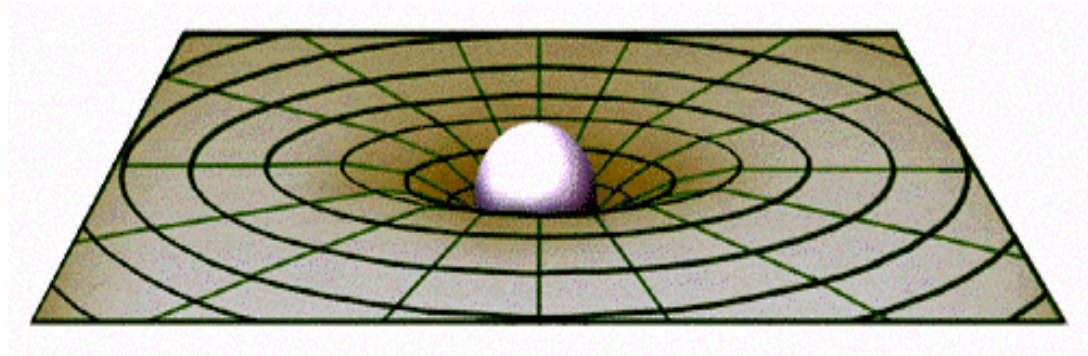
Terra : nucleo 2 secondi + **giovane** della crosta !!



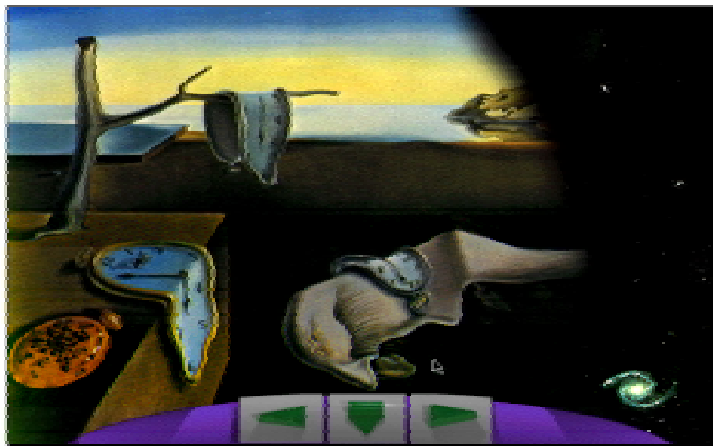
P. d'E.



deformazione dello **Spazio** ...



... e del **Tempo**



di natura puramente
gravitazionale !!

Equivalenza \neq Uguaglianza

Campo Inerziale

Campo Gravitazionale

Sorgente

R.I. \rightarrow R.NI.

distribuzione di
massa-energia

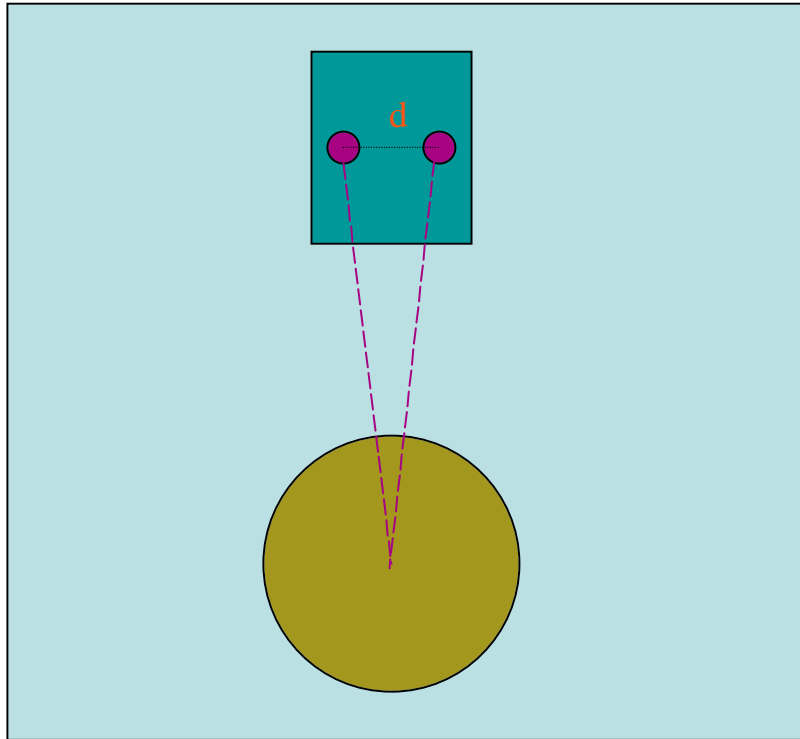
**Distribuzione
Spaziale**

**globalmente
uniforme**

NON uniforme



campi indistinguibili soltanto localmente !!



traiettorie verticali convergenti
verso il centro della Terra

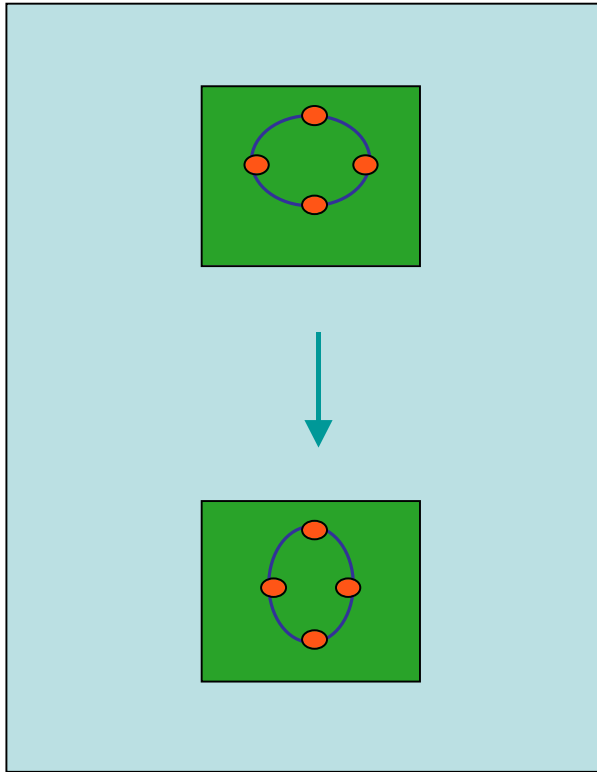


osservatore nell'ascensore
rivela **moto di avvicinamento**
dei 2 corpi

($d = 1 \text{ m} \rightarrow 16 \mu / 100 \text{ m}$)

Caratteristiche dell'effetto

- **differenziale** : causato dalla variazione puntuale del campo gravitazionale
- **NON-locale** : aumenta con **d**



Anello flessibile di particelle in caduta libera → **distorsione di forma:**

Allungamento verticale

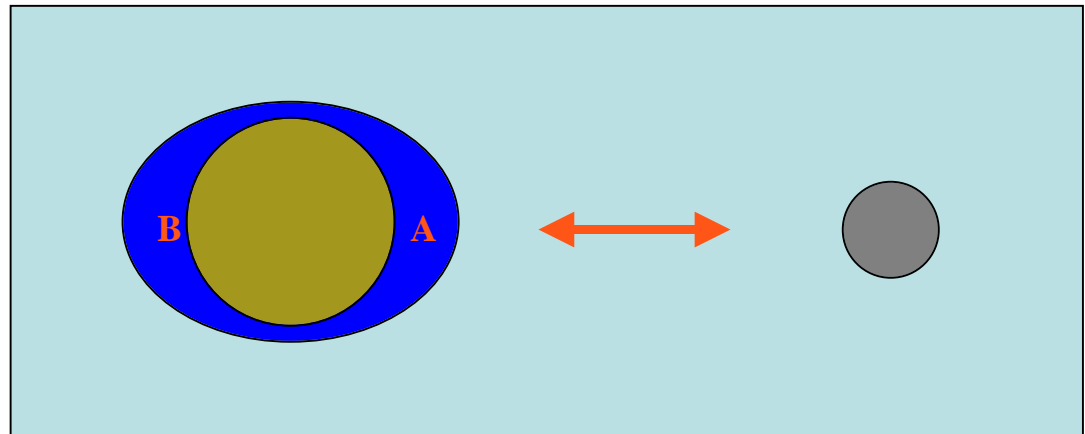
+

Appiattimento orizzontale

||

Forza di Marea

Sistema Terra-Luna



Forze di Marea

Effetti **+ complicati** di quelli indotti da una forza usuale (*e.g.*, un campo elettrico) !

Corpo in caduta libera in campo gravitazionale complicato (**NON-uniforme**) → **forze di allungamento verticale** e di **compressione orizzontale + stress di torsione e deformazione di taglio**

Spazio **3**-dimensionale :

- **Campo elettrico** : **3** componenti indipendenti → **vettore**
- **Gravità Mareale** : **9** componenti indipendenti → **tensore**

Esempio : corpo di forma cubica in caduta libera

Su ciascuna faccia esistono forze parallele alla superficie che tendono a deformarla e ruotarla rispetto alla faccia opposta: superfici 2-dimensionali → forze a 2 componenti

Gravità mareale → forze su faccia opposta : uguali e contrarie (altrimenti, **gravità diretta**)



3 coppie indipendenti di componenti vettoriali : 1 coppia per doppietto di facce contrapposte → **6 componenti !**

+

Forze uguali e contrarie \perp ad ogni coppia di facce → **3 componenti indipendenti !**

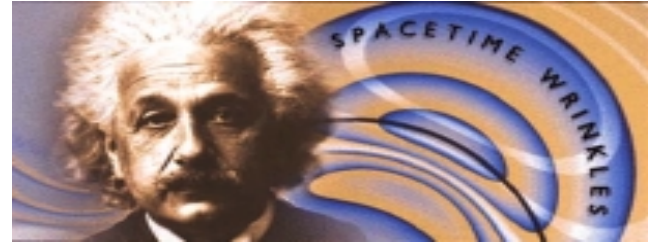
Oggetto a **9** componenti in uno spazio a **3** dimensioni ?
prodotto congiunto (= per componenti) di 2 vettori !

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

N.B.

- **Notazioni** : componente di un vettore $\rightarrow a_i$ ($i = 1,2,3$)
componente di un tensore $\rightarrow c_{ij}$ ($i, j = 1,2,3$)
- **spazio-tempo: 4-dimensionale** \rightarrow gravità relativistica
richiede un tensore di dimensione **4 x 4 = 16** componenti

Einstein (1916)



Nozione di **forza** : utile se si ha a che fare con **forza fissa** che agisce su **collezione di masse** diverse sottoposta a **varietà di accelerazioni**

Gravità mareale : situazione opposta !! **accelerazione fissa; forza varia da punto a punto !!**

Deformazione **identica** di tutti gli anelli in caduta libera → è soltanto un **effetto geometrico** e **NON** meccanico !!

Gravità NON è una forza ma la manifestazione della geometria dello spazio-tempo

Gravità Relativistica : completa assenza di forze gravitazionali !!

Lo **spazio- tempo è curvato o distorto** : particelle cadono liberamente attraverso di esso seguendo la traiettoria + rettilinea possibile (**geodetica**)

Geodetiche vicine possono **convergere o divergere**, riproducendo l'effetto delle **forze di marea**

Esempio: **meridiani** sono l'equivalente delle linee rette sulla superficie Terrestre. 2 osservatori che dall'equatore si muovono verso Nord seguendo 2 meridiani diversi si incontreranno al Polo Nord !! “Collisione” verrà interpretata come dovuta ad una forza esterna che li spinge l'uno verso l'altro. In realtà è conseguenza della curvatura della superficie Terrestre !!

Interpretazioni a confronto

Newton : gravità è una forza



La Terra si muove su un'orbita curva intorno al Sole perché la gravità solare la costringe ad allontanarsi dal suo cammino rettilineo naturale

Einstein : gravità è curvatura

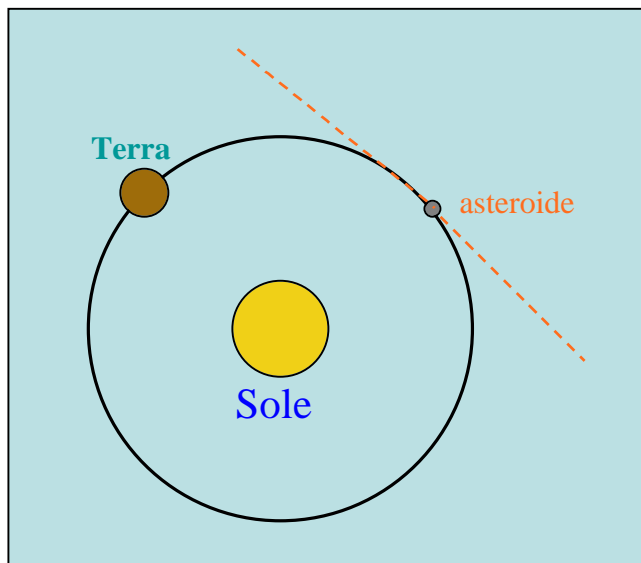


La massa del Sole distorce la geometria dello spazio-tempo in vicinanza della Terra e questa si muove **senza sperimentare alcuna forza** lungo il cammino il + possibile rettilineo (~ un'ellisse) in questo ambiente curvato

N.B.

Alcune precisazioni :

- ✓ È lo **spazio-tempo** ad essere distorto e **NON** il solo **spazio** ! (evidente: **NON** solo le lunghezze dei regoli ma anche il ritmo degli orologi risente di un campo gravitazionale)
- ✓ La **curvatura dell'orbita Terrestre** **NON** ha nulla a che vedere con la sottostante **curvatura dello spazio** !!



Orbita **asteroide** << curvata di quella della **Terra** malgrado sia soggetto alla stessa forza da parte del Sole !! Analisi del moto nello **spazio-tempo** : le 2 orbite hanno la **stessa curvatura** !!

Equazioni di Einstein

Natura **tensoriale** delle forze di marea \Rightarrow **curvatura** dello spazio-tempo deve essere descritta da un **tensore** :

tensore di Riemann

Deformazione dell'anello in caduta libera deriva dalla presenza di un campo gravitazionale \Rightarrow natura **tensoriale** della **sorgente** del campo :

tensore Energia - Impulso

(combinazione del **tensore di stress** 3-dimensionale e del 4-vettore **energia - impulso**)

Einstein : equazioni di campo che pongono in relazione il grado e la natura della **distorsione dello spazio-tempo** alle qualità della **materia gravitante** che la produce



variazioni geometria spazio-tempo = **stress, massa-energia, impulso sorgente**

**lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi;
la materia dice allo spazio-tempo come distorcersi**



Bibliografia

- R. Feynman , *La Fisica di Feynman* , Zanichelli (2001).
- J. A. Wheeler, *Gravità e spazio-tempo*, Zanichelli (1993).
- A. Pais, *“Sottile è il Signore ...”*. *La vita e la Scienza di Albert Einstein*, Bollati Boringhieri (1991).
- R. Rucker, *La Quarta Dimensione*, Adelphi (1994).
- B. Russel, *L'ABC della relatività*, Longanesi (1982).
- *Filosofia della Fisica* , a cura di G. Boniolo , Bruno Mondadori (1997).