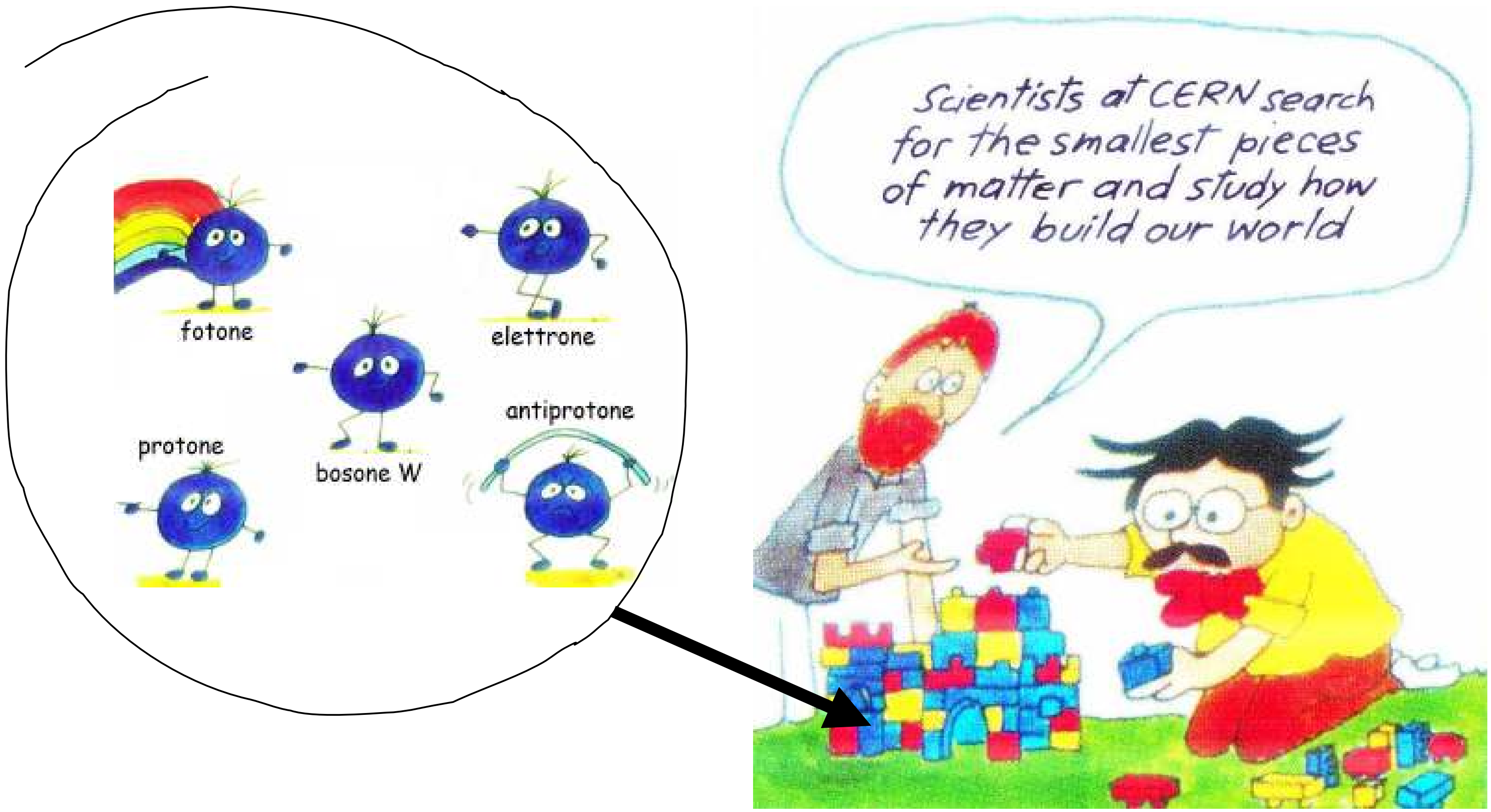
Elementi
di
Statistica

1

... diamo un senso

Spiega il complesso
mediante il semplice
nel mondo dell'infinitamente piccolo …

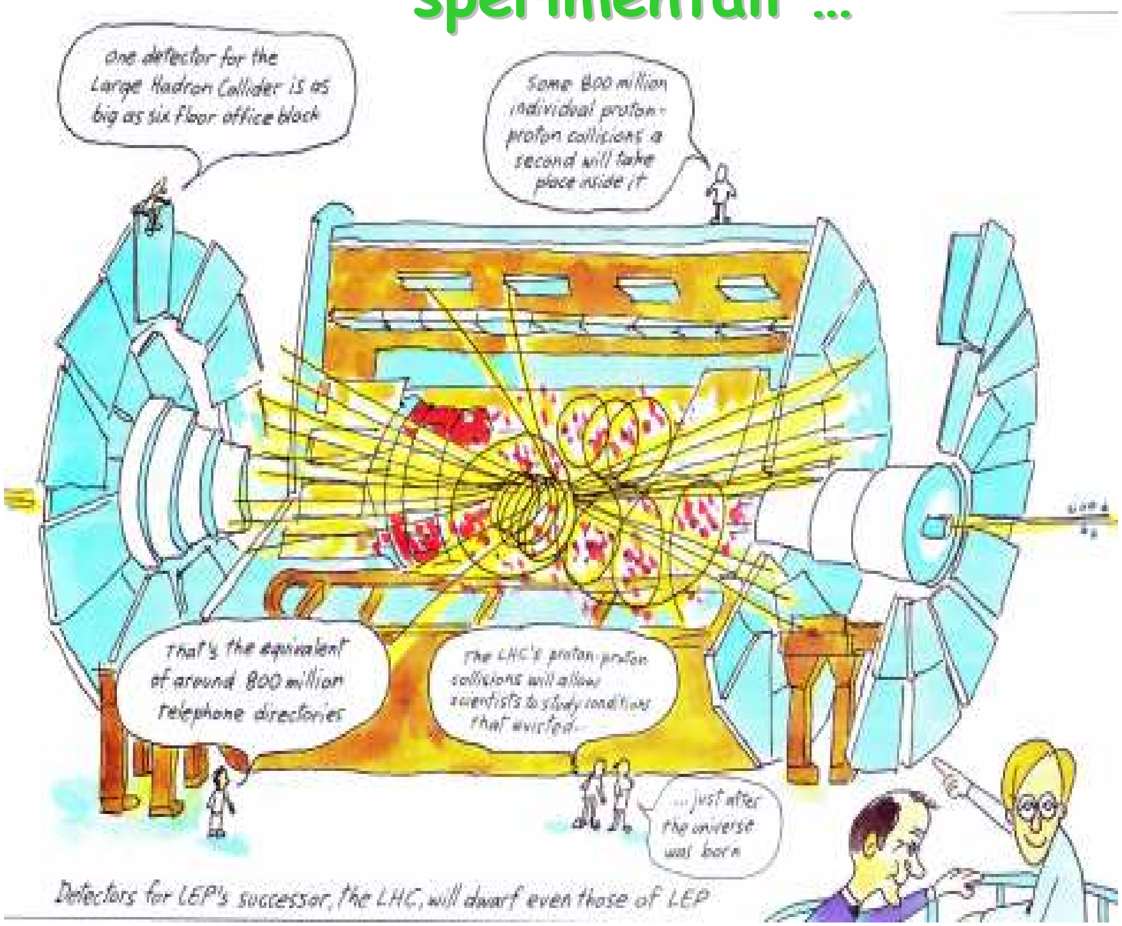


all'attacco !!! ...

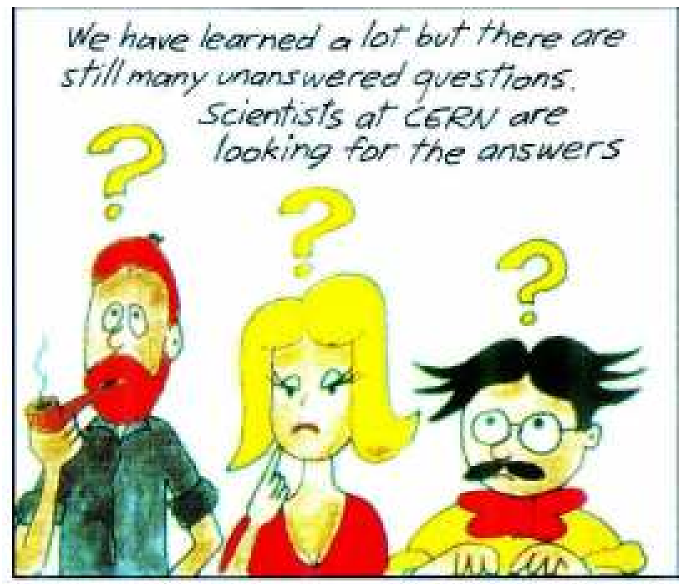
... applicando la ben nota manovra a tenaglia :

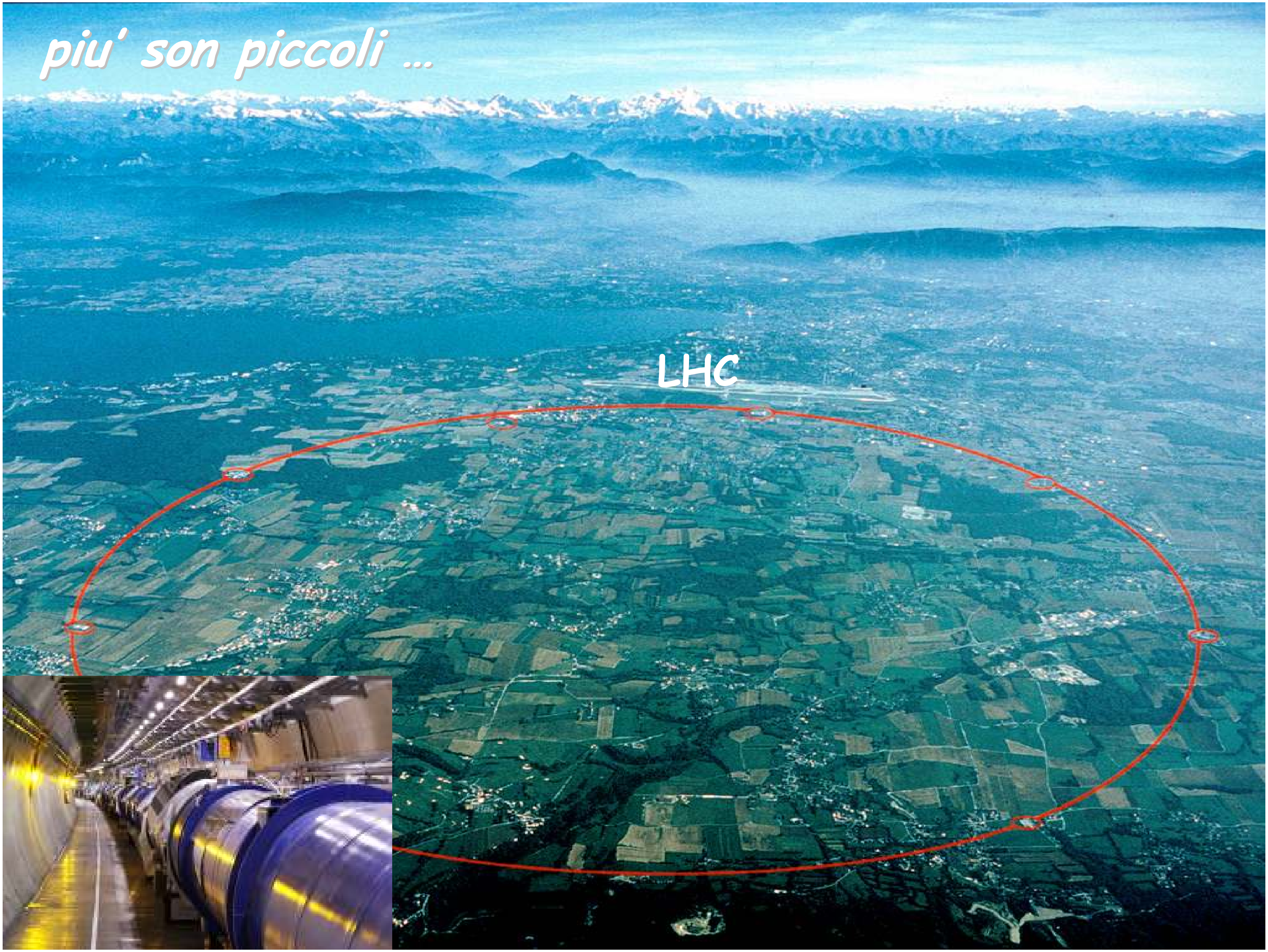
il metodo scientifico

sperimentali ...



... teorici




piu' son piccoli ...
LHC

… cosa si misura nella HEP ?

Parametri fondamentali

- Branching ratio (**BR**)
- vita media (τ)
- massa (**m**)
- costanti di accoppiamento
- ……

$K^o \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^o\pi^o$

attraverso…

- quantita' di moto $\vec{q}$;
- energia E rilasciata nel calorimetro ;
- angoli e direzioni delle particelle prodotte ;
- intervalli temporali ;
- efficienza del rivelatore ;
- contaminazione in un campione ;
- ecc.

… cosa si misura nella HEP ?

Parametri fondamentali

- Branching ratio (**BR**)
- vita media (τ)
- massa (**m**)
- costanti di accoppiamento
- ……

$K^o \rightarrow \pi^+\pi^-, \pi^o\pi^o$

attraverso…

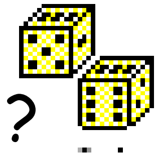
- quantita' di moto $\vec{q}$;
- energia E rilasciata nel calorimetro ;
- angoli e direzioni delle particelle prodotte ;
- intervalli temporali ;
- efficienza del rivelatore ;
- contaminazione in un campione ;
- ecc.

New physics ! ! !

BR, branching ratio

	Canali	BR
$\Phi \rightarrow$	K^+K^-	(~ 49 %)
	$K_S K_L$	(~ 34 %)
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	(~ 15 %)
	$\eta\gamma$	(~ 1.3%)

…e il determinismo dove e' finito ?

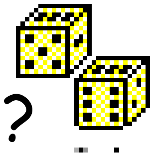


- Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

BR, branching ratio

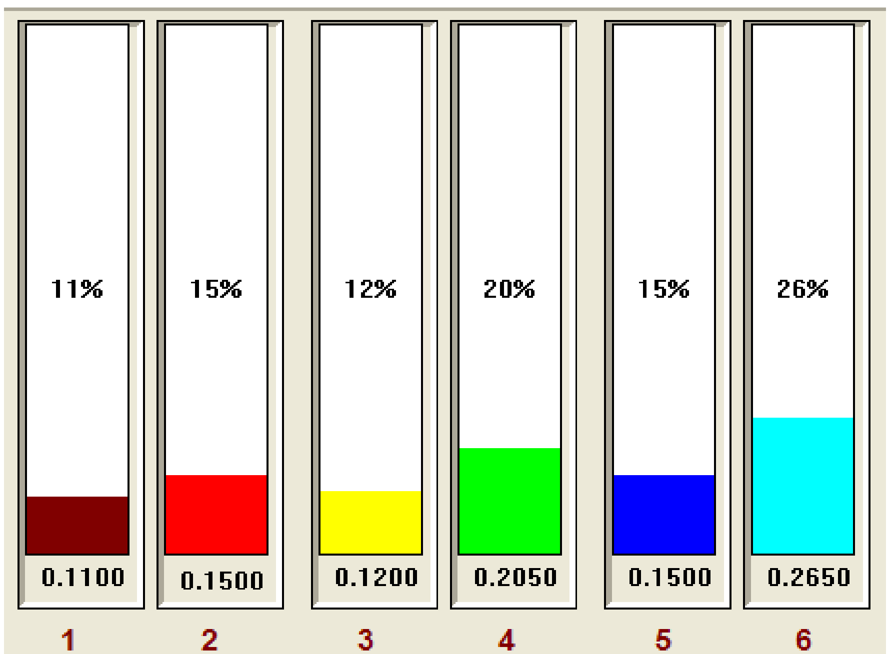
	Canali	BR
$\Phi \rightarrow$	K^+K^-	(~ 49 %)
	$K_S K_L$	(~ 34 %)
	$\pi^+\pi^-\pi^0$	(~ 15 %)
	$\eta\gamma$	(~ 1.3%)

…e il determinismo dove e' finito ?

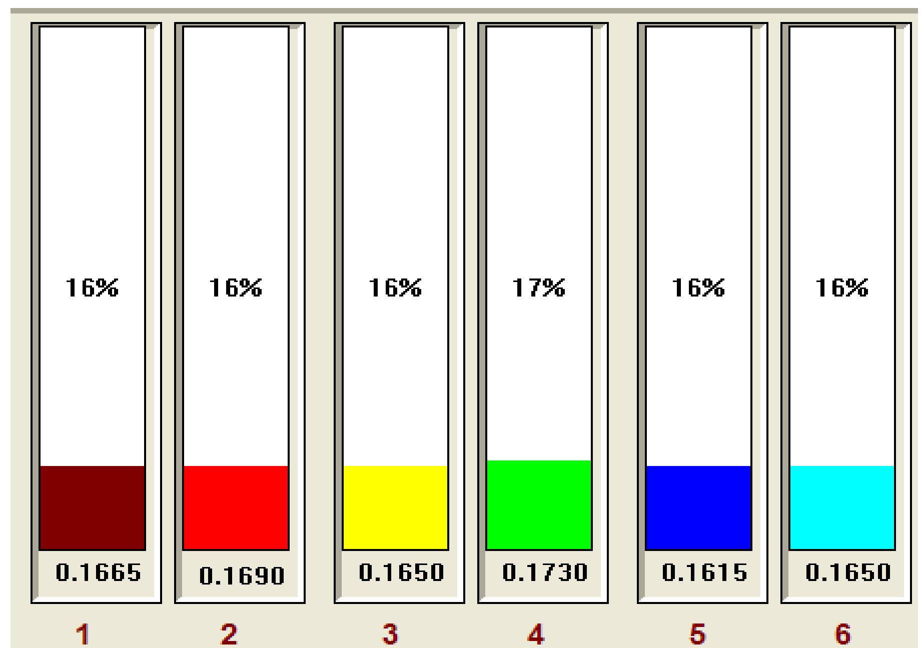


- Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

N=200 lanci

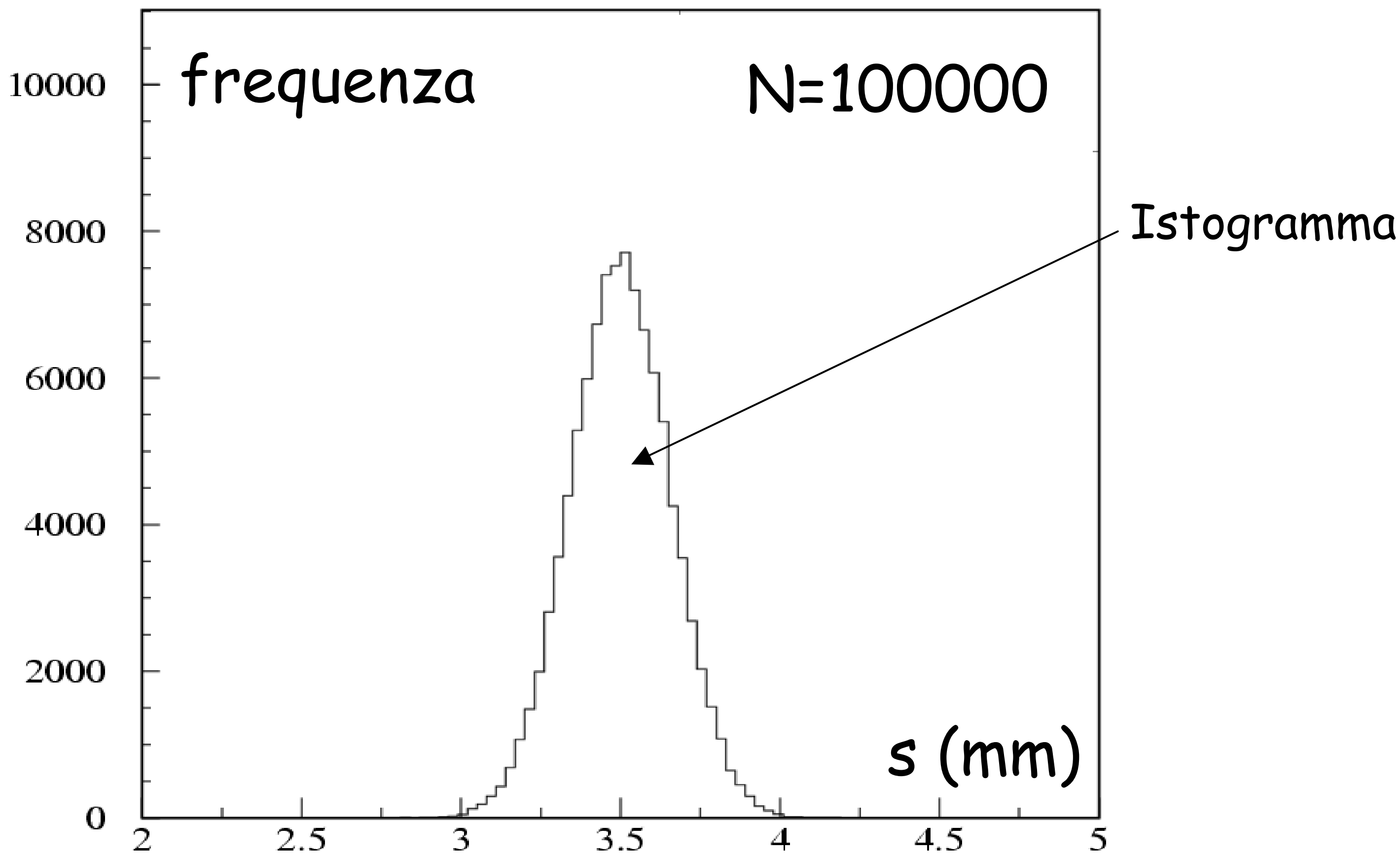


N=2000 lanci



una cosiddetta misura 'semplice' ...

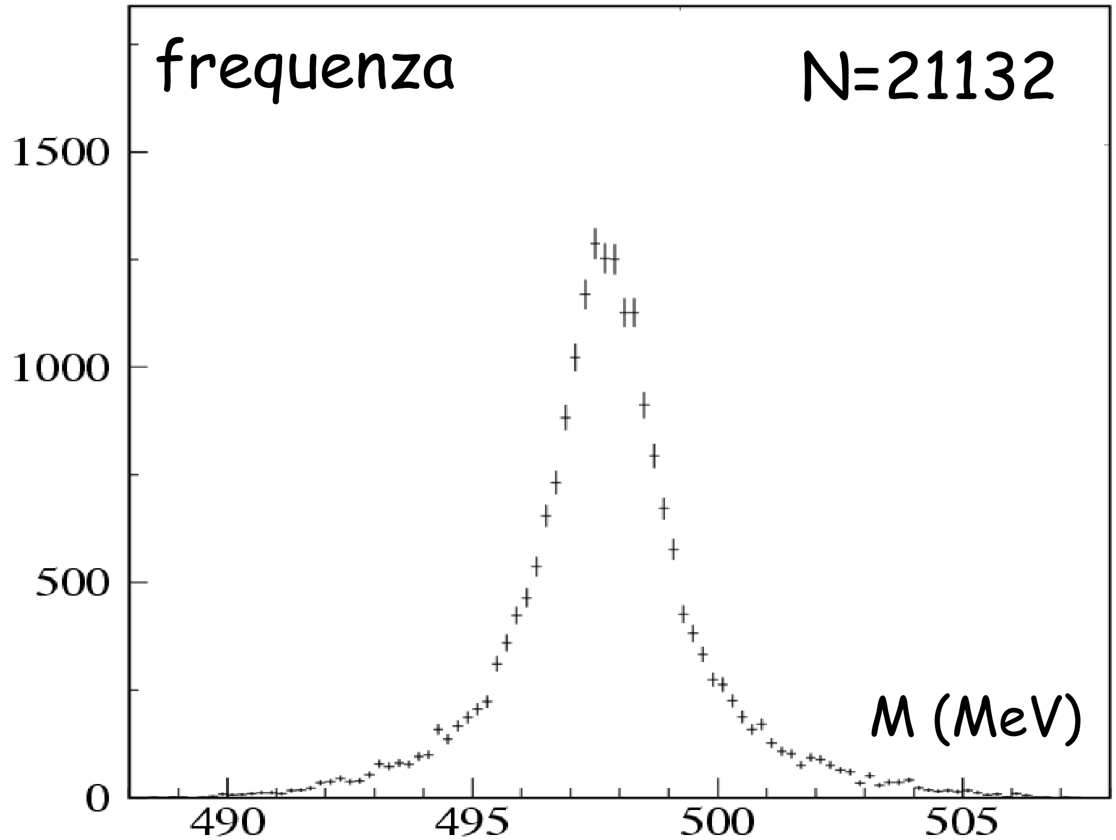
Misura spessore cavo elettrico



- Errori casuali
- Errori sistematici

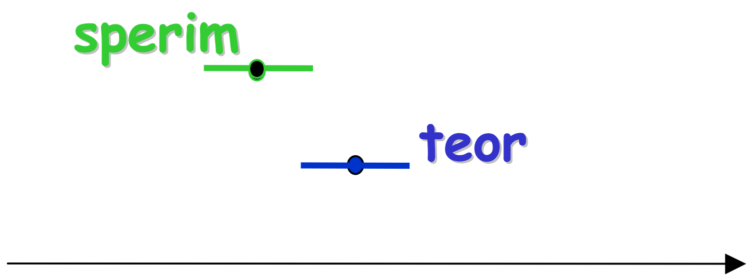
una cosiddetta misura 'difficile' ...

Misura massa K_L



il risultato di una operazione di misura ... **e' una variabile aleatoria !**

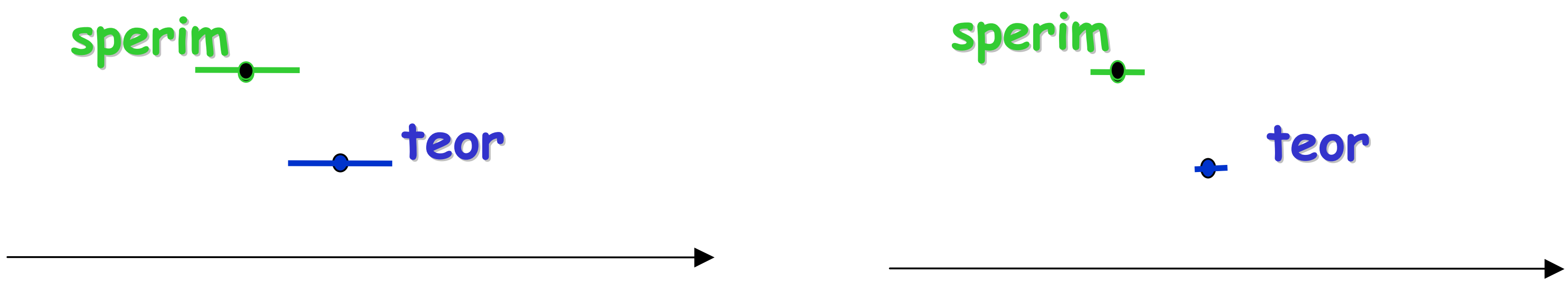
• Le incertezze (sperimentali e/o teoriche) possono essere diminuite ;



il risultato di una operazione di misura … **e' una variabile aleatoria !**

• Le incertezze (sperimentali e/o teoriche) possono essere diminuite ;

• La situazione puo' cambiare nel tempo…



2
Variabile aleatorie
e
funzioni di distribuzione

Indicatori fondamentali

Valor medio

$$m = \frac{\sum x_i}{N}$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{N-1}}$$

$x = m \pm \sigma$

$e_x = \sigma / m$

Indicatori fondamentali

Valor medio

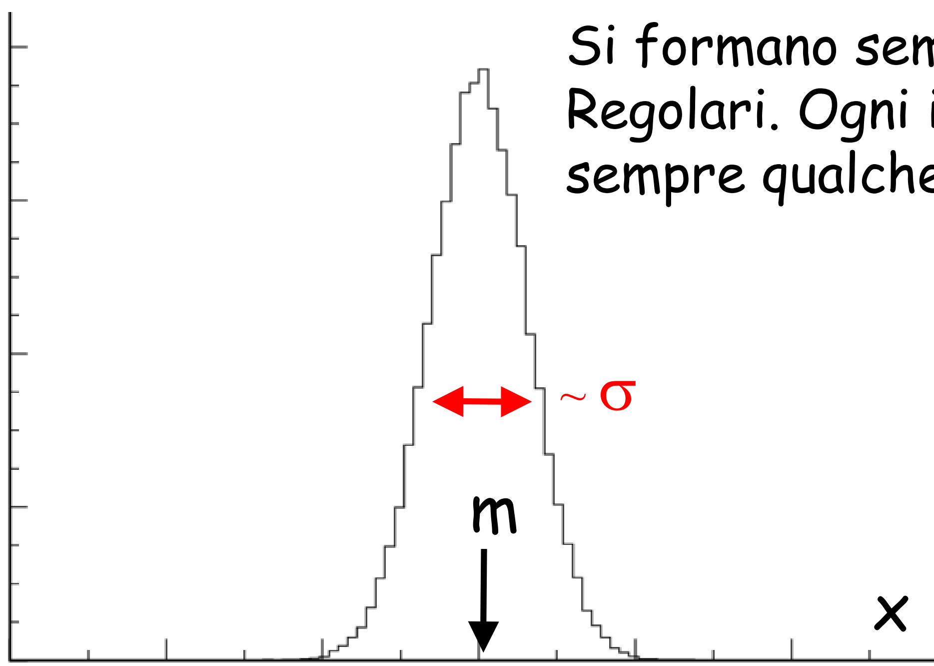
$$m = \frac{\sum x_i}{N}$$

Deviazione standard

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (m - x_i)^2}{N-1}}$$

$x = m \pm \sigma$

$e_x = \sigma / m$



Si formano sempre istogrammi Regolari. Ogni istogramma segue sempre qualche ***funzione di distribuzione***

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : gaussiana

Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di **errori casuali.**

↓

spessore cavo elettrico
massa di una particella
misura di un intervallo di tempo

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : gaussiana

Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di **errori casuali**.

spessore cavo elettrico
massa di una particella
misura di un intervallo di tempo

VA : binomiale

Il numero di **successi** in N prove e' una variabile aleatoria, e ovviamente: $0 \leq k \leq N$.

risultato lancio di un dado
efficienza rivelatore
canale di decadimento per una particella

Tipi di variabili aleatorie (I)

VA : gaussiana

Misura di una grandezza 'ben definita', in presenza di **errori casuali**.

spessore cavo elettrico
massa di una particella
misura di un intervallo di tempo

VA : binomiale

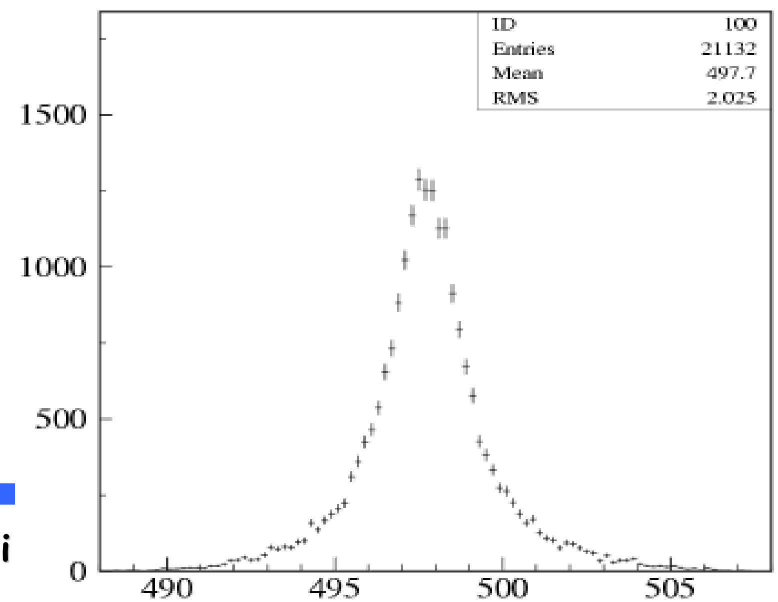
Il numero di **successi** in N prove e' una variabile aleatoria, e ovviamente: $0 \leq k \leq N$.

risultato lancio di un dado
efficienza rivelatore
canale di decadimento per una particella

VA : poissoniana

Caso particolare di var.binom.:
- *successo:* ***evento raro***, $p \approx 0$
- numero **infinito** di prove $N \approx \infty$

nascite al mese
 # decadimenti in 5 s di una sostanza radioattiva
 # di eventi in un "bin" di un istogramma



I conteggi

K = # $K^o \rightarrow \pi^o \pi^o$
BR = k/N
BR è una VA : binomiale

$$m = pN$$

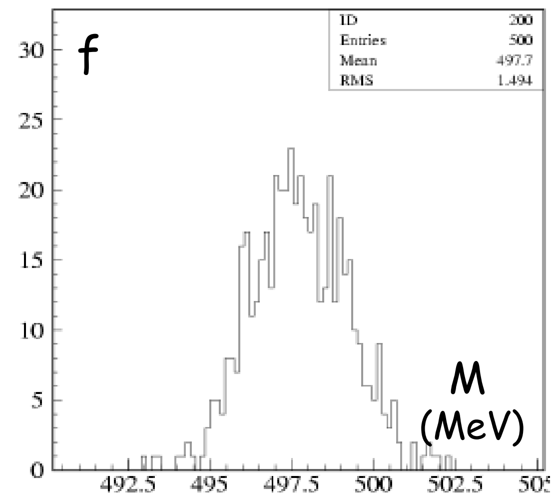
$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$

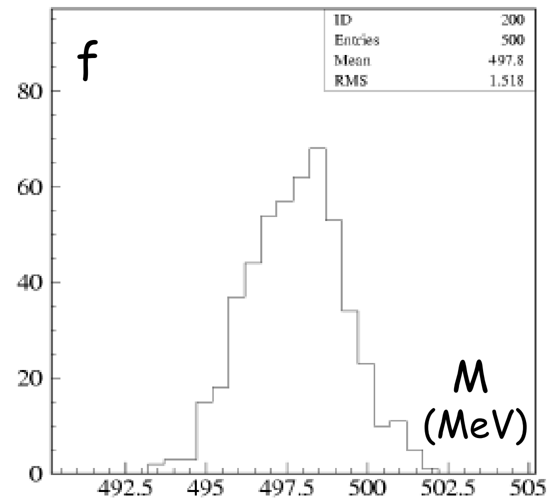
$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{Np(1-p)}}{pN} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

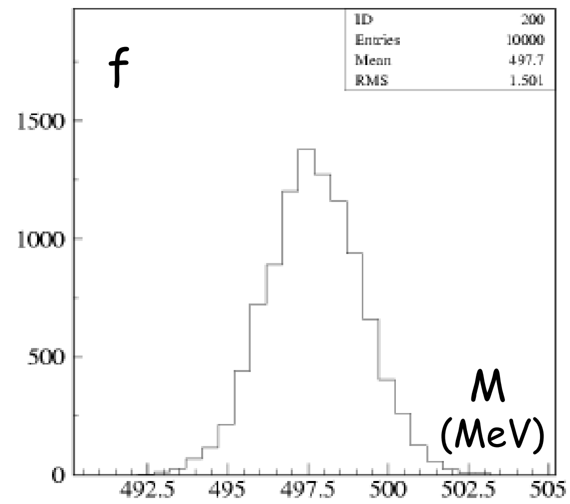
- **Precisione misura BR**

N=50 -> σ/m → 10%
N=10^3 -> σ/m → 2.4%
N=10^6 -> σ/m → 0.08%

Misura massa particella ... **fdd gaussiana**

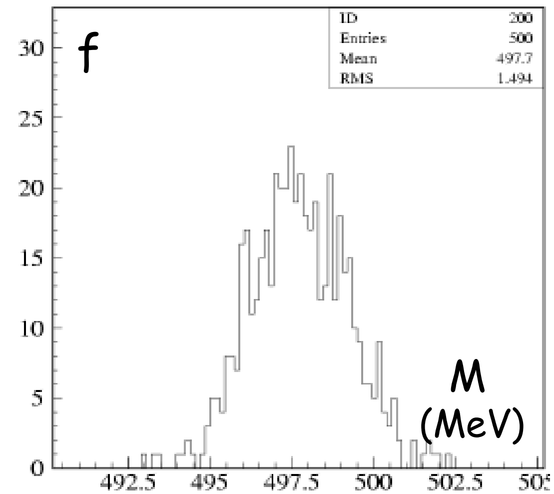


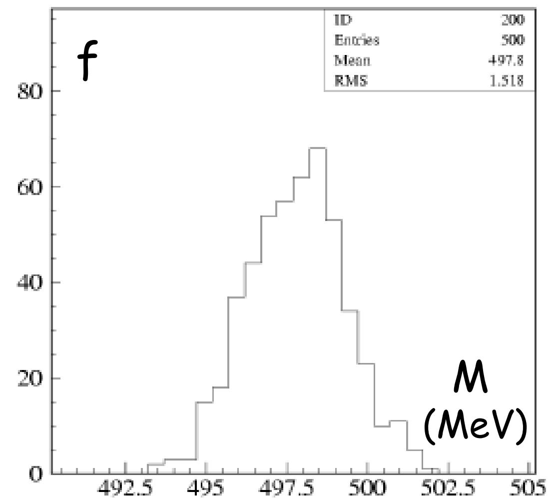


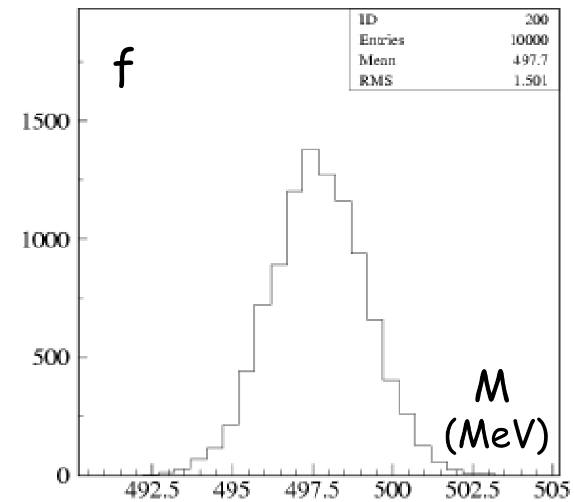


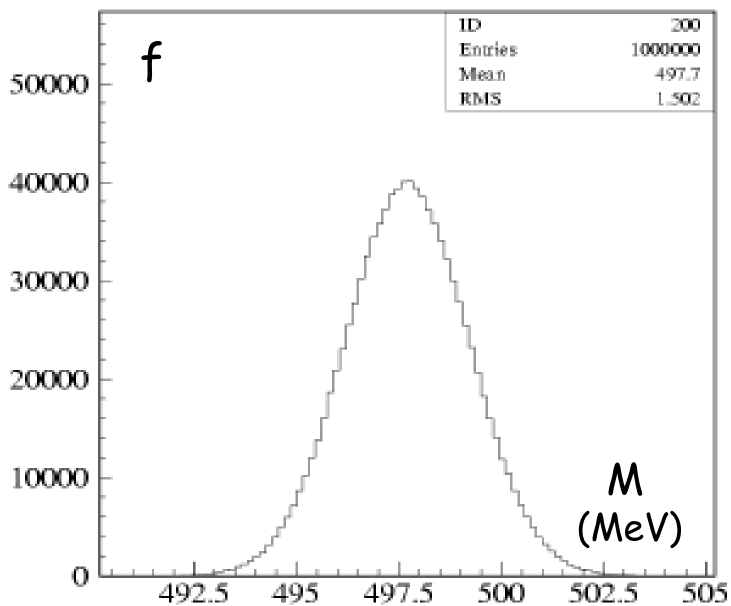
Misura massa particella ...

fdd gaussiana



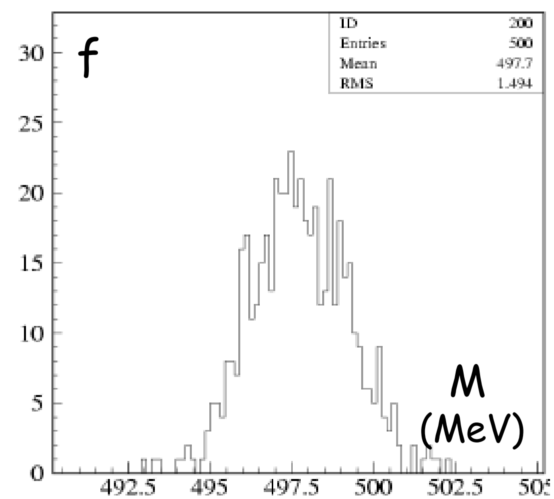


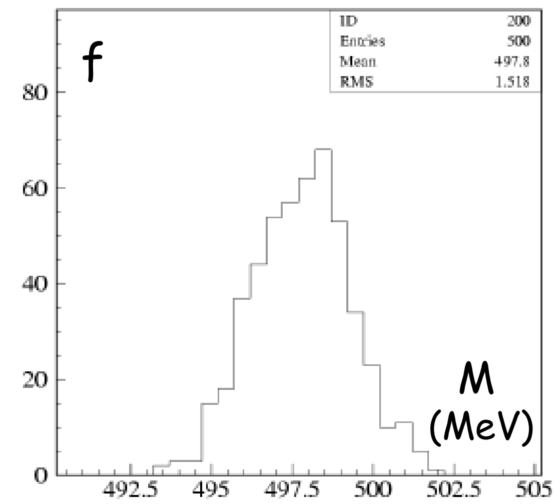


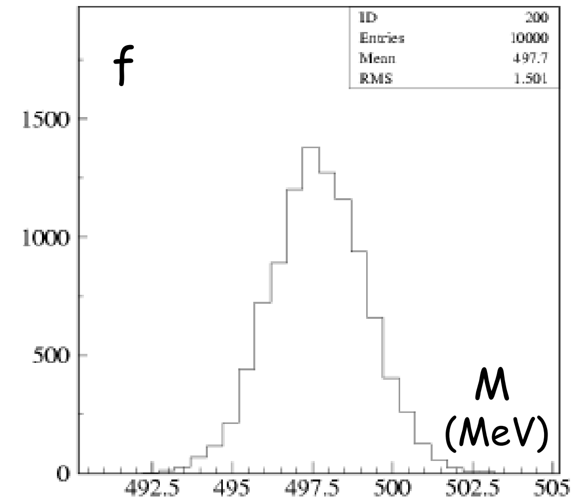


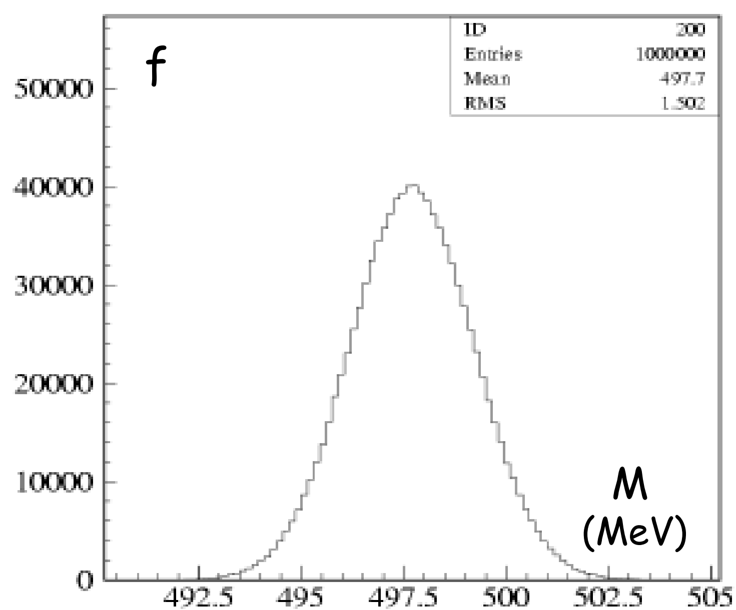
Misura massa particella ...

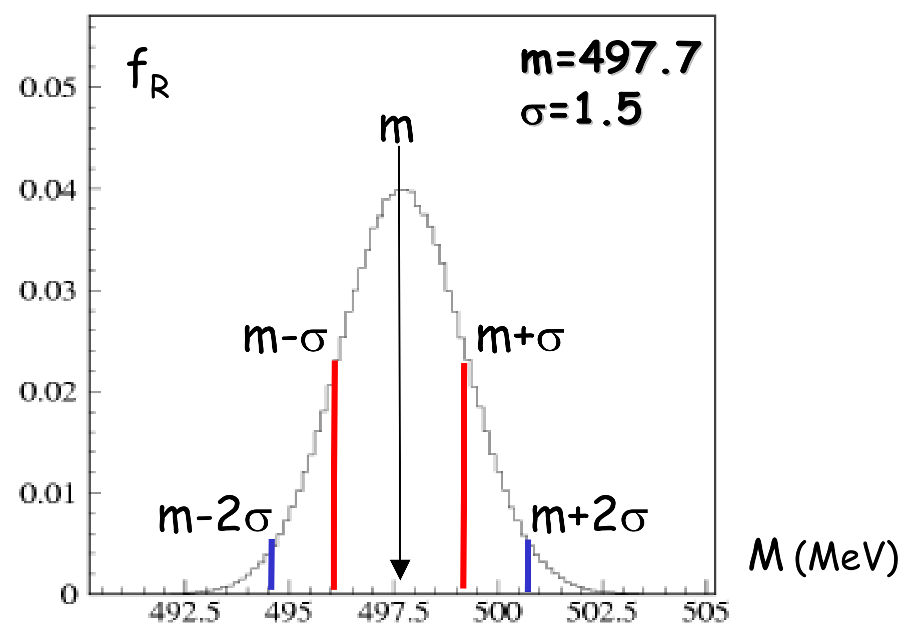
fdd gaussiana





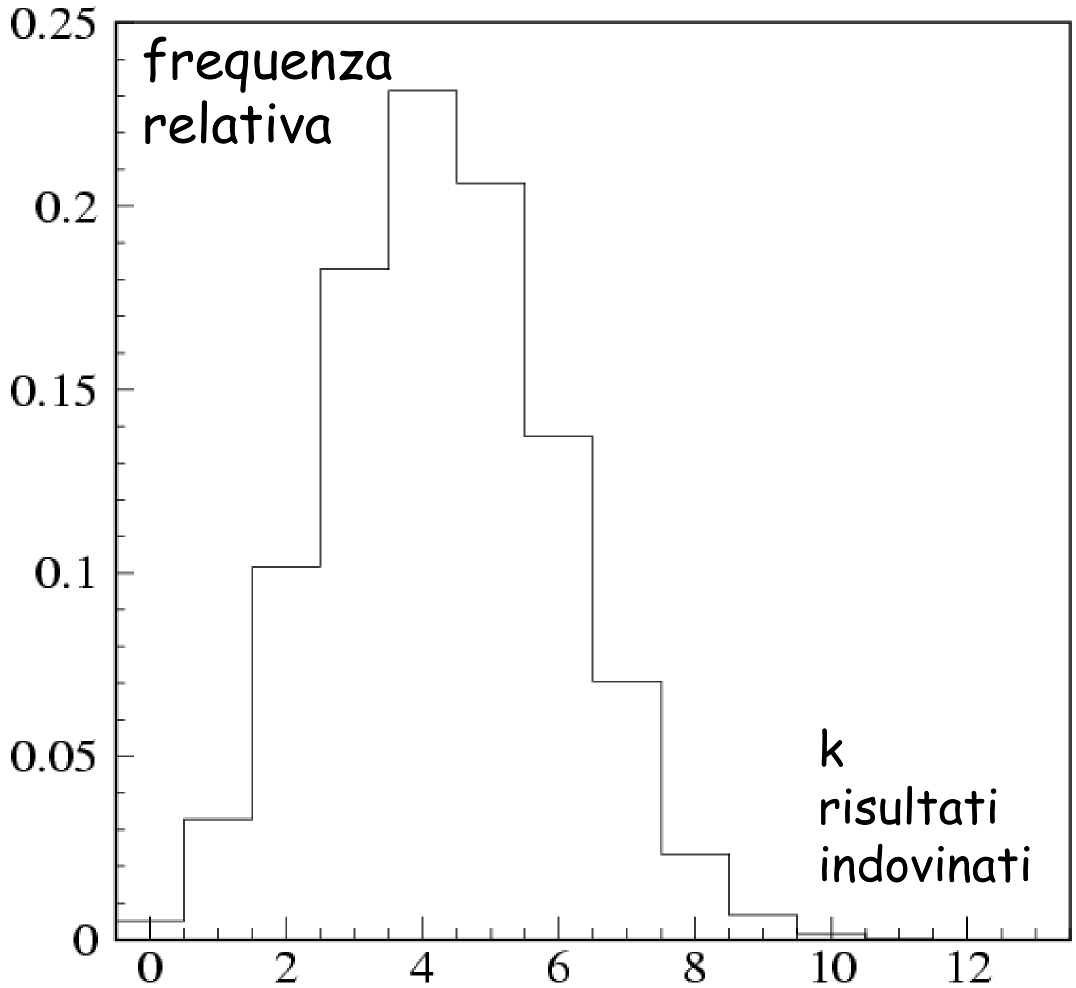






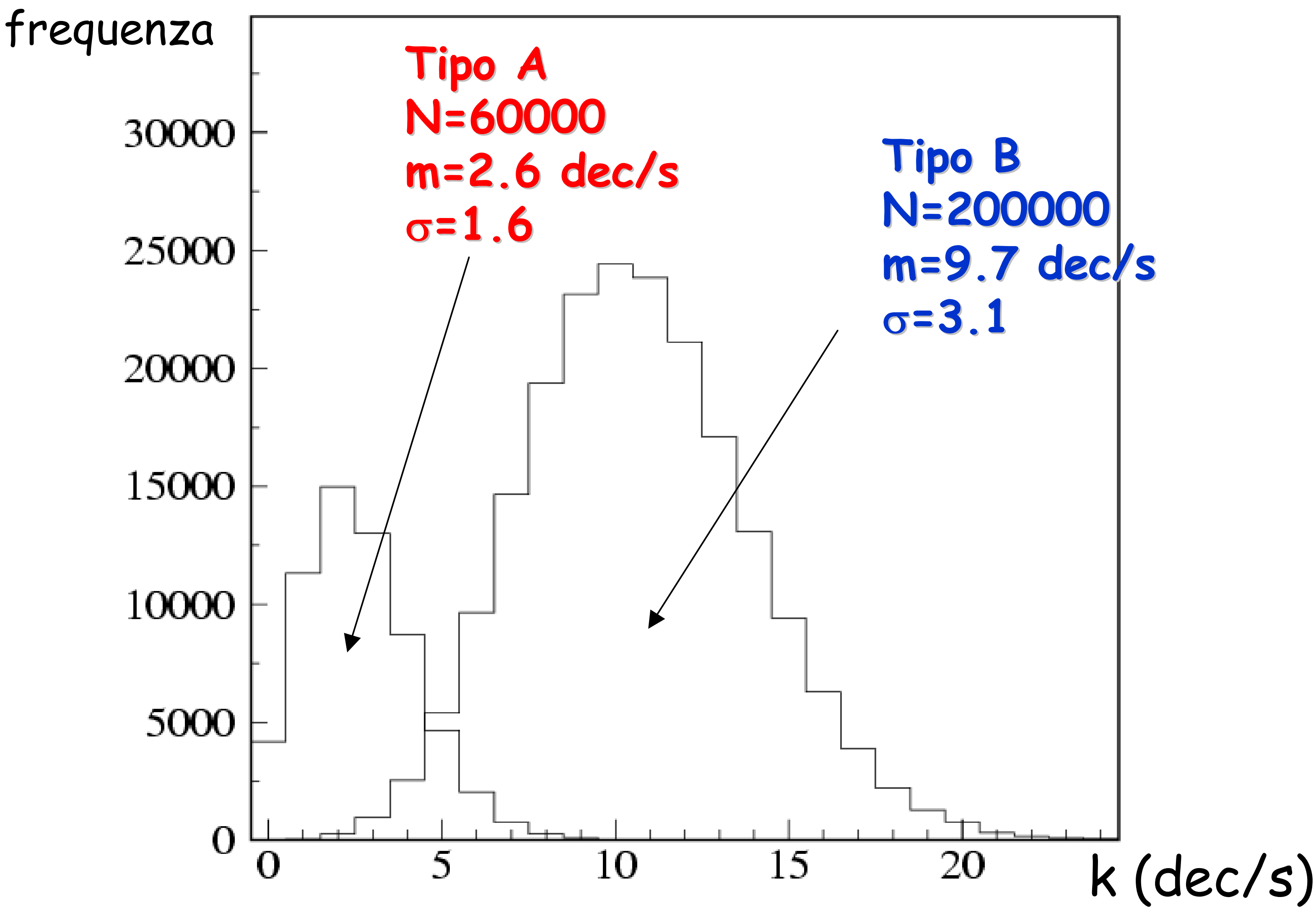
Risultati della schedina ...

fdd binomiale

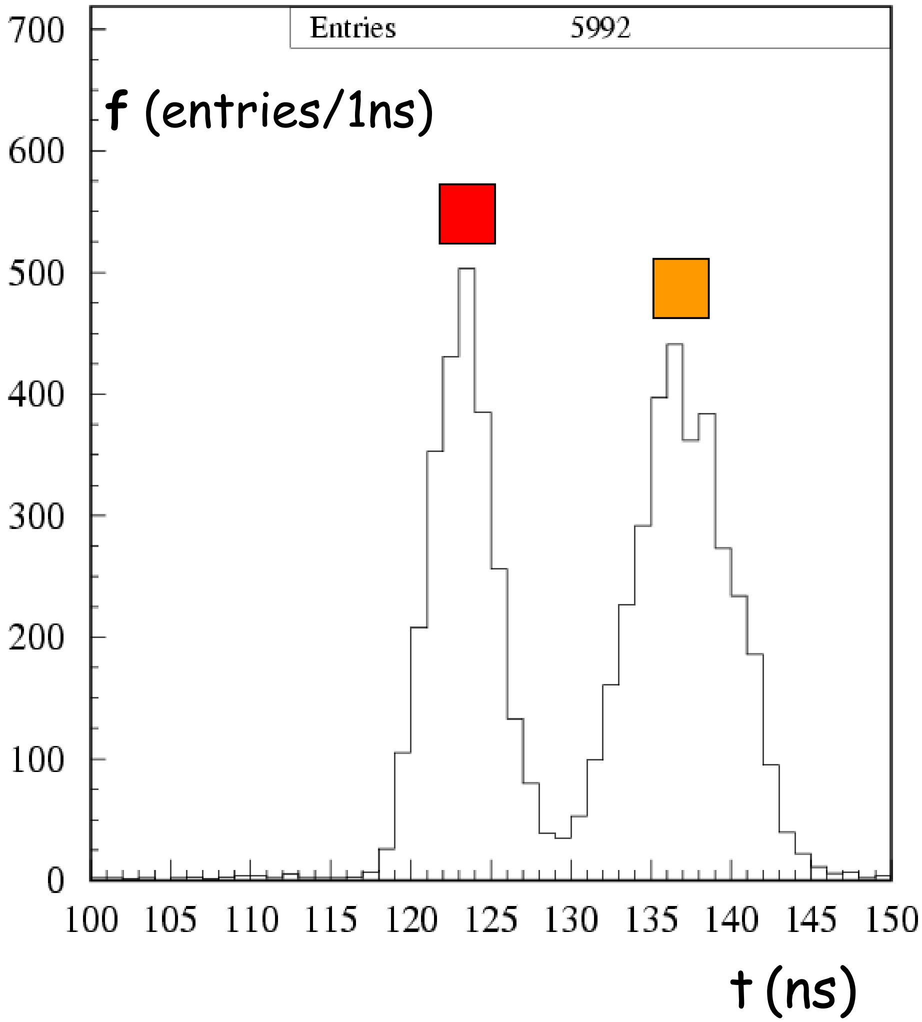


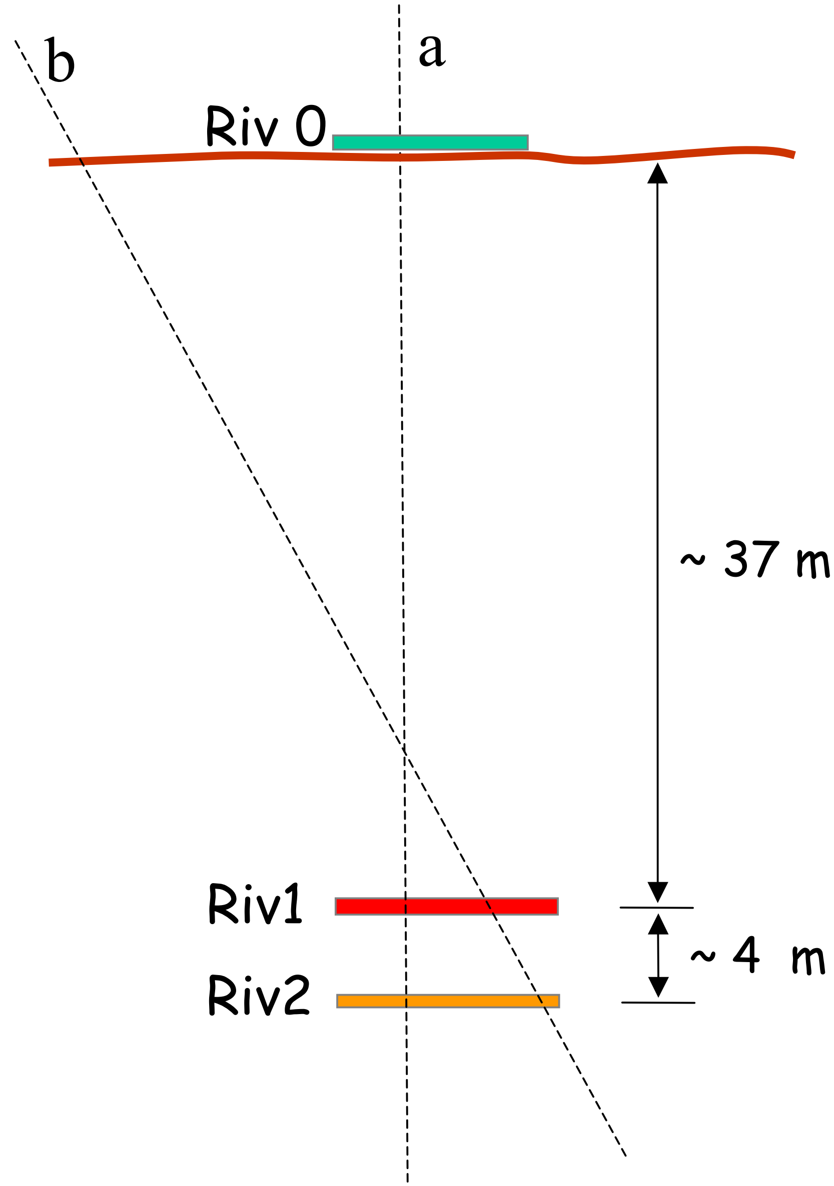
Sostanza radioattiva ...

fdd poissoniana



Misura intervallo temporale ...

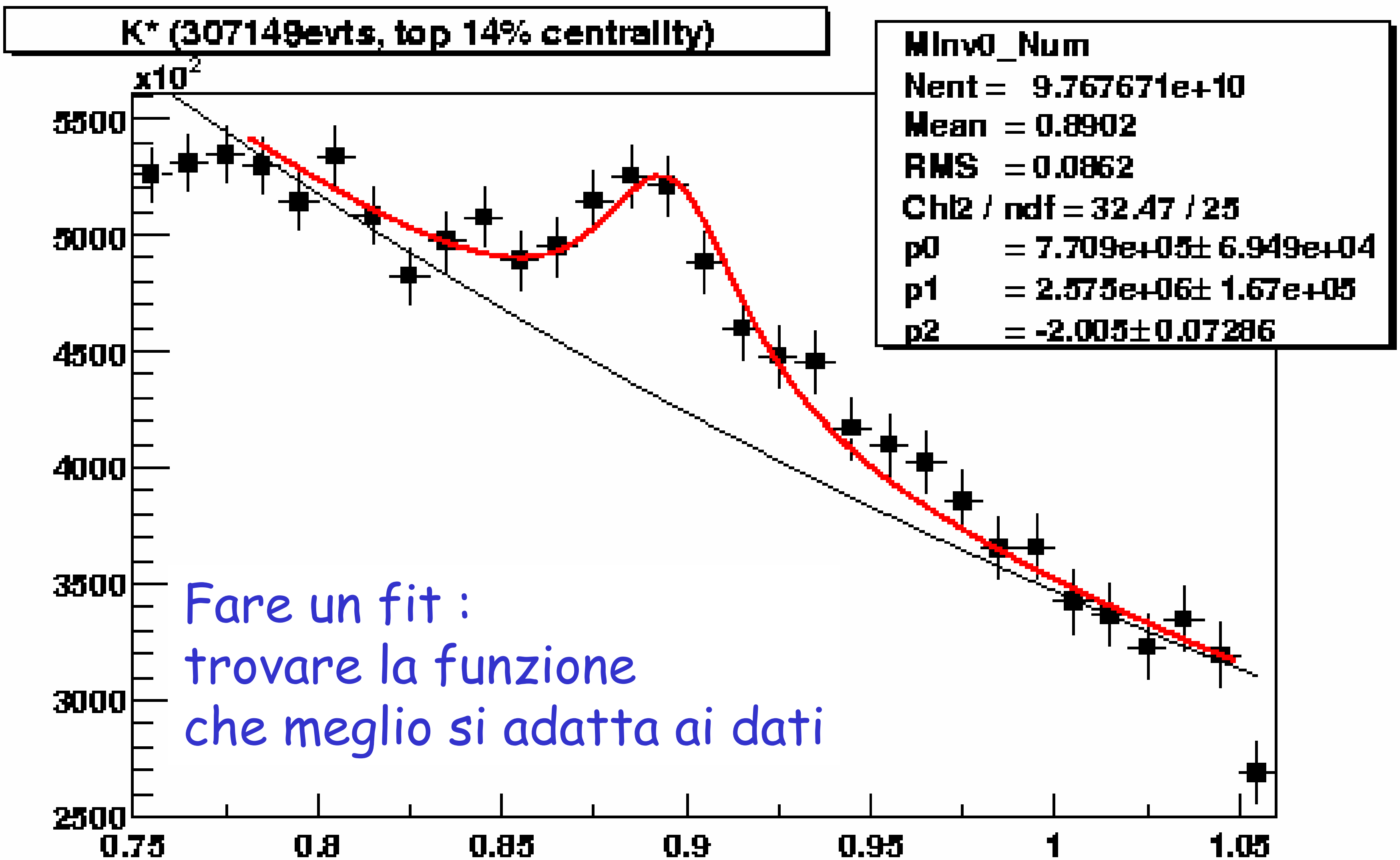




3

Curva di accostamento (Fit)

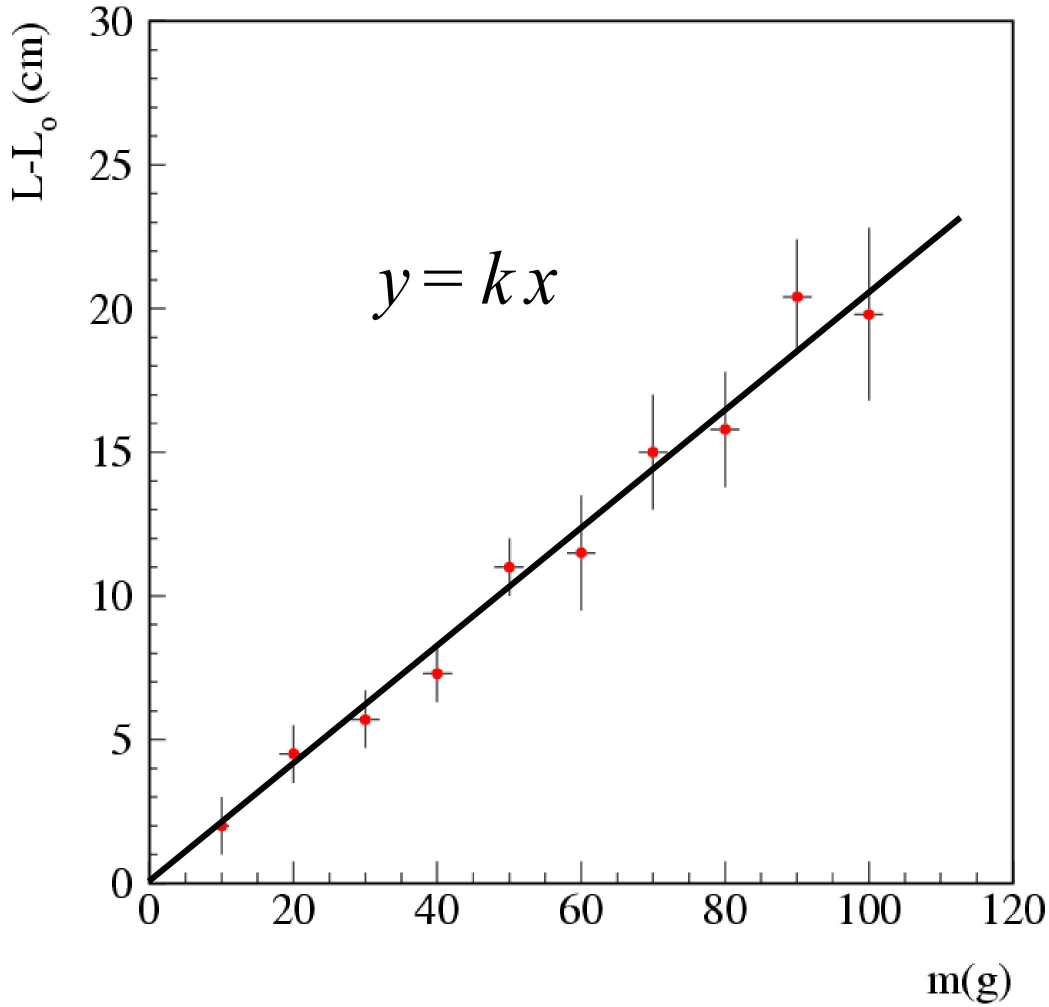
relazione matematica=legge fisica=grafico :
i valori sperimentali si adattano ad esso ?



Fare un fit :
trovare la funzione
che meglio si adatta ai dati

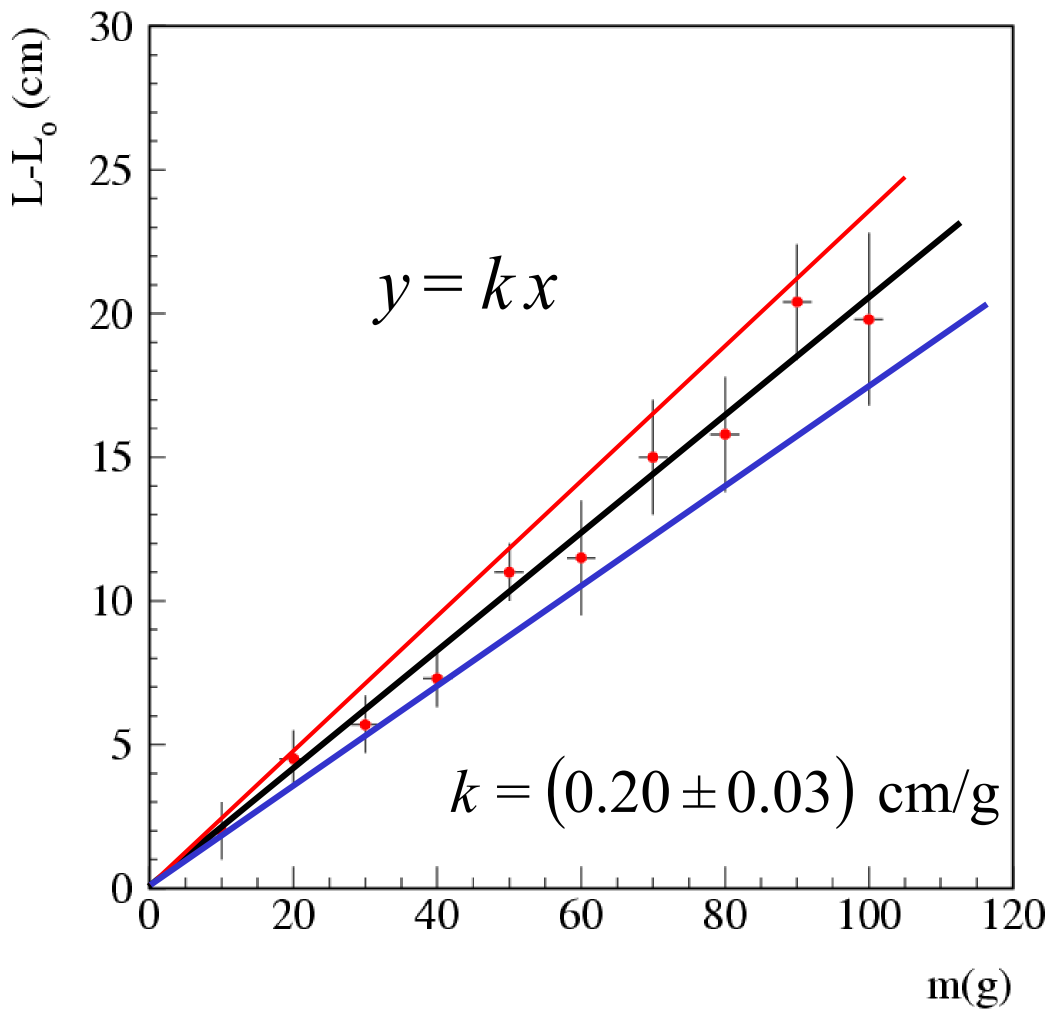
A scuola si fa a mano ...

Allungamento di una molla (I)



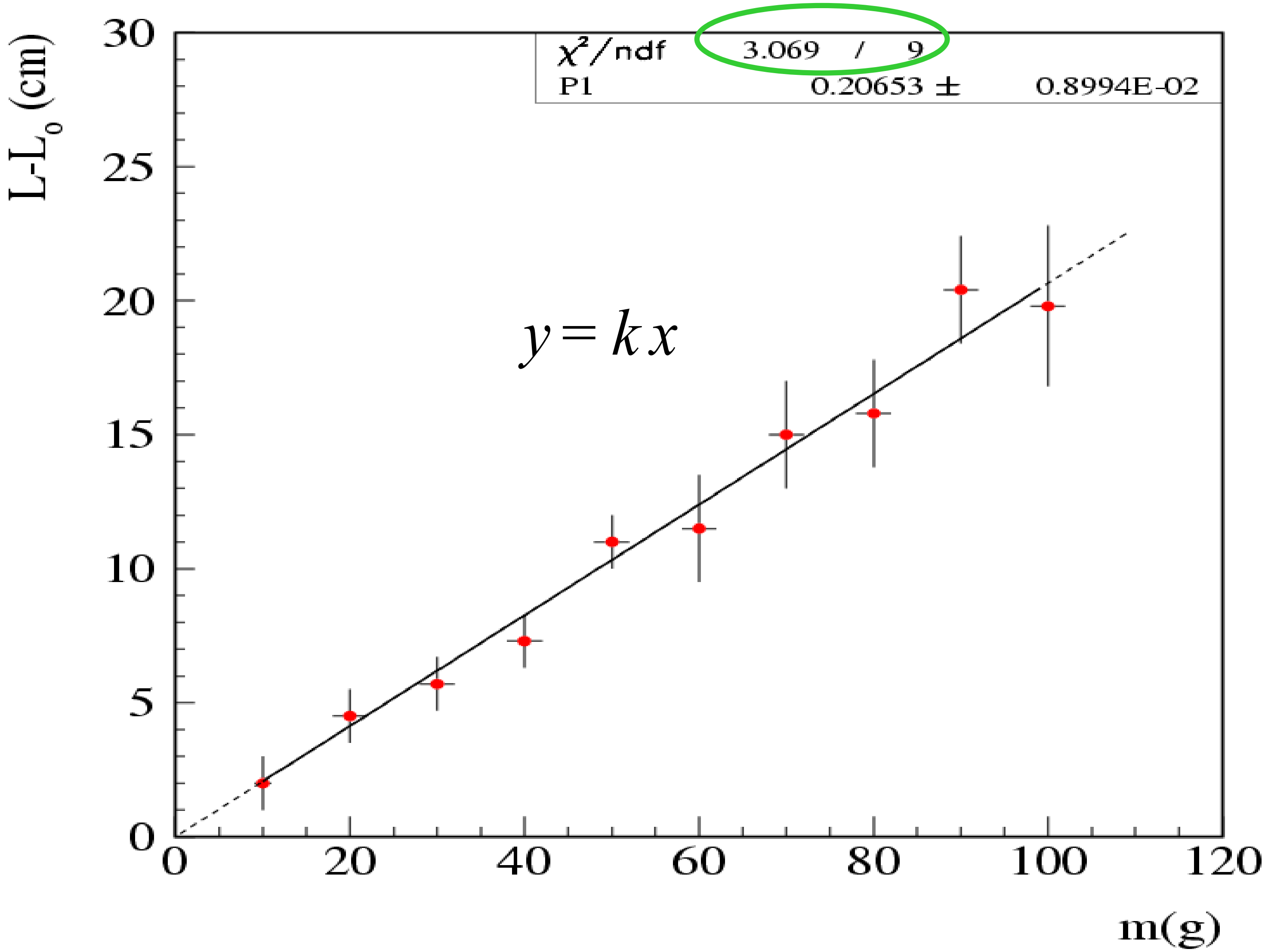
A scuola si fa a mano ...

Allungamento di una molla (I)

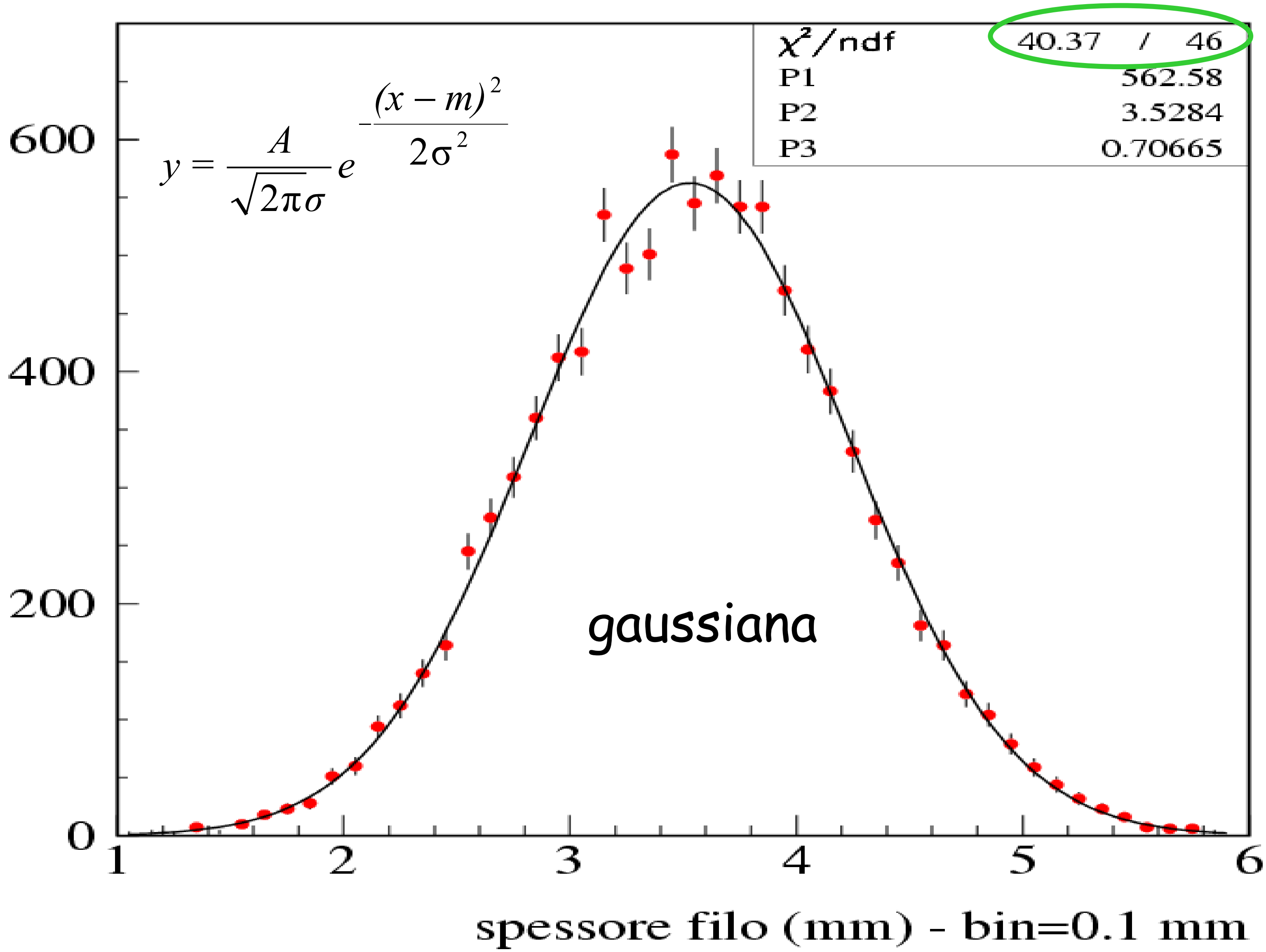


Ma esistono vari programmini ...
PAW
RooT

Allungamento di una molla (II)

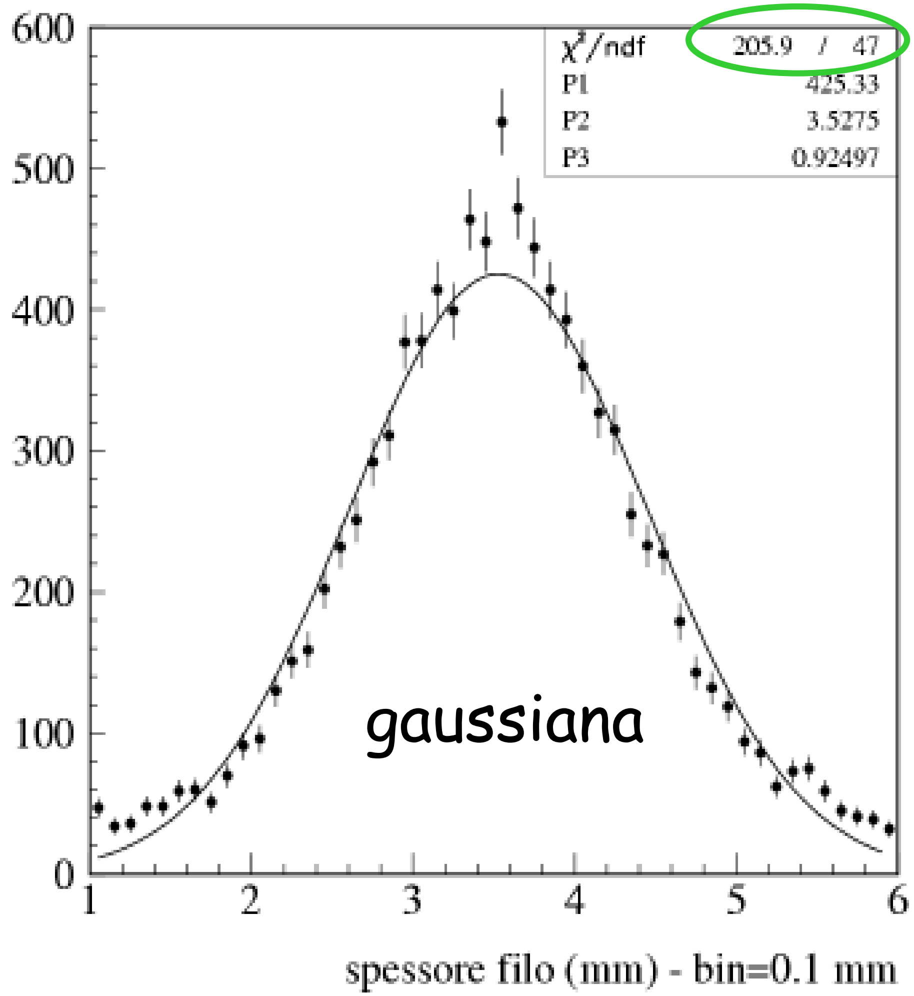


Spessore di un cavo elettrico (I)



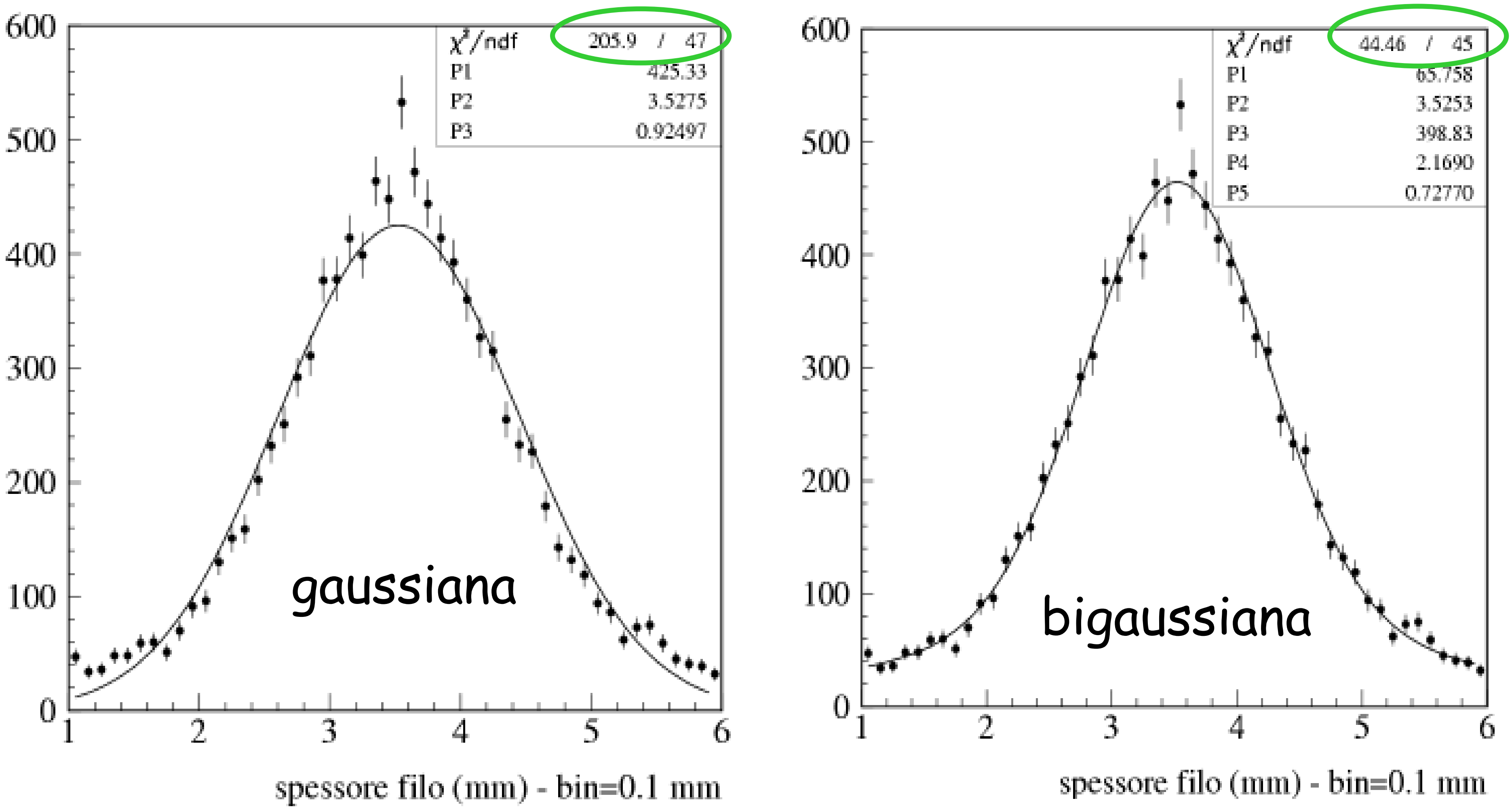
Errori casuali da due sorgenti …

Spessore di un cavo elettrico (II)



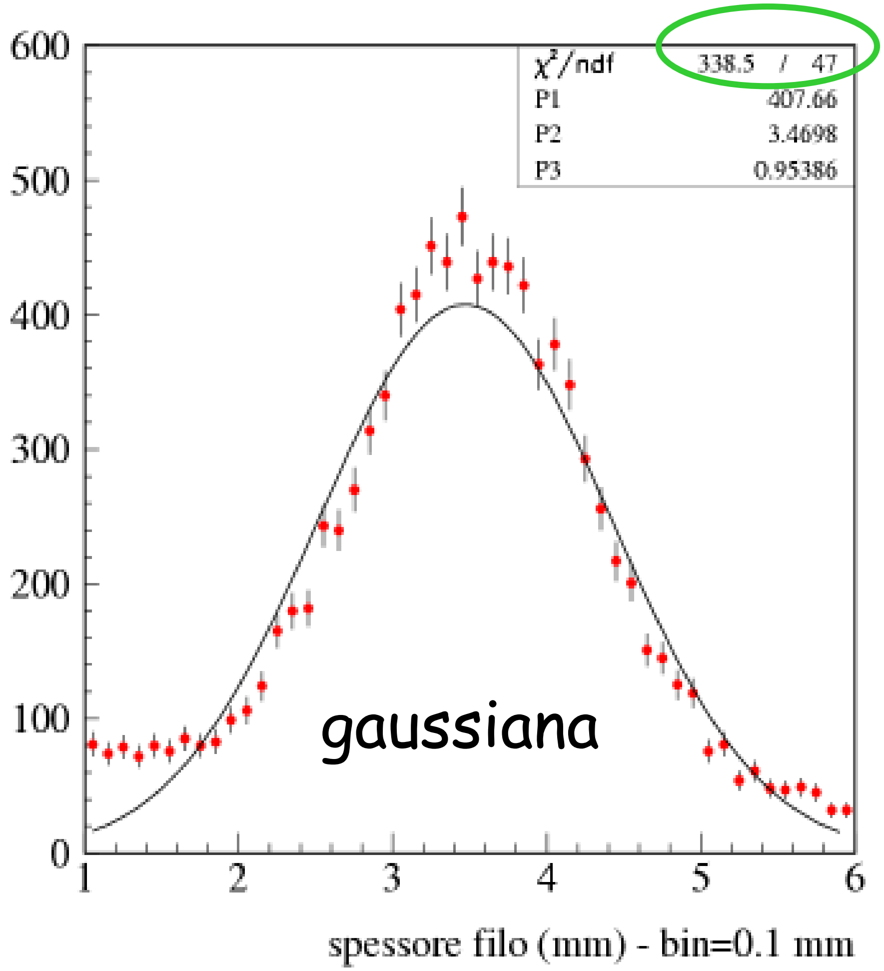
Errori casuali da due sorgenti ...

Spessore di un cavo elettrico (II)



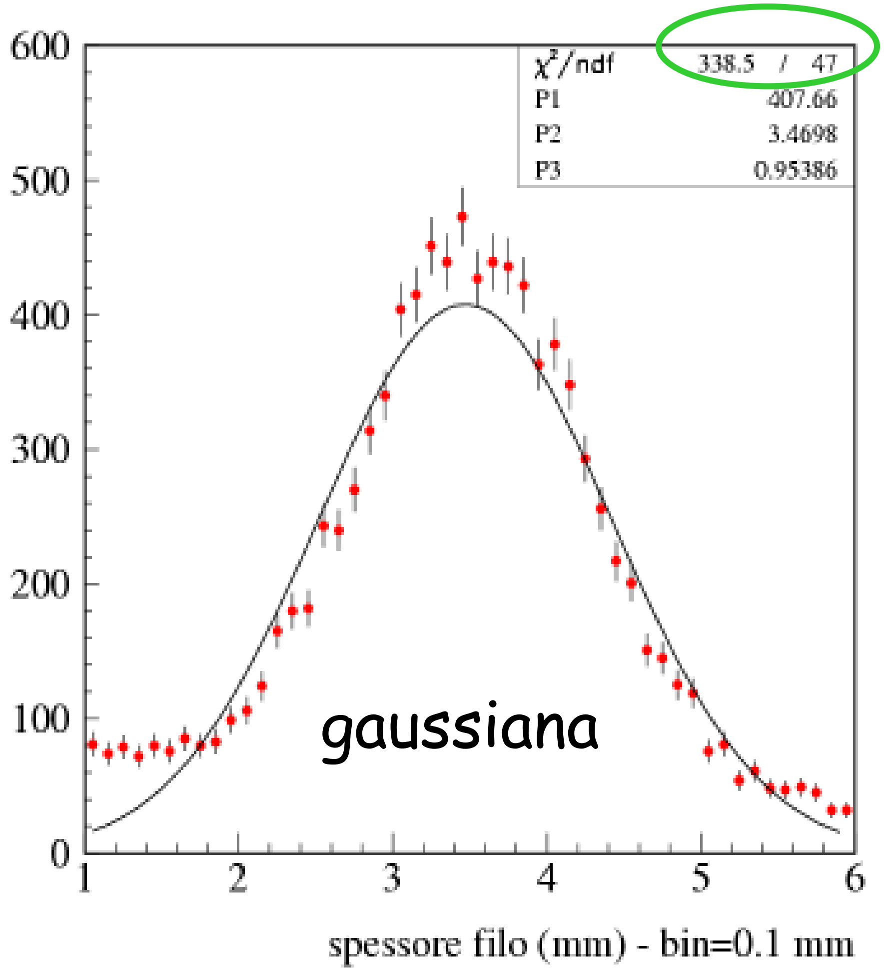
Disturbo di tipo non casuale, e dunque non gaussiano, ne' bigaussiano ...

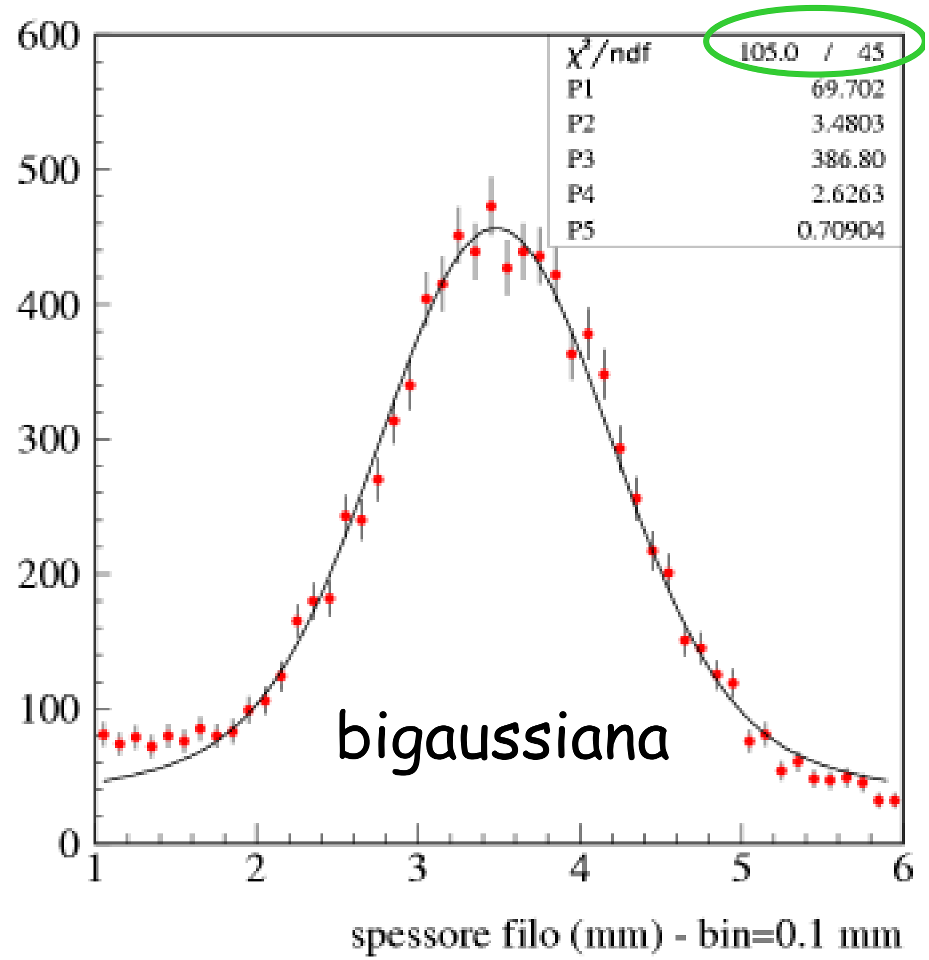
Spessore di un cavo elettrico (III)



Disturbo di tipo non casuale, e dunque non gaussiano, ne' bigaussiano ...

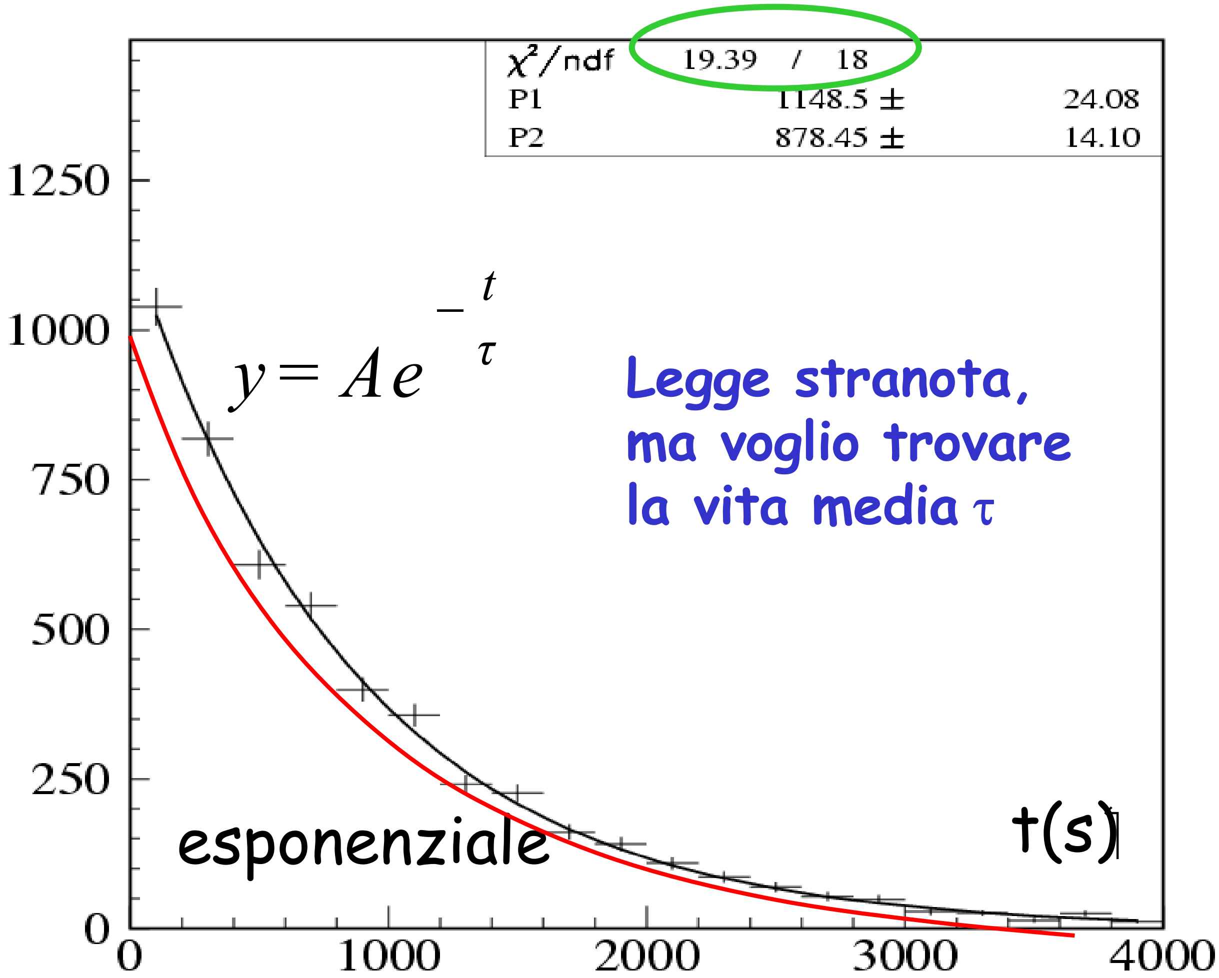
Spessore di un cavo elettrico (III)





Un fit non e' fatto sempre per verificare l'adattamento, ma per **trovare qualche parametro** ...

Misura vita media



Legge stranota, ma voglio trovare la vita media τ

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

• Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x;\ \alpha,\beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al **miglior adattamento della curva ai dati sperimentali** .

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

• Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha, \beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al **miglior adattamento della curva ai dati sperimentali** .

• I valori che corrispondono al miglior adattamento sono quelli che rendono minima la quantita' seguente :

valore **sperimentale**

valore **teorico**

$$\frac{\chi^2}{N-2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i;\alpha,\beta)}{\sigma_i}\right)^2}{N-2}$$

Quale e' il criterio per dire che un fit e' OK ?

• Se il fenomeno in studio e' ben noto, la funzione $y = f(x; \alpha,\beta)$ e' gia' decisa. Lo scopo del *fit* e' allora di determinare i valori dei parametri (α e β in questo caso) che corrispondono al **<u>miglior adattamento della curva ai dati sperimentali</u>** .

• I valori che corrispondono al miglior adattamento sono quelli che rendono minima la quantita' seguente :

valore **sperimentale**

valore **teorico**

Van der Waals

$$\frac{\chi^2}{N-2} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{y_i - f(x_i;\alpha,\beta)}{\sigma_i}\right)^2}{N-2}$$

$\sim 1 \rightarrow$ **O.K. !**

$> 1 \rightarrow$ **K.O. !**

4
La propagazione degli errori

Misure indirette,
ovvero grandezze
calcolate …

Le misure indirette

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Misure indirette,
ovvero grandezze
calcolate …

Le misure indirette

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

visione pessimistica :

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$$

$$0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta r}{r}$$

Misure indirette, ovvero grandezze calcolate ...

Le misure indirette

$$V = V_2 - V_1$$

$$F = G\,\frac{Mm}{r^2}$$

visione pessimistica :

$$\Delta V = \Delta V_2 + \Delta V_1$$

$$0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta m}{m} + 2\,\frac{\Delta r}{r}$$

visione realistica :

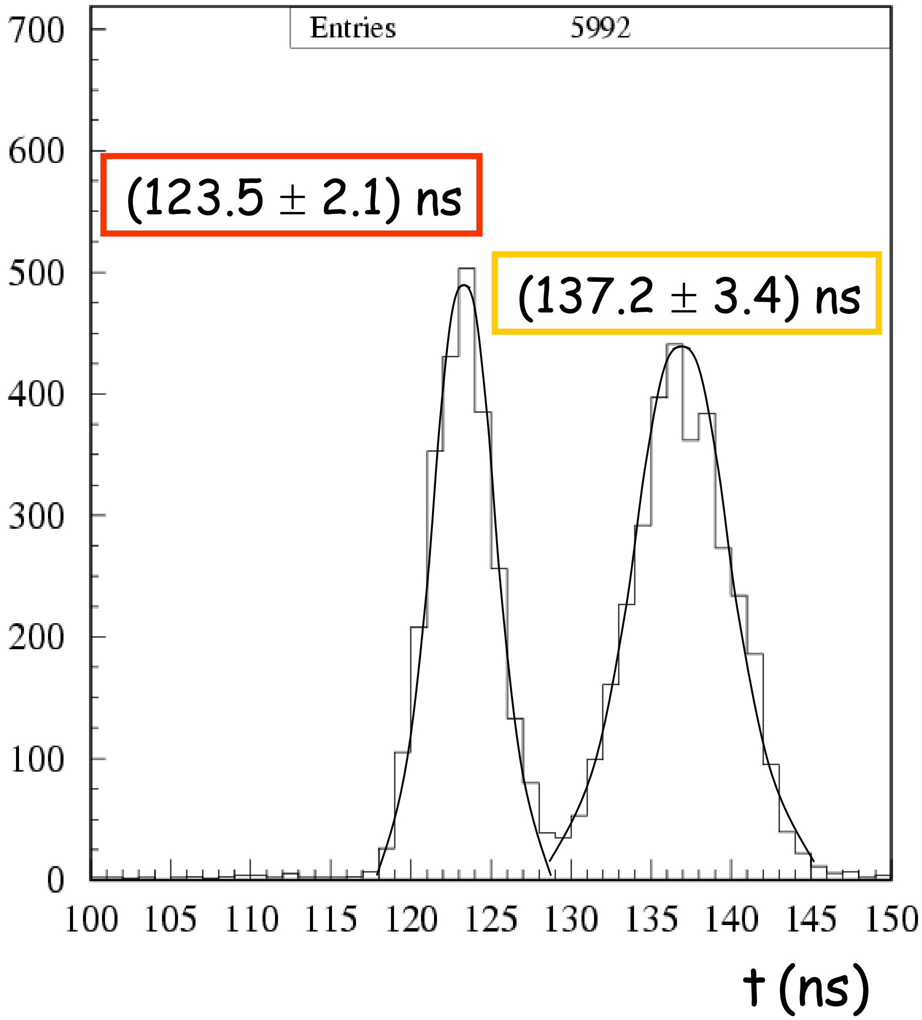
$$\Delta V = \sqrt{\Delta V_1^{\,2} + \Delta V_2^{\,2}}$$

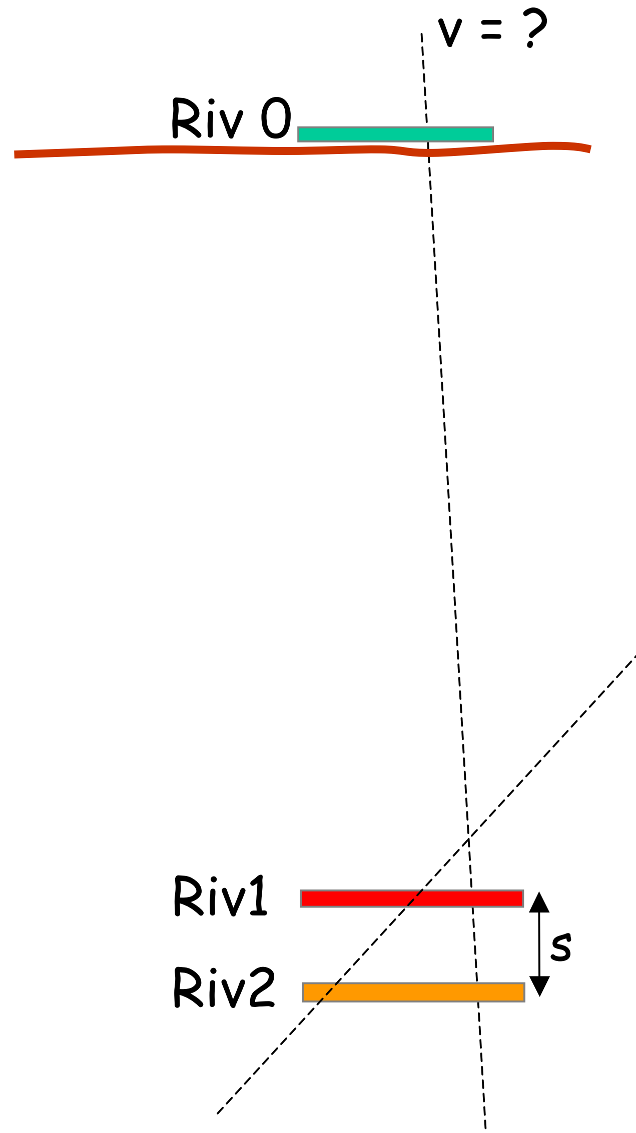
$$\sqrt{0{,}2^2 + 0{,}2^2} = 0{,}28$$

$$\left(\frac{\Delta F}{F}\right) = \sqrt{\left(\frac{\Delta G}{G}\right)^2 + \left(\frac{\Delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

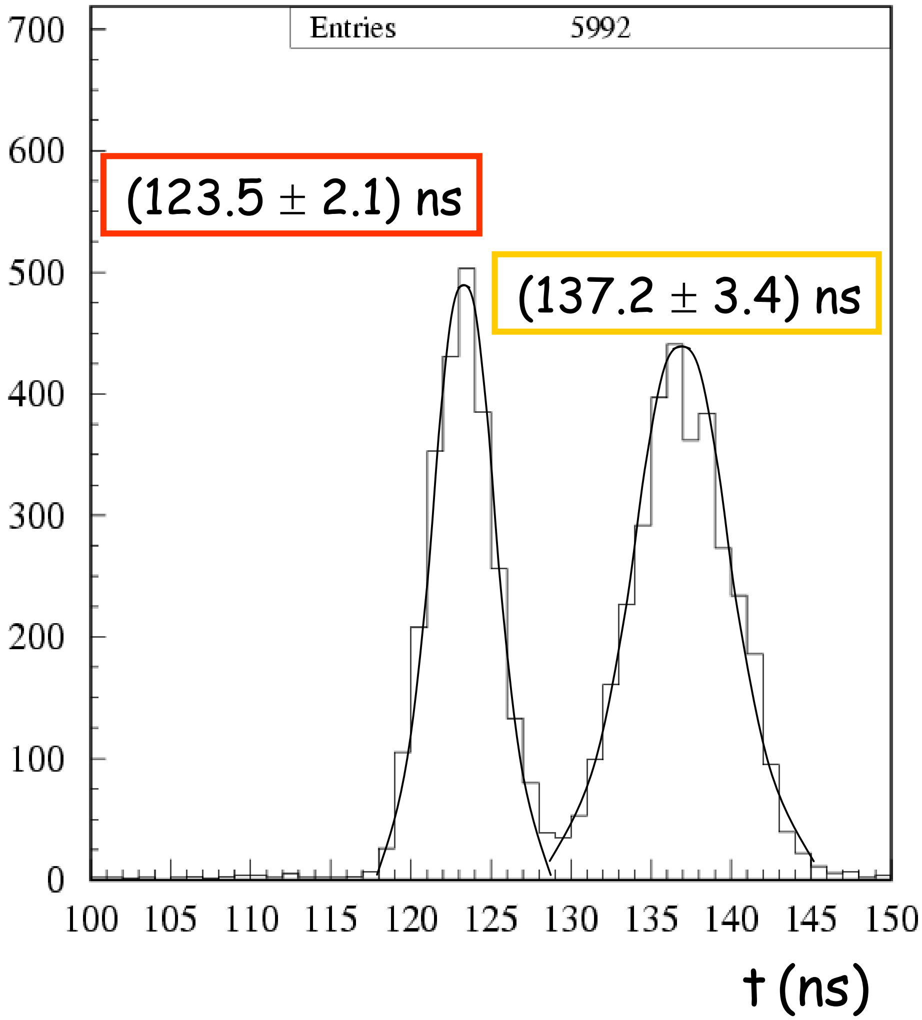
$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \oplus b$$

Esempio 1 (raggi cosmici)



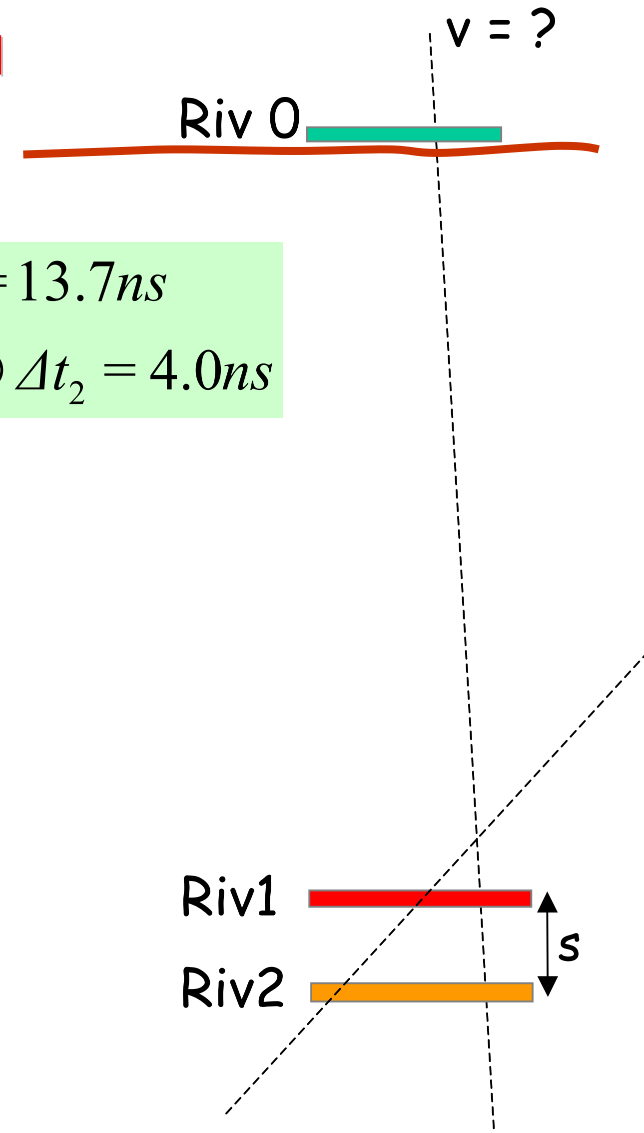


Esempio 1 (raggi cosmici)

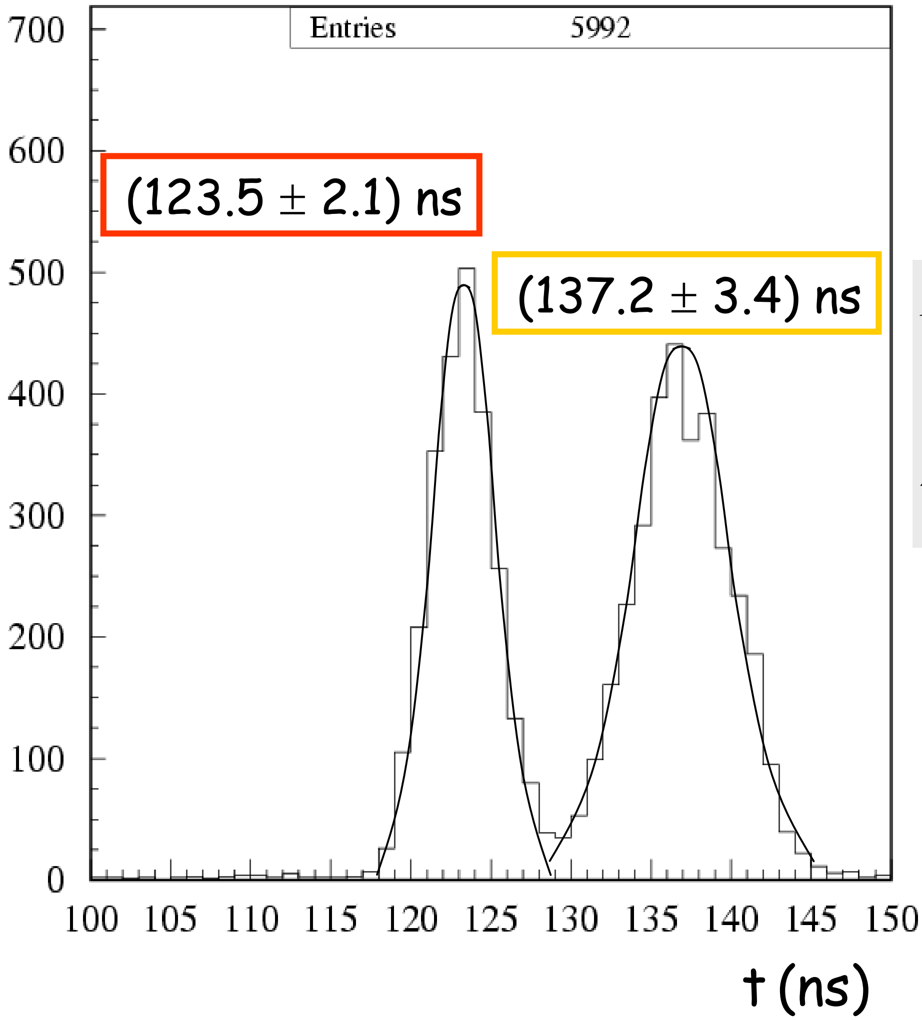


$$t_{12} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 13.7ns$$

$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 \oplus \Delta t_2 = 4.0ns$$



Esempio 1 (raggi cosmici)



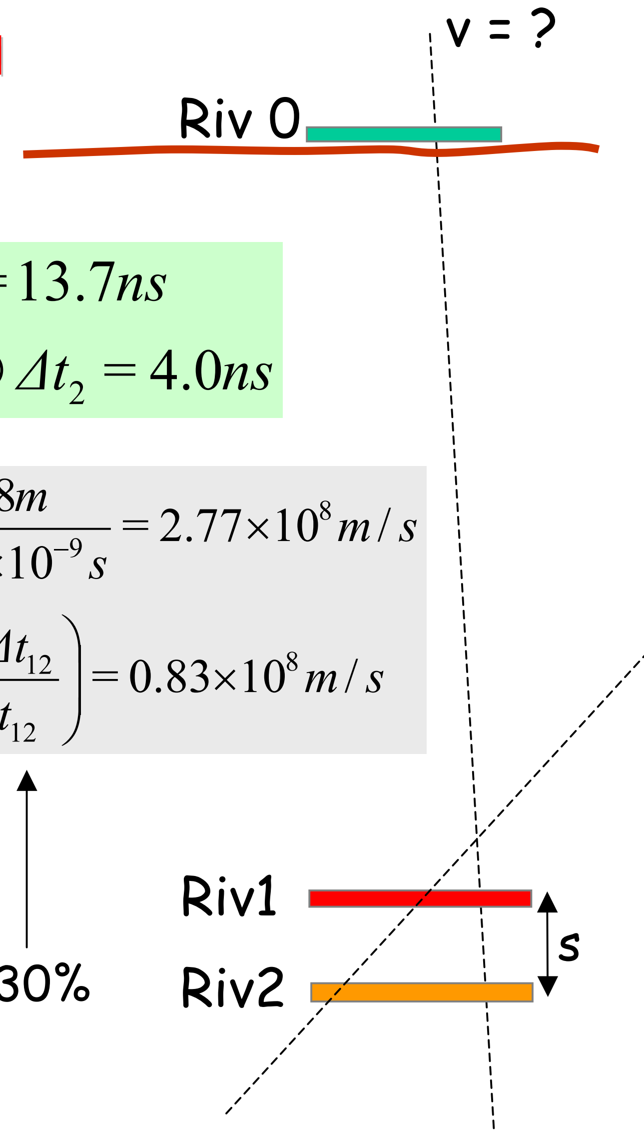
$$t_{12} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 13.7ns$$

$$\Delta t_{12} = \Delta t_1 \oplus \Delta t_2 = 4.0ns$$

$$v = \frac{s}{t_{12}} = \frac{3.8m}{13.7 \times 10^{-9} s} = 2.77 \times 10^8 m/s$$

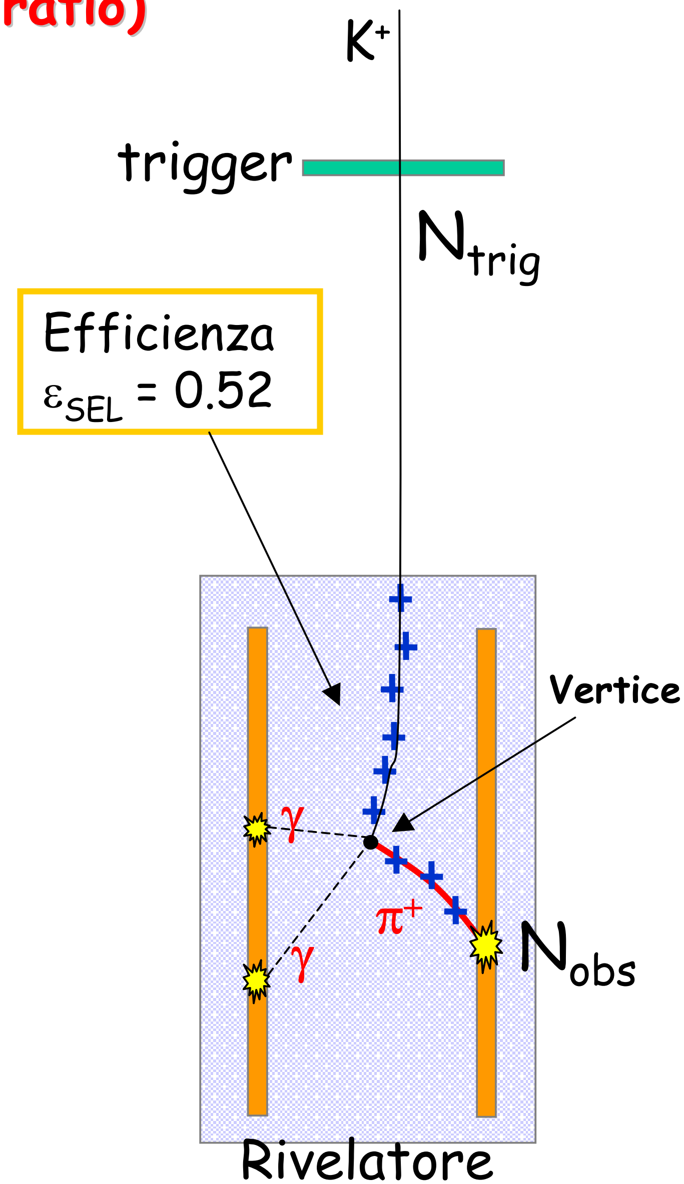
$$\Delta v = v\left(\frac{\Delta s}{s} \oplus \frac{\Delta t_{12}}{t_{12}}\right) = 0.83 \times 10^8 m/s$$

~ 2% ~ 30%



Esempio 2 (branching ratio)

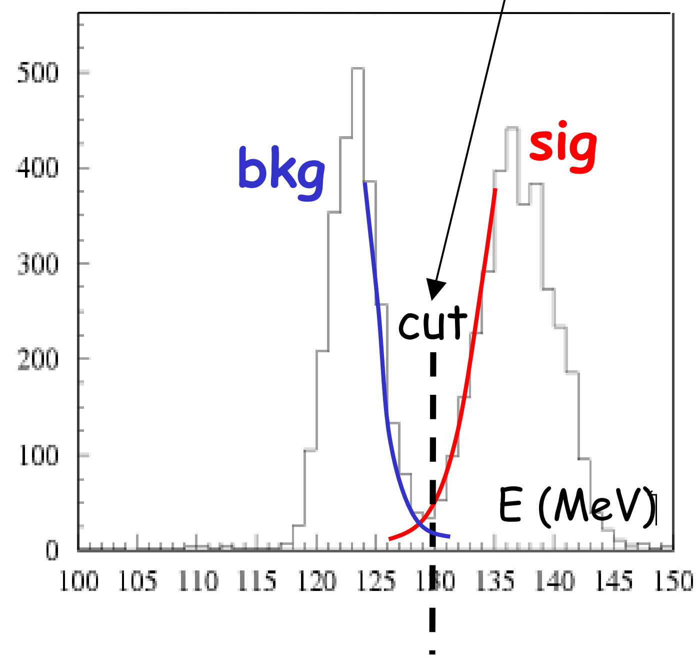
$$K^+ \rightarrow \begin{cases} \pi^+ \, \pi^- \, \pi^+ \\ \pi^+ \, \pi^0 \, \pi^0 \\ \pi^0 \, \pi^+ \\ \pi^0 \, \mu^+ \, \nu_\mu \\ \pi^0 \, e^+ \, \nu_e \\ \mu^+ \, \nu_\mu \end{cases}$$



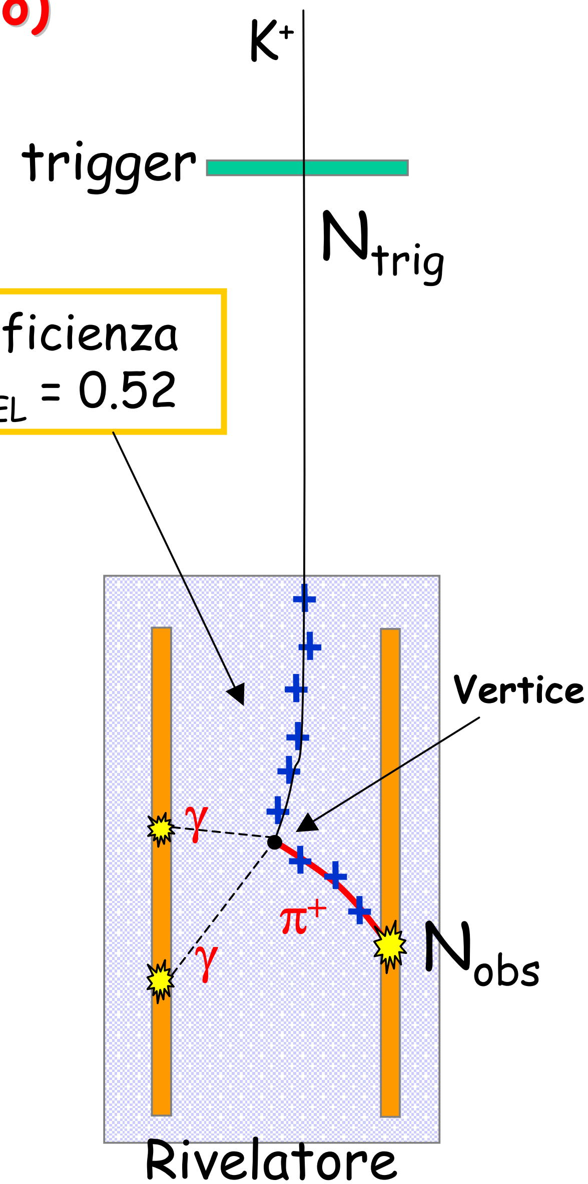
Esempio 2 (branching ratio)

$$K^+ \to \begin{cases} \pi^+ \pi^- \pi^+ \\ \pi^+ \pi^0 \pi^0 \\ \pi^0 \pi^+ \\ \pi^0 \mu^+ \nu_\mu \\ \pi^0 e^+ \nu_e \\ \mu^+ \nu_\mu \end{cases}$$

Efficienza
$\varepsilon_{CUT} = 0.94$



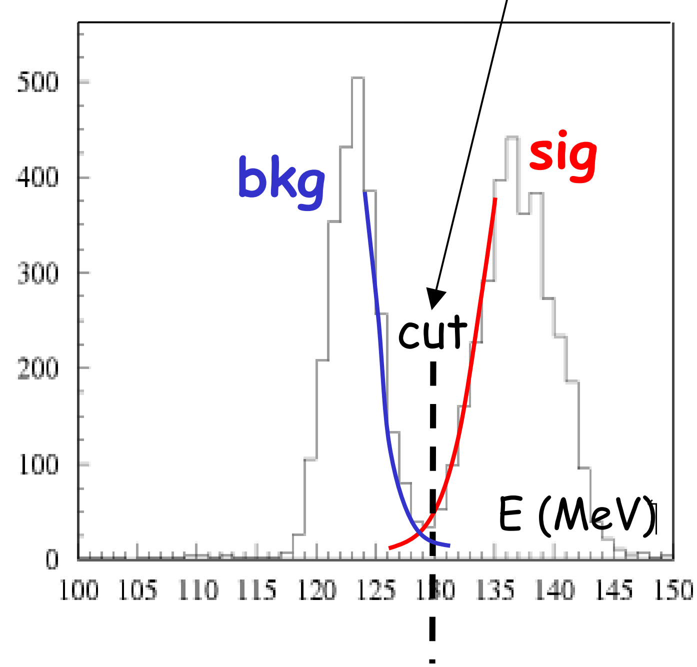
Efficienza
$\varepsilon_{SEL} = 0.52$



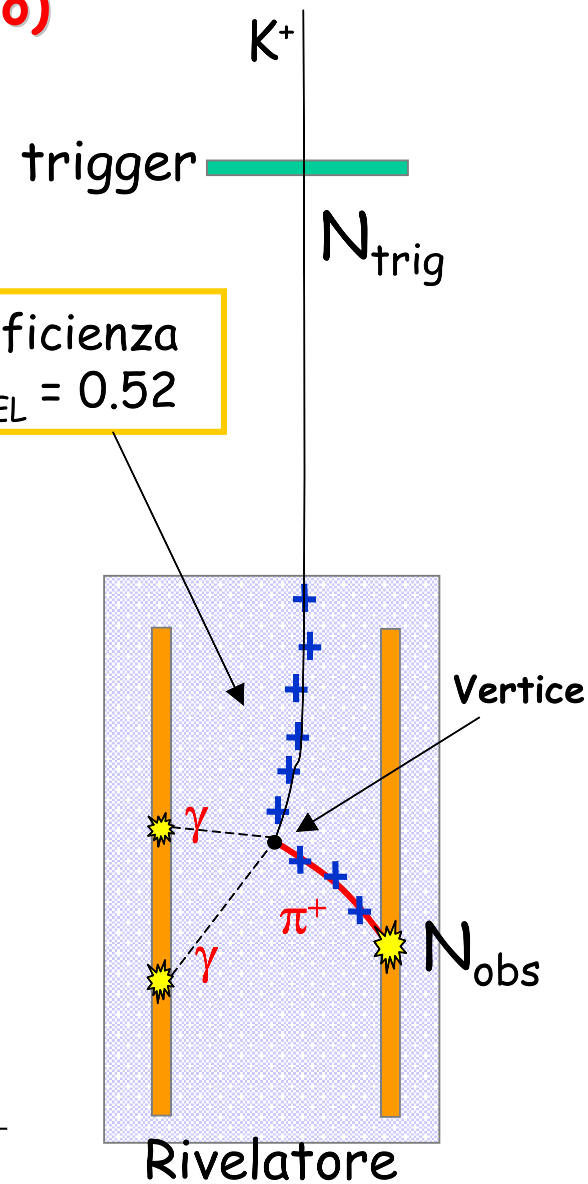
Esempio 2 (branching ratio)

$$K^+ \rightarrow \begin{cases} \pi^+\,\pi^-\,\pi^+ \\ \pi^+\,\pi^0\,\pi^0 \\ \pi^0\,\pi^+ \\ \pi^0\,\mu^+\,\nu_\mu \\ \pi^0\,e^+\,\nu_e \\ \mu^+\,\nu_\mu \end{cases}$$

Efficienza
$\varepsilon_{CUT} = 0.94$



Efficienza
$\varepsilon_{SEL} = 0.52$



$$BR\left(K^+ \rightarrow \pi^0\pi^+\right) = \frac{N_{SIG}}{N_{trig}} = \frac{\dfrac{\left(N_{OBS} - N_{BKG}\right)}{\varepsilon_{SEL}\varepsilon_{CUT}}}{N_{trig}} = \frac{\left(N_{OBS} - N_{BKG}\right)}{N_{trig}\cdot\varepsilon_{SEL}\cdot\varepsilon_{CUT}}$$

5
Combinazione di misure

Scrivere i risultati

- Ogni misura, normalmente, riporta separatamente due errori: **statistico** e **sistematico** :

$$BR\ (K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0) = 0.21 \pm 0.01_{stat} \pm 0.02_{sist}$$

- La precisione della misura in questo esempio sara' :
$e_{BR} = \Delta_{BR}/BR = (0.01 \oplus 0.02)/0.21 \sim 0.11$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo ($x_i \pm \sigma_i$) di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{p_{tot}}$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo ($x_i \pm \sigma_i$) di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$x_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow p_1 = 1111$$

$$x_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow p_2 = 10000$$

Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure ?
- Da più misure indipendenti del tipo $(x_i \pm \sigma_i)$ di una stessa grandezza, come si ricava il valore più attendibile ?

$$\bar{x} = \frac{\sum p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

$$x_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow \mathrm{p}_1 = 1111$$

$$x_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow \mathrm{p}_2 = 10000$$

$$\bar{x} = \frac{1111 \times 0.49 + 10000 \times 0.47}{11111} = 0.472$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{11111}} = 0.009$$

$$x = (0.472 \pm 0.009)$$