# Elementi di statistica

# Parametri fondamentali

- Branching ratio (**BR**)
- vita media ($\tau$)
- massa (**m**)
- costanti di accoppiamento
- ……

$\pi^o \rightarrow \gamma\,\gamma,\ e^+e^-\gamma$

## Parametri fondamentali

- Branching ratio (**BR**)
- vita media ($\tau$)
- massa (**m**)
- costanti di accoppiamento
- ……

$\pi^o \rightarrow \gamma\,\gamma,\ e^+e^-\gamma$

## Altro (ma di supporto)

- quantita' di moto $\vec{q}$ di una particella ;
- energia E rilasciata in un calorimetro da una particella ;
- angoli e direzioni delle particelle che si producono ;
- intervalli temporali, $\Delta t$ ;
- efficienza di un rivelatore ;
- contaminazione in un campione ;
- ……

# BR, branching ratio

| | Canali | BR |
|---|---|---|
| $\Phi \rightarrow$ | $K^+K^-$ | (~ 49 %) |
| | $K_SK_L$ | (~ 34 %) |
| | $\pi^+\pi^-\pi^o$ | (~ 15 %) |
| | $\eta\gamma$ | (~ 1.3%) |

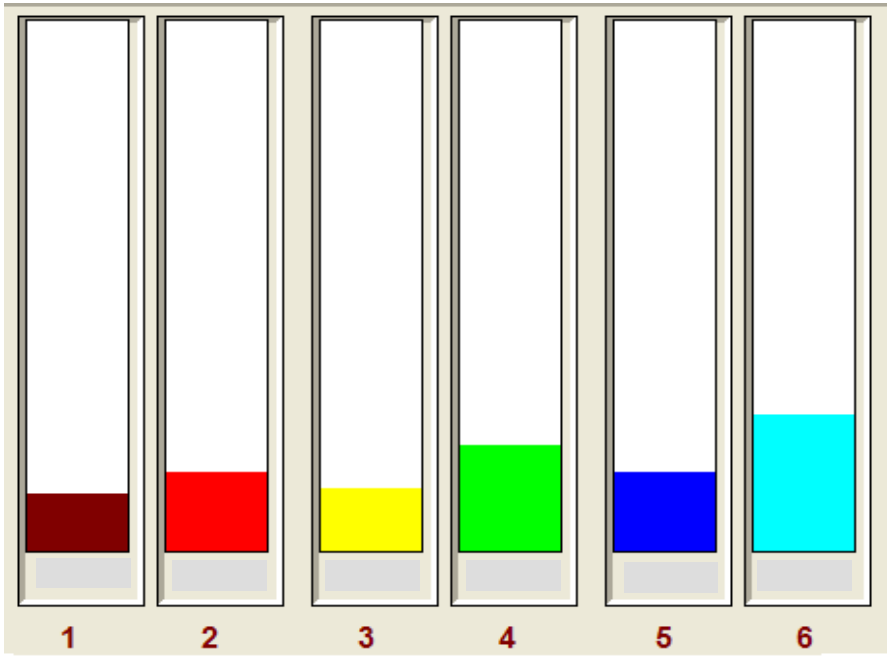
Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

# BR, branching ratio

| | Canali | BR |
|---|---|---|
| $\Phi \rightarrow$ | $K^+K^-$ | (~ 49 %) |
| | $K_SK_L$ | (~ 34 %) |
| | $\pi^+\pi^-\pi^o$ | (~ 15 %) |
| | $\eta\gamma$ | (~ 1.3%) |

Nel mondo dell'infinitamente piccolo le condizioni iniziali non possono essere determinate in modo completo (**principio di indeterminazione**). Ne segue che nel mondo delle particelle elementari le leggi sono sempre **leggi di probabilita'**.

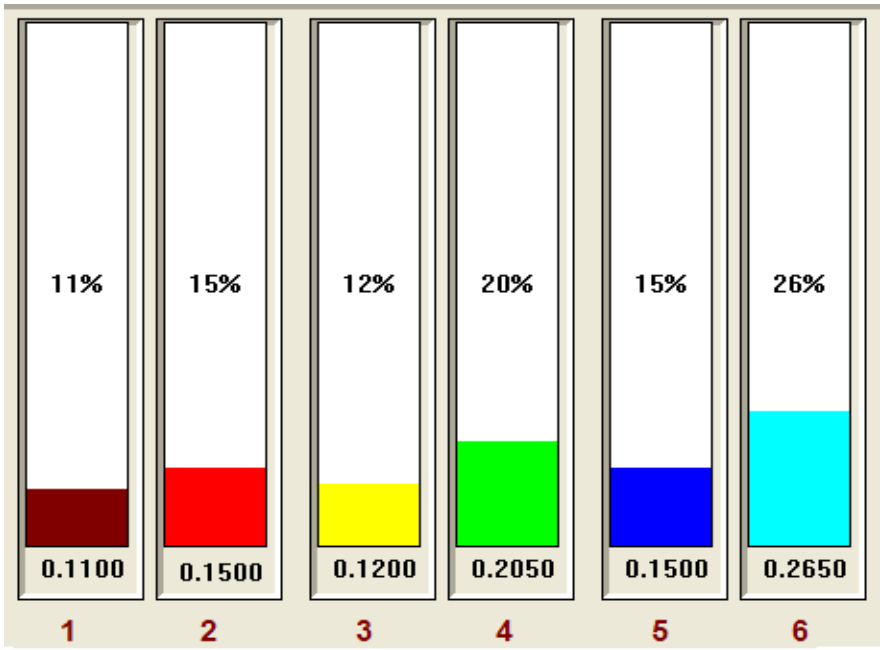
N=200 lanci



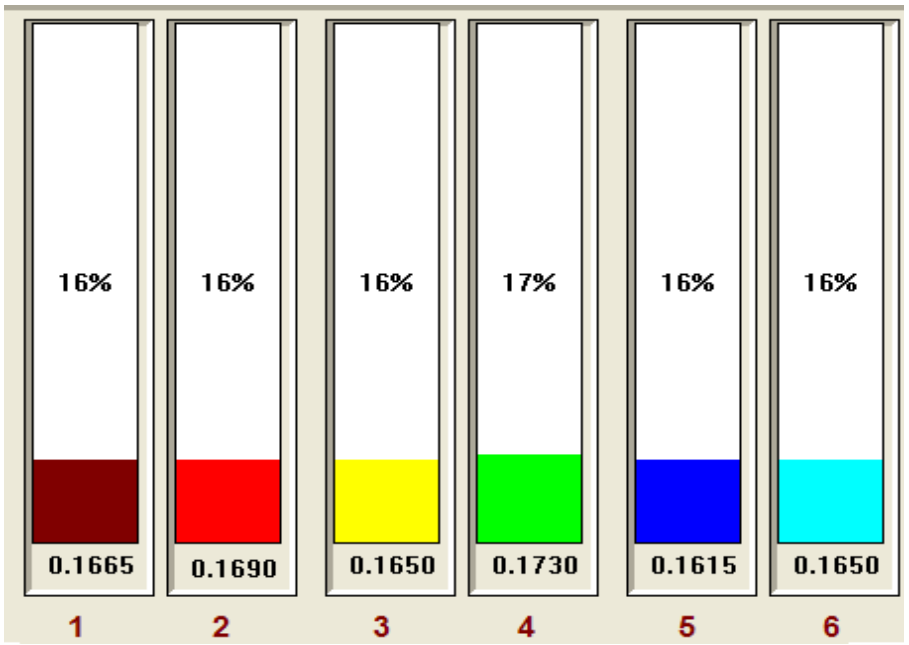

Teoria:

$P = 1/6 \cong 0{,}1666$

N=200 lanci




N=2000 lanci




- La **frequenza relativa** tende, al crescere delle prove, alla **probabilita'** prevista, cioè: **f** = 1/6 ≅ 0,1666).
- L'incertezza associata alle inevitabili fluttuazioni statistiche diminuisce col numero di lanci. Per N=2000 essa vale 0,008. Osservando i risultati si osserva che anche il peggiore risultato (**n=4** : 0,173±0,008) concorda con la previsione.

Il numero di volte che su N lanci esce un dato numero e' una variabile casuale di tipo **binomiale**.

Non possiamo fare infinite prove o misure, ma
sulla base di un campione dobbiamo estrarre informazioni …

# Indicatori statistici

# Indicatori statistici

Non possiamo fare infinite prove o misure, ma sulla base di un campione dobbiamo estrarre informazioni …

Valor medio

$$M(x) \cong \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

→ esprime il valore piu' attendibile

Deviazione standard (rms)

$$\sigma(x) \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}$$

→ esprime la variabilita' e quindi l'incertezza

# Indicatori statistici

Non possiamo fare infinite prove o misure, ma sulla base di un campione dobbiamo estrarre informazioni …

Valor medio

$$M(x) \cong \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

→ esprime il valore piu' attendibile

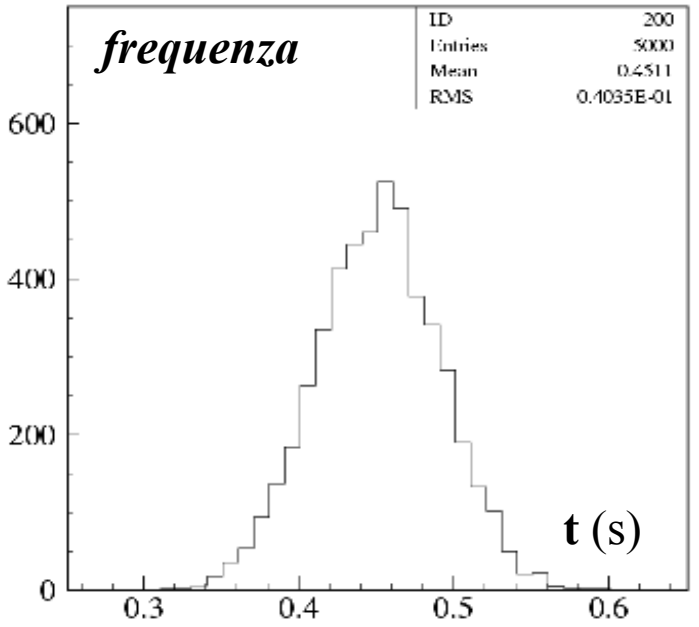
Deviazione standard (rms)

$$\sigma(x) \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}$$

→ esprime la variabilita' e quindi l'incertezza

L'istogramma accanto mostra la misura ripetuta del tempo di caduta di un oggetto. E' questo un esempio di VA di tipo **gaussiano**:

M(x) = 0,45 s ; σ(x) = 0,04 s



Non possiamo fare infinite prove o misure, ma sulla base di un campione dobbiamo estrarre informazioni …

# Indicatori statistici

Valor medio

$$M(x) \cong \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$$

→ esprime il valore piu' attendibile

Deviazione standard (rms)

$$\sigma(x) \cong \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{N-1}}$$

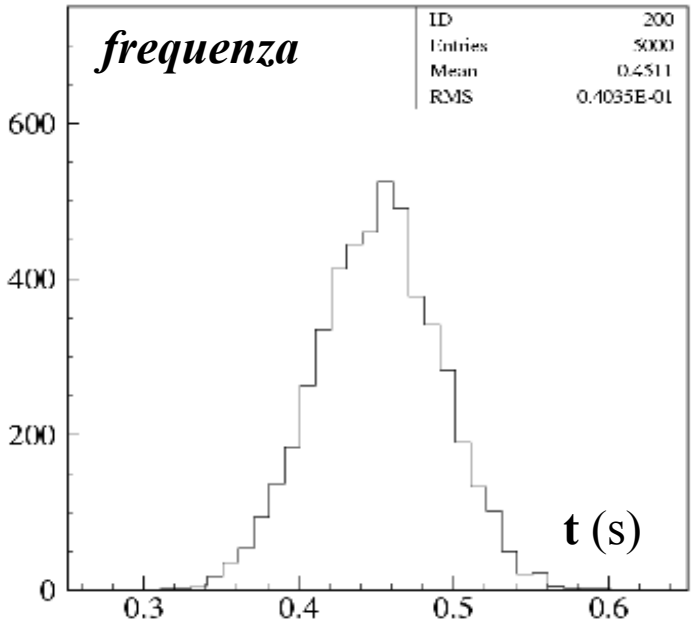
→ esprime la variabilita' e quindi l'incertezza

L'istogramma accanto mostra la misura ripetuta del tempo di caduta di un oggetto. E' questo un esempio di VA di tipo **gaussiano**:

M(x) = 0,45 s ; σ(x) = 0,04 s

L'incertezza associata al valore medio e' invece:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \cong 0.0006 \text{ s}$$




**Un campione piu' ampio diminuisce sempre l'incertezza (errore statistico)**

# La variabile binomiale

***Si immagini una prova che abbia 2 possibili risultati: successo/insuccesso. Su N prove effettuate, il numero k di volte in cui si manifesta il successo (tra 0 e N) e' detta variabile (aleatoria) binomiale.***

- lancio di un dado
- rivelazione di una data particella
- **tipo di decadimento per una particella**

# La variabile binomiale

***Si immagini una prova che abbia 2 possibili risultati: successo/insuccesso. Su N prove effettuate, il numero k di volte in cui si manifesta il successo (tra 0 e N) e' detta variabile (aleatoria) binomiale.***

- lancio di un dado
- rivelazione di una data particella
- **tipo di decadimento per una particella**

Se **p** e' la probabilita' del successo, il valor medio e la deviazione standard possono, nel caso di questa variabile, essere ricavati da :

$$m = Np$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$$

# Un processo di decadimento

Il mesone $\phi$ puo' decadere in 4 'canali' differenti : $K^+K^-$, $K_SK_L$ , $\pi^+\pi^-\pi^o$, $\eta\gamma$. Si vuole determinare la **probabilita' di ogni canale**. **Fissato** il numero totale di decadimenti, il **numero di decadimenti** in un certo canale e' una **variabile binomiale.**
Supponiamo di aver osservato **N=200** decadimenti e aver ottenuto i seguenti risultati :

| canale | conteggio, $k$ |
|---|---|
| $K^+K^-$ | 98 |
| $K_SK_L$ | 68 |
| $\pi^+\pi^-\pi^o$ | 30 |
| $\eta\gamma$ | 4 |

| errore statistico |
|---|
| 7 |
| 7 |
| 5 |
| 2 |

# Un processo di decadimento

Il mesone $\phi$ puo' decadere in 4 'canali' differenti : $K^+K^-$, $K_SK_L$ , $\pi^+\pi^-\pi^o$ , $\eta\gamma$ . Si vuole determinare la **probabilita' di ogni canale**. **Fissato** il numero totale di decadimenti, il **numero di decadimenti** in un certo canale e' una **variabile binomiale.**
Supponiamo di aver osservato **N=200** decadimenti e aver ottenuto i seguenti risultati :

| canale | conteggio, $k$ |
|---|---|
| $K^+K^-$ | 98 |
| $K_SK_L$ | 68 |
| $\pi^+\pi^-\pi^o$ | 30 |
| $\eta\gamma$ | 4 |

| errore statistico |
|---|
| 7 |
| 7 |
| 5 |
| 2 |

$$m = k = 98$$

# Un processo di decadimento

Il mesone $\phi$ puo' decadere in 4 'canali' differenti : $K^+K^-$, $K_SK_L$ , $\pi^+\pi^-\pi^o$, $\eta\gamma$. Si vuole determinare la **probabilita' di ogni canale**. **Fissato** il numero totale di decadimenti, il **numero di decadimenti** in un certo canale e' una **variabile binomiale.**
Supponiamo di aver osservato **N=200** decadimenti e aver ottenuto i seguenti risultati :

| canale | conteggio, *k* | errore statistico |
|---|---|---|
| $K^+K^-$ | 98 | 7 |
| $K_SK_L$ | 68 | 7 |
| $\pi^+\pi^-\pi^o$ | 30 | 5 |
| $\eta\gamma$ | 4 | 2 |

$$m = k = 98$$

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} = 7$$

200

$p \approx k/N = 98/200$

Come si esprime il risultato di un conteggio di questo tipo nel caso ad esempio del canale $\phi \rightarrow K^+K^-$ ?

~~$98 \pm 7$~~

Il numero assoluto non e' facilmente confrontabile con altri esperimenti !

Come si esprime il risultato di un conteggio di questo tipo nel caso ad esempio del canale $\phi \rightarrow K^+K^-$ ?

~~$98 \pm 7$~~

Il numero assoluto non e' facilmente confrontabile con altri esperimenti !

~~$k$~~ $\rightarrow \frac{k}{N} = \frac{98}{200} = 0.49$

La probabilita' e' invece facilmente confrontabile

Come si esprime il risultato di un conteggio di questo tipo nel caso ad esempio del canale $\phi \rightarrow K^+K^-$ ?

~~$98 \pm 7$~~

Il numero assoluto non e' facilmente confrontabile con altri esperimenti !

~~$k$~~ $\rightarrow \frac{k}{N} = \frac{98}{200} = 0.49$

La probabilita' e' invece facilmente confrontabile

~~$\sigma(k)$~~ $\rightarrow \sigma\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N}\sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0.03$

Come si esprime il risultato di un conteggio di questo tipo nel caso ad esempio del canale $\phi \rightarrow K^+K^-$ ?

~~$98 \pm 7$~~

Il numero assoluto non e' facilmente confrontabile con altri esperimenti !

~~$k$~~ $\rightarrow \frac{k}{N} = \frac{98}{200} = 0.49$

La probabilita' e' invece facilmente confrontabile

~~$\sigma(k)$~~ $\rightarrow \sigma\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N}\sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} = 0.03$

$$BR = 0.49 \pm 0.03$$

errore statistico:
diminuisce al crescere di N

# Gli errori sistematici

Ogni misura e' affetta da due tipi di errori : **statistico** e **sistematico.**
Nel caso in questione a cosa può essere dovuto quello sistematico ?

| canale | BR |
|---|---|
| $K^+K^-$ | 0.49 |
| $K_S K_L$ | 0.34 |
| $\pi^+ \pi^- \pi^o$ | 0.15 |
| $\eta \gamma$ | 0.02 |

# Gli errori sistematici

Ogni misura e' affetta da due tipi di errori : **statistico** e **sistematico.**
Nel caso in questione a cosa può essere dovuto quello sistematico ?

- Difficile riconoscimento dell'evento :
un canale puo' essere confuso con un altro

$$BR = 0.49 \pm 0.03_{stat} \pm 0.01_{sist}$$

| canale | BR |
|---|---|
| $K^+K^-$ | 0.49 |
| $K_S K_L$ | 0.34 |
| $\pi^+ \pi^- \pi^o$ | 0.15 |
| $\eta \gamma$ | 0.02 |

# Gli errori sistematici

Ogni misura e' affetta da due tipi di errori : **statistico** e **sistematico.**
Nel caso in questione a cosa può essere dovuto quello sistematico ?

- Difficile riconoscimento dell'evento :
un canale puo' essere confuso con un altro

$$BR = 0.49 \pm 0.03_{stat} \pm 0.01_{sist}$$

| canale | BR |
|---|---|
| $K^+K^-$ | 0.49 |
| $K_S K_L$ | 0.34 |
| $\pi^+ \pi^- \pi^o$ | 0.15 |
| $\eta \gamma$ | 0.02 |

- **esistenza di un canale non direttamente osservabile:** $\Phi \rightarrow$ **...**
Se ad esempio e' noto che tale canale prende il 5%, allora l'errore sistematico di sopravvalutazione dei ***BR*** viene corretto

| | |
|---|---|
| **...** | 0.05 |
| **totale** | **1.05** |

# Gli errori sistematici

Ogni misura e' affetta da due tipi di errori : **statistico** e **sistematico.**
Nel caso in questione a cosa può essere dovuto quello sistematico ?

- Difficile riconoscimento dell'evento :
un canale puo' essere confuso con un altro

$$BR = 0.49 \pm 0.03_{stat} \pm 0.01_{sist}$$

- **esistenza di un canale non direttamente osservabile:** $\Phi \rightarrow$ **...**
Se ad esempio e' noto che tale canale prende il 5%, allora l'errore sistematico di sopravvalutazione dei ***BR*** viene corretto

| canale | BR | | BR |
|---|---|---|---|
| $K^+K^-$ | 0.49 | $\times\alpha$ | 0.47 |
| $K_S K_L$ | 0.34 | $\times\alpha$ | 0.32 |
| $\pi^+ \pi^- \pi^o$ | 0.15 | $\times\alpha$ | 0.14 |
| $\eta\,\gamma$ | 0.02 | $\times\alpha$ | 0.02 |
| | | | 0.05 |
| | | | 1.00 |

| | |
|---|---|
| ... | 0.05 |
| totale | 1.05 |

0.95

# Gli errori sistematici

Ogni misura e' affetta da due tipi di errori : **statistico** e **sistematico.**
Nel caso in questione a cosa può essere dovuto quello sistematico ?

- Difficile riconoscimento dell'evento :
un canale puo' essere confuso con un altro

$$BR = 0.49 \pm 0.03_{stat} \pm 0.01_{sist}$$

| canale | BR | | BR |
|---|---|---|---|
| $K^+K^-$ | 0.49 | $\times\alpha$ | 0.47 |
| $K_S K_L$ | 0.34 | $\times\alpha$ | 0.32 |
| $\pi^+ \pi^- \pi^o$ | 0.15 | $\times\alpha$ | 0.14 |
| $\eta\,\gamma$ | 0.02 | $\times\alpha$ | 0.02 |
| | | | 0.05 |
| | | | **1.00** |

- **esistenza di un canale non direttamente osservabile:** $\Phi \rightarrow$ **...**
Se ad esempio e' noto che tale canale prende il 5%, allora l'errore sistematico di sopravvalutazione dei ***BR*** viene corretto

| | |
|---|---|
| **...** | 0.05 |
| **totale** | **1.05** |

→ 0.95

Errore totale: $\Delta(BR) = \sqrt{0.03^2 + 0.01^2} = 0.032$ (somma in quadratura)

# Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure indipendenti ? **Per migliorare la precisione**
- Come si combinano piu' misure ? **Mediante una media pesata**

# Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure indipendenti ? **Per migliorare la precisione**
- Come si combinano piu' misure ? **Mediante una media pesata**

$$\bar{x} = \frac{\sum_i p_i \cdot x_i}{p_{tot}}$$

$$\frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

# Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure indipendenti ? **Per migliorare la precisione**
- Come si combinano piu' misure ? **Mediante una media pesata**

$$\bar{x} = \frac{\sum_i p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

Si abbiano due misure del ***BR*** ($\phi \rightarrow K^+K^-$) :

$$BR_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow p_1 = 1111$$
$$BR_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow p_2 = 10000$$

# Combinare insieme le misure

- Perché combinare insieme più misure indipendenti ? **Per migliorare la precisione**
- Come si combinano piu' misure ? **Mediante una media pesata**

$$\bar{x} = \frac{\sum_i p_i \cdot x_i}{p_{tot}} \qquad p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{p_{tot}}}$$

Si abbiano due misure del ***BR*** ($\phi \rightarrow K^+K^-$) :

$$BR_1 = (0.49 \pm 0.03) \rightarrow p_1 = 1111$$
$$BR_2 = (0.47 \pm 0.01) \rightarrow p_2 = 10000$$

$$\overline{BR} = \frac{1111 \times 0.49 + 10000 \times 0.47}{11111} = 0.472$$

$$\sigma(\overline{BR}) = \frac{1}{\sqrt{11111}} = 0.009$$

$$BR = (0.472 \pm 0.009)$$