



Teoria della relatività

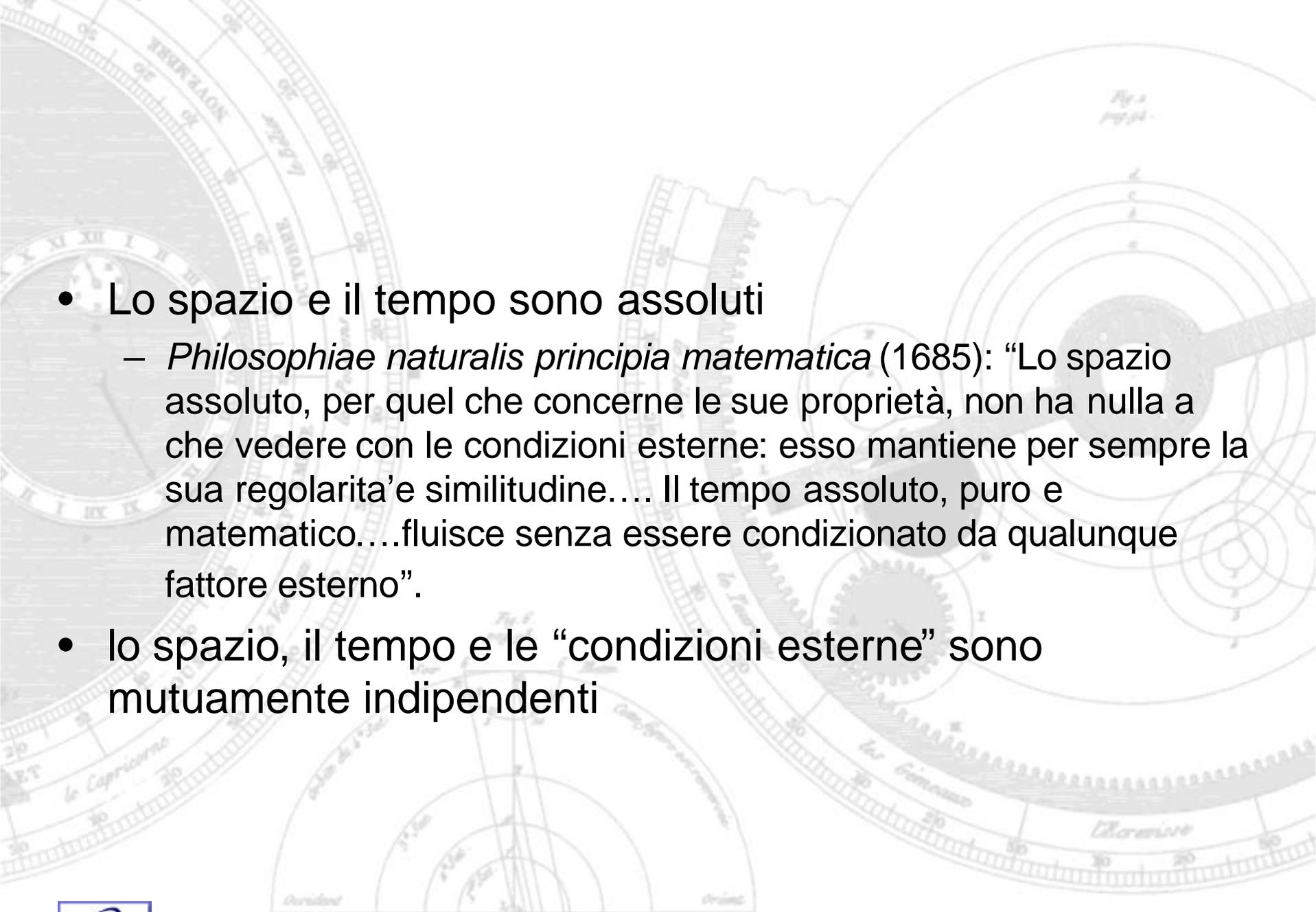
Viviana Fafone

INFN - Frascati
fafone@lnf.infn.it



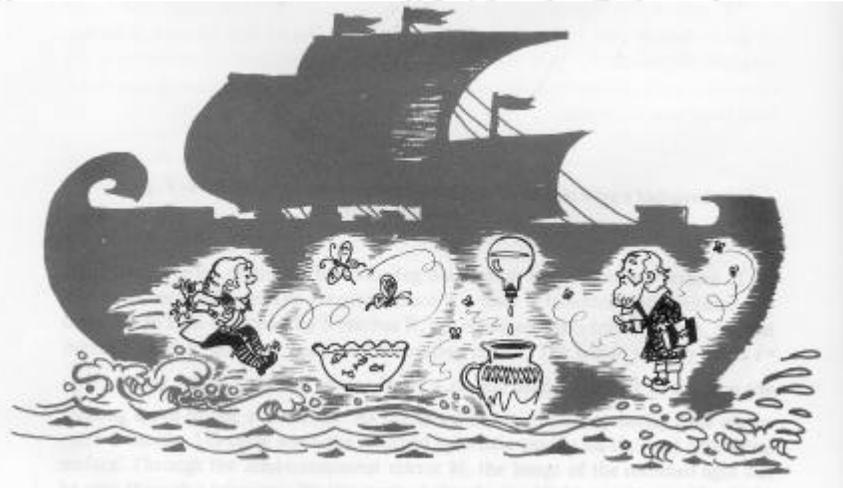
Meccanica newtoniana .1.

- Sistemi di riferimento inerziali
 - scelto un sistema di coordinate K in cui le leggi della fisica abbiano una forma ben definita, le stesse leggi devono valere in qualunque altro sistema di coordinate K' che si muova con una traslazione uniforme rispetto a K (**principio di equivalenza**)
 - “*Spatium est absolutum*”
 - un sistema di riferimento si dirà inerziale quando si trovi in riposo nello spazio assoluto o in stato di moto uniforme rispetto allo spazio assoluto.

- 
- Lo spazio e il tempo sono assoluti
 - *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1685): “Lo spazio assoluto, per quel che concerne le sue proprietà, non ha nulla a che vedere con le condizioni esterne: esso mantiene per sempre la sua regolarità e similitudine.... Il tempo assoluto, puro e matematico....fluisce senza essere condizionato da qualunque fattore esterno”.
 - lo spazio, il tempo e le “condizioni esterne” sono mutuamente indipendenti

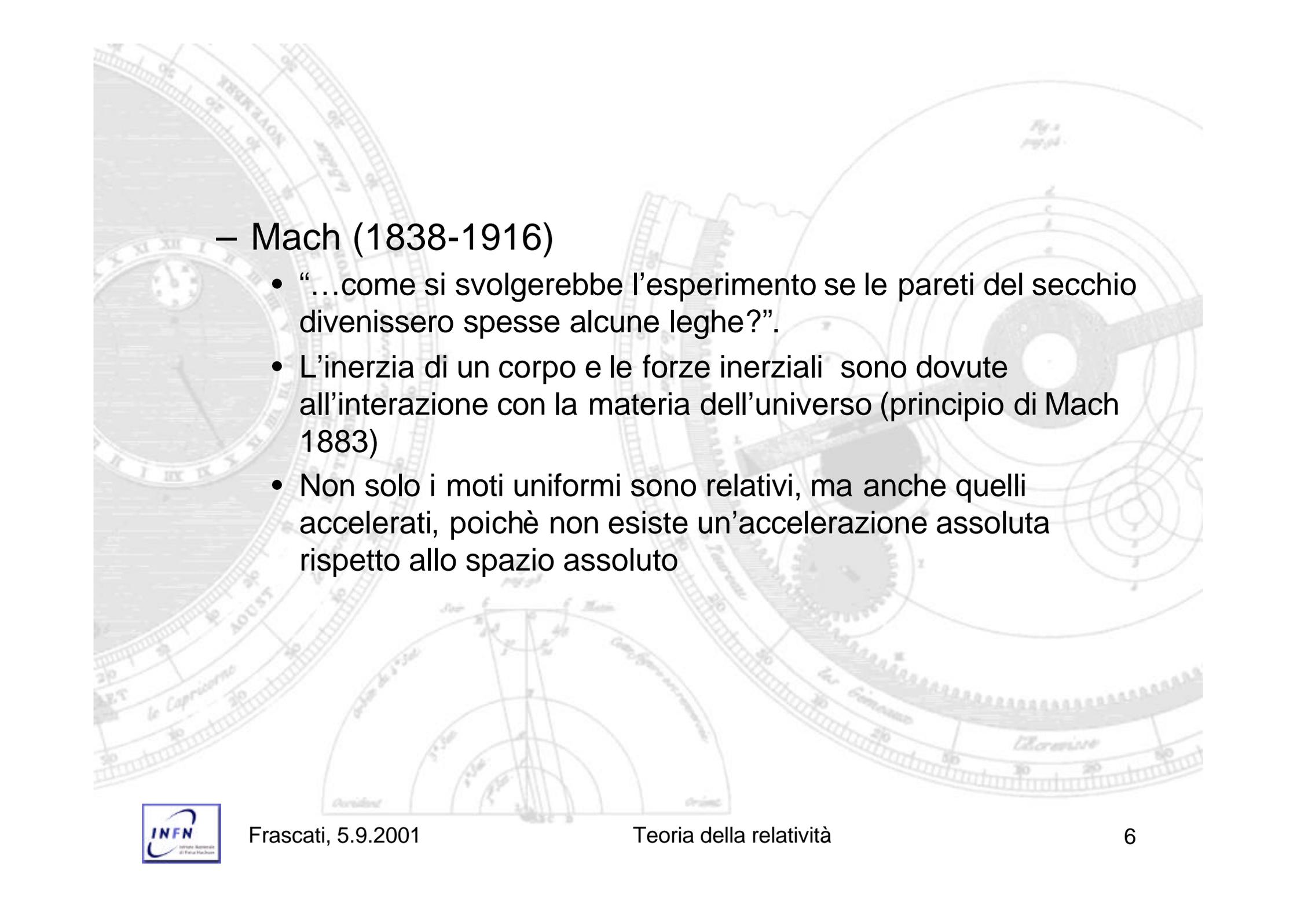
Principio di relatività - Galilei

(Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo 1632)



...Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso; e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno uguali; e saltando voi, come si dice, a piè giunti, eguali spazii passerete verso tutte le parti. ...fate muover la nave con quanta si voglia velocità; chè (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, nè da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina oppure sta ferma.

- Esperimenti per dimostrare l'esistenza di uno spazio assoluto → Newton e l'esperimento del secchio ruotante (possibilità di definire un moto assoluto)
 - Anche quando non c'è moto relativo tra l'acqua e il secchio è possibile stabilire se il sistema di riferimento del secchio sia in quiete o meno rispetto allo spazio assoluto
 - La comparsa di forze "fittizie" o inerziali deve essere collegata ad un sistema accelerato. Newton riteneva che l'esistenza di uno spazio assoluto rendesse possibile definire un'accelerazione assoluta; le forze centrifughe sull'acqua sono dovute alla rotazione assoluta
- Critiche al concetto di spazio assoluto
 - Leibniz (1646-1716) e Berkeley (1685-1753):
 - non vi è alcuna necessità filosofica di introdurre un concetto di spazio prescindendo dalla materia che in esso è contenuta



– Mach (1838-1916)

- “...come si svolgerebbe l’esperimento se le pareti del secchio divenissero spesse alcune leghe?”.
- L’inerzia di un corpo e le forze inerziali sono dovute all’interazione con la materia dell’universo (principio di Mach 1883)
- Non solo i moti uniformi sono relativi, ma anche quelli accelerati, poichè non esiste un’accelerazione assoluta rispetto allo spazio assoluto

Meccanica newtoniana .2.

- La descrizione dei corpi materiali si basa sul concetto teorico fondamentale di punto materiale, o particella.
- La materia è considerata discontinua a priori
- L'azione reciproca dei punti materiali è un'azione "a distanza"
- Legge di gravitazione universale:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- Scoperta di Nettuno (Le Verrier 1846)

Verso una nuova teoria

- Maxwell (*Treatise on electricity and magnetism* 1873) introduce il concetto di **campo**: le leggi dell'elettrodinamica trovano la loro espressione naturale nelle equazioni differenziali dei campi elettrico e magnetico. Queste equazioni implicano l'esistenza di onde che si propagano a velocità finita e costante, le cui proprietà corrispondono a quelle della luce, così come erano note a quel tempo.
- Trasformazioni di Lorentz:
 - Le equazioni di Maxwell per lo spazio vuoto rimangono invariate se le coordinate spaziali e il tempo sono soggetti a un tipo particolare di trasformazioni lineari, le trasformazioni di Lorentz (“covarianza” rispetto alle trasformazioni di Lorentz).
 - Mettono in relazione sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme
 - Furono formulate come puro strumento matematico

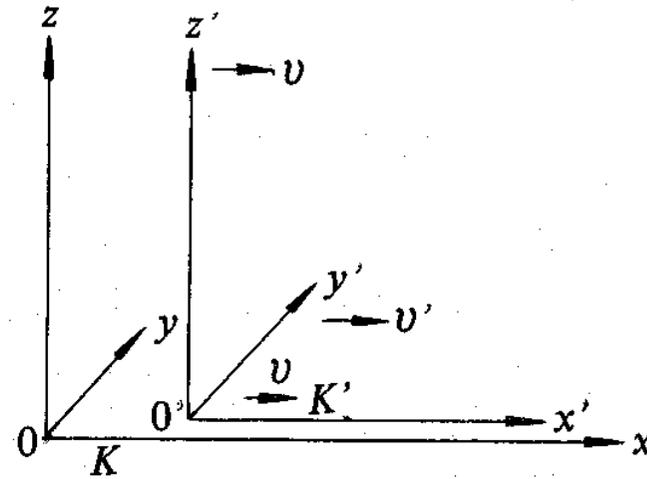
- Le equazioni di Maxwell implicano le trasformazioni di Lorentz, ma non viceversa. Il gruppo di Lorentz in realta' potrebbe essere definito in modo indipendente dalle equazioni di Maxwell, come un gruppo di trasformazioni lineari che lasciano invariante un particolare valore della velocita': la velocita' della luce.
- La luce non obbedisce alla legge classica di composizione delle velocita' (e' indipendente dalla velocita' dell'oggetto che la emette)
 - Ipotesi dell'etere ed esperimento di Michelson-Morley

La teoria della relatività speciale

- Einstein “Sull’elettrodinamica degli oggetti in movimento” (1905):
 - le leggi della natura sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento che si muovono con velocità costante uno rispetto all’altro (**principio di relatività**)
 - La velocità della luce nel vuoto e’ costante, indipendentemente dal moto della sorgente luminosa (**costanza della velocità della luce**)
 - **speciale** significa aver scelto una classe speciale di sistemi di riferimento, quelli inerziali e una classe speciale di trasformazioni lineari, quelle di Lorentz.
 - “la relatività speciale non si discosta dalla meccanica classica tramite il postulato di relatività, ma tramite quello della costanza della velocità della luce nel vuoto”.

Trasformazioni di Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



- Nel limite di c tendente ad infinito si riducono alle trasformazioni della meccanica classica
- Nuova legge di composizione delle velocità

$$V = \frac{V' + v}{1 + \frac{V'v}{c^2}}$$

- Effetti della relatività speciale:

- Contrazione delle lunghezze

- Dilatazione dei tempi

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'errore di Mr. Thompkins



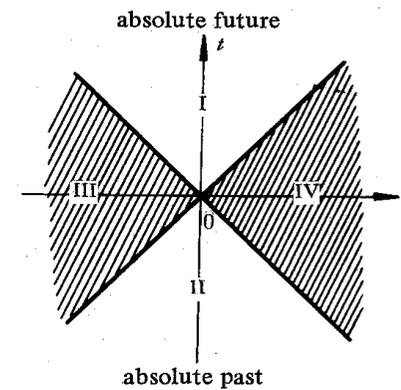
Dilatazione dei tempi

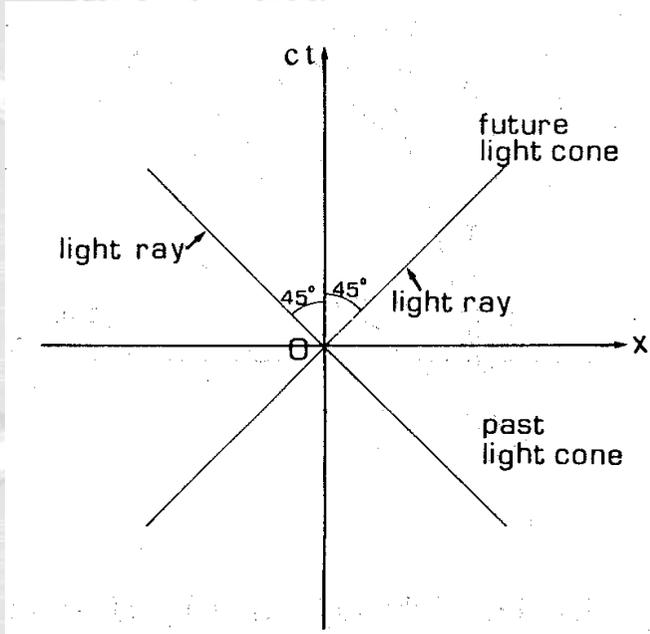
- Vita media del muone
 - Circa $2 \mu\text{s}$ \rightarrow dovrebbero percorrere al più 600 m. Non dovrebbero essere osservabili nei raggi cosmici
- Paradosso dei gemelli



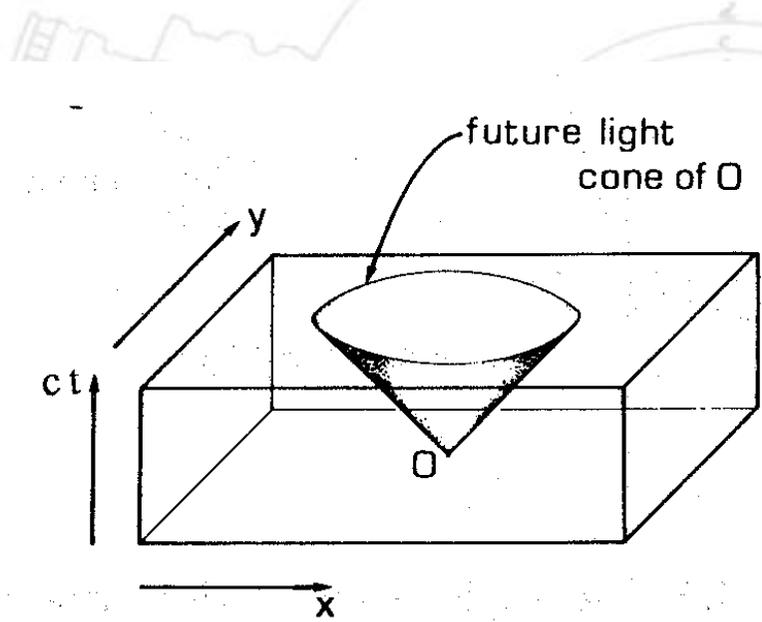
- 1966: esperimento con muoni
 - \rightarrow maggiore è l'accelerazione del gemello rispetto all'universo, più lunga è la sua vita

- Evento: punto nello spazio-tempo
- Linea d'universo: insieme dei punti che definiscono il moto di una particella
- Un generico evento nell'origine può essere connesso solo ad eventi all'interno del cono luce per mezzo di segnali che si propagano con velocità minori o uguali a quella della luce. Altrimenti i due eventi non sarebbero fisicamente connessi e non varrebbe il principio di causalità.





Proiezione ad y e z fissi



Proiezione a z fisso

Distanza

- Consideriamo un raggio di luce nel vuoto che parte da un punto x,y,z , al tempo t e raggiunge un punto vicino $x+dx, y+dy, z+dz$ al tempo $t+dt$. La distanza percorsa è legata al tempo impiegata a percorrerla dalla relazione

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = c \cdot dt$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0$$

- E' invariante per trasformazioni di Lorentz

Massa inerziale e massa gravitazionale

- Seconda legge della meccanica di Newton $F = m_i a$
- Legge della gravitazione universale di Newton

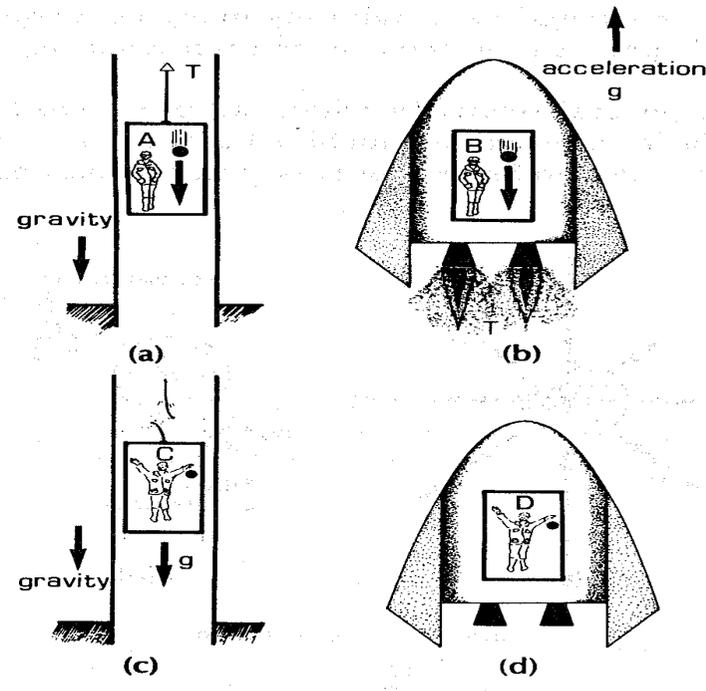
$$F = G \frac{m_g M}{r^2}$$

- Accelerazione di un corpo in caduta libera

$$a = \frac{m_g}{m_i} \left(\frac{GM}{r^2} \right)$$

- Esperimento di Galilei: tutti gli oggetti cadono con la stessa accelerazione gravitazionale
- m_g/m_i e' una costante universale indipendente dalle proprietà dell'oggetto

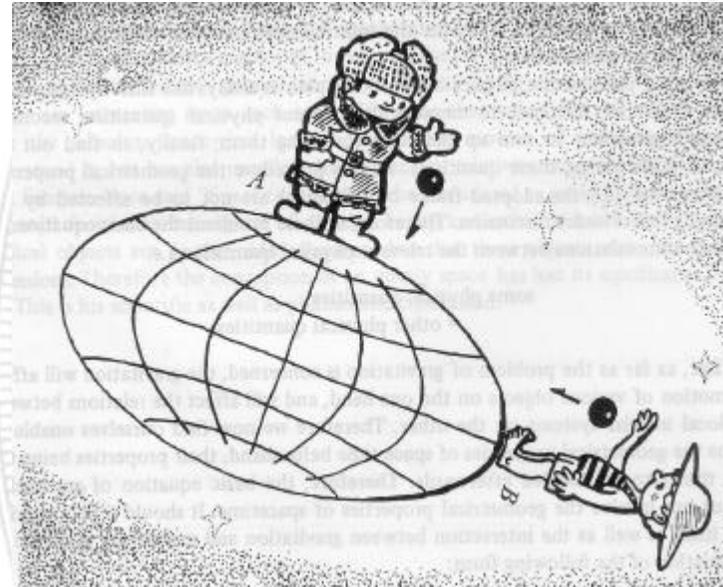
Esperimento dell'ascensore di Einstein



- **principio di equivalenza di Einstein:** non esiste modo di distinguere tra gli effetti di un campo gravitazionale uniforme e di un'accelerazione costante. O anche: e' sempre possibile trovare un sistema di riferimento in cui si riesce ad eliminare l'effetto della gravita'.

- **ATTENZIONE**

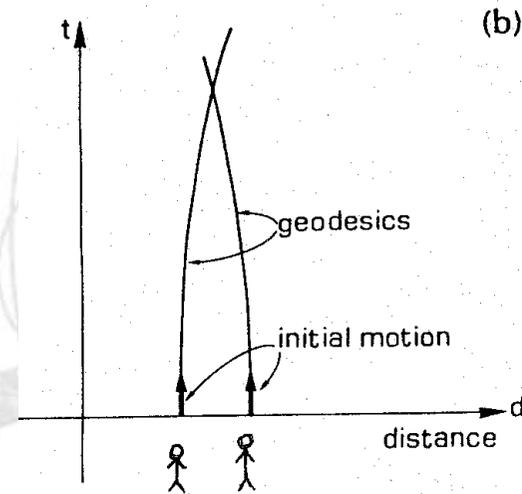
Il campo gravitazionale non e' uniforme



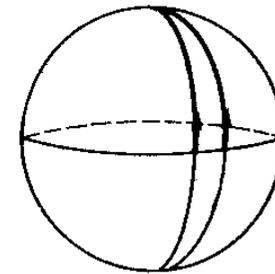
- In generale l'accelerazione gravitazionale cambia da un punto all'altro a seconda di come siano distribuite le masse nell'Universo
- Se la nostra cabina fosse molto grande ci accorgeremmo dell'esistenza di accelerazioni diverse impresse ad oggetti pesanti lontani fra loro

- Potremmo allora pensare di limitare la nostra attenzione a fenomeni locali, **usando in pratica una piccola cabina**, dove gli effetti dovuti alle differenze di accelerazione siano trascurabili
- GRANDE VANTAGGIO: in queste cabine sono applicabili le leggi della relatività ristretta
- GRANDE SVANTAGGIO: per studiare i fenomeni su larga scala occorre utilizzare più sistemi di riferimento (più cabine)
- Ogni cabina e' come **la singola mappa di un Atlante Geografico**
- **Per pianificare percorsi su larga scala e' meglio costruirsi un Mappamondo**

- I due omini pensano di trovarsi in uno spazio piatto
- Da misure della loro distanza vedono che questa diminuisce -->
- Deve esistere una forza che ci attira uno verso l'altro



- Ma se li facciamo muovere ripetendo l'esperimento in uno spazio curvo, riusciranno a spiegare il loro avvicinamento senza dover introdurre una forza esterna



Riassumendo...

- In presenza di un campo gravitazionale, e' impossibile distinguere se un sistema A sia accelerato rispetto ad un altro inerziale.
- Il sistema inerziale puo' essere definito solo localmente e vari sistemi inerziali, definiti in vari punti, possono avere un moto accelerato relativo. Le leggi della fisica devono rimanere invariate spostandoci da uno all'altro di questi sistemi di coordinate.
- L'insieme dei sistemi di coordinate "permessi" deve essere ampliato → espresso in termini piu' formali questo vuol dire che, per spiegare l'identita' tra massa inerziale e massa gravitazionale, il gruppo delle trasformazioni di Lorentz deve essere ampliato.

- Il nuovo gruppo di trasformazioni e' il gruppo di tutte le trasformazioni continue delle coordinate.
- Le equazioni che esprimono le leggi di natura devono essere invarianti rispetto a tutte le trasformazioni continue delle coordinate (**principio della relativita' generale** 1915).
- Secondo la relatività generale, il concetto di spazio separato da ogni contenuto fisico non esiste.
- La realtà fisica dello spazio e' rappresentata da un "campo", la metrica, descritto da funzioni continue di quattro variabili indipendenti: le coordinate dello spazio e del tempo.
- Qual'e' l'equazione che lega il campo gravitazionale alla materia che lo genera?

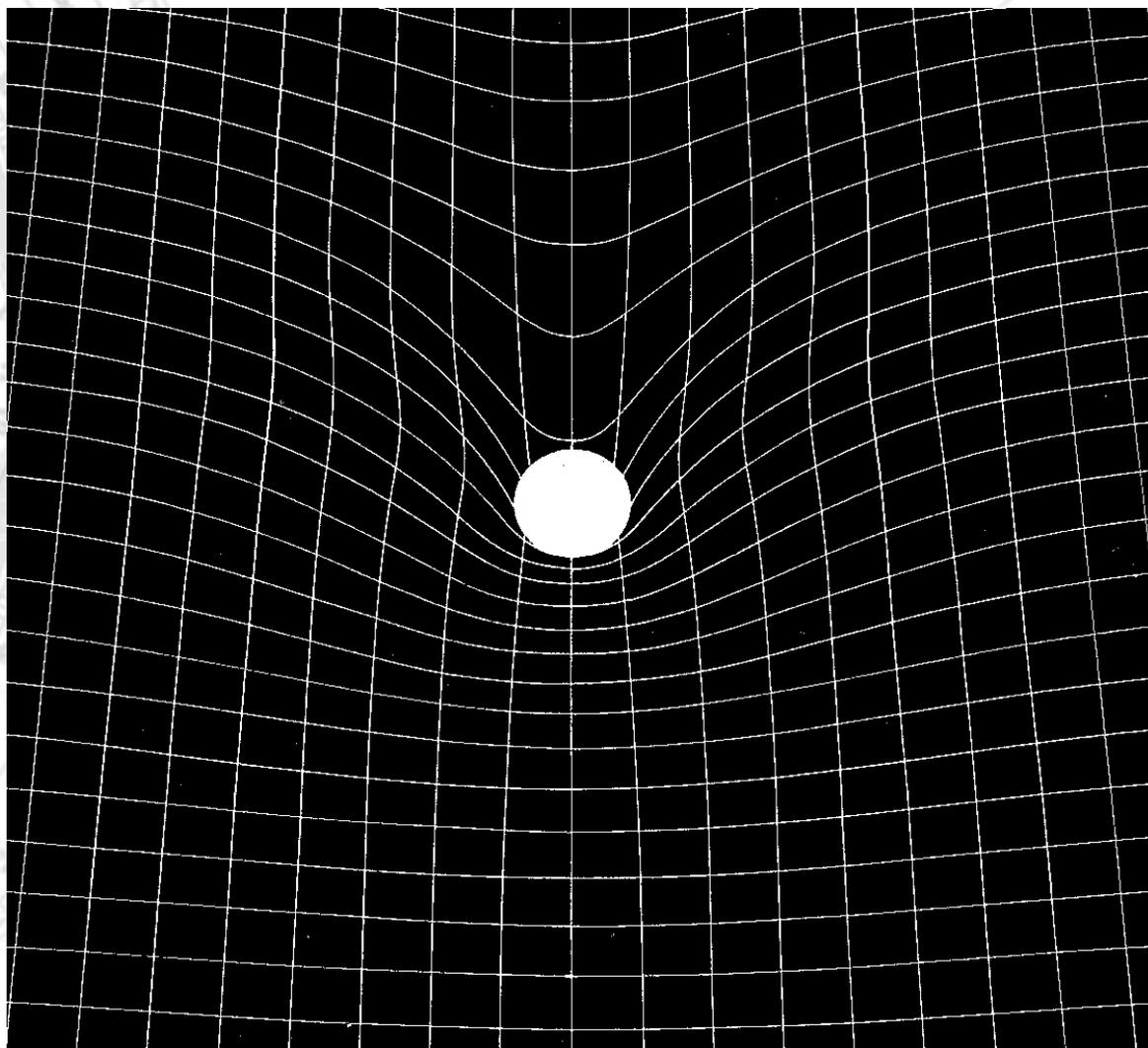
Equazione di Einstein

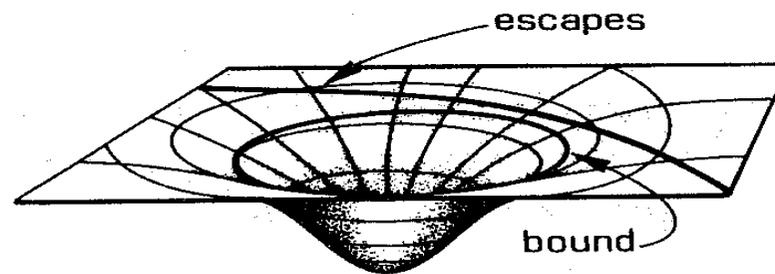
$$R_{mn} - \frac{1}{2} R \cdot g_{mn} = \frac{8pG}{c^2} T_{mn}$$

Spazio-tempo

Materia

- La materia produce la curvatura
- La curvatura determina il moto della materia
- La distribuzione di materia ed il suo moto non possono essere descritti indipendentemente dal campo gravitazionale da essi prodotto
- Cambiamento di curvatura-->cambia la distanza tra due punti nello spazio





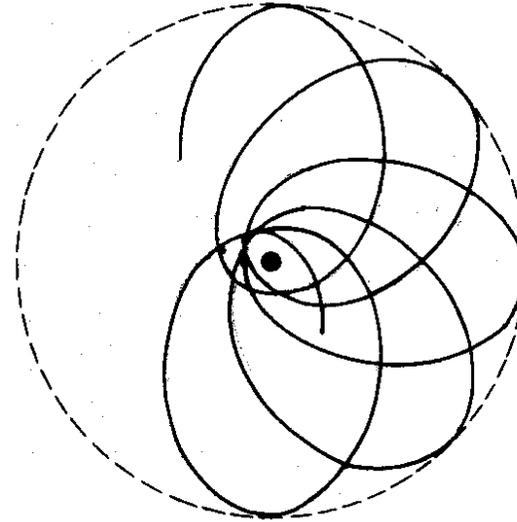
- Una massa che si muove su una superficie curva viene mantenuta lungo la sua traiettoria dalla forma della superficie

Verifiche classiche della relatività generale

- Precessione del perielio di Mercurio
- Redshift gravitazionale
- Deflessione raggi luminosi

Precessione del perielio di Mercurio

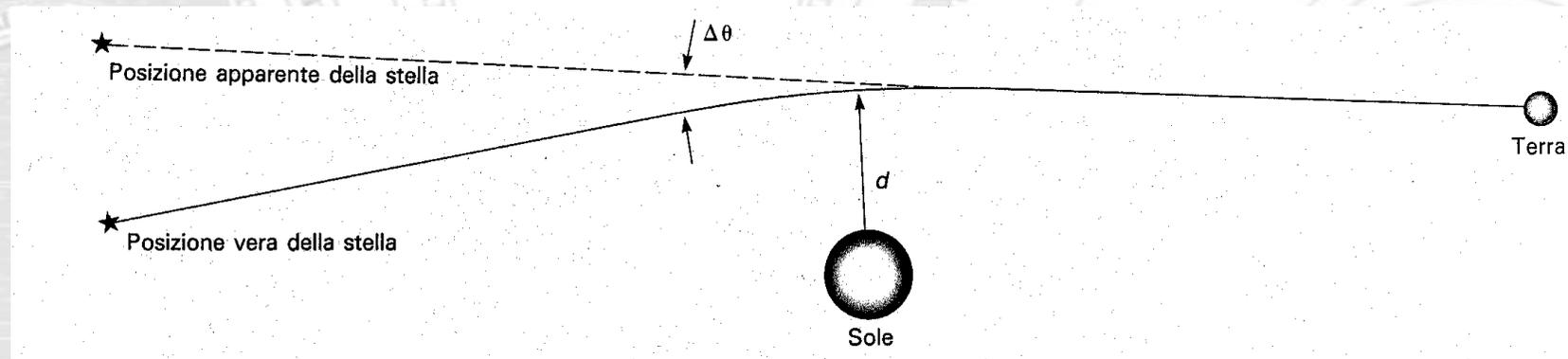
- Il perielio avanza di $574''$ al secolo. Di questi, $531''$ sono dovuti a perturbazioni gravitazionali da parte degli altri pianeti, soprattutto Venere, la Terra e Giove.
- La differenza, $43''$ al secolo, fu spiegata dalla relatività generale
- In una lettera che Einstein scrisse verso la fine del 1915 a Sommerfeld diceva: "L'ultimo mese e' stato uno dei piu' emozionanti e intensi della mia vita. Quello che mi rende cosi' felice non e' solo il fatto che la teoria di Newton si ottiene come prima approssimazione, ma che la precessione del perielio di Mercurio si ottiene come seconda approssimazione".



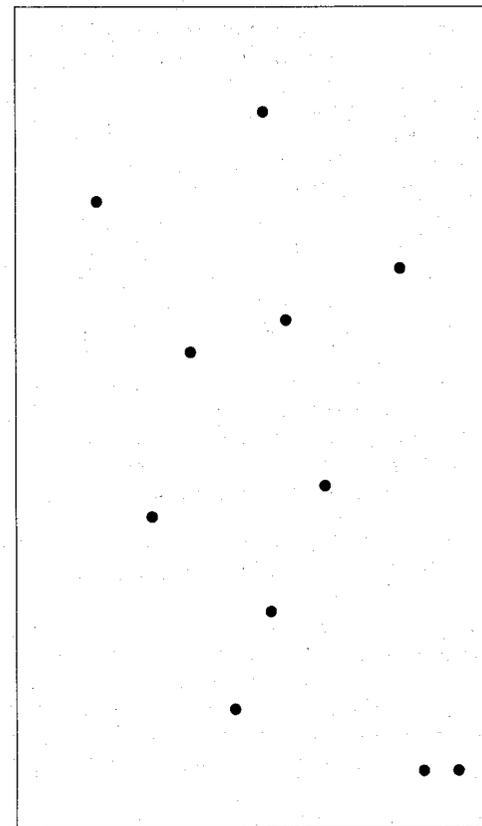
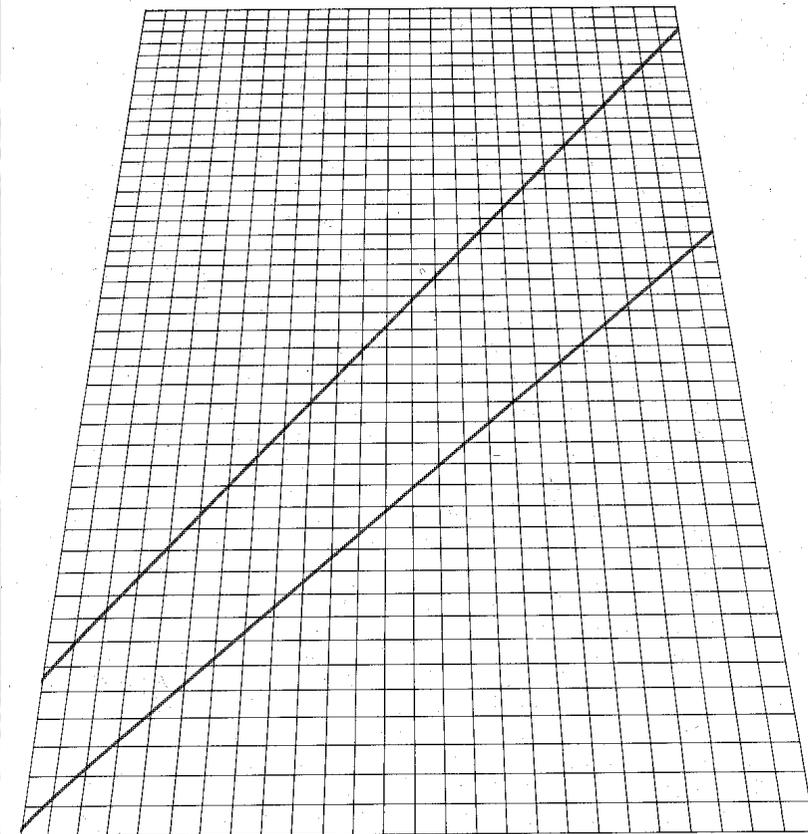
Redshift gravitazionale

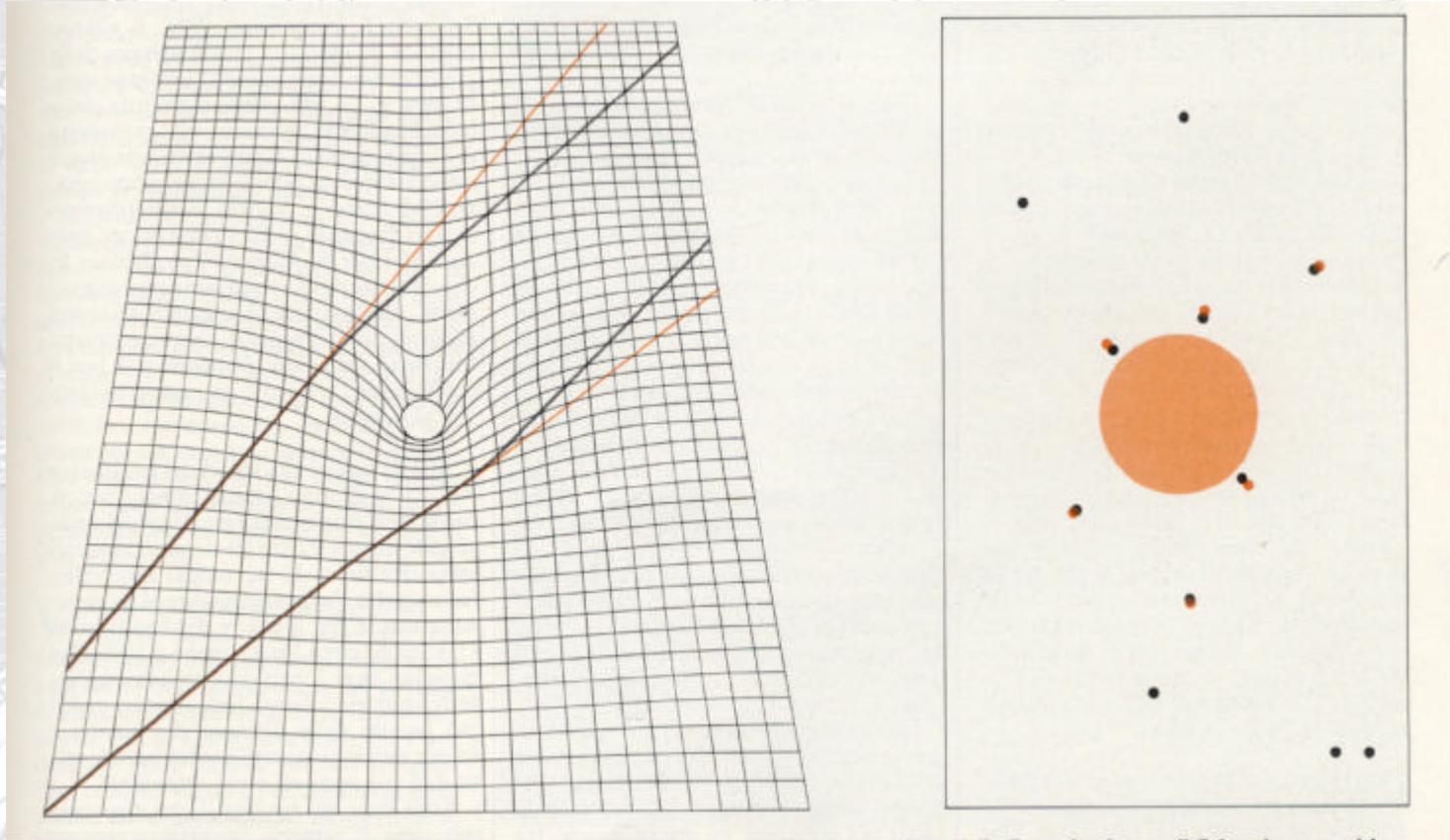
- Quando la luce viaggia da un campo gravitazionale forte ad uno debole, la frequenza diminuisce, cioè la luce è spostata verso il rosso
- Prima misura di alta precisione: Pound, Rebka, Snider (1960-65)
 - Misura dello spostamento di frequenza di fotoni γ emessi nel decadimento del ^{57}Fe , che salivano o scendevano nella torre del Jefferson Laboratory (Harvard). Precisione 1%
- Spostamento righe spettrali atomiche nel campo gravitazionale del sole
- Esperimenti più recenti hanno portato la precisione ad alcune parti in 10^5

Deflessione dei raggi luminosi



- Conferma della previsione: Eddington (1919)



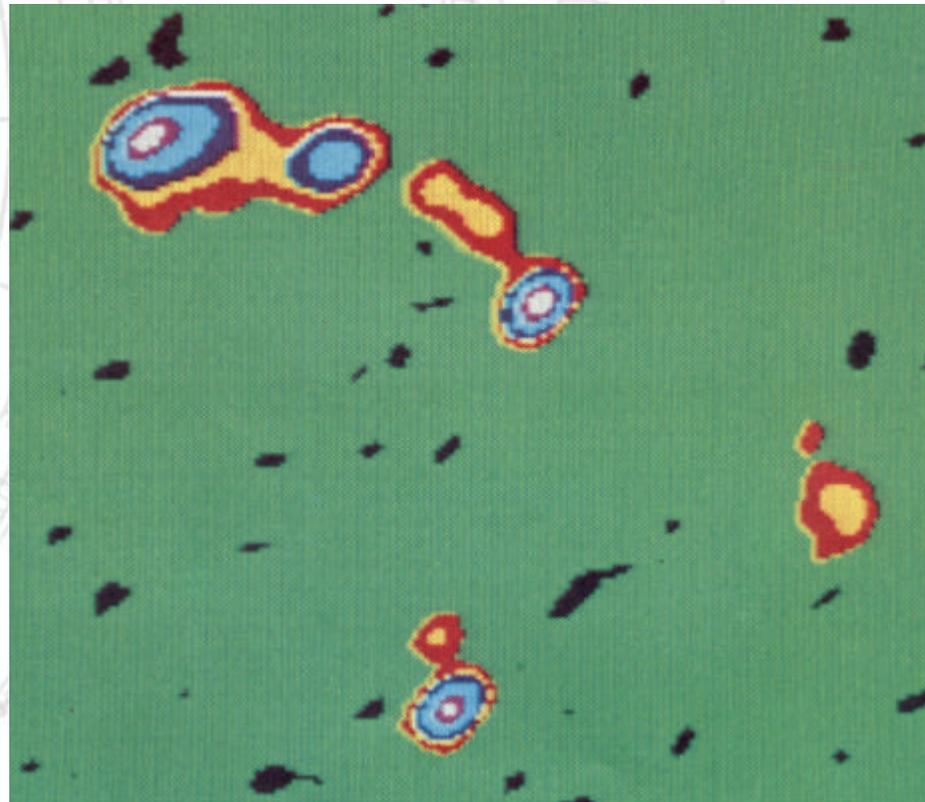


- Radiointerferometria

- Very Large Array telescope (Socorro, Nuovo Messico): 27 antenne 25 m di diametro



- Nel 1979 fu scoperta una coppia di quasar gemelli

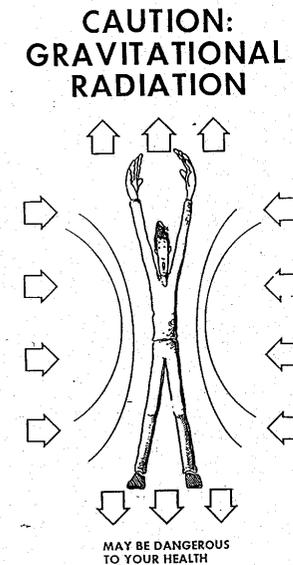
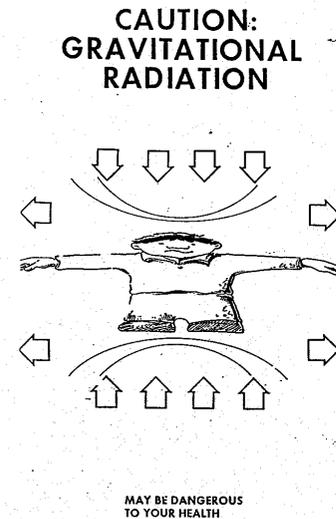
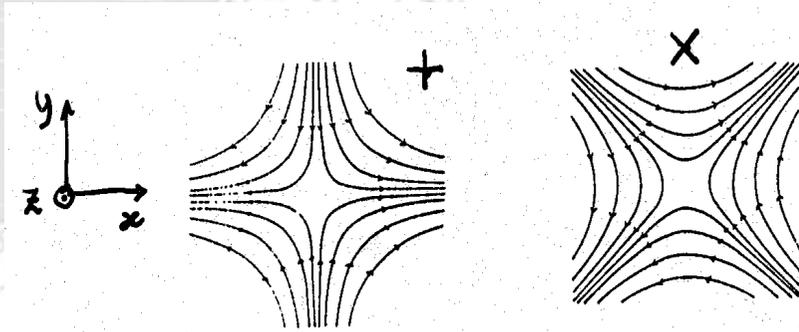


Onde gravitazionali

- Una variazione dello stato di moto delle masse determina una perturbazione delle proprietà geometriche dello Spazio-Tempo
- Queste perturbazioni della geometria, generate in prossimità delle masse che stanno cambiando il loro stato di moto, possono propagarsi nello Spazio-Tempo
- ==>> ONDE GRAVITAZIONALI
- Possiamo pensare alle onde gravitazionali come increspature nello spazio-tempo piatto

Caratteristiche principali delle O.G.

- Sono deformazioni dello spazio-tempo che si propagano con la velocità della luce
- Sono onde trasverse
- Hanno due stati di polarizzazione



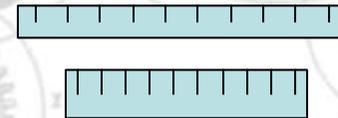
- Vengono emesse da momenti di quadrupolo di massa variabili nel tempo
- Non possono essere prodotte in laboratorio
 - Massa di acciaio, 1 metro di raggio, lunga 20 metri, ruotante alla velocità di 4.4 rivoluzioni/s • $P = 10^{-30}$ W
 - In un evento di **Supernova**, a seconda del grado di asimmetria del collasso gravitazionale associato all'esplosione, potrebbe essere emessa energia pari a
 $\sim 10^{40}$ Joule
- Ma lo scambio d'energia tra Onde Gravitazionali e Materia è debolissimo. **L'Onda Gravitazionale attraversa la Materia senza essere significativamente attenuata.**
- Il Sole , la Terra ed in generale i corpi celesti sono trasparenti alle Onde Gravitazionali.

- La variazione δL della distanza L tra due particelle e' proporzionale all'intensità dell'onda gravitazionale

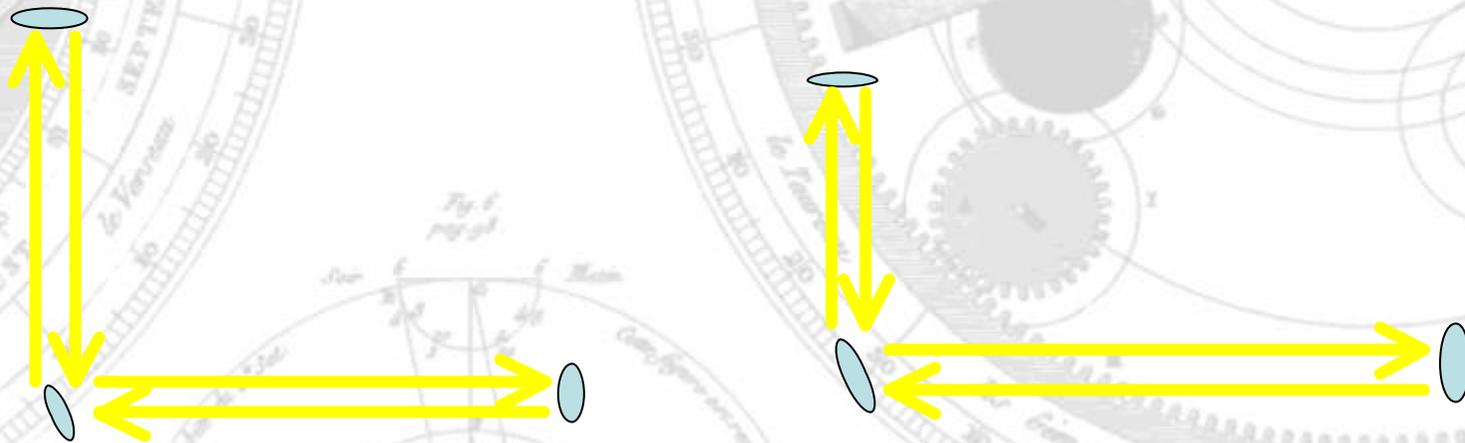
$$h = \frac{dL}{L}$$

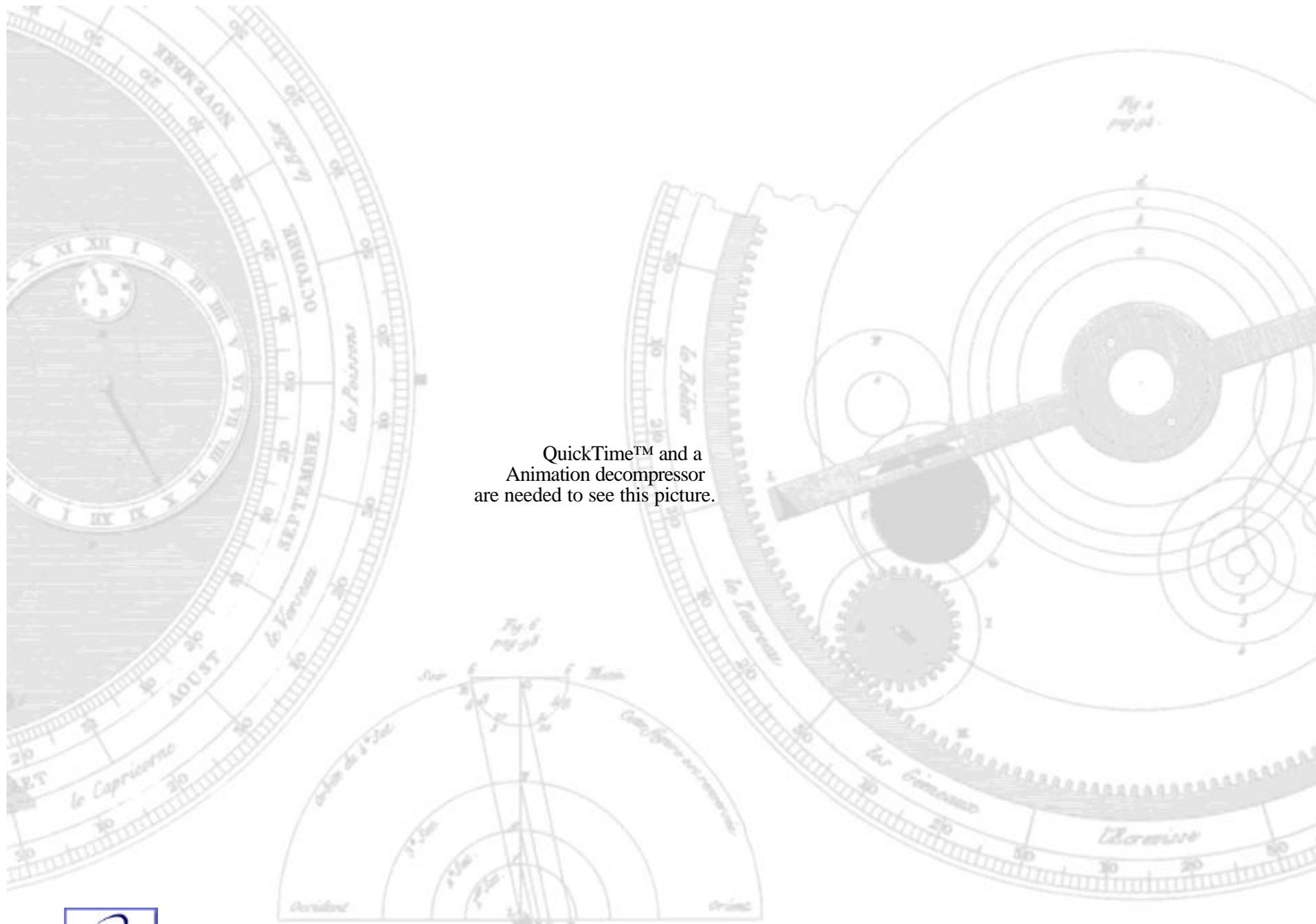
- Come possiamo renderci conto che stanno cambiando le proprietà geometriche dello spazio?

Anche il nostro metro campione si deforma!!



- Possiamo misurare il tempo che luce impiega a fare un viaggio di andata e ritorno tra due punti, perchè la velocità della luce è sempre pari a c .
- Se ho tre corpi ai vertici di una L, al passaggio di un'onda gravitazionale, quando un tratto si allunga, l'altro si accorcia e viceversa





QuickTime™ and a
Animation decompressor
are needed to see this picture.



Bibliografia

- Due rassegne interessanti si possono trovare in:
 - *La nuova fisica*, a cura di Paul Davies, Bollati Boringhieri
 - *Review of Modern Physics*, volume 71 - special issue (1999), in inglese
- Tra i testi che trattano l'argomento in modo originale (questi sono gli estremi dell'edizione inglese):
 - *Flatland* di Edwin A. Abbott (Dover Thrift Editions): e' un'introduzione divertente allo spazio a piu' dimensioni, utile per comprendere lo spazio-tempo
 - *Mr Tompkins in Paperback* di G. Gamow (Cambridge Univ. Press): la relatività e la meccanica quantistica viste con gli occhi dell'esperienza quotidiana attraverso le avventure di Mr. Tompkins
- Per una trattazione piu' rigorosa:
 - *General Relativity* di I.R. Kenion (Oxford Science Publications)