



La Natura della Gravità

Danilo Babusci

danilo.babusci@Inf.infn.it



4 – 6 Ottobre 2017

interazione	carica	intensità	raggio d'azione	mediatori	spin
forte	colore	1	10^{-15} m	gluoni (8)	1
elettromagnetica	elettrica	10^{-2}	∞	fotone	1
debole	debole	10^{-5}	10^{-18} m	$W^{\pm}, Z$	1
gravitazionale	energia	10^{-38}	∞	gravitone	2

universale ←
 ↓
 ? così debole
 ↓
 sempre
 attrattiva

Gravità Newtoniana

Gravità descritta da due leggi:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \underbrace{\Phi(\vec{x})}_{\substack{\downarrow \\ \text{potenziale gravitazionale}}} \qquad \nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4 \pi G \underbrace{\rho(\vec{x})}_{\substack{\downarrow \\ \text{densità di massa}}} \quad (\text{Poisson})$$

→ eq.ni **non invarianti** sotto **trasformazioni di Lorentz**.

In particolare, Φ dipende istantaneamente da $\rho \rightarrow$ interazione gravitazionale si propaga con velocità infinita!

➡ **Relatività Generale (RG):**

- estendere il **Principio di Relatività** ai riferimenti non-inerziali
- descrivere la gravità

Principio d'Equivalenza

... der glücklichste Gedanke (A. Einstein)

Osservazione sperimentale (Galilei): tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione

- i. (modulo) forza gravitazionale agente su corpo posto sulla superficie terrestre

$$F_g = G \frac{m_g M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} = m_g g$$

- ii. legge di Newton per corpo di massa inerziale m_i

$$F_i = m_i a$$

$$F_i = F_g \quad \longrightarrow \quad a = g \frac{m_g}{m_i}$$

$$a \text{ indipendente dalla natura del corpo} \quad \longrightarrow \quad \frac{m_g}{m_i} = \text{costante universale}$$

Principio d'Equivalenza

$m_i = m_g \rightarrow$ forza gravitazionale $\propto$ massa inerziale dei corpi,
come forze inerziali presenti in riferimento accelerato

somiglianza all'apparenza accidentale, per un “newtoniano”,
ma dal profondo significato fisico

Corpo di massa m soggetto all'azione di un campo gravitazionale
omogeneo e statico: eq.ne del moto in dato riferimento inerziale

$$m_i = m_g = m \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = m \vec{g}$$

trasformazione di coordinate non-galileiana

$$\vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad t' = t \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = m (\vec{g} - \vec{a})$$

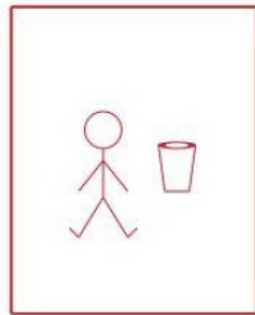
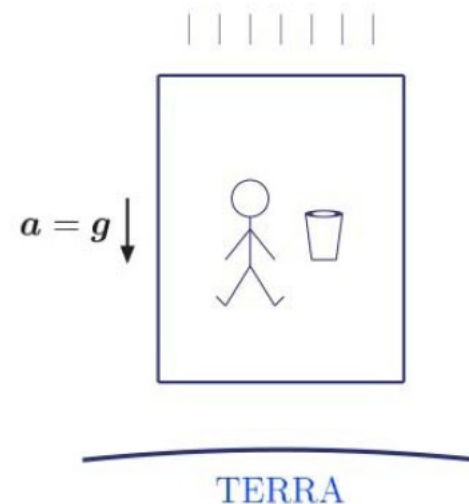
Principio d'Equivalenza

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = 0$$

→ forza gravitazionale cancellata da una forza inerziale

$$\vec{F}_i = -m \vec{g}$$

→ dentro ascensore in caduta libera in campo gravitazionale omogeneo e statico è impossibile rilevare la presenza del campo

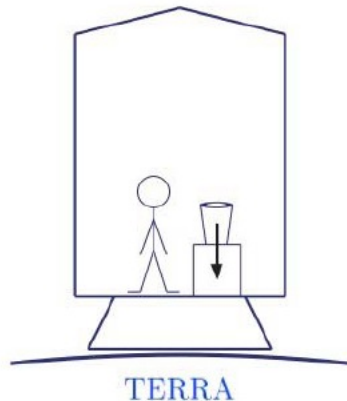
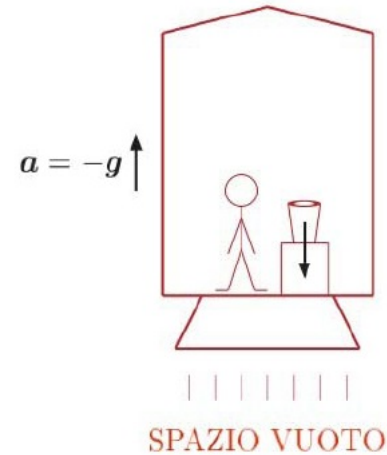


SPAZIO VUOTO

situazione indistinguibile da
ascensore lontano da qualunque
influenza gravitazionale

Principio d'Equivalenza

allo stesso modo, osservatore all'interno di razzo che accelera nello spazio vuoto con $\vec{a} = -\vec{g}$ vede gli oggetti all'interno del razzo animati, rispetto alle pareti, di accelerazione $\vec{g}$



non riuscendo, quindi, a fare alcuna distinzione con la situazione in cui il razzo è fermo sulla base di lancio, soggetto al campo gravitazionale terrestre

Principio d'Equivalenza

→ enunciazione del **Principio d'Equivalenza di Einstein** (PEE)

in ogni punto all'interno di un arbitrario campo gravitazionale è possibile scegliere un sistema di coordinate “localmente inerziale” tale che, in un intorno del punto, le leggi della natura assumono la stessa forma che hanno in un riferimento cartesiano non accelerato in assenza di gravità

NB – Quanto piccolo deve essere l'intorno del punto? Rozzamente, piccolo abbastanza da poter ritenere costante il campo gravitazionale all'interno di esso (per una definizione rigorosa occorre una descrizione matematica del campo gravitazionale); **perché solo in un intorno?** → vedi avanti

Principio d'Equivalenza

- con la locuzione “stessa forma come in un riferimento cartesiano non accelerato” s’intende quella dettata dalla **Relatività Speciale**
- formulazione del PEE “risuona” con quella dell’assioma di Gauss alla base della geometria non-Euclidea: in ogni punto di una superficie curva è possibile erigere un sistema di coordinate localmente cartesiano in cui le distanze obbediscono alla legge di Pitagora → dobbiamo aspettarci che le **leggi della gravitazione esibiscano forte somiglianza con quelle della geometria degli spazi curvi (Riemann)**
- PEE → gravità è ineludibile: **non esiste oggetto “gravitazionalmente neutro”** rispetto al quale misurare l’accelerazione dovuta alla gravità → la gravità non va interpretata come una forza (ovvero, qualcosa che genera accelerazione in proporzione all’inerzia del corpo su cui è applicata)

Equivalenza vs Uguaglianza

PEE: termine fondamentale è **intorno** → equivalenza tra campo inerziale e il campo gravitazionale è **locale**.

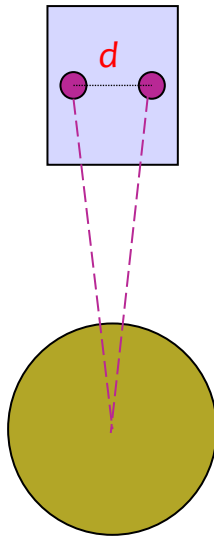
Affermare che i due campi sono equivalenti non significa sostenere che sono la stessa cosa. Due differenze sostanziali:

1. la sorgente del campo inerziale è data dal passaggio da un riferimento inerziale ad uno non-inerziale, mentre la sorgente del campo gravitazionale è data da una distribuzione di massa-energia.
2. campo inerziale è globalmente uniforme, quello gravitazionale non lo è: le sue linee di forza convergono verso la sorgente

→ i due campi sono indistinguibili solo localmente, non globalmente

Equivalenza vs Uguaglianza

Esempio: masse all'interno di ascensore in caduta libera.



ciascuna massa cade direttamente verso il centro della Terra; poiché questa non è piatta ma (circa) sferica, l'orizzonte locale al disotto di una particella è leggermente angolato rispetto a quello dell'altra → traiettorie delle due particelle leggermente convergenti → al procedere della caduta un osservatore all'interno dell'ascensore rivelerà un (lento) **moto, di avvicinamento dei due corpi.**

NB - $d = 1 \text{ m}$ → convergenza $\approx 16 \text{ }\mu\text{m}$ ogni 100 m di caduta

moto relativo tra particelle in caduta libera non è dovuto a mutua attrazione, ma è in risposta alla gravità esterna.

Relatività Generale

Einstein – gravità è manifestazione della geometria dello spaziotempo

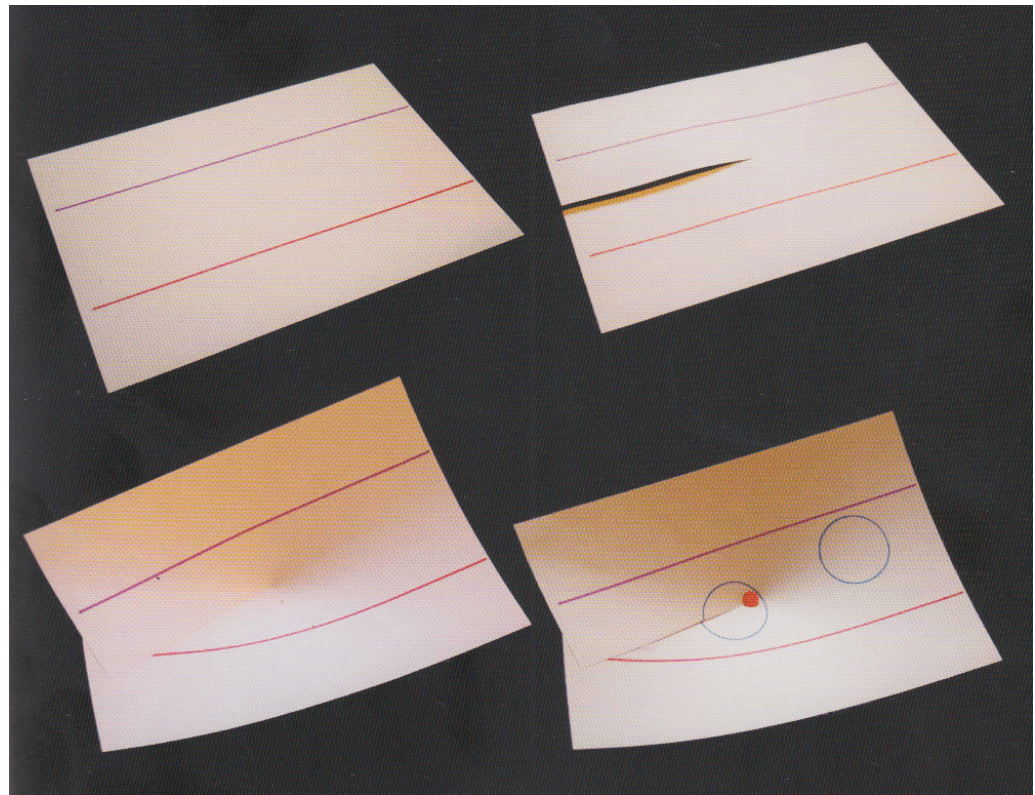
Nella gravità relativistica non esiste alcuna forza gravitazionale



Relatività Generale

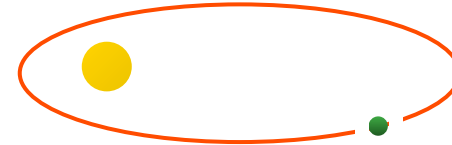
Lo spaziotempo è curvato o distorto e le particelle in caduta libera seguono la traiettoria più rettilinea possibile (**geodetica**) attraverso lo spaziotempo curvo.

Geodetiche vicine possono convergere o divergere riproducendo l'effetto di una forza (mareale).



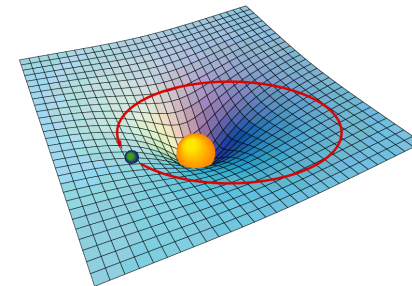
Newton vs Einstein

Newton: gravità è una forza



la Terra si muove su orbita **curva** intorno al Sole perché la gravità solare la costringe ad allontanarsi dal suo cammino rettilineo naturale

Einstein: gravità è curvatura



massa-energia del Sole distorce geometria spaziotempo vicino alla Terra e questa si muove liberamente lungo cammino il più possibile rettilineo ($\approx$ **ellisse**) in questo ambiente deformato

Equazioni di Einstein

→ equazioni di campo (Einstein):

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R}_{\text{geometria spaziotempo}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{stress, energia, impulso della sorgente}}$$

NB - $\frac{8\pi G}{c^4} \sim 10^{-43} \text{ N}^{-1}$ caratterizza la rigidità dello spaziotempo
(il suo inverso legato al modulo di elasticità)

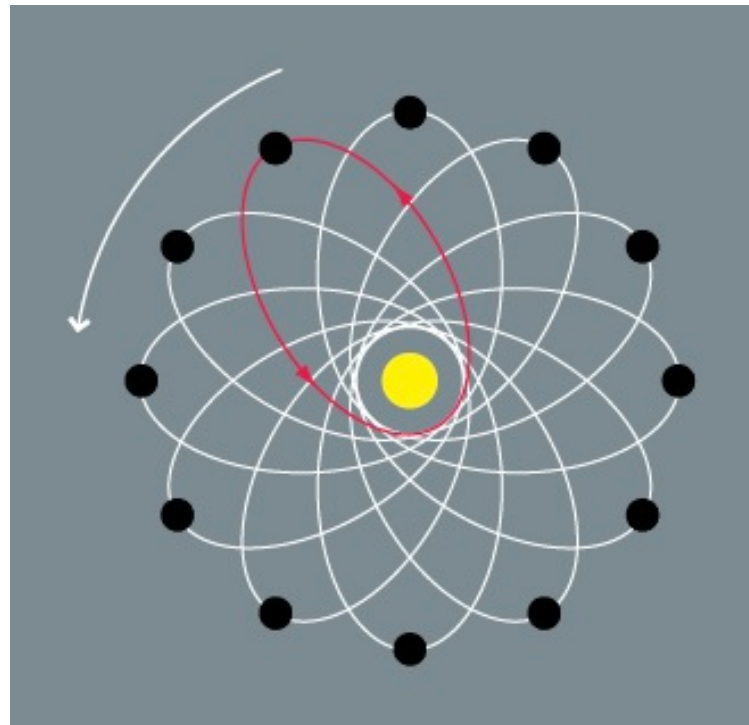
*lo spaziotempo dice alla materia come muoversi;
la materia dice allo spaziotempo come curvarsi*

Verifiche sperimentali

www.asimmetrie.it/einstein-sotto-esame

Orbita di Mercurio

precessione lenta del perielio di circa $43''$ di arco/secolo

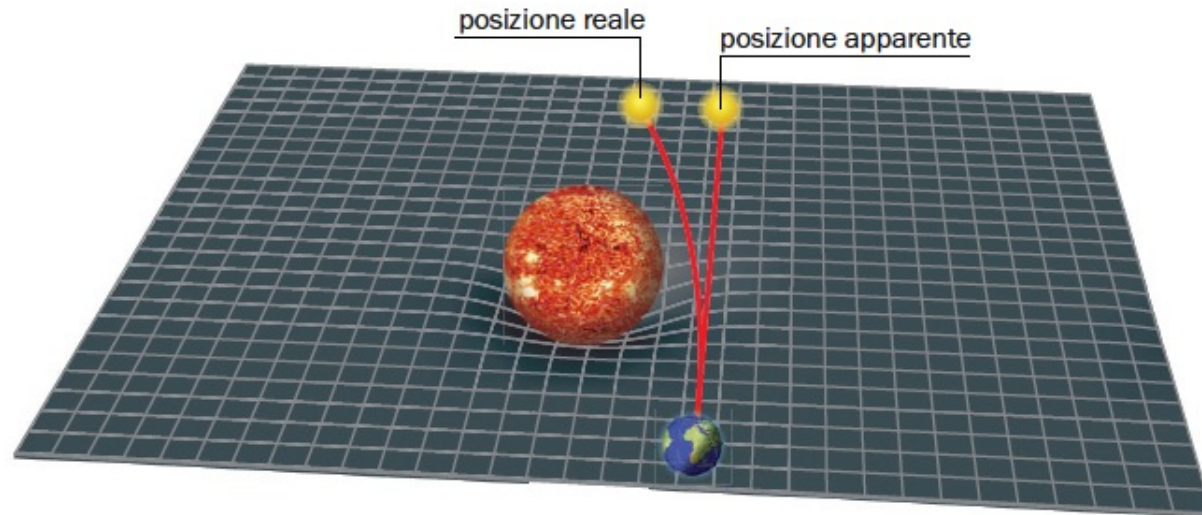


RG perfettamente in accordo con le osservazioni

Verifiche sperimentali

Curvatura della Luce

Osservata per la prima volta nel 1919 da [Eddington](#) durante eclisse totale del Sole



Spostamento posizione apparente della stella in accordo con predizione della [RG](#) → [Gravitational Lensing](#)

Buchi Neri

Teoria di **Newton**: velocità di fuga di un corpo di massa m posto sulla superficie di un corpo di massa M e raggio R

$$r \rightarrow \infty : E = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m \tilde{v}^2 = G \frac{m M}{R}$$
$$\longrightarrow \quad \tilde{v} = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} \quad \star$$

Michell (1783) + **Laplace** (1793): esistono corpi per i quali la velocità di fuga è $>$ di quella della luce?

$$\tilde{v} \geq c \quad \xrightarrow{\star} \quad R \leq r_g = 2 \frac{G M}{c^2}$$

raggio di
Schwarzschild

... nemmeno la luce sfugge al campo gravitazionale del corpo $\rightarrow$ **Buco Nero** (BH)

Buchi Neri

Sebbene argomentazione non corretta, criterio precedente (compreso il fattore 2) vale anche nella RG → superficie di raggio r_g è detta **orizzonte degli eventi**

Niente ha creato più confusione della domanda: **cosa accade alla materia che attraversa l'orizzonte degli eventi?**

A: osservatore su
orizzonte

B: osservatore a distanza
 ∞ da orizzonte

- orizzonte è superficie a **redshift** ∞ : **B** vede orologio di **A** andare infinitamente più lento del proprio;
- **A** non avverte nulla quando oltrepassa l'orizzonte, ma per **B** rallenta sempre di più nei movimenti: **B** non vedrà mai **A** superare l'orizzonte!

Unità di Planck

“BH quantistico”: particella il cui raggio di Schwarzschild (RG) coincide con lunghezza d'onda Compton (MQ)

$$r_g = \lambda_C \quad \rightarrow \quad \frac{G m}{c^2} = \frac{\hbar}{m c}$$

$$\rightarrow \quad m = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = m_P \quad \boxed{\text{massa di Planck}}$$

$$m = m_P \quad \rightarrow \quad \lambda_C = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = \ell_P \quad \boxed{\text{lunghezza di Planck}}$$

$\rightarrow$ definizione di una scala di tempi:

$$\frac{\ell_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = t_P \quad \boxed{\text{tempo di Planck}}$$

Unità di Planck

→ 3 unità naturali (= definite in termini di costanti universali)
per misurare: tempo, spazio ed energia

$$m_P \simeq 2.2 \times 10^{-8} \text{ kg} \quad \ell_P \simeq 1.6 \times 10^{-35} \text{ m} \quad t_P \simeq 5.4 \times 10^{-44} \text{ s}$$

$$\text{massa protone} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{raggio universo: } \frac{c}{H_0} \simeq 1.4 \times 10^{26} \text{ m}$$

$$\text{età universo: } \frac{1}{H_0} \simeq 4.6 \times 10^{17} \text{ s} \quad (H_0 = \text{costante di Hubble})$$

NB – eccessiva grandezza di m_P rispetto scala di
massa delle particelle note è un riflesso
della debolezza della gravità

Buchi Neri

Soluzione di **Schwarzschild** dipende soltanto dalla massa M .

Risultato generale: per descrivere un BH, essenzialmente, abbiamo bisogno di specificare soltanto la massa M , la carica elettrica Q e il momento angolare J :

i buchi neri non hanno peli (Wheeler)

Stella che collassa in un BH: informazioni quali forma e composizione della stella sono perse nel processo → parametri M , Q e J del BH descrivono suo stato macroscopico, come pressione, volume etc. descrivono lo stato macroscopico di gas.

NB - analogia con termodinamica di un gas non è casuale ...

Entropia

gedanken experiment (Wheeler) – ordino cappuccino nel bar in orbita attorno a un BH → lancio tazza oltre l'orizzonte.

Modo di pensare tradizionale: la tazza e l'entropia in essa contenuta spariranno oltre l'orizzonte → diminuisce l'entropia dell'universo → aggirato il secondo principio della termodinamica.

possibile che sia così facile violare una legge fondamentale come il secondo principio?

Bekenstein: secondo principio è troppo radicato nelle regole della fisica per poterlo sacrificare → unica possibilità per evitare questa sciagura è che i BH posseggano entropia!

Entropia

Qual è il ragionamento di Bekenstein?

Entropia $\iff$ **Energia**: entropia ha a che fare con il numero di configurazioni di qualcosa, e quel qualcosa ha comunque una energia; potremmo dire che l'entropia conta i modi possibili di disporre “bit” elementari d'energia.

Nel gedanken experiment di Wheeler la tazza di cappuccino va ad aumentare massa e dimensioni del BH



se i buchi neri hanno un'entropia che cresce con la massa, aumento d'entropia può compensare quella persa all'esterno a causa della scomparsa della tazza.

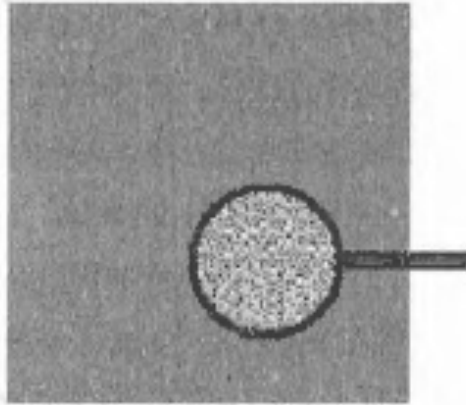
Entropia

idea sconvolgente: l'entropia conta le configurazioni alternative → ma di cosa, in questo caso? se l'orizzonte del BH è “glabro”, cosa c'è da contare? un BH dovrebbe avere entropia nulla → “buchi neri senza peli” di **Wheeler** è in contraddizione con l'entropia di **Bekenstein**.

la contraddizione è solo apparente

Esempio - Sparpagliate a caso pixel bianchi e neri sullo schermo del vostro computer → schermo colorato di un grigio tanto più uniforme quanto più piccoli sono i pixel. A questo punto, il numero di modi in cui potremmo cambiare la disposizione dei puntini senza accorgercene – a meno di usare una lente d'ingrandimento – è enorme.

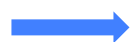
Entropia



compresenza di apparente uniformità ed entropia elevata è un'indicazione importante, perché implica che il sistema – qualunque esso sia – deve essere costituito da un numero molto grande di oggetti microscopici che:

- sono troppo piccoli per essere visti;
- possono essere ricombinati in molti modi senza cambiare l'aspetto del sistema.

Entropia

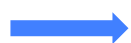


generalizzazione del secondo principio:

quando la materia cade in un BH, l'aumento dell'entropia di questo compensa o eccede l'entropia “perduta” della materia

$$\Delta S_{\text{BH}} + \Delta S_{\text{ext.}} \geq 0$$

Hawking: in ogni interazione che coinvolge buchi neri (ad es., fusione di due BH con formazione di BH più grande) **la somma delle aree dei buchi neri non può diminuire**



ipotesi di **Bekenstein:** **entropia di un BH ha a che fare con l'area del suo orizzonte**

... ma l'entropia non era una variabile estensiva?

Entropia

Argomento di **Bekenstein**: semplice, bello e rivoluzionario

Domanda: quanto cambia il raggio di un BH
se ci cade dentro un singolo bit?

Come si fa ad aggiungere un solo bit? Gettiamo nel BH una particella elementare, ad es. un **fotone**. Anche un solo fotone, però, può trasportare più di un bit (se sappiamo dove il fotone attraversa l'orizzonte, abbiamo parecchia informazione).

Idea: richiediamo che la posizione del fotone sia la più indeterminata possibile, compatibilmente con l'ingresso nel BH → **lunghezza d'onda ~ raggio di Schwarzschild**

Entropia

→ energia del fotone da un bit:

$$dE = \frac{h c}{\lambda} = \frac{2 \pi \hbar c}{r_g}$$

→ aumento di massa del buco nero:
(BH con $M = M_{\odot} \rightarrow dM \sim 10^{-45} \text{ kg}$)

$$dM = \frac{dE}{c^2} = \frac{2 \pi \hbar}{c r_g}$$

→ aumento raggio orizzonte:
(BH con $M = M_{\odot} \rightarrow dr_g \sim 10^{-72} \text{ m}$)

$$dr_g = \frac{2 G}{c^2} dM = \frac{4 \pi \hbar G}{c^3 r_g}$$

→ aumento area orizzonte: $dA = 4 \pi dr_g^2 = 8 \pi r_g dr_g = 32 \pi^2 \frac{\hbar G}{c^3}$

→

$$dA \propto \ell_P^2$$

NB – argomento qualitativo
→ coefficiente indeterminato

Entropia



aggiunta di un bit d'informazione fa crescere la superficie dell'orizzonte degli eventi di una quantità proporzionale all'area di Planck!

nei principi della MQ e della RG c'è un misterioso legame tra gli indivisibili bit d'informazione e l'elemento di superficie alla scala di Planck!

immaginiamo di costruire il BH un bit alla volta: quando è finito, l'area dell'orizzonte sarà uguale al numero totale di bit di informazione nascosti al suo interno, ovvero

Informazione = Area

Temperatura

perché nessuno (primo fra tutti [Hawking](#)) crede a questo risultato? perché BH ha massa (= energia): se ha anche entropia deve avere una temperatura

temperatura = aumento d'energia di un sistema a cui si è aggiunto un bit d'informazione

$T = dE / dS \rightarrow$ BH deve emettere radiazione con spettro termico di Planck corrispondente a questa temperatura.

Com'è possibile? Nulla può sfuggire dall'orizzonte di un BH!

Lunghezza d'onda della radiazione termica $\rightarrow$ unica scala di lunghezza presente nel problema è r_g

$$\lambda \sim r_g \quad \rightarrow \quad E = 2 \pi \hbar \frac{c}{\lambda} \sim \frac{\pi \hbar c^3}{G M}$$

Temperatura

$$E = k_B T \quad \rightarrow \quad T \propto \frac{\hbar c^3}{k_B G M}$$

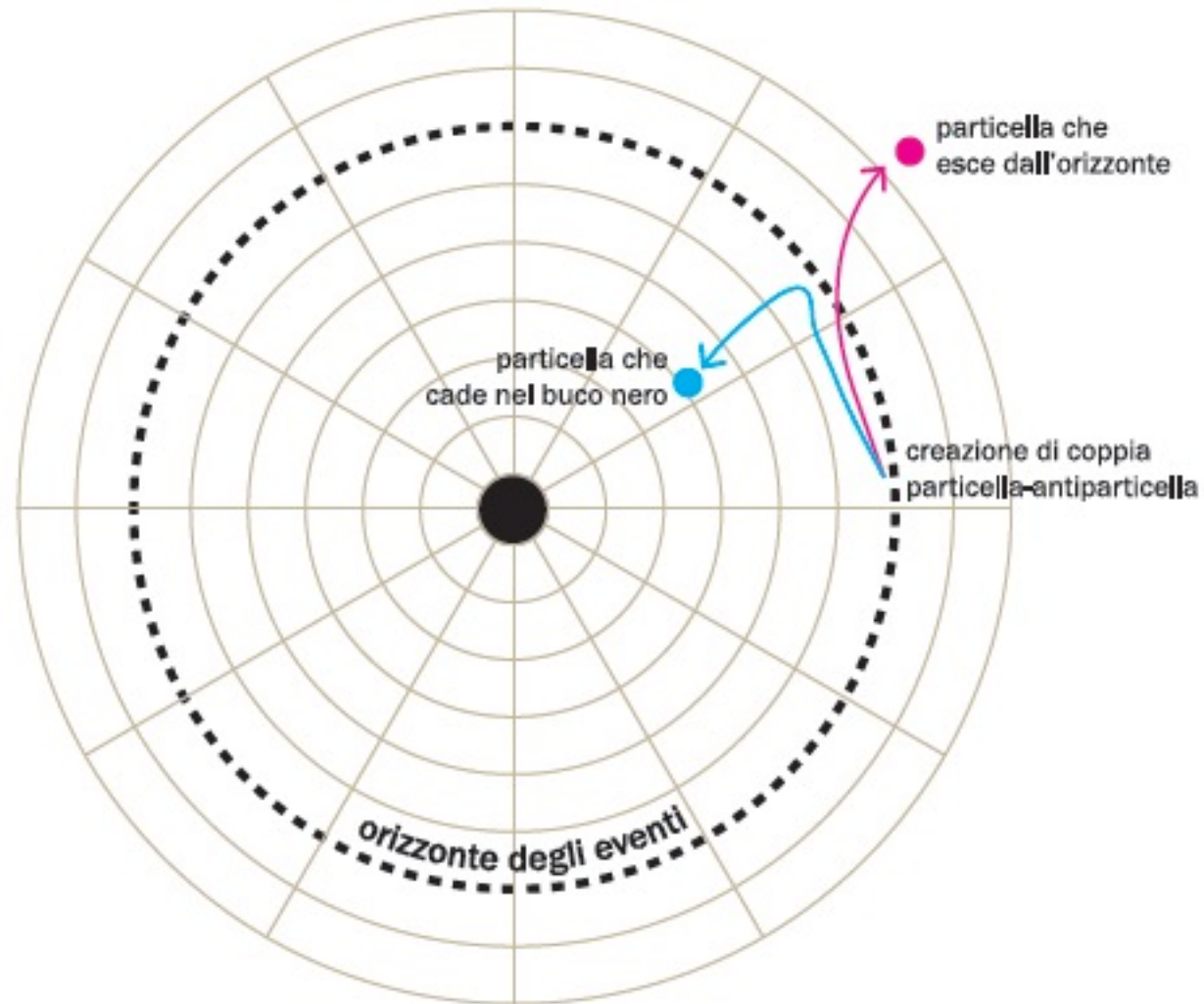
(stima grossolana: calcolo richiede teoria dei campi quantistici, **QFT**)

Hawking: studio del comportamento dei campi quantistici vicino all'orizzonte di un BH $\rightarrow$ fluttuazioni quantistiche del vuoto $\rightarrow$ creazione coppie di fotoni virtuali: se uno dei due cade oltre l'orizzonte, l'altro diviene reale e si allontana dall'orizzonte $\rightarrow$ emissione di radiazione a **temperatura**

$$T_{\text{BH}} = \frac{1}{8\pi} \frac{\hbar c^3}{k_B G M}$$

NB – come misurata da osservatore a distanza ∞ dal BH

Temperatura



Temperatura

formula di **Hawking** è il singolo risultato più importante che connette i principi della **MQ** con la **RG**.

NB – orizzonte di un BH emette radiazione verso l'esterno →
BH evaporano fino a scomparire: in quanto tempo?

$$\frac{d(M c^2)}{dt} = \mathcal{L}$$

Stefan-Boltzmann: $\mathcal{L} = \sigma A T^4$

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2}$$

$$A = 4 \pi r_g^2 = 16 \pi \frac{G^2 M^2}{c^4}$$

→ $\mathcal{L} = \alpha \mathcal{L}_E \left(\frac{m_P}{M} \right)^2$ ★

$$\alpha = \frac{1}{15360 \pi}$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{c^5}{G} \simeq 3.63 \times 10^{52} \text{ W}$$

Temperatura

$$\star \rightarrow c^2 M^2 dM = \alpha \mathcal{L}_E m_p^2 dt \quad \rightarrow \quad t = \frac{M^3}{3} \frac{c^2}{\alpha \mathcal{L}_E m_p^2} = \frac{1}{3} \frac{M c^2}{\mathcal{L}} \quad \star \star$$

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{15360 \pi} \frac{3.63 \times 10^{52} \times (2.18 \times 10^{-8})^2}{M^2} \simeq \frac{3.58 \times 10^{32}}{M_\odot^2} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ W}$$

$$M_\odot \simeq 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$



$$\mathcal{L} \simeq 9 \times 10^{-29} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2 \text{ W}$$

Esempio:

$$M = 10 M_\odot \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} \simeq 9 \times 10^{-31} \text{ W}$$



$$T = \frac{1}{8 \pi} \frac{c^2}{k_B} \frac{m_p^2}{M} \simeq \frac{1}{8 \pi} \frac{(3 \times 10^8)^2}{1.38 \times 10^{-23}} \frac{(2.18 \times 10^{-8})^2}{10 \times 1.99 \times 10^{30}} \simeq 6.2 \text{ nK}$$

... ecco spiegato perché ad [Hawking](#) non hanno ancora dato il Nobel

Temperatura

★★



$$t = \frac{(10 \times 1.99 \times 10^{30}) (3 \times 10^8)^2}{3 \times (9 \times 10^{-31})} \simeq 6.6 \times 10^{77} \text{ s}$$

$$1 \text{ anno} \simeq \pi \times 10^7 \text{ s} \quad \rightarrow \quad t \simeq 2 \times 10^{70} \text{ anni}$$

NB – età dell'universo $\sim 10^{10}$ anni

espressione per T_{BH} $\rightarrow$ espressione per S_{BH}

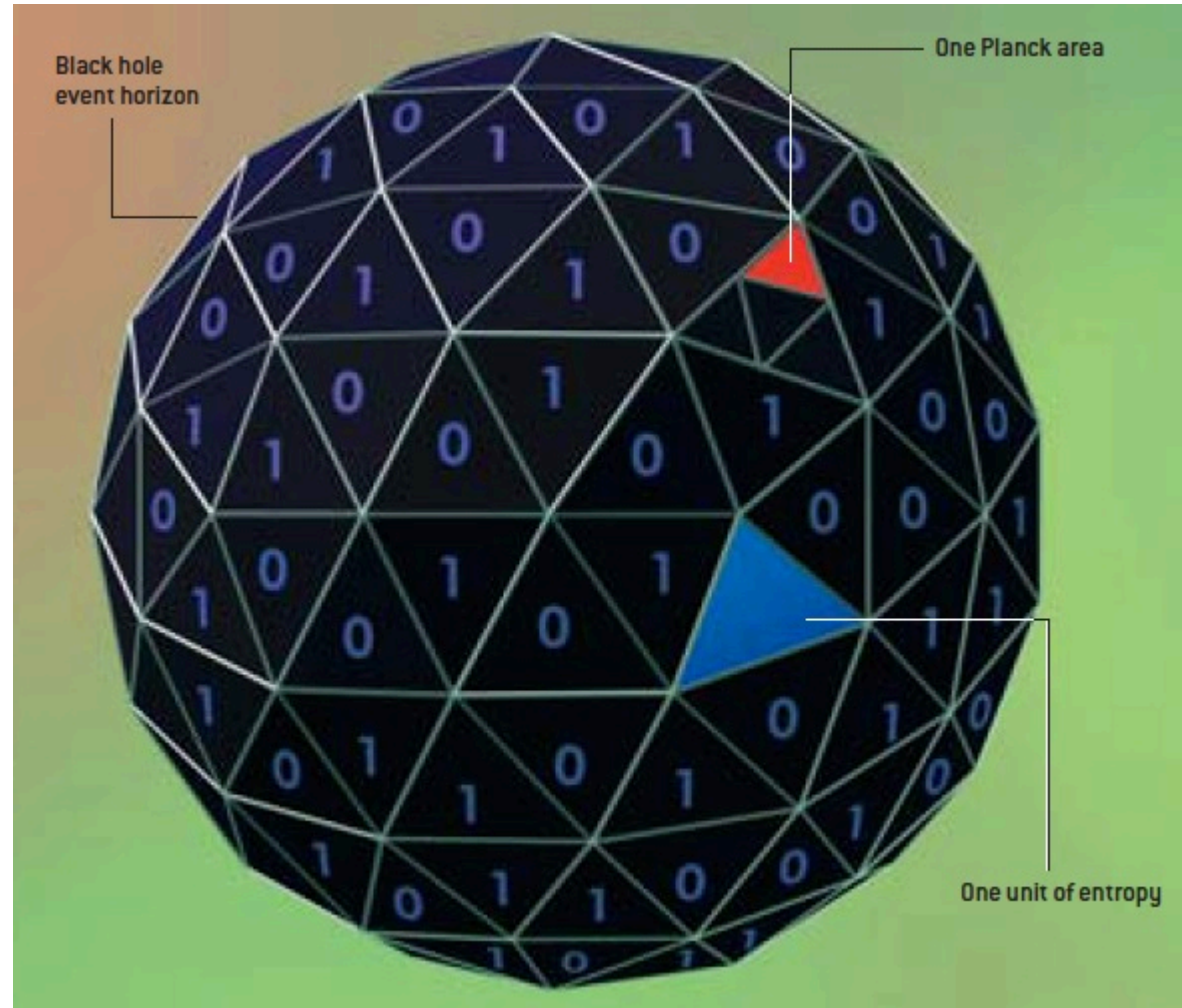
$$\begin{aligned} \frac{S}{k_B} &= \int_0^{M_{\text{BH}}} \frac{d(M c^2)}{k_B T(M)} = c^2 \frac{8 \pi G}{\hbar c^3} \int_0^{M_{\text{BH}}} dM M \\ &= 4 \pi \frac{G}{\hbar c} M_{\text{BH}}^2 = \pi \left(\frac{2 G M_{\text{BH}}}{c^2} \right)^2 \frac{c^3}{G \hbar} = \pi \frac{r_g^2}{\ell_P^2} = \frac{1}{4} \frac{4 \pi r_g^2}{\ell_P^2} \end{aligned}$$

il coefficiente che Bekenstein non è riuscito a calcolare è $1/4$

Entropia

calcolo rigoroso
(QFT)

$$\frac{S_{\text{BH}}}{k_{\text{B}}} = \frac{1}{4} \frac{A}{\ell_{\text{P}}^2}$$



Entropia

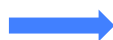
NB – Perché fattore $1/4$ nella relazione tra entropia e area? Perché la lunghezza di Planck è definita male: se eseguiamo sostituzione

$\ell'_p = 2\ell_p$, otteniamo $S = A/\ell'^2_p \rightarrow 1 \text{ bit per area di Planck}$

- Entropia è più importante della temperatura: espressione di T è indipendente dalla descrizione della gravità, mentre quella di S contiene informazione sulla teoria adottata.

Teoria di Einstein: $S \propto A$; in teorie alternative la relazione tra entropia e area è più complicata (Wald)

Entropia
&
Temperatura



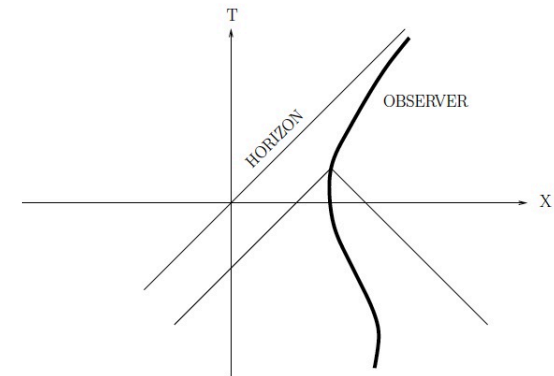
gravità deve avere a che
fare con la termodinamica

Gravità & Termodinamica

RG predice esistenza di orizzonti → osservatori che:

- non hanno accesso a informazioni da certe regioni dello spaziotempo
- percepiscono spaziotempo come caldo

NB – non solo BH: anche osservatore che accelera nello spazio vuoto rileva orizzonte e si vede immerso in un bagno termico con $T \propto a$ (Davies & Unruh): $a = g \rightarrow T = 10^{-65} \text{ K}$



Boltzmann: possibilità di riscaldare un corpo deriva dal fatto che esso possiede dei gradi di libertà interni che consentono di immagazzinare energia e scambiare con l'esterno, ovvero: **se può essere scaldato, possiede una microstruttura**

Gravità & Termodinamica

Non c'è bisogno di sondare la materia alla scala dell'angstrom per capire che la materia è fatta di **atomi**: *lo dice il fatto che la materia può essere scaldata*

Esistenza degli atomi lascia chiara firma anche alle più grandi scale macroscopiche sotto forma di **temperatura** e **calore** → conto gli atomi utilizzando variabili puramente macroscopiche: **teorema di equipartizione**

$$N = \frac{E}{(1/2) k_B T}$$

variable priva di significato nel limite continuo

variabili che hanno significato solo nel limite continuo

Gravità & Termodinamica

→ anche spaziotempo deve possedere gradi di libertà microscopici responsabili del suo comportamento termico →

atomi di spaziotempo



al pari dell'elasticità dei corpi e della dinamica dei gas, la gravità è un fenomeno *emergente*: la descrizione dello spaziotempo in termini di metrica emerge a scale grandi rispetto alla lunghezza di Planck

metrica, curvatura, etc. usate in RG sono come densità, velocità, etc. nella meccanica dei fluidi, con nessun significato microscopico

Gravità & Termodinamica

Analogia

- ✓ cambiamenti nei parametri fisici di un gas (ad es., volume)
→ cambiamento nel contenuto di calore e nell'energia interna regolato da prima legge della termodinamica
- ✓ variazione nella posizione di un orizzonte → cambiamento nella dinamica dello spaziotempo regolato da eq.ni di Einstein

corrispondenza tra variabili gravitazionali e variabili termodinamiche → eq.ni di Einstein si riducono alla prima legge della termodinamica (Jacobson)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \Big|_{\text{orizzonte}} \longleftrightarrow dE = T dS + \delta W$$

Gravità & Termodinamica

Analogia

- ✓ Termodinamica: all'equilibrio l'entropia è massima
- ✓ Massimizzazione espressione matematica dell'entropia di una regione di spaziotempo → eq.ni che governano la dinamica dello spaziotempo per ampia classe di modelli della gravità, inclusa la RG



spaziotempo obbedisce alle eq.ni di Einstein perché
atomi di spaziotempo massimizzano l'entropia
(Padmanabhan)

Gravità & Termodinamica

Questi risultati corroborano la realtà degli atomi di spaziotempo



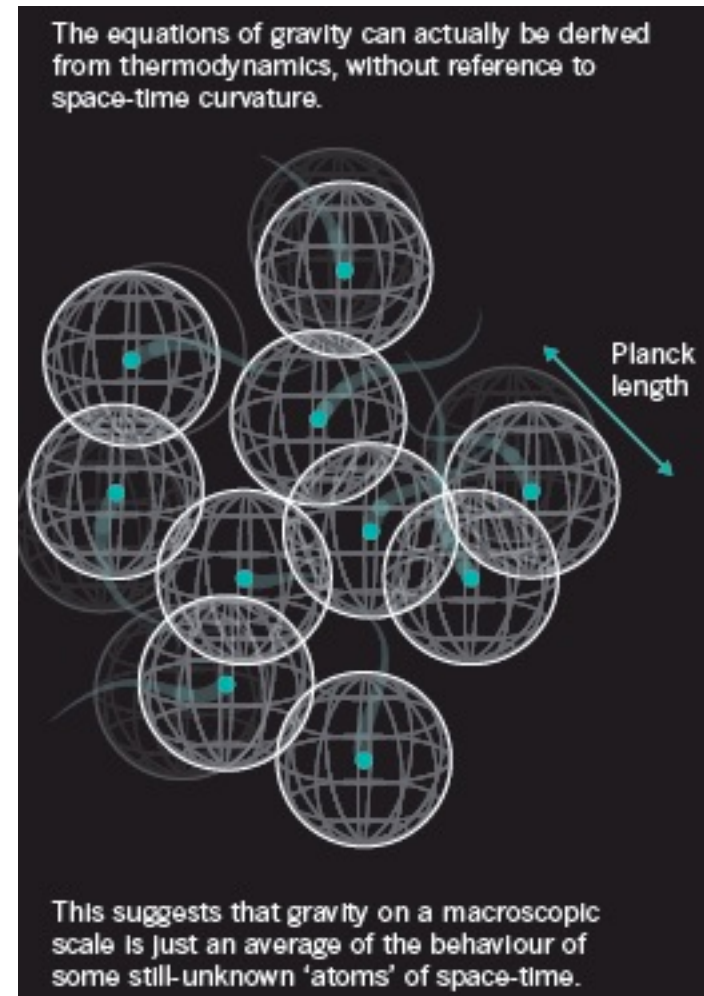
Possibile determinare la densità di questi atomi a partire dalla dinamica macroscopica? Ovvero: teorema di equipartizione vale anche per lo spaziotempo? **SI**, per ampia classe di modelli della gravità (**Padmanabhan**)

NB – differenza cruciale tra sistema gassoso e gravità: nel primo i gradi di libertà risiedono nel volume; nel caso della gravità, i gradi di libertà rilevanti di una certa regione risiedono sulla sua superficie → **olografia** (cfr. avanti)

Gravità & Termodinamica

connessione **gravità-
termodinamica** è una realtà fisica!

Siamo nella stessa situazione di **Boltzmann**: non abbiamo evidenza diretta degli atomi di spaziotempo, ma, grazie alla descrizione termodinamica, possiamo dire molto su di essi.



Gravità & Termodinamica

- Se idea dell'**emergenza** è corretta, maggior parte dei tentativi di quantizzare le eq.ni di **Einstein** destinati all'insuccesso: come scoprire la fisica atomica quantizzando le equazioni dell'elasticità → cambio di paradigma
- Mentre **cinematica gravitazionale** (cos'è la gravità e come influenza la materia) deriva dal **P.d'E.**, **dinamica gravitazionale** (come la materia produce la gravità) NO: per le eq.ni di **Einstein** manca un principio altrettanto elegante da cui ricavarle

Connessione **gravità-termodinamica** cura il problema: **spaziotempo** e **materia** possono **entrambi essere caldi**, ovvero entrambi hanno proprietà termodinamiche: eq.ni di **Einstein** descrivono il loro bilancio termico

Olografia

$S_{\text{BH}} \propto A \rightarrow$ tutte le caratteristiche di un BH, oggetto a priori 3D, sono “leggibili” su una superficie 2D



principio olografico ('t Hooft & Susskind): comportamento di un sistema fisico i cui gradi di libertà occupano un dato volume è equivalente a quello di un altro “sistema” definito sulla superficie che delimita tale volume (**schermo olografico**)

NB – informazione relativa al sistema va considerata in senso quantistico e deve essere inclusa la gravità

- congettura non dimostrata se non in alcune situazioni molto particolari (**cfr. avanti**); si pensa sia una proprietà fondamentale della **gravità quantistica**

Gravità Entropica

forza entropica = forza macroscopica efficace che si origina in un sistema a molti gradi di libertà dalla tendenza statistica ad aumentare l'entropia.

eq.ne di forza espressa in termini di differenze di entropia ed indipendente dai dettagli della dinamica microscopica → no campo fondamentale associato.

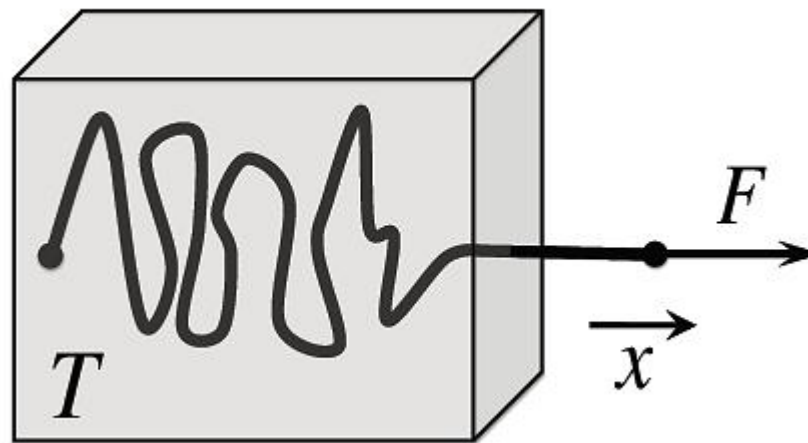
Esempio – elasticità di molecola di polimero (DNA)

polimero = catena di monomeri di lunghezza fissata, ciascuno in grado di ruotare liberamente intorno al punto d'attacco → grandissimo numero di configurazioni diverse, tutte della stessa energia.

Polimero immerso in bagno termico → configurazione arrotondata casualmente è entropicamente favorita

Gravità Entropica

Molecola stirata lungo direzione x tramite forza esterna F applicata ad un estremo (l'altro è vincolato nell'origine)

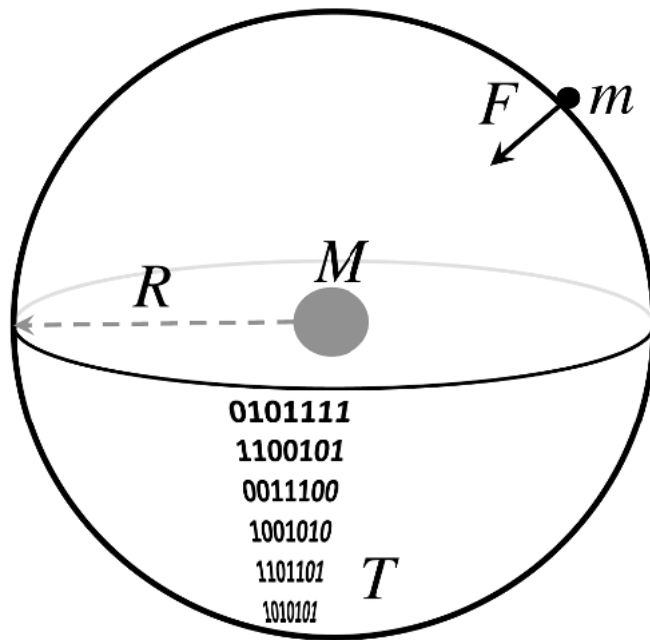


→ forza di reazione entropica lungo $-x$ (direzione in cui aumenta l'entropia) $\propto T$ e che obbedisce alla legge di Hooke

$$F_{\text{poly}} \sim -\text{const } k_B T \langle x \rangle$$

Gravità Entropica

Massa M con schermo olografico sferico (raggio = R) + massa m vicina allo schermo



guidati da argomento di Bekenstein per i BH, quando m è a distanza $\Delta x \sim$ lunghezza Compton dallo schermo ne cambia l'entropia di:

$$\Delta S = 2 \pi k_B = 2 \pi k_B \frac{\Delta x}{\lambda_C}$$

$$= 2 \pi k_B \frac{m c}{\hbar} \Delta x \quad \star$$

forza entropica: $F \Delta x = T \Delta S \quad \xrightarrow{\star} \quad F = 2 \pi k_B T \frac{m c}{\hbar} \quad \star\star$

Gravità Entropica

principio olografico $\rightarrow$ tutta l'informazione presente nel sistema è codificata sullo schermo $\rightarrow$ numero di bit:

$$N = \frac{A}{\ell_P^2} = \frac{4\pi R^2}{\ell_P^2}$$

equipartizione $\rightarrow$ $E = N \frac{1}{2} k_B T = 2\pi k_B T \frac{R^2}{\ell_P^2}$

★★ $\rightarrow$ $= \frac{F \hbar R^2}{m c \ell_P^2}$

$$\begin{array}{l} E = M c^2 \\ \ell_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3} \end{array} \xrightarrow{\text{blue}} M c^2 = \frac{F \hbar R^2 c^3}{m c \hbar G} \xrightarrow{\text{blue}} \boxed{F = G \frac{m M}{R^2}}$$

la gravità è entropica! il gravitone non esiste! (Verlinde)

Principio Olografico

Applicabile all'universo nel suo insieme? universo reale è varietà $(3 + 1)$ -D $\rightarrow$ deve esistere insieme alternativo di leggi fisiche valide sul confine $(2+1)$ -D dello spaziotempo.

Non nota (ora) teoria che funziona così. Inoltre, quale superficie come confine dell'universo? $\rightarrow$ studio di modelli più semplici: spazio **Anti-de Sitter (AdS)**

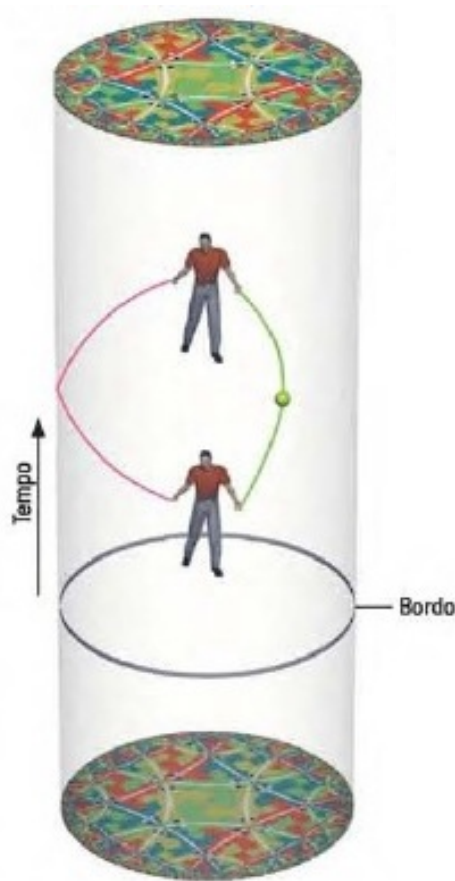
spazio a curvatura costante negativa $\rightarrow$ **pesci di Escher**



NB – in realtà, i pesci hanno tutti la stessa grandezza e il bordo circolare è a distanza infinita dal centro del disco; questa rappresentazione su una pagina piatta comprime i pesci lontani (simile a ingrandimento che subiscono paesi vicino ai poli nella mappa della Terra)

Principio Olografico

A differenza del nostro universo - in espansione - **AdS** ha sempre lo stesso aspetto: no espansione, né contrazione

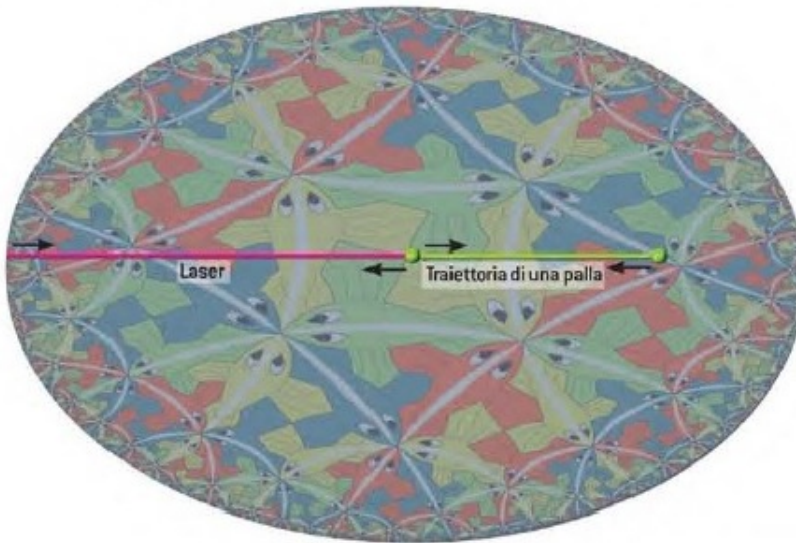


rappresentazione spaziotempo **AdS**:
dischi di spazio iperbolico (curvatura
costante negativa) impilati uno
sull'altro, ognuno dei quali
rappresenta l'universo in un dato
istante di tempo → cilindro
risultante è lo spaziotempo **anti-de
Sitter 3D** (**AdS₃**), dove l'asse del
tempo corre lungo l'asse del cilindro.

Principio Olografico

AdS ha strane proprietà!

All'interno è come essere sul fondo di un pozzo gravitazionale: oggetto lanciato tornerebbe indietro come un boomerang, in un tempo indipendente dalla forza con cui è scagliato; maggiore è la forza, più lontano arriva.



raggio di luce arriverebbe fino all'infinito e tornerebbe indietro in un intervallo di tempo finito (possibile perché subisce contrazione temporale tanto più grande quanto più si allontana)

Principio Olografico

Anche se infinito, **AdS** possiede un bordo (si trova all'infinito); questo bordo è il luogo dove si trova l'ologramma del principio olografico.

Congettura di Maldacena: teoria quantistica della gravitazione nell'interno di spaziotempo **AdS** è del tutto equivalente a teoria delle particelle sul bordo priva di gravitazione

ovvero: *in un mondo AdS la gravità si materializza con la comparsa della dimensione che viene aggiunta alla frontiera*

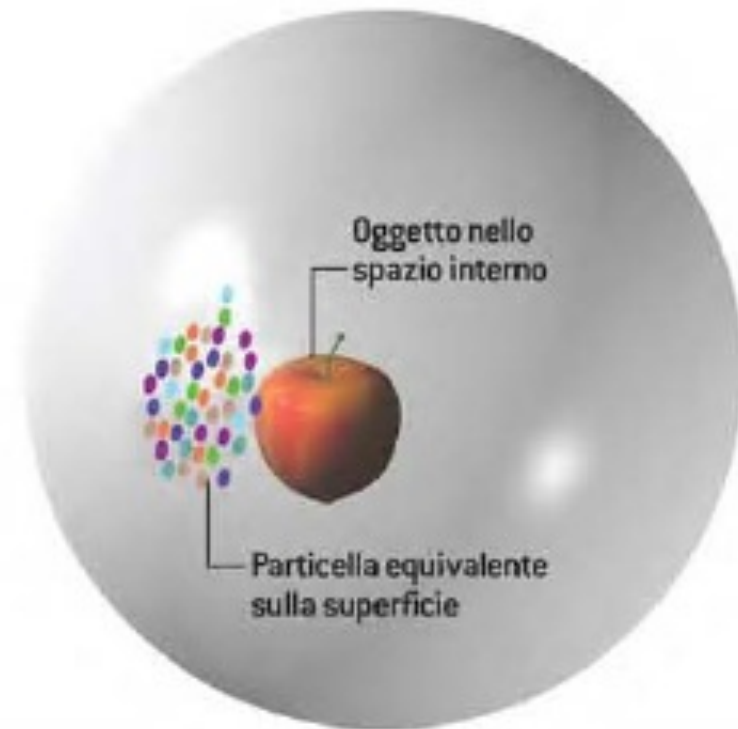
→ possibilità di usare teoria quantistica delle particelle (ben compresa) per definire una teoria quantistica della gravitazione (tutta da scoprire)

Principio Olografico

... il mondo come ologramma (Susskind)

nuvole di quark e gluoni sulla
superficie descrivono oggetti
complessi (ad es., mela)
presenti all'interno

oggetti che si trovano
all'interno sperimentano
la gravità anche se un
effetto gravitazionale non
è presente sulla superficie



Principio Olografico

Teoria olografica si mantiene valida se, invece di AdS, consideriamo un universo come il nostro?

Caratteristica cruciale di AdS è che **sul bordo il tempo è ben definito**: il bordo esiste da sempre ed esisterà per sempre.

Il nostro universo proviene da un big bang ed è in espansione
→ bordo non ben definito → **non c'è alcun posto dove mettere l'ologramma**

*... se la congettura olografica è vera, la teoria definitiva non deve riguardare i campi e neppure lo spaziotempo, ma lo **scambio di informazione tra processi fisici***

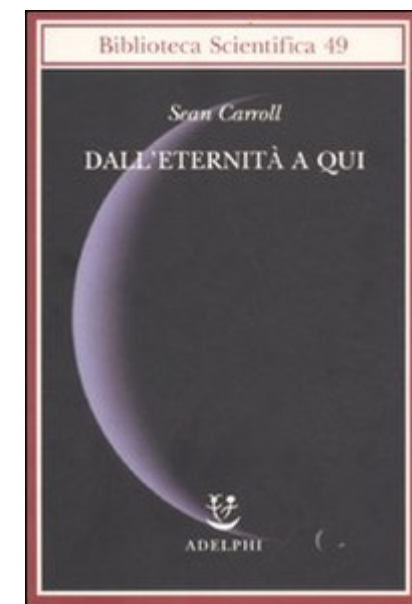
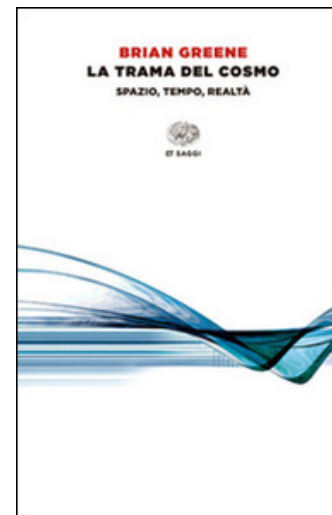
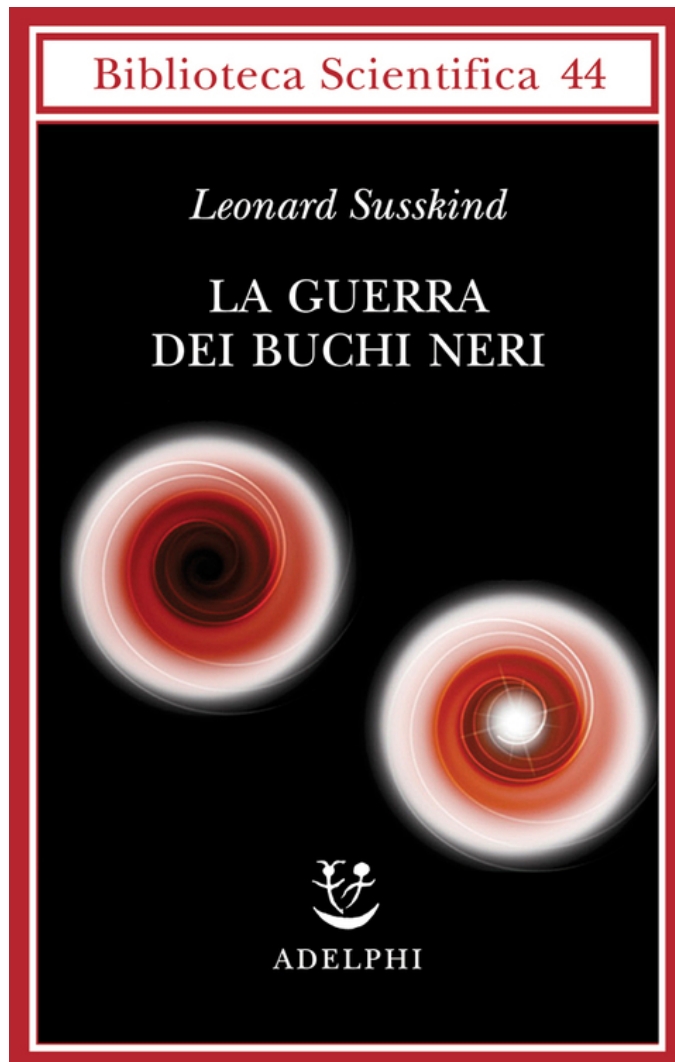


L'illusione della gravità

La forza di gravità
e una delle tre dimensioni dello spazio potrebbero essere illusioni
generate da particolari interazioni tra particelle e campi
che avvengono in un universo a due dimensioni

di Juan Maldacena

La realtà che ci circonda ha tre dimensioni. Se a queste tre dimensioni si aggiunge il tempo, il risultato è uno spazio con quattro dimensioni, lo spazio-tempo. Quindi, viviamo in un universo quadridimensionale, forse. Nuove teorie fisiche ipotizzano che una delle tre dimensioni spaziali possa essere illusoria, e in effetti, sia le particelle elementari sia i campi che compongono la realtà si muovono in un ambiente bidimensionale simile alla Flatlandia di Edwin A. Abbott. Anche la gravità sarebbe parte dell'illusione, una forza che non è presente nel mondo bidimensionale ma che si materializza con la comparsa illusoria della terza dimensione. In particolare, le teorie prevedono che il numero di dimensioni della realtà potrebbe essere una questione di punti di vista: i fisici potrebbero scegliere di descrivere la realtà come qualcosa che obbedisce a un certo insieme di leggi (tra cui la gravità) in tre dimensioni. In modo equivalente, potrebbero scegliere di descrivere la realtà come qualcosa che obbedisce a un diverso insieme di leggi che è adatto a due dimensioni (e in assenza di gravità). Nonostante le radicali differenze, entrambe le teorie descrivono tutto ciò che vediamo, e sono in accordo con tutti i dati che possiamo raccogliere sul funzionamento dell'universo. E, quel che è peggio, non avremmo modo di appurare quale teoria sia «realmente» vera.



SPARE

- distanza tra punti infinitamente vicini in spazio Euclideo N -dimensionale
→ teorema di **Pitagora**

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_N^2$$

$$ds^2 = \sum_{i,k} \delta_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, \dots, N)$$

metrica

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

$$\delta_{ik} = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$$

- distanza tra punti infinitamente vicini in spazio di **Minkowski** (pseudoEuclideo) $(1, N-1)$ -dimensionale

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{N-1}^2$$

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots, N-1)$$

metrica

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, \dots, 1\}$$

QFT

RG: gravità non è una forza ma curvatura dello spaziotempo
→ seria difficoltà concettuale quando si applica **MQ** alla gravità secondo tecniche sviluppate nel caso dell'interazione elettromagnetica (**QED**).

QED: primo esempio di **teoria di campo quantistico (QFT)**:
entità fondamentali sono i campi → particelle sono eccitazioni (“quanti”) dei campi

Calcoli teorici in **QFT** → **diagrammi di Feynman**: rateo di un processo → somma su tutte le (infinite) possibili modalità di realizzazione del processo stesso

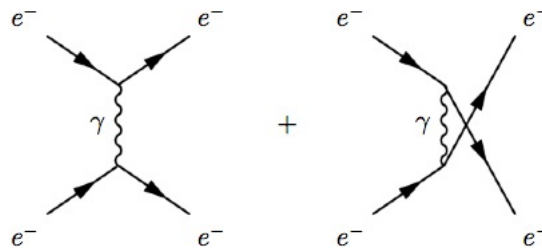
Esempio - collisione di 2 elettroni

parto da 2 elettroni liberi  “1”

QED

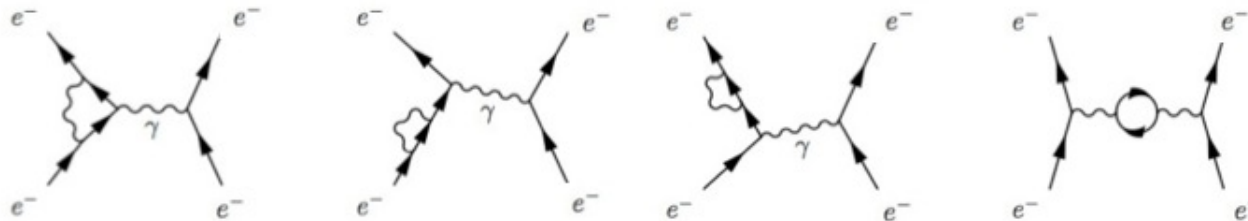
... a cui aggiungo effetto di:

1. scambio di un fotone (**virtuale**)



“0.1”

2. scambio di 2 fotoni + conversione del fotone scambiato in coppia particella-antiparticella



“0.01”

3. ... e via complicando ...

QED

Infinite modalità distinte → impossibile fare calcoli esatti!

QED: forza di debole intensità → contributi principali al calcolo del rateo provengono dai diagrammi più semplici → risultati in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali

NB – l'idea funziona solo perché possibile partire da 2 elettroni liberi

problema: calcolo diagrammi più complicati fornisce risultato infinito

soluzione (fine anni '40): a patto di definire con cura la massa e la carica elettrica dell'elettrone (**rinormalizzazione**) si dimostra matematicamente che ogni diagramma infinito positivo è accompagnato da uno infinito negativo → **nella somma si cancellano** (Feynman, Schwinger, Tomonaga)

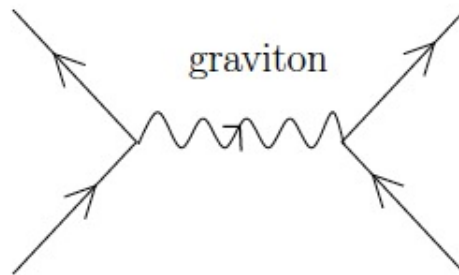
QGD

Questo approccio non funziona nella caso della gravità → ?

Gravità come curvatura dello spaziotempo → assenza di gravità = spaziotempo piatto + l'effetto di corpi materiali che si scambiano **gravitoni** → **QGD** ... ma è lecito procedere come nella **QED**?

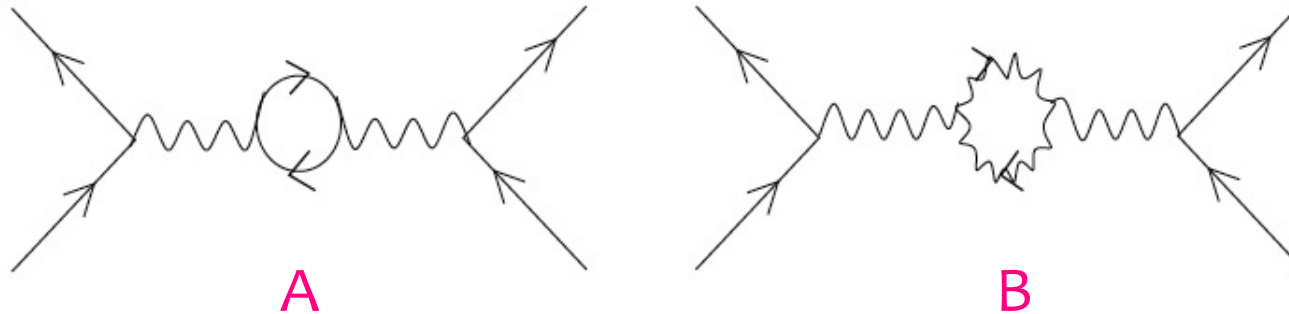
NO, per la gravità la **rinormalizzazione** non funziona!

Elettroni che si scambiano gravitoni → all'ordine più basso:



QGD

... all'ordine successivo:



- A – gravitone si trasforma in coppia di particelle virtuali (analogo diagramma in QED)
- B – gravitone si trasforma in coppia di gravitoni virtuali (no analogo in QED); “carica” gravitazionale è l’**energia** → gravità trasporta energia per cui s’accoppia con se stessa

NB – QED: sorgente = carica elettrica; fotone neutro
→ campo e.m. non s’accoppia con se stesso

QGD

Calcolo dei diagrammi **A** e **B**: otteniamo valore infinito (come nella **QED**)

QED – si parte dalla teoria con un certo n. di parametri (massa, carica, ...) e, aggiustando i loro valori, otteniamo risultati finiti per tutte le quantità fisiche rilevanti

QGD – si parte con, ad es., 2 parametri, e calcolando **B** si conclude che è necessario introdurre nuovo parametro → nuova teoria con 3 parametri genera diagrammi extra di valore infinito → resi finiti introducendo 4[°] parametro ...

→ nulla può essere predetto poiché necessario conoscere il valore di un n. infinito di parametri per descrivere la fisica: **QGD** è **non-rinormalizzabile**

QGD

Un ultima osservazione:

Questo approccio parte dallo spaziotempo piatto e aggiunge l'effetto della gravità per correzioni successive.

È una procedura corretta, nel caso della gravità? Forse **NO**

Forse spaziotempo piatto è esso stesso approssimazione di grande scala e a livello microscopico abbiamo bisogno di una descrizione diversa.

In questo caso, la non-renormalizzabilità della **QGD** non è un problema grave: non dobbiamo seguire un approccio **perturbativo** (aggiungere ad **1** numeri via via più piccoli), ma guardare alla gravità in un modo completamente diverso, **non-perturbativo**