



Meccanica Quantistica: la costante di Planck

Danilo Babusci
danilo.babusci@Inf.infn.it

Incontri di Fisica 2016

Introduzione

Convinzione comune tra i fisici di fine '800 è che con la dimostrazione dell'esistenza delle onde elettromagnetiche (**Hertz – 1888**), la comprensione della natura sia completa:

- ✓ meccanica dei corpi (**Newton**)
- ✓ elettromagnetismo (**Maxwell**)

... basta soltanto *misurare meglio alcune quantità* e spiegare alcuni *fenomeni di minore importanza*:

- **effetto fotoelettrico** (capacità della luce UV di indurre corrente in un conduttore)
- **assorbimento/emissione nei gas** (spettri con righe)
- **radiazione di corpo nero**

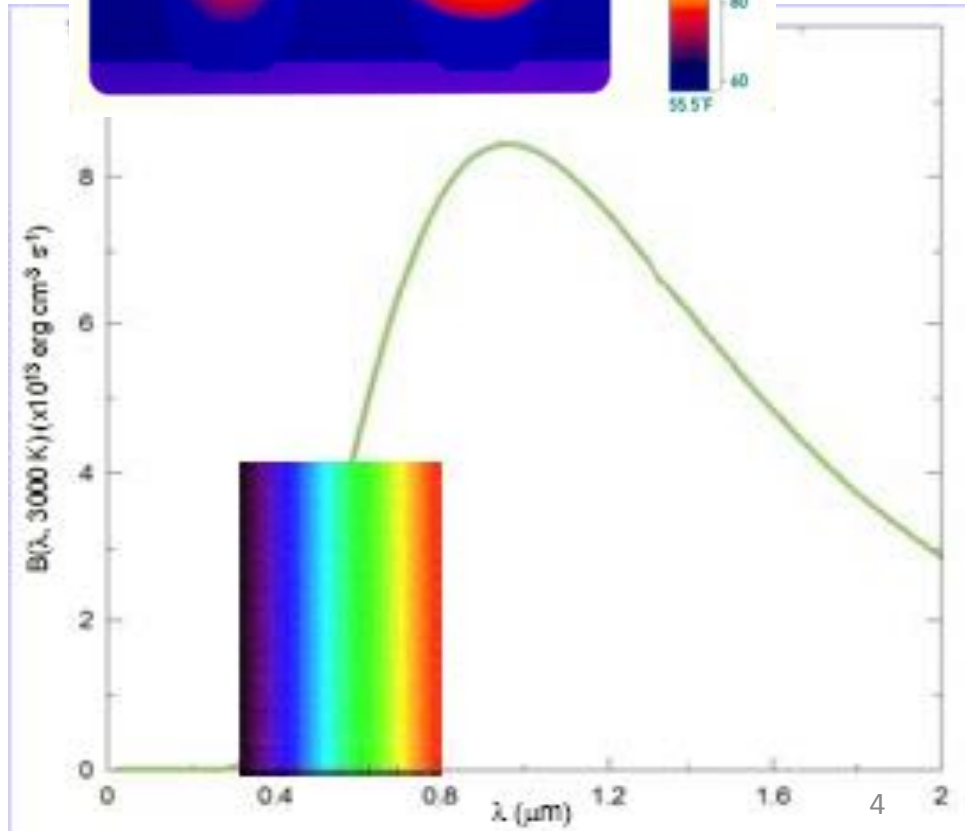
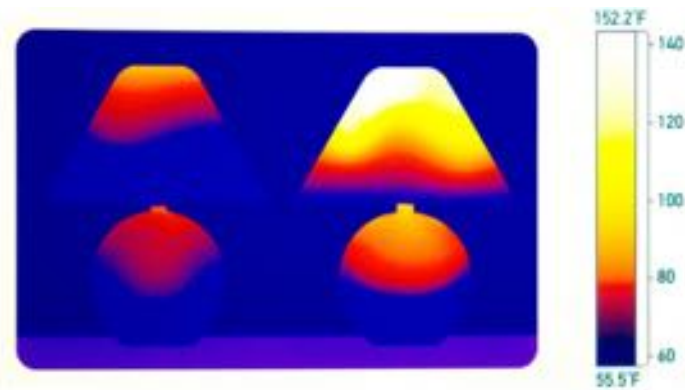
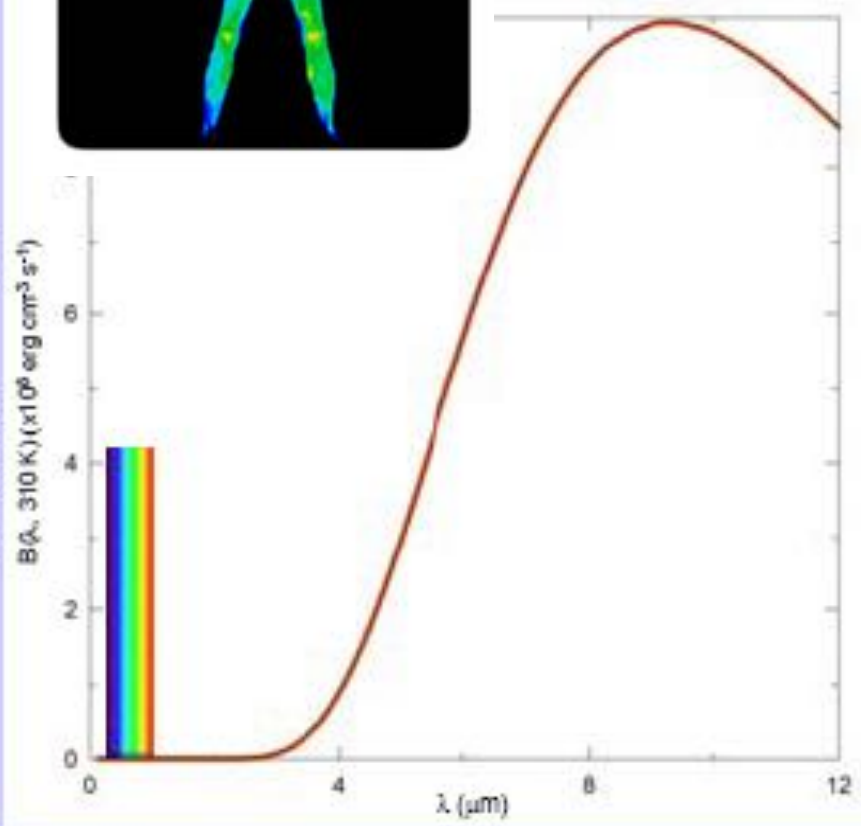
... è lo studio di questi fenomeni “minori” che scatena la crisi della fisica “classica” → **meccanica quantistica**

Emissione di Radiazione

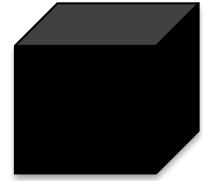
- ogni corpo a temperatura T (non in equilibrio termico con l'ambiente circostante) emette energia sotto forma di radiazione e.m. (**calore**)
 - oscillazione delle cariche elettriche contenute nel corpo (**Maxwell**)
- correlazione temperatura-colore (**Herschel – 1800**):
più alta T più la luce è spostata verso il blu (piccole lunghezze d'onda λ = alte frequenze ν)
 - spettro della luce solare
- ogni oggetto emette radiazione su tutte le lunghezze d'onda λ ma con una distribuzione di energia in funzione di λ che dipende dalla temperatura



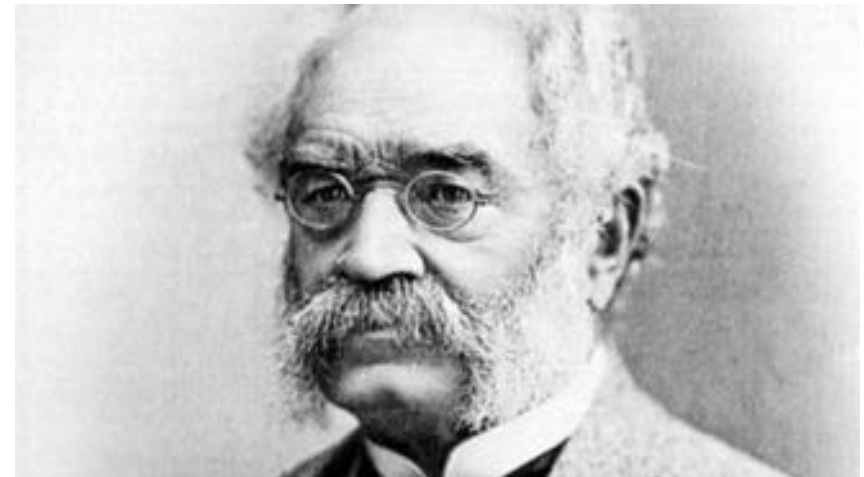
Emissione di Radiazione



Corpo Nero



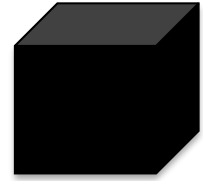
comprensione dei corpi incandescenti ha enorme impatto nelle produzioni industriali di stufe, piastre elettriche, lampade ... → necessario uno standard di misurazione dell'intensità luminosa



E. W. von Siemens

Idea: misura della temperatura degli oggetti dall'analisi della radiazione emessa → necessario modello di riferimento, i.e., oggetto che fornisce una radiazione che dipende soltanto dalla sua temperatura e non dalla sua forma e composizione chimica → **corpo nero**

Corpo Nero



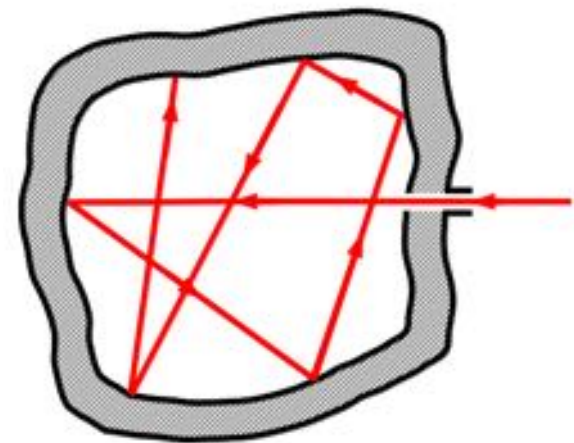
corpo nero = un qualunque oggetto che assorbe tutta la radiazione che incide su di esso, senza trasmetterne/rifletterne alcuna

equilibrio termico: emissività e = assorbimento $a \rightarrow$ **corpo nero**: $e = a = 1$

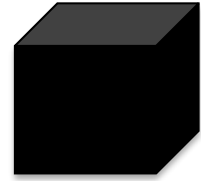
NB – concetto ideale: in natura sono possibili solo approssimazioni più o meno buone, i.e. $a < 1$

corpo nero di **Kirchhoff**: cavità mantenuta a temperatura costante, su cui è praticato piccolo foro

radiazione entrante viene assorbita e riemessa un grandissimo numero di volte prima di riuscire



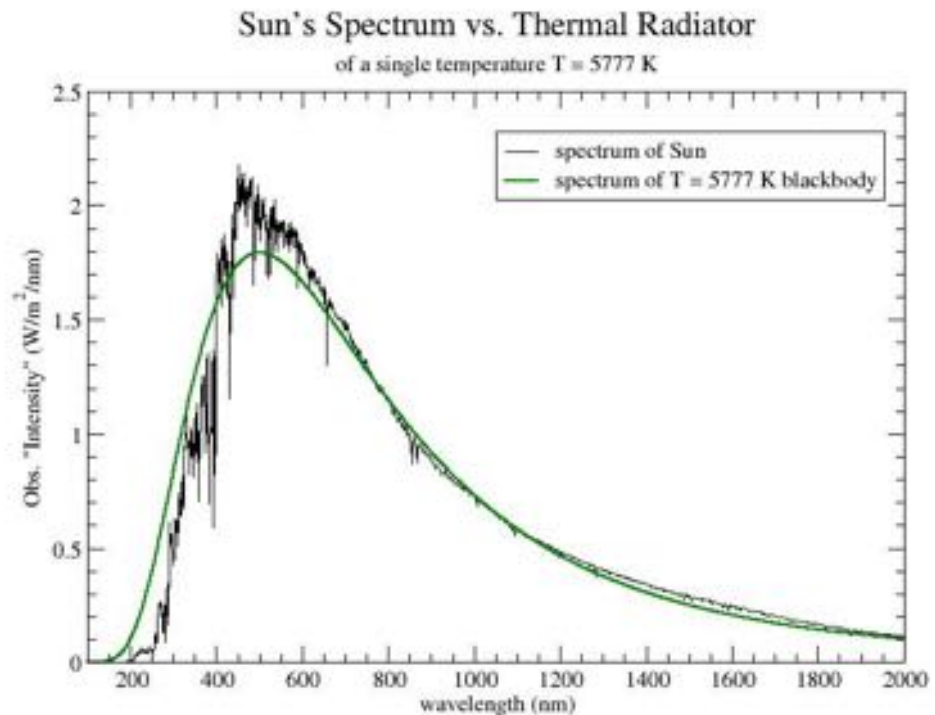
Corpo Nero



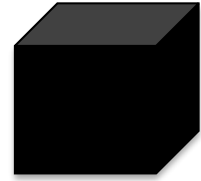
bilancio energetico + principio dell'equilibrio dettagliato* \rightarrow intensità per unità di lunghezza d'onda della radiazione all'interno della cavità dipende solo dalla temperatura T a cui essa si trova

* all'equilibrio, energia emessa = energia assorbita $\forall \lambda$

Sperimentalmente: forma dello spettro di un corpo nero dipende solo dalla sua temperatura $T \rightarrow$ tutti i corpi incandescenti, a una data T , emettono radiazione termica con una distribuzione in lunghezza d'onda λ che è ben approssimata da quella di un corpo nero ideale



Corpo Nero



Problema: interpretazione dei dati in termini della fisica del tempo
(termodinamica + elettromagnetismo)

✓ Wien

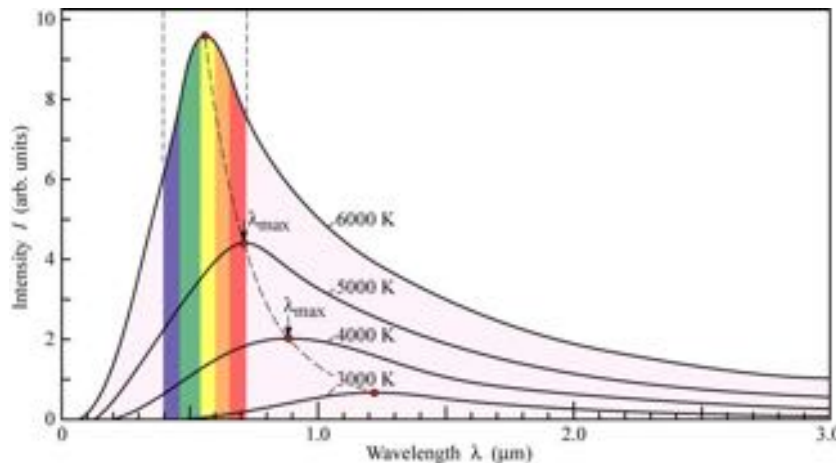
- potere emissivo*

$$\Psi_{\lambda} = \frac{1}{\lambda^5} F(\lambda T)$$

*potenza per unità di superficie emessa in $d\lambda$

- legge di spostamento

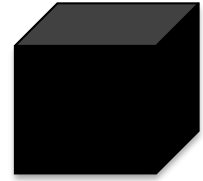
$$\lambda_{\max} T = \text{costante}$$



sperimentalmente:

$$\text{costante} = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Corpo Nero



✓ Stefan & Boltzmann

potenza emessa per unità di superficie (i.e., $\int_0^\infty d\lambda \Psi_\lambda$)

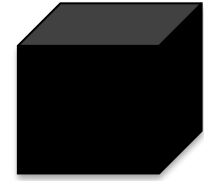
$$\Psi_{\text{tot}} = \sigma T^4$$

teoria (Boltzmann): $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$



rimane da determinare un quadro teorico in grado di predire la forma dello spettro, i.e., la forma della funzione $F(\lambda T)$

Spettro del Corpo Nero



Forma di $F(\lambda T)$?

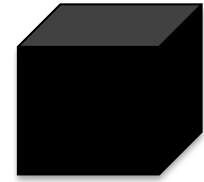
- Wien

somiglianza tra lo spettro di corpo nero e la distribuzione di velocità di Maxwell → emissione di radiazione legata (in che modo?) con l'agitazione termica → legge di radiazione:

$$F(\lambda T) = C e^{-C'/(\lambda T)}$$

- NB – no solido fondamento teorico;
- potere emissivo è ben riprodotto per λ piccola ma sottostimato per λ grande;
 - C e C' determinate soltanto per via sperimentale;

Spettro del Corpo Nero



- Rayleigh & Jeans

assorbimento/emissione in cavità solo tramite onde e.m. stazionarie;
associazione onda stazionaria – oscillatore armonico → energia in
intervallo infinitesimo di λ :

$$\frac{dE}{d\lambda} = N(\lambda) \langle \epsilon_\lambda \rangle$$

energia media della
oscillazione con
lunghezza d'onda λ

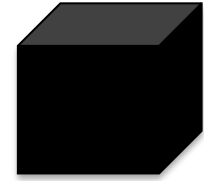
n. di modi di oscillazione di
lunghezza d'onda tra λ e $\lambda + d\lambda$

$N(\lambda)$

caso 1-D: condizione di stazionarietà su segmento lungo L

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Spettro del Corpo Nero



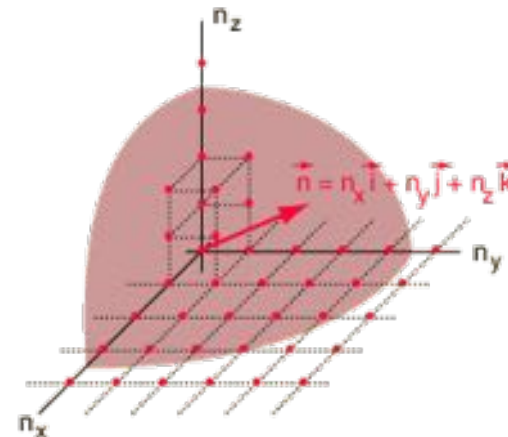
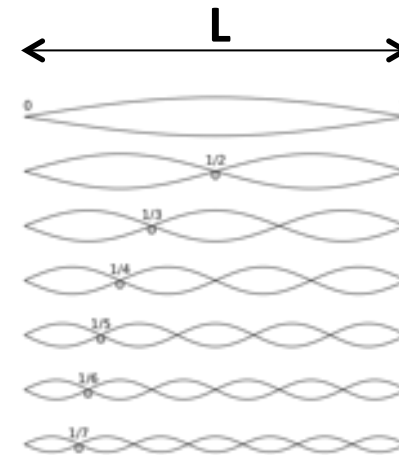
→ $n = \frac{2L}{\lambda}$

n. dei modi in intervallo infinitesimo $d\lambda$
(a meno del segno)

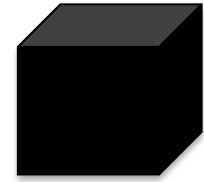
$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{2L}{\lambda^2}$$

caso 3-D: cubo di spigolo L

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2L}{\lambda}$$



Spettro del Corpo Nero



volume spazio dei modi: sfera di raggio n $V_n = \frac{4\pi}{3} n^3 = \frac{32\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda^3}$

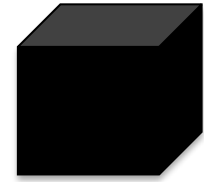
- radiazione e.m. \rightarrow 2 stati di polarizzazione
 - $n_x, n_y, n_z > 0 \rightarrow$ un solo ottante
- $$\longrightarrow \bar{V}_n = \frac{2V_n}{8} = \frac{8\pi}{3} \frac{L^3}{\lambda^3}$$

n. dei modi in intervallo infinitesimo $d\lambda$ (a meno del segno)

$$N(\lambda) = \frac{d\bar{V}_n}{d\lambda} = 8\pi \frac{L^3}{\lambda^4}$$

NB - per unità di volume: $n_\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}$

Spettro del Corpo Nero



$$\langle \epsilon_\lambda \rangle$$

1. **teorema di equipartizione** dell'energia: all'equilibrio, alla temperatura T , energia cinetica media di un oscillatore = $\frac{1}{2} k_B T$
2. **teorema del viriale:** $\langle E_{\text{kin.}} \rangle = \langle E_{\text{pot.}} \rangle$

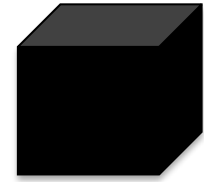


$$\langle \epsilon_\lambda \rangle = k_B T$$

Per cui:

$$\rho(\lambda, T) = \frac{1}{L^3} \frac{dE}{d\lambda} = n_\lambda \langle \epsilon_\lambda \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

Spettro del Corpo Nero



NB - Metodo alternativo per ricavare l'energia media dell'oscillatore
Meccanica Statistica (Gibbs): in un sistema in equilibrio termico a temperatura T , contenente un numero molto grande di **elementi uguali**, la probabilità di trovare un elemento con energia E è proporzionale a

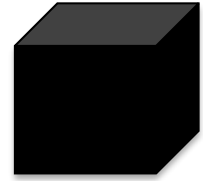
$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Normalizzazione della probabilità: $\int_0^\infty dE P(E) = 1$

$$\longrightarrow \int_0^\infty dE N e^{-E/(k_B T)} = 1 \quad \longrightarrow \quad N = \frac{1}{k_B T}$$

$$\text{i.e.} \quad P(E) = \frac{1}{k_B T} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

Spettro del Corpo Nero



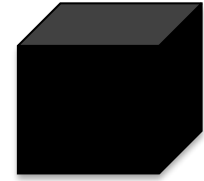
energia media di un oscillatore:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^\infty dE E P(E)}{\int_0^\infty dE P(E)} = \int_0^\infty dE \frac{E}{k_B T} e^{-E/(k_B T)}$$

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= k_B T \int_0^\infty dx x e^{-x} = -k_B T \int_0^\infty (d e^{-x}) x \\ &= -k_B T \left\{ x e^{-x} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty dx e^{-x} \right\} \end{aligned}$$

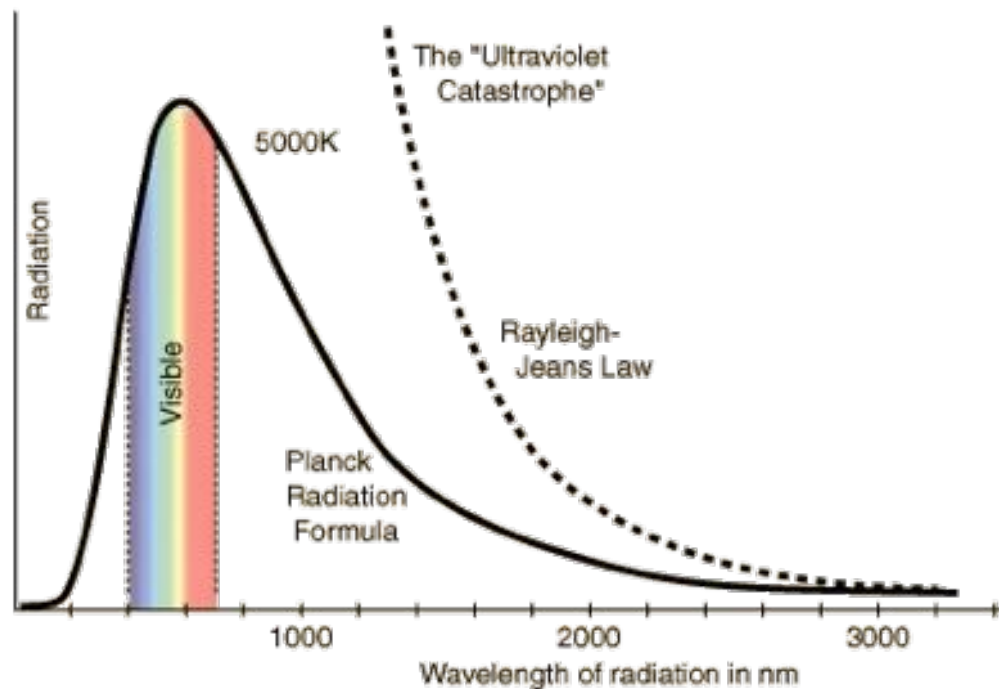
$$\text{i.e.} \quad \langle E \rangle = k_B T$$

Spettro del Corpo Nero

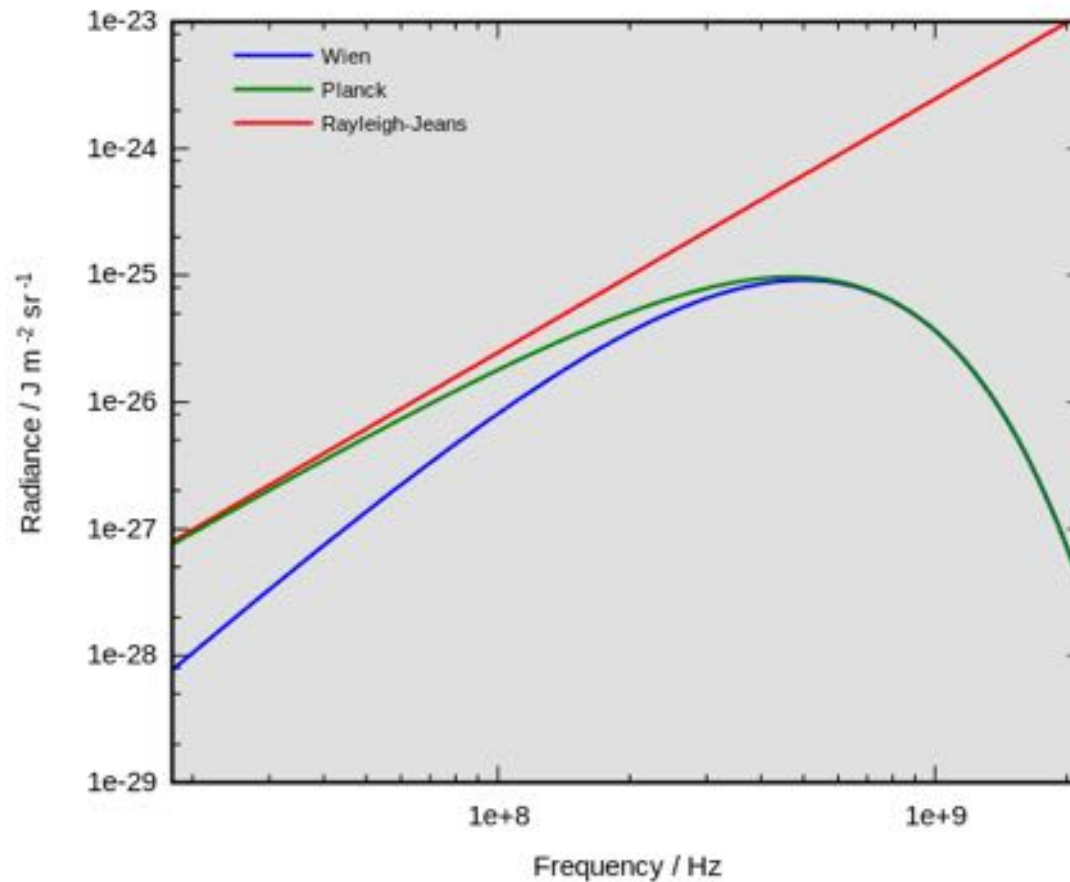
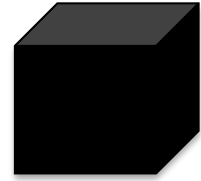


Sebbene teoricamente fondata, la formula Rayleigh-Jeans:

- è in accordo con i dati sperimentali solo per elevati valori di λ
- diverge nel limite valori $\lambda \rightarrow 0$ (catastrofe ultravioletta)



Spettro del Corpo Nero



NB – la curva verde è la distribuzione di **Planck** (*vedi avanti*), perfettamente in accordo con l'osservazione sperimentale

Planck

catastrofe ultravioletta può essere evitata “spegnendo” i modi di piccola lunghezza d’onda (alta frequenza) → i modi di vibrazione degli oscillatori non sono tutti ugualmente possibili.

Fisica Classica non fornisce alcun modo teoricamente fondato per realizzare questo filtro ad alta frequenza.

Planck: ogni oscillatore può scambiare energia in multipli interi di un “quanto” fondamentale, la cui taglia è

$$E = h\nu$$

costante di Planck

NB - $h = 6.62606957 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Planck

Perché questa idea funziona?

oscillatore di frequenza ν può scambiare energia con la radiazione di stessa frequenza soltanto in “pacchetti” di taglia

$$h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots, nh\nu, \dots$$

→ a frequenza elevata gli scambi energetici sono consistenti → impossibile in un corpo all'equilibrio: comporterebbe squilibrio energetico troppo forte

il corpo nero è come il nostro portafoglio: tutti gradiremmo che fosse (almeno) in equilibrio; se associamo i diversi tagli di banconote a oscillatori di frequenza diversa, è chiaro che lo scambio di banconote da 5 e 10 € è molto più comune, e meno destabilizzante, di quello di banconote da 500 €

Planck

NB – per **Planck** la quantizzazione valeva solo per la materia che emette e assorbe radiazione (i.e., le cariche elettriche oscillanti della parete della cavità), non per la radiazione stessa; pensava che la radiazione fosse come il burro, che può essere prodotto in quantità arbitrarie, ma viene comprato e venduto solo in multipli di 100 g. Fu **Einstein** che nel 1905 propose che l'energia della radiazione di frequenza ν fosse essa stessa un multiplo intero di $h\nu$, e usò tale idea per spiegare perché nell'effetto fotoelettrico nessun elettrone viene emesso se ν non supera un valore di soglia (**vedi avanti**).

Con l'ipotesi della quantizzazione, l'energia media di un oscillatore diviene (**cfr. slide 16**):

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-E_n/(k_B T)}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n/(k_B T)}} \quad E_n = n h \nu$$

Planck

Posto:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{1}{Z} \left(-\frac{dZ}{d\beta} \right) = -\frac{d}{d\beta} \ln Z$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n h \nu} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta h \nu})^n \longrightarrow Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta h \nu}}$$

$$\longrightarrow \langle E \rangle = \frac{h \nu}{e^{h \nu / (k_B T)} - 1}$$

- NB – differenza del caso classico: l'energia media dipende anche da ν
- è proprio questa dipendenza che cancella la divergenza in n_λ
 - **catastrofe ultravioletta** scompare

Planck

Quindi:

$$\rho(\lambda, T) = n_\lambda \langle E \rangle = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(k_B \lambda T)} - 1}$$

Limiti notevoli:

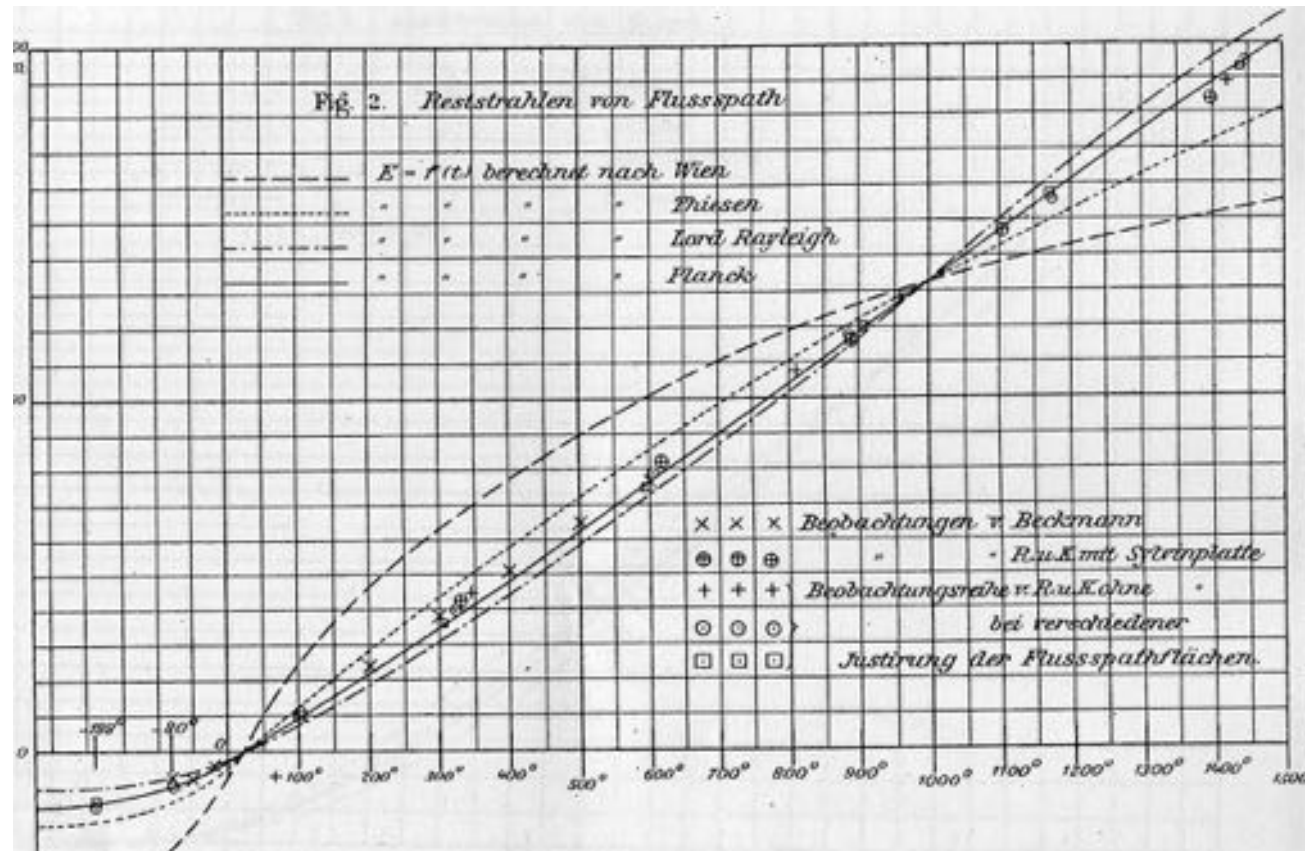
$$\text{➤ } \lambda \rightarrow 0 \quad \rho(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{hc/(k_B \lambda T)} - 1} = C e^{-C'/(\lambda T)}$$

Wien

$$\text{➤ } \lambda \rightarrow \infty \quad \rho(\lambda, T) \approx \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{hc/(k_B \lambda T)} = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

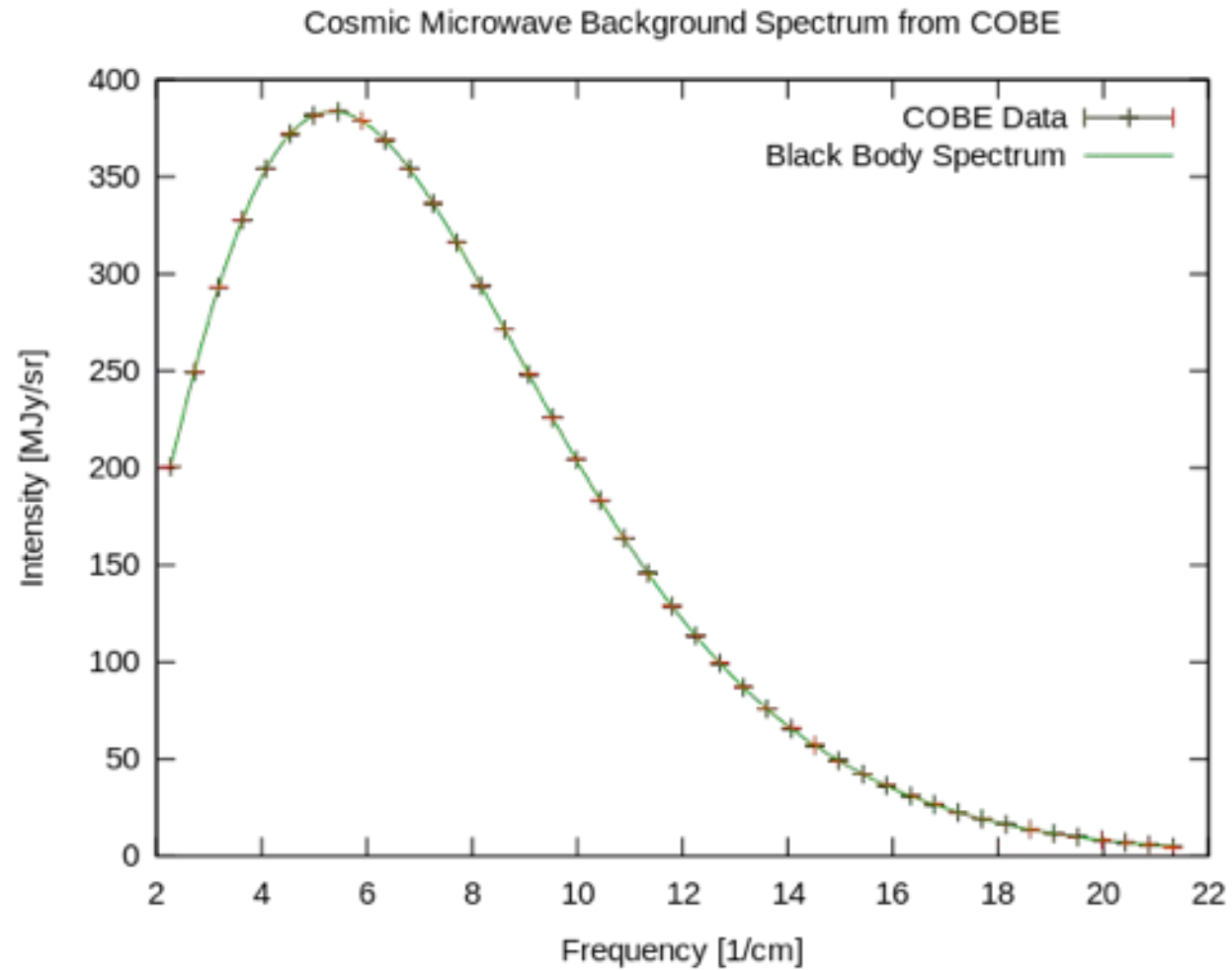
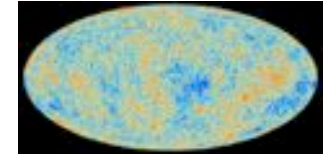
Rayleigh
Jeans

Planck



Misure sperimentali di [Ruben & Kayser](#)

Fondo Cosmico a Microonde



Meccanica Quantistica

**“ ho tentato per molti anni di *salvare la Fisica*
dai livelli energetici discreti ... ”**

[Max Planck]

- non c'è modo di spiegare lo spettro di corpo nero su base puramente classica;
- non tutte le quantità di energia possono essere scambiate...
(livelli di energia discreti, ovvero quantizzati);
- nascita della *teoria quantistica* → molti dei comportamenti inspiegabili in chiave classica risultano evidenti alla luce della quantizzazione

La misura della costante di Planck

Il nostro esperimento

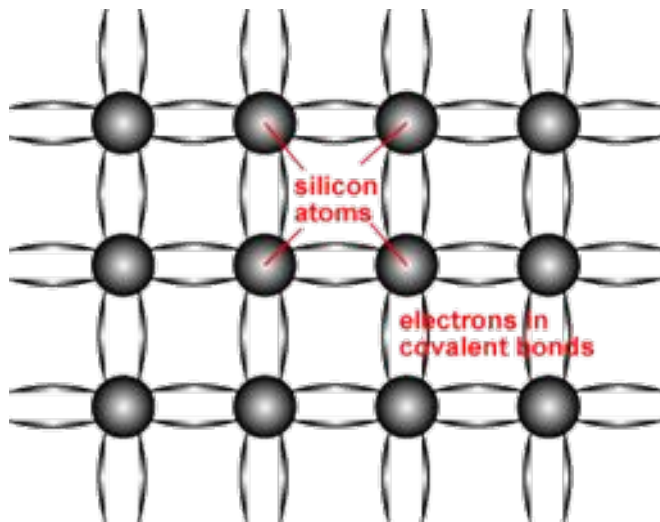
- Scopo della misura è dare una stima della costante di Planck
- Col nostro set-up sperimentale ci aspettiamo di poter misurare h con un' accuratezza del 10-20%



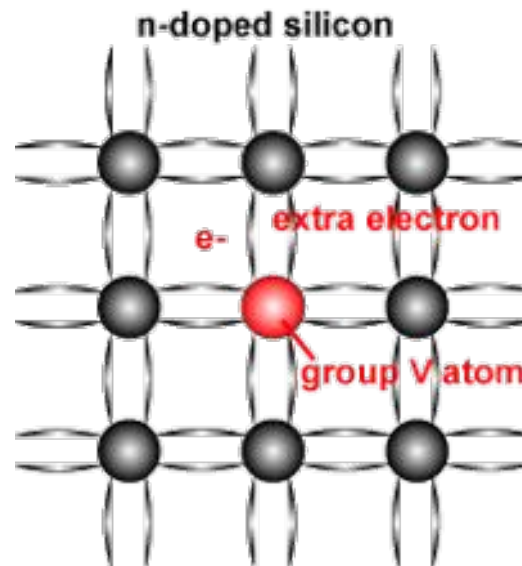
Il diodo (1/2)

Un diodo p-n è un tipo di **semiconduttore** a due terminali in grado di condurre la corrente in una sola direzione, basato sulla **giunzione** di un semiconduttore drogato tipo **p** e di uno drogato tipo **n**

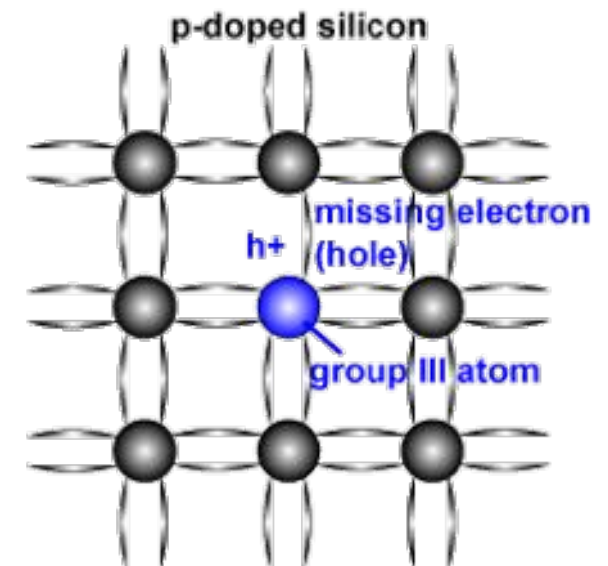
(Wikipedia)



Reticolo di Silicio



Semiconduttore
drogato tipo-n

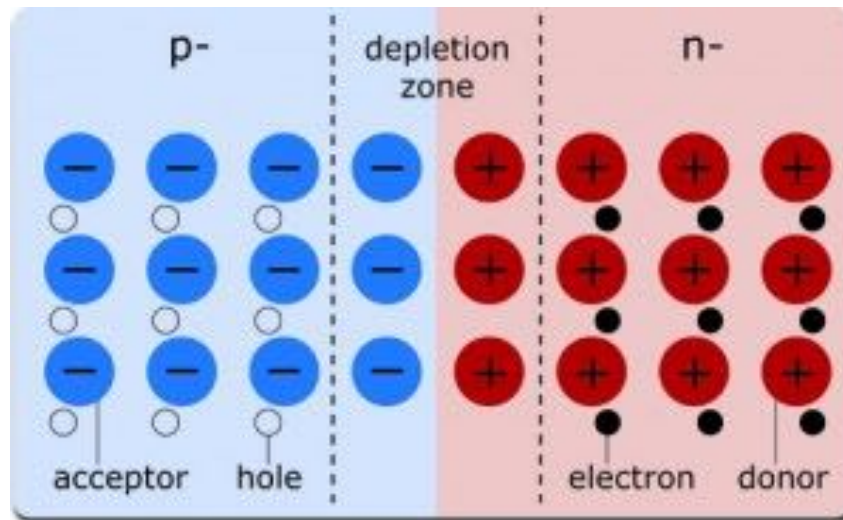


Semiconduttore
drogato tipo-p

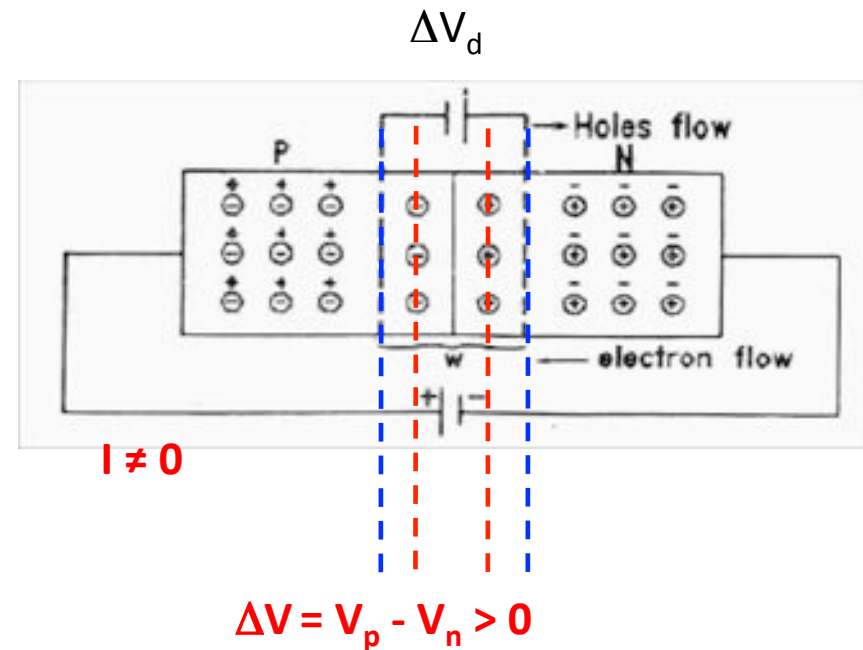
Il diodo (2/2)

Una “lacuna” si comporta esattamente come un elettrone di carica positiva:

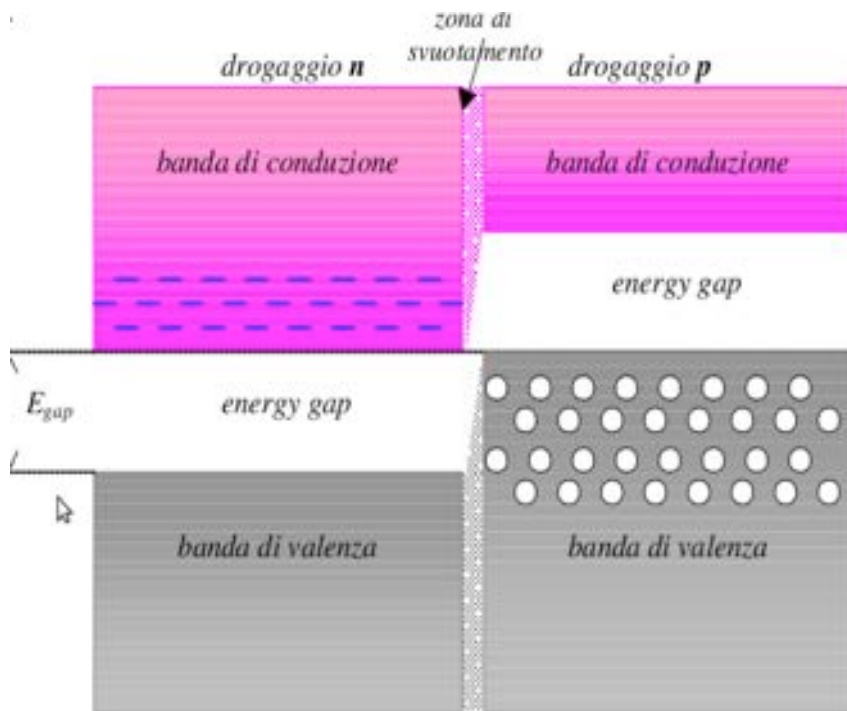
- Cariche negative sono disponibili nella zona tipo-n
- Cariche positive sono disponibili nella zona tipo-p



zona di svuotamento

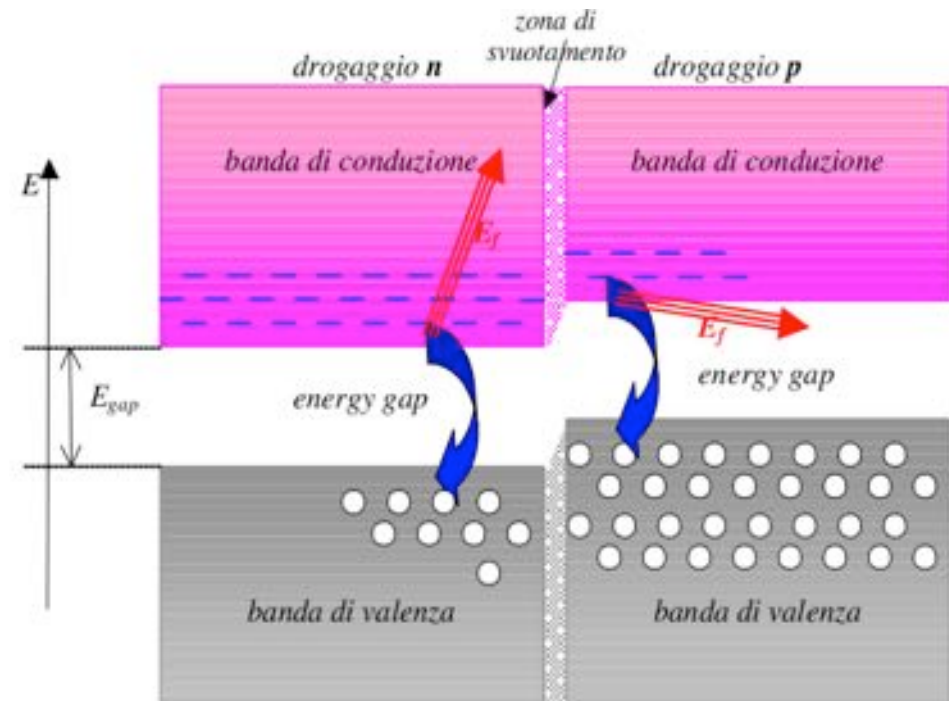
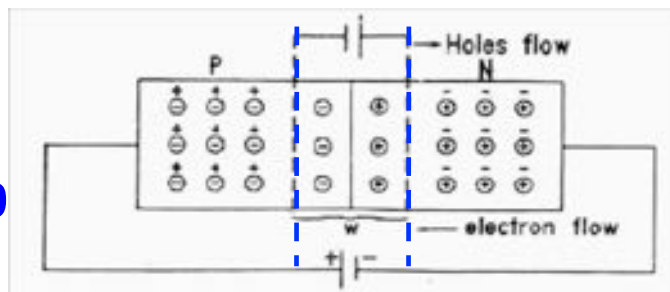


Il diodo LED (Light Emitting Diode)



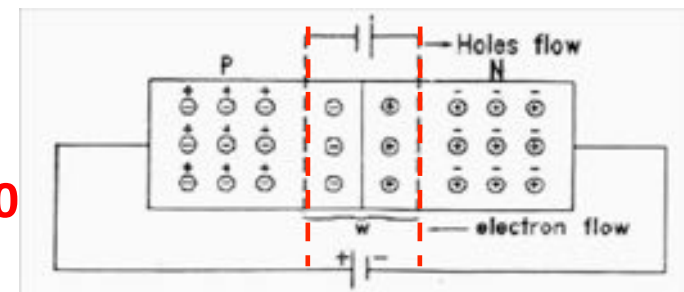
$$I = 0$$

$$\Delta V = 0$$



$$I \neq 0$$

$$\Delta V > 0$$



Misura di h con il diodo LED

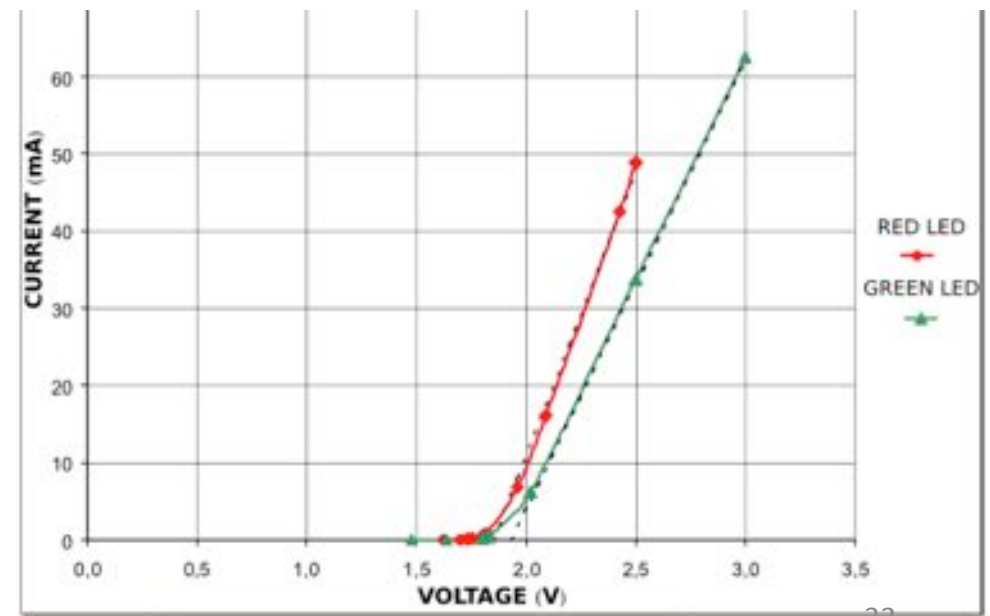
- Applicando una tensione abbastanza grande alla giunzione, il LED emette fotoni che hanno tutti la stessa frequenza, f (dipendente solo da E_{gap})
- Quando il LED comincia ad illuminarsi, l'energia E persa da ogni portatore di carica che attraversa la giunzione è convertita in energia di un singolo fotone
- L'energia delle cariche in queste condizioni è $E = eV_{\text{th}}$ con e carica elementare (1.602×10^{-19} C) e V_{th} potenziale di soglia per il LED
- L'energia del fotone emesso sarà, secondo la teoria di Planck, $E = hf$ (con h costante di Planck)

l'energia è conservata nel processo, quindi: $eV_{\text{th}} = hf$

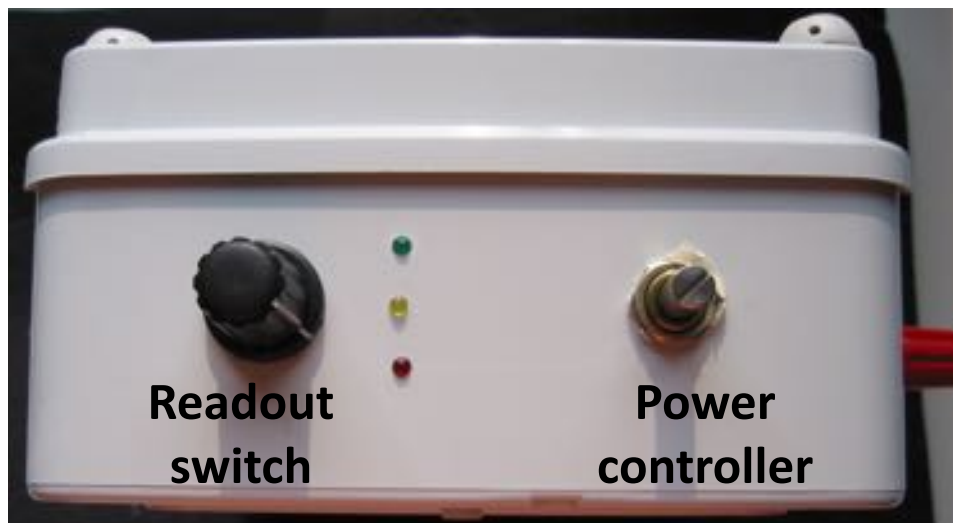
La misura: cosa fare...

Occorre determinare la tensione di soglia del LED, V_{th}

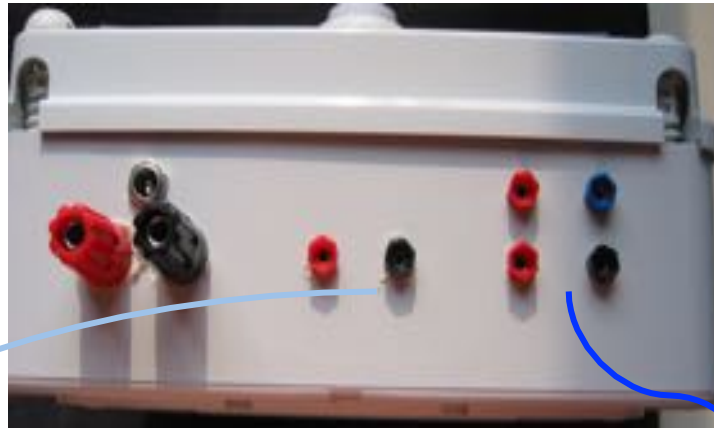
- 1) Variare la tensione di polarizzazione, annotando la corrispondente corrente che attraversa la giunzione
- 2) Costruire il grafico “ I vs V ”
- 3) Estrapolare il punto a $I = 0$ dal fit lineare dei punti in conduzione ohmica. Quel punto corrisponde alla V_{th}
- 4) Ricavare h dalla relazione $eV_{th} = hf$, noti e ed f



Set-up sperimentale



Attenzione! Gli strumenti



Amperometro

Voltmetro

