

Scatola di luce di Einstein

Al VI Meeting Solvay, tenuto a Bruxelles nel 1930, Einstein presentò un nuovo argomento, questa volta contro la relazione d'indeterminazione energia-tempo: $\Delta E \Delta t > \hbar$.

Immaginiamo una scatola a pareti perfettamente riflettenti, sospesa nel campo gravitazionale terrestre e all'interno della quale è intrappolata una certa quantità di luce che contribuisce al peso complessivo della scatola tramite la famosissima relazione $E = mc^2$. (Ad esempio, 10^6 fotoni di lunghezza d'onda nella parte visibile dello spettro danno un contributo di circa 10^{-30} kg, i.e., circa la massa dell'elettrone). La scatola è attaccata ad un dinamometro (cfr. Fig. 1) ed equipaggiata con una apertura azionata da un orologio. Ad un dato istante, noto con precisione arbitraria, dall'apertura emerge un singolo fotone. Noi possiamo misurare il peso della scatola con un'accuratezza arbitraria, e quindi determinare esattamente l'energia del fotone e, tramite, l'orologio stabilire precisamente l'istante della sua emissione. *Tutto ciò in evidente contrasto con la relazione d'indeterminazione energia-tempo.*

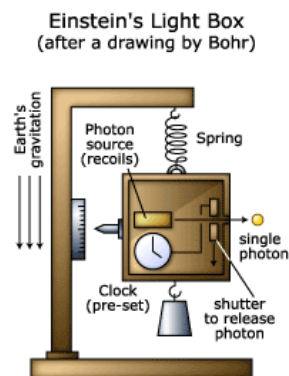


Figura 1: Gedanken-experiment proposto da Einstein nel 1930.

Quando Einstein illustrò questo argomento, Bohr non riuscì a trovare alcuna falla nel ragionamento. Per tutta la sera si aggirò nella sala dove si teneva la conferenza tentando di convincere i suoi colleghi che non poteva essere vero: se Einstein fosse stato nel giusto, sarebbe stata la fine della Fisica. Dopo una notte passata a ragionare su come controbattere, il panico di Bohr si dissolse quando si rese conto che l'orologio usato per determinare l'istante di emissione del fotone è, tramite il principio d'equivalenza, sensibile alla sua posizione nel campo gravitazionale terrestre.

Nell'apparato concepito da Einstein, la forza di gravità mg agente sulla scatola è controbilanciata da quella, diretta in verso contrario, kz esercitata dalla molla. Per misurare l'energia del fotone emesso aumentiamo la massa sospesa in modo da azzerare la lancetta: il peso da aggiungere eguaglia l'energia del fotone emesso. Questa procedura comporta una misura della posizione della scatola (allineamento della lancetta solidale alla scatola con lo zero della scala graduata posta sull'asta di sostegno). Poiché è valido il principio d'indeterminazione di Heisenberg (quello posizione-impulso), il meglio che possiamo fare per l'incertezza sull'impulso è:

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta z} \quad (1)$$

dove Δz è l'accuratezza con cui azzeriamo la lancetta. Questa incertezza nell'impulso implica che la scatola potrebbe avere un impulso pari a Δp , senza che ciò sia rivelato dall'osservatore. Un impulso diverso da zero sarebbe causato da un errore Δm nella massa che dobbiamo aggiungere alla scatola per riportare la lancetta sullo zero della scala graduata, che, a sua volta, si traduce in uno

sbilanciamento di forza

$$\Delta F = g \Delta m$$

nel campo gravitazionale terrestre. Questa forza agisce per la durata T della misura (il tempo che impiega la lancetta a ritornare sullo zero), per cui

$$\Delta p = T \Delta F = g T \Delta m ,$$

da cui, si ottiene:

$$\Delta m = \frac{\Delta p}{g T}$$

In base alla relazione massa-energia di Einstein, otteniamo un'incertezza per l'energia del fotone

$$\Delta E = \frac{c^2 \Delta p}{g T}$$

i.e., in base alla (1)

$$\Delta E = \frac{\hbar c^2}{g T \Delta z} \quad (2)$$

Uno dei risultati fondamentali della Relatività Generale è che il ritmo di un orologio dipende dalla sua posizione in un campo gravitazionale. Per cui, una incertezza nella conoscenza della posizione della scatola si riflette in una incertezza nella durata T della misura della posizione data da (cfr slides sulla RG):

$$\Delta T = T g \frac{\Delta z}{c^2}$$

da cui:

$$T = \frac{c^2 \Delta T}{g \Delta z}$$

che sostituita nella (2), fornisce:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta T}$$

i.e., la relazione d'incertezza energia-tempo.

In conclusione, Bohr vince anche il secondo round. Questa volta, però, il successo è ancora più eclatante: ha mostrato che nel suo argomentare Einstein ha trascurato la Relatività Generale!